VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN
VAN DEN
RIJKS-STUDIEDIENST VOOR DE LUCHTVAART AMSTERDAM

DEEL VI — 1931

'S-GRAVENHAGE — ALGEMEENE LANDSDRUKKERIJ — 1931

VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN
VAN DEN
RIJKS-STUDIEDIENST VOOR DE LUCHTVAART AMSTERDAM

DEEL VI — 1931

'S-GRAVENHAGE — ALGEMEENE LANDSDRUKKERIJ — 1931

INHOUD.

Bladz.

INLEIDING.

RAPPORT V. 284.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II 1

L'influence des nervures sur la résistance des ailes II.

The influence of the ribs on the strength of aeroplane-wings II.

Der Einfluss des Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln II.

RAPPORT A. 180.

Onderzoek van twee schroefmodellen met er achter geplaatste lichamen 5

Expériences sur deux modèles d'hélice avec nacelles.

Experiments with two models of airscrews with bodies placed behind them.

Untersuchung von zwei Luftschraubenmodellen mit dahinter liegenden Gondeln.

RAPPORT V. 285.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III 23

L'influence des nervures sur la résistance des ailes III.

The influence of the ribs on the strength of aeroplane-wings III.

Der Einfluss des Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln III.

RAPPORT V. 357.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels IV 35

L'influence des nervures sur la résistance des ailes IV.

The influence of the ribs on the strenght of aeroplane-wings IV.

Der Einfluss der Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln IV.

RAPPORT S. 48.

Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers 67

La résistance à la torsion et au cisaillement des poutres creuses à connexion multiple.

Twisting and bending by endload of multiplyconnected box-spars.

Torsion und Schub von mehrfach zusammenhängenden Kastenholmen.

RAPPORT A. 321.

Nomogrammen voor het bepalen van de wortels van vierde-graads-vergelijkingen 87

Nomogrammes pour la détermination des racines des équations du quatrième degré.

Nomograms for the determination of the roots of biquadratic equations.

Nomogramme zur Berechnung der Wurzeln von Gleichungen vierten Grades.

RAPPORT A. 329.

Modelproeven met verschillende windschermen aan het Fokker-verkeersvliegtuig type F. VIII 103

Essais de maquette de plusieurs pares-brise de l'avion de transport Fokker, type F. VIII.

Bladz.

Modeltests with different windscreens on the transport machine type F. VIII.

Modellversuche mit verschiedenen Windschutzformen am Fokker-Verkehrsflugzeug Typ F. VIII.

RAPPORT A. 340.

Metingen betreffende storingen in den luchtstroom bij de staartvlakken verricht aan een vliegtuig en aan het model daarvan 111

Essais d'air dans le voisinage des plans arrières d'un aéroplane.

Tests on the disturbances of the flow in the vicinity of the tailplanes of an aeroplane.

Messungen der Störungen im Luftstrom in der Nähe des Leitwerks eines Flugzeuges.

RAPPORT A. 351.

Onderzoek van een wijziging aan een model van een motorgondel 119

Expériences sur une modification d'un modèle de nacelle.

Experiments on a modification of a model of a nacelle.

Untersuchung einer Änderung an einem Modell einer Motorgondel.

RAPPORT A. 363.

De invloed van de overige deelen van het vliegtuig op de werking van de staartvlakken 127

L'influence de l'avion sur le fonctionnement de l'empennage.

The influence of the aeroplane on the action of the tail plane.

Der Einflusz des Flugzeuges auf die Wirkungsweise des Leitwerkes.

RAPPORT V. 358.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels I 139

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes I.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings I.

Der Einflusz der Rippenverbundwirkung der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln I.

RAPPORT V. 491.

Beschrijving van een baanhellingmeter 155

Description d'un instrument pour mesurer l'inclinaison de la trajectoire.

Description of an instrument measuring the inclination of the flight path.

Beschreibung eines Bahnneigungmessers.

RAPPORT M. 500.

Proeven ter bepaling van den toelaatbaren vlaktedruk in boutgaten 163

Détermination des pressions qui peuvent être admises dans les trous des attaches.

Experiments for the determination of the bearing-stress to be tolerated in bolt-holes.

Messungen zur Bestimmung des zulässigen Lochleibungsdruckes in Beschlaglöchern.

INLEIDING.

Hoewel sinds het verschijnen van Deel V dezer rapporten het personeel van den R.S.L. eenigszins uitgebreid werd, namen de werkzaamheden zoodanig toe, dat ook in het tijdsverloop sinds het verschijnen van het vorige deel slechts een gering deel van de resultaten van het werk van den R.S.L. gepubliceerd kon worden.

In de afgeloopen 2 jaren werden door den R.S.L. de hierna genoemde aantallen rapporten opgesteld en aan belanghebbenden meegedeeld:

Vliegtuigenafdeeling A en B	110
Aerodynamische-afdeeling	72
Materialenafdeeling	85
Motorenafdeeling	17

Dit Deel bevat de navolgende rapporten:

V. 284, A. 180,. V. 285, V. 357, S. 48, A. 321, A. 329, A. 340, A. 351, A. 363, V. 358, V. 491 en M. 500.

De rapporten V. 284, A. 180, V. 285, V. 357, S. 48 en A. 321 werden, dank zij de zeer gewaardeerde medewerking van de Redactie van dit blad, opgenomen in „De Ingenieur".

Dr. ir. E. B. WOLFF,

Directeur.

Amsterdam, 1 December 1931.

Uittreksel blz. 3
Résumé page 4
Zusammenfassung Seite 4
Summary page 4

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II

door

ir. C. KONING.

Rapport V 284. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

In het volgende wordt een eenvoudige afleiding besproken van de in Rapport V. 175 [1]) gegeven differentiaalvergelijkingen voor een ligger-rib-systeem zonder bekleeding. Hierbij wordt van den beginne uitgegaan van de in genoemd rapport achteraf ingevoerde aanname, dat de ribben oneindig stijf zijn tegen buiging, terwijl bovendien de liggerafstand over de geheele vleugelbreedte constant aangenomen wordt.

1. Inleiding.

In de vorige verhandeling over dit onderwerp [1]) werd als eerste deel van het vraagstuk: „bij de sterkteberekening van een vleugel de invloed van het ribverband en de bekleeding in rekening te brengen" het vereenvoudigde geval beschouwd, waarbij de invloed van de bekleeding verwaarloosd wordt en de vleugel dus, wat de sterkte aangaat, alleen bestaat uit de beide liggers, verbonden door een aantal ribben. Hierbij werd een stelsel van differentiaalvergelijkingen verkregen, waarin als onbekende functies de vormveranderingen van de liggers voorkomen (V. 175, punt 7). Deze vormveranderingen zijn gegeven als ordinaten van de elastische lijnen van de beide liggers (y_1, y_2) en verdraaiingen van de liggerdoorsneden (ϕ_1, ϕ_2), waarbij deze grootheden onderling onafhankelijk zijn. De vergelijkingen waren echter zoo ingewikkeld, dat hun oplossing practisch onmogelijk was, behalve in het zeer eenvoudige geval van een prismatischen vleugel met over de geheele vleugelbreedte constante stijfheidsfactoren, dat echter voor de practijk weinig rechtstreeksche beteekenis had. Een belangrijke vereenvoudiging werd verkregen door aan te nemen, dat de ribben oneindig stijf zijn tegen buiging, zoodat tusschen de grootheden y en ϕ een eenvoudige betrekking bestaat (V. 175, punt 8). Oplossing van deze nieuwe vergelijkingen bleek ook voor vleugels, zooals deze in de practijk voorkomen, met betrekkelijk eenvoudige hulpmiddelen mogelijk. De toelaatbaarheid van de hier ingevoerde aanname bij de gebruikelijke verhoudingen van de stijfheidsfactoren van liggers en ribben werd met een getallenvoorbeeld aangetoond (V. 175, punt 17).

Neemt men de oneindig groote stijfheid van de ribben niet, zooals vroeger geschiedde, in den loop van de berekening, doch reeds van te voren aan, dan kunnen, voor het in de practijk meest voorkomende geval, waarbij de afstand van de liggers constant is, de differentiaalvergelijkingen voor de liggers op veel eenvoudiger wijze verkregen worden. De wetenschappelijke waarde van deze afleiding is natuurlijk geringer dan die van de vroeger gegevene, waarbij bovendien een beter inzicht in de mechanische werking van het ribverband verkregen wordt. Zij kan echter, door haar grooteren eenvoud, waarde hebben als inleiding in gevallen, waar het practisch gebruik van de vergelijkingen voor berekening op den voorgrond staat.

2. Aannamen.

De aannamen, waarvan bij de berekening uitgegaan wordt, zijn dezelfde als die, welke in rapport V. 175 (punt 2) gegeven werden, echter aangevuld met de beide volgende:

de ribben zijn oneindig stijf tegen buiging;

de afstand b van de liggers is over de geheele vleugelbreedte constant.

De eerste van deze twee is een noodzakelijke voorwaarde voor de mogelijkheid van het toepassen van de hier te volgen methode. Voor de tweede is zulks niet het geval. Laat men haar echter weg, waartegen in beginsel geen bezwaar bestaat, dan wordt de afleiding van de vergelijkingen slechts weinig eenvoudiger dan met de vroeger gegeven methode, zoodat deze laatste hier de voorkeur verdient.

Van de overige aannamen zijn er twee, waaraan hier nog herinnerd dient te worden, namelijk die van de continu verdeelde ribben en die, volgens welke de ribben geen torsiestijfheid hebben. De eerste beteekent, dat de in werkelijkheid in eindig aantal voorkomende ribben vervangen worden door een oneindig aantal, waarbij zij echter onderling onafhankelijk blijven. De tweede aanname sluit in, dat de koppels, die optreden bij wringing van de ribben, verwaarloosd mogen worden.

3. Notaties.

Hoewel de te bezigen notaties grootendeels identiek zijn met de in rapport V. 175 gebruikte, lijkt het gewenscht, ter voorkoming van verwarring door eenige nieuw in te voeren grootheden, deze hier opnieuw te geven.

Zooals in fig. 1 aangegeven wordt, is x de afstand van een liggerdoorsnede tot aan het inklempunt, y de ordinaat van een punt van de elastische lijn, ϕ de verdraaiing van een vleugeldoorsnede ten opzichte van den oorspronkelijken stand. Door de aanname van oneindig stijve en continu verdeelde ribben is ϕ in ieder punt gelijk aan de verdraaiing van de bijbehoorende liggerdoorsneden, terwijl zij uitgedrukt kan worden in de ordinaten van de elastische lijnen door

$$\phi = -\frac{y_1 - y_2}{b}$$

[1]) BIEZENO C. B., KOCH J. J. en KONING C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R. S. L. Rapport V. 175. *De Ingenieur* 13 November 1926 = Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Deel IV, blz. 101—137; in verkorten vorm ook als:
BIEZENO C. B., KOCH J. J. und KONING C. Ueber die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1926. S. 97—105.

SCHEMA VAN HET GERAAMTE VAN EEN VLEUGEL; COÖRDINATEN.

1. voorligger; 2. achterligger. x y, z: coördinaten; ϕ: verdraaiing van den vleugel; l: liggerlengte; b: liggerafstand.

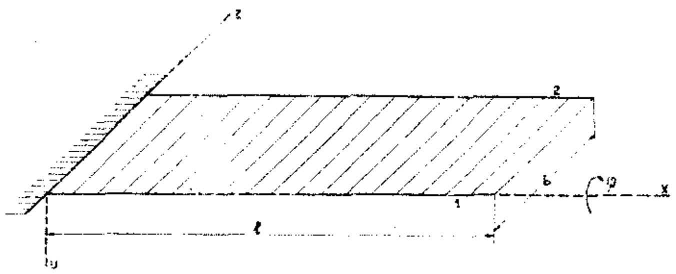


Fig. 1.

S_b en S_t zijn de stijfheidsfactoren van de liggers, resp. tegen buiging en wringing.

De uitwendige belastingen per lengte-eenheid worden met q aangegeven, D, M en T beteekenen resp. dwarskracht, buigend en wringend moment (zie verder punt 5 en 6).

De hoofdmaten van den vleugel zijn de liggerlengte l en de liggerafstand b.

De indices 1 en 2 beteekenen, dat de bedoelde grootheid betrekking heeft op den voor-, resp. achterligger; de indices u en e duiden aan, of de beschouwde krachten en momenten bepaald zijn door de uitwendige belasting dan wel afhankelijk zijn van de elastische vervormingen van den vleugel.

4. Methode.

Beschouwd wordt het deel van den vleugel, dat eenerzijds begrensd is door het vleugeluiteinde, anderzijds door een vlak op een afstand x van het inklempunt en loodrecht op de liggers („doorsnede x") (zie fig. 2a). De evenwichtsvoorwaarden van dit deel van den vleugel geven betrekkingen tusschen de hierop werkende uitwendige belastingen en de in de doorsnede x optredende elastische krachten en momenten. Worden deze laatsten uitgedrukt in de vormveranderingen van de liggers, dan worden vergelijkingen verkregen, waarin deze vormveranderingen en de uitwendige belastingen voorkomen. Na passende omvorming blijken deze vergelijkingen identiek te zijn aan de in rapport V. 175 (punt 8) verkregene.

5. De uitwendige belastingen.

De uitwendige krachten zijn in werkelijkheid continu verdeeld over het vleugelvlak. Voor het hier te beschouwen evenwicht mogen zij echter vervangen worden door een statisch gelijkwaardig stelsel van krachten. Dit kan op twee verschillende wijzen geschieden:

a. door de continu verdeelde belastingen q_1 en q_2 op den voor-, resp. achterligger, waarbij deze zoo gekozen worden, dat de aequivalentie in ieder oneindig smal strookje loodrecht op de liggerrichting bestaat (fig. 2a);

b. door een in een nader te bepalen punt aangrijpende drukkracht en een koppel (fig. 2b).

De eerste is die, waarop in de practijk de belasting van een vleugel meestal aangegeven wordt, de tweede is hier echter de eenvoudigste voor het gebruik in de evenwichtsvoorwaarden. Door de aanname, dat alle belastingen loodrecht op het vleugelvlak werken (V. 175, punt 2), staat ook de resulteerende kracht loodrecht op; en is de as van het koppel evenwijdig aan dit vlak. Het stelsel is dus bepaald door 3 componenten. Als punt, waar de kracht aangrijpt, wordt het punt x van den voorligger genomen. De drie componenten, in fig. 2b aangegeven in den zin, die overeenkomt met een positieve waarde, zijn dan de dwarskracht D_u, het buigend moment M_u en het wringend moment T_u. Tusschen de beide boven onder

KRACHTENSTELSELS, DIE STATISCH GELIJKWAARDIG ZIJN MET DE BUITEN DE DOORSNEDE X WERKENDE UITWENDIGE BELASTINGEN.

a. continu verdeelde belastingen op de liggers; b. in één punt aangrijpende krachten en koppels.

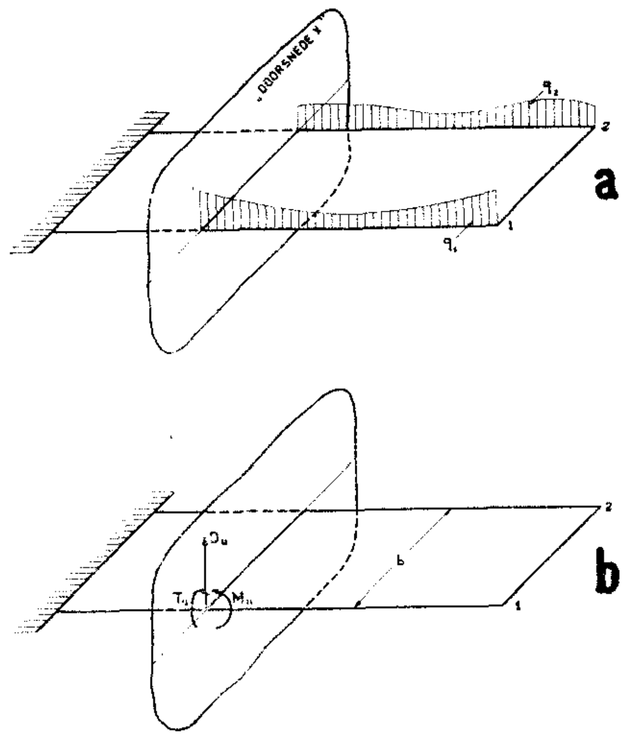


Fig. 2.

a en b aangegeven krachtenstelsels bestaan nu de gemakkelijk af te leiden betrekkingen:

$$D_u = -\int_x^l (q_1 + q_2)\, d\xi$$

$$M_u = -\int_x^l (q_1 + q_2)(\xi - x)\, d\xi$$

$$T_u = +\int_u^l q_2\, b\, d\xi$$

Door differentieeren naar x kunnen deze vereenvoudigd worden tot:

$$\left.\begin{aligned} D_u' &= q_1 + q_2 \\ M_u'' &= -(q_1 + q_2) \\ T_u' &= -q_2\, b \end{aligned}\right\} 1$$

Deze uitkomsten kunnen ook verkregen worden door de doorsnede x van x naar $x + dx$ te verplaatsen en na te gaan, hoe hierbij de beschouwde grootheden veranderen.

6. De evenwichtsvoorwaarden.

De in de doorsnede x werkende elastische krachten en momenten zijn: de dwarskrachten D_{1e} en D_{2e}, de buigende momenten M_{1e} en M_{2e}, de wringende momenten T_{1e} en T_{2e}. Zij zijn in fig. 3 aangegeven, waarbij de pijlrichting den zin aangeeft, waarin zij voor het beschouwde deel van den vleugel als positief aangenomen zullen worden. Zij moeten voor dit deel van den vleugel evenwicht maken met de uitwendige krachten; de evenwichtsvoorwaarden zijn dus:

$$\left.\begin{aligned} D_u &= D_{1e} + D_{2e} \\ M_u &= M_{1e} + M_{2e} \\ T_u &= T_{1e} + T_{2e} - D_{2e}\, b \end{aligned}\right\} 2$$

DE ELASTISCHE KRACHTEN EN MOMENTEN IN DE DOORSNEDE X.

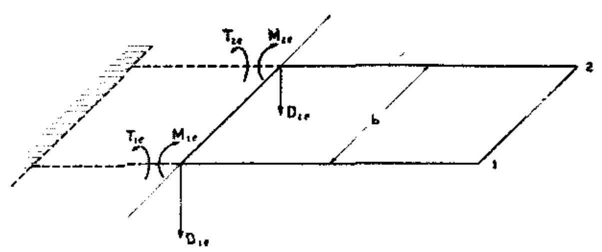


Fig. 3.

7. De betrekkingen tusschen de vervormingen en de elastische krachten en momenten.

Tusschen de elastische vervormingen van de liggers en de krachten en momenten, die hiermede samenhangen, bestaan de bekende betrekkingen:

$$\left.\begin{array}{ll} M_{1e} = - S_{1b}\, y_1''. & M_{2e} = - S_{2b}\, y_2'' \\ D_{1e} = + (S_{1b}\, y_1'')' & D_{2e} = + (S_{2b}\, y_2'')' \\ T_{1e} = + S_{1t}\, \phi' & T_{2e} = + S_{2t}\, \phi' \end{array}\right\} 3$$

Dat deze voor een afzonderlijken balk geldige uitkomsten ook hier gebruikt mogen worden, kan men het beste inzien door te bedenken, dat de ligger ook los van het geheele stelsel beschouwd mag worden, mits men om dezelfde vormveranderingen te krijgen, behalve de oorspronkelijke uitwendige belasting q, nog een verdere continu verdeelde belasting en, eveneens continu verdeelde, wringende koppels aanbrengt, die overeenkomen met de door de ribben overgedragen krachten en momenten. In het meest algemeene geval zouden ook buigende momenten op de liggers werken, die het gevolg zijn van wringing van de ribben. Daar echter de torsiestijfheid van de ribben te verwaarloozen is (zie punt 2), kunnen deze momenten hier buiten beschouwing gelaten worden.

8. De differentiaalvergelijkingen voor de liggers.

Voert men de boven als 1 en 3 gegeven uitdrukkingen, na de evenwichtsvoorwaarden 2 naar x gedifferentieerd te hebben, in deze in, dan blijkt, dat de eerste en tweede leiden tot eenzelfde vergelijking. Dit is niet te verwonderen, daar zoowel voor de uitwendige belastingen als voor de elastische krachten eenzelfde betrekking tusschen dwarskracht D en buigend moment M bestaat.

De beide overblijvende vergelijkingen zijn dan:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 + q_2 = (S_{1b}\, y_1'')'' + (S_{2b}\, y_2'')'' \\ q_2 b = (S_{1t}\, \phi')' + (S_{2t}\, \phi')' - b\,(S_{2b}\, y_2'')'' \end{array}\right\} 4a,$$

die na invoering van

$$\phi = -\frac{y_1 - y_2}{b}$$

en eenige omvorming overgaan in de uit rapport V. 175 bekende (V. 175, vergelijkingen II, punt 8) voor constante waarde van b

$$\left.\begin{array}{l} (S_{1b} y_1'')'' = q_1 + \dfrac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}(y_1 - y_2)'' + \dfrac{(S_{1t} + S_{2t})'}{b^2}(y_1 - y_2)' \\ (S_{2b} y_2'')'' = q_2 - \dfrac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}(y_1 - y_2)'' - \dfrac{(S_{1t} + S_{2t})'}{b^2}(y_1 - y_2)' \end{array}\right\} 4b$$

9. De randvoorwaarden.

De vroeger gegeven randvoorwaarden (V. 175, punt 11) blijven natuurlijk onveranderd; die voor de liggeruiteinden kunnen ook op eenvoudige wijze verkregen worden met behulp van het bovenstaande. Laat men namelijk de doorsnede x samenvallen met het vleugeluiteinde, dus $x = l$, dan worden alle uitwendige krachten en momenten nul. De elastische krachten moeten dus een evenwichtsstelsel vormen, de evenwichtsvoorwaarden 2 worden nu:

$$D_{1e} + D_{2e} = 0$$
$$M_{1e} + M_{2e} = 0$$
$$T_{1e} + T_{2e} - D_{2e}\, b = 0$$

Daar, volgens de in punt 2 gegeven aanname, de torsiestijfheid van de ribben nul is, zullen, zooals ook reeds in punt 7 opgemerkt werd, deze geen momenten overdragen, die als buigende momenten op de liggers werken, zoodat de tweede van bovenstaande voor het punt $x = l$ geldende vergelijkingen uiteenvalt in:

$$M_{1e} = 0 \text{ en } M_{2e} = 0$$

hetgeen, na invoering van de elastische vervormingen, overgaat in de randvoorwaarden

$$x = l \qquad S_{1b}\, y_1'' = 0 \quad S_2 \quad y_2'' = 0.$$

Wordt $D_{1e} = X$ gesteld, dan volgt uit de eerst een derde der boven gegeven voorwaarden:

$$D_{2e} = - X$$
$$Xb + T_{1e} + T_{2c} = 0$$

Worden D_{1e}, D_{2e}, T_{1e} en T_{2e} uitgedrukt in de elastische vervormingen en de hierin voorkomende grootheid ϕ in de ordinaten van de elastische lijnen, dan wordt verkregen:

$$x = l \qquad (S_{1b}\, y_1'')' = X \qquad (S_{2b}\, y_2'')' = - X$$

$$X b - \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b}(y_1 - y_2)' = 0,$$

dus identiek met de in V. 175 gegeven randvoorwaarden, wanneer hierin b = constant overgenomen wordt (Vergelijking VI, punt 11).

(Afgesloten September 1928.)

RAPPORT V 284.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II.

Uittreksel.

a. Omvang van het hier behandelde deel (punt 1).

De in rapport V.175 [2]) gegeven differentiaalvergelijkingen voor de liggers van een vleugel zonder bekleeding worden op eenvoudiger wijze afgeleid. Deze vereenvoudiging wordt verkregen door het van den beginne af invoeren van de beide in punt b genoemde aannamen.

b. Aannamen (punt 2).

Bij de afleiding der vergelijkingen wordt aangenomen, dat
de ribben oneindig stijf zijn tegen buiging,
de liggerafstand over de geheele vleugelbreedte constant is.

In rapport V.175 werd de eerstgenoemde aanname, waarvan de toelaatbaarheid daar met een getallenvoorbeeld aangetoond werd, eerst ingevoerd nadat de algemeene vergelijkingen verkregen waren.

De overige aannamen zijn geheel dezelfde als in rapport V.175; hiervan dienen nog genoemd te worden:
de in oneindig groot aantal aanwezige ribben zijn continu verdeeld;
de torsiestijfheid van de ribben is nul.

c. Afleiding van de vergelijkingen. (punt 4 t/m 8).

Het evenwicht van het deel van den vleugel tusschen de „doorsnede x" (fig. 2a) en het vleugeluiteinde wordt beschouwd. In de evenwichtsvoorwaarden (punt 6, 2) komen eenerzijds de door de uitwendige belastingen veroorzaakte krachten en momenten (aangegeven door indices u) (fig. 2b) anderzijds in de doorsnede x werkende elastische (indices e) (fig. 3) voor. Eerstgenoemden kunnen uitgedrukt worden in de uitwendige belastingen (punt 5, 1), laatstgenoemden in de elastische vervormingen (punt 7, 3). Invoering van deze uitkomsten in de evenwichtsvoorwaarden geeft de differentiaalvergelijkingen voor de liggers (punt 8, 4b).

d. Randvoorwaarden. (punt 9).

De randvoorwaarden voor het vleugeluiteinden kunnen met behulp van dezelfde methode op eenvoudige wijze afgeleid worden.

[2]) Zie noot [1]) van het rapport.

RAPPORT V 284.

L'influence des nervures sur la résistance des ailes II.

Résumé.

a. Etendue de la partie traitée ici (article 1).

Les équations différentielles données dans le rapport V 175 [3]) pour les longerons d'une aile sans recouvrement sont déduites d'une façon plus simple. Cette simplification est obtenue par l'introduction dès le commencement des deux suppositions données dans l'article b.

b. Suppositions (article 2).

Pour la déduction des équations on a supposé que

les nervures sont infiniment rigides,

la distance entre les longerons est constante sur toute l'envergure.

Dans le rapport V 175 la première supposition, dont l'admissibilité est démontrée avec un exemple numérique, n'était introduite qu'après l'obtention des équations générales.

Les autres suppositions sont entièrement les mêmes que celles données dans le rapport V 175. On doit en citer les suivantes:

les nervures, dont le nombre est infini, sont divisées continues,

la rigidité de torsion des nervures est nulle.

c. Dérivation des équations (articles 4 jusqu'à 8 inclusivement).

L'équilibre de la partie de l'aile entre la „coupe x" (fig. 2a: „doorsnede x") et le bout de l'aile est considéré. Dans les conditions d'équilibre (article 6, 2) entrent à l'un côté les forces et les moments causés par les charges extérieures (indiquées par les indices *u*) (fig. 2b), à l'autre côté les forces et moments élastiques agissantes dans la coupe x (indices *e*) (fig. 3). Les premiers nommés peuvent être exprimés dans les charges extérieures (article 5, 1) les derniers nommés dans les déformations élastiques (article 7, 3). Introduction de ces résultats dans les conditions d'équilibre donne les équations différentielles pour les longerons (article 8, 4 b).

d. Conditions de limite. (article 9).

Les conditions de limite pour le bout de l'aile peuvent être dérivées d'une manière simple avec la même méthode.

BERICHT V 284.

Der Einfluss der Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln II.

Zusammenfassung.

a. Umfang des hier behandelten Teiles (Punkt 1).

Die in dem Bericht V 175 [4]) gegebenen Differentialgleichungen für die Holme eines Flügels ohne Beplankung werden in mehr einfache Weise abgeleitet. Deise Vereinfachung wird erhalten durch vom Anfang an einführen der zwei in Punkt b genannten Annahmen.

b. Annahmen. (Punkt 2).

Bei der Ableitung der Gleichungen wird angenommen, dasz

die Rippen unendlich steif sind gegen Biegung,

der Holmabstand über der ganzen Flügelbreite konstant ist.

Im Bericht V 175 wurde die erstgenannte Annahme, deren Zulässigkeit dort mit einem Zahlenbeispiel nachgewiesen wurde, erst eingeführt nachdem die allgemeinen Gleichungen erhalten waren.

Die übrigen Annahmen sind genau dieselben wie im Bericht V 175. Von diesen sollen hier genannt werden:

die Rippen, deren Anzahl unendich grosz ist, sind gleichmäszig verteilt,

die Torsionssteifigkeit der Rippen wird vernachlässigt.

c. Ableitung der Gleichungen (Punkte 4 bis 8).

Das Gleichgewicht des Fliegelteiles zwischen den „Querschnitt x" (Abb. 2a: „Doorsnede x") und die Flügelspitze wird betrachtet. In den Gleichgewichtsbedingungen (Punkt 6, 2) kommen einerseits die durch den äuszeren Lasten verursachten Kräfte und Momente (angegeben durch Indices *u*) (Abb. 2*b*), andererseits die im Querschnitt x wirkende elastische (Indices *e*) (Abb. 3) vor. Erstgenannten können ausgedrückt werden in den äuszeren Lasten (Punkt 5, 1), letztgenannten in den elastischen Formänderungen (Punkt 7, 3). Einführung dieser Ergebnisse in den Gleichgewichtsbedingungen gibt die Differentialgleichungen für die Holme. (Punkt 8, 4b).

d. Randbedingungen (Punkt 9).

Die Randbedingungen für die Flügelspitze können mit Hilfe derselben Methode auf einfacher Weise abgeleitet werden.

REPORT V 284.

The influence of the ribs on the strength of aeroplane wings II.

Summary.

a. Extent of the part treated here. (point 1).

The differential equations given in Report V 175 [5]) for the spars of a wing without covering are deduced by a simpler method. This simplification has been obtained by introducing both assumptions given in point b from the beginning.

b. Assumptions (point 2).

In deducing the equations it is assumed, that

the ribs are infinitely rigid against bending,

the distance of the spars is constant along the span.

In report V 175 the first assumption, of which the admissibility was shown by a numerical example, was only introduced after obtaining the general equations.

The other assumptions are quite the same as in report V 175: of these must be named:

the number of ribs is infinite, their distribution is continuous,

the stiffness against torsion of the ribs is zero.

c. Deduction of the Equations (point 4—8).

The equilibrium of the part of the wing between the „section x" (fig. 2a: „doorsnede x") and the wing tip is considered.

In the conditions of equilibrium (point 6, 2) enter at one side the forces and moments caused by the exterior loads (indicated by the indices *u*) (fig. 2*b*), at the other side the elastic forces and moments acting in section x (indices *e*) (fig. 3). The first may be expressed in the exterior loads (point 5, 1), the latter in the elastic deformations (point 7, 3). Introduction of these results in the conditions of equilibrium gives the differential equations for the spars (point 8, 4b).

d. End conditions (point 9).

The end conditions for the wing tip may be derived with the aid of the same method.

[3]) Voir note [1]) du rapport.

[4]) s. Fusznote [1]) des Berichtes.

[5]) See footnote [1]) of the report.

Rapport A. 180.

Onderzoek van twee schroefmodellen met er achter geplaatste lichamen

door

ir. C. KONING.

Rapport A. 180: Expériences sur deux modèles d'hélice avec nacelles.

Report A. 180: Experiments with two models of airscrews with bodies placed behind them.

Bericht A. 180: Untersuchung von zwei Luftschraubenmodellen mit dahinter liegenden Gondeln.

RAPPORT A 180.

Onderzoek van twee schroefmodellen met er achter geplaatste lichamen.

Uittreksel.

a. Doel en omvang van het onderzoek (*punt* 1 *en* 2).

Het onderzoek had ten doel door eenvoudige metingen eenige gegevens te verkrijgen over de werking van de combinatie schroef-motorgondel, zooals deze aan meermotorige vliegtuigen gebruikt wordt en over de factoren, die hierbij van beteekenis zijn.

Gemeten werden de door het samenstel schroef-motorgondel geleverde trekkracht, het door de schroef opgenomen moment en de weerstand van de motorgondel zonder schroef.

b. Modellen (*punt* 3).

De beide schroefmodellen hadden denzelfden vorm als de metalen Reed-schroeven. De belangrijkste gegevens zijn verzameld in Tabel *II* en *III*.

De drie modellen van de motorgondels zijn afgebeeld in fig. 1, het motormodel was een model schaal 1 : 12 van den Bristol-Jupiter-motor.

c. Meetmethode (*punt* 4).

De inrichting, die bij de metingen gebruikt werd, is afgebeeld in fig. 2. Hierbij was een kleine snelloopende electromotor (type Betz) M in kogellagers K draaibaar in bus B aangebracht. De motorgondel was vast aan deze bus bevestigd. Trekkracht en moment werden met de balansen B_1 en B_2 gemeten.

d. Uitwerking van de gegevens (*punt* 5).

Uit de gemeten waarden van de trekkracht *T* en het moment *M* werden de trekcoëfficiënt c_T, de momentencoëfficiënt c_M en het nuttig-effect η berekend (formules (1), (2) en (3)). *T* is de trekkracht, die door het samenstel schroef-motorgondel geleverd wordt, η het bijbehoorende nuttig-effect („nettocoëfficiënten").

De weerstand van de motorgondels zonder schroef werd uitgedrukt in weerstandscoëfficiënten c_w (formule (4)) en $c_w{}'$ (formule (5)). Bij de coëfficiënten c_w geven de indices aan voor het grootspant van welke motorgondel de coëfficiënt berekend is, bij de coëfficiënten $c_w{}'$ geven zij het nummer van de bijbehoorende schroef.

Door bij de boven aangegeven „netto-trekkracht" *T* de weerstand van de motorgondel op te tellen, werd de „bruto-trekkracht" *T'* verkregen (formule (6)), waaruit de bijbehoorende coëfficiënt $c_T{}'$ (formule (7)) en het nuttig-effect η' (formule (8)) berekend werden („bruto-coëfficiënten").

Met behulp van uitkomsten uit Engelsche metingen (literatuur zie noot 2) werd uit de met motorgondel n°. 3 verkregen resultaten een schatting gemaakt over het nuttig-effect van de afzonderlijke schroeven η''. Formule (9) geeft de hierbij noodige verhouding tusschen weerstand van de motorgondel met en zonder slipstroominvloed. Voor de hierin voorkomende coëfficiënten a_1 en a_2 werden twee, aan bovengenoemde metingen ontleende, stellen waarden aangenomen (zie punt 6*b*), zoodat voor ieder geval twee waarden voor η'' verkregen werden.

e. Uitkomsten (*punt* 6).

De coëfficiënten voor de verschillende combinaties van schroef en motorgondel zijn in Tabel IV t/m X gegeven, die voor de motorgondels zonder schroef in Tabel XI t/m XIII.

De netto-coëfficiënten c_T, c_M en η zijn in de fig. 3 t/m 5, de bruto-coëfficiënten $c_T{}'$ en η' en het nuttig-effect van de afzonderlijke schroeven η'' in de fig. 6 en 7 uitgezet als functie van V/nD. Hierbij zijn de beide schroeven onderscheiden door den aard van de lijn, de motorgondels door den vorm van de punten (zie toelichting bij fig. 3).

In Tabel XIV t/m XVI zijn de verschillen tusschen de grootheden η gegeven. Het verschil (η'—η) is bepaald door den weerstand van de motorgondel (zonder slipstroominvloed), het verschil (η''—η') door den wederzijdschen invloed van schroef en motorgondel, dus door de beïnvloeding van de schroef door de motorgondel en slipstroominvloed op deze laatste.

f. Conclusies.

Hiervoor kan verwezen worden naar punt 8 van het rapport.

RAPPORT A 180.

Expériences sur deux modèles d'hélice avec nacelles.

Résumé.

a. But et ampleur des expériences (*points* 1 *et* 2).

Les expériences avaient pour but d'acquérir quelques données sur le fonctionnement de la nacelle en combinaison avec son hélice pour des nacelles comme sont en usage dans les avions multi-moteur et sur les facteurs qu'il importe de considérer à ce sujet.

On a mesuré le traction de l'ensemble formé par la nacelle à moteur et l'hélice, le moment du couple moteur et la résistance de la nacelle sans hélice.

b. Modèles (*point* 3).

Les deux modèles d'hélice avaient la même forme que les hélices métalliques Reed. Dans les tableaux II et III l'angle („bladhoek"), la largeur („bladbreedte") et l'épaisseur („bladdikte") des pales sont indiqués à différentes distances le long du rayon („afstand van het hart van de schroef"). Toutes les mesures sont données en % du diamètre („middellijn").

Les trois modèles de nacelle sont illustrés dans la fig. 1. Le modèle du moteur était un modèle à l'échelle de 1/12 du moteur Bristol-Jupiter.

c. Méthode de mesurage (*point* 4).

Le dispositif, dont on s'est servi dans les mesurages est illustré dans la fig. 2. A cet effet, un petit moteur électrique à marche rapide (type Betz) M fut placé dans les paliers à billes *K* dans la boîte *B*. La nacelle à moteur était fixée à cette boîte. Le traction et le moment furent mesurées avec les balances B_1 et B_2.

d. Coefficients (*point* 5).

Au moyen des valeurs mesurées du traction T et du moment M on a calculé le coëfficiënt de traction c_T, le coëfficiënt de moment c_M et le rendement η (formules (1), (2) et (3)). Ici ρ représente la densité de l'air, n le nombre de tours, D le diamètre de l'hélice, V la vitesse relative. T est le traction, qui est fourni par l'ensemble de la nacelle à moteur et de son hélice, η le rendement y afférent (coëfficiënts nets, „netto coëfficiënten").

La résistance des nacelles sans hélice fut exprimé en coëfficiënts de résistance c_w (formule (4)) et $c_w{}'$ (formule (5)). Ici W est la résistance mesurée, q la pression dynamique, O la surface de maître couple de la nacelle, D le diamètre de l'hélice employée avec celle-ci. Pour les coëfficiënts c_w, les indices indiquent pour la maître couple de quelle nacelle le coëfficiënt est calculé, pour les coëfficiënts $c_w{}'$ ils indiquent le numéro de l'hélice qui s'y rattache.

Addition de la résistance de la nacelle au traction net T, indiqué ci-dessus, donne le „traction brute" T' (formule (6)), par quoi le coëfficiënt $c_T{}'$ (formule (7)) et le rendement η' (formule (8)) furent obtenus (coëfficiënts bruts, „bruto coëfficiënten").

A l'aide des résultats d'expériences anglais (voir note 2) on a tiré des résultats obtenus avec la nacelle 3 une évaluation du rendement des hélices isolées η''. La formule (9) donne le rapport nécessaire ici entre la résistance de la nacelle avec ou sans influence du courant de l'hélice.

Pour les coëfficiënts a_1 et a_2, qui apparaissent ici, on a accepté deux valeurs empruntées aux expériences précités (voir point 6b) de sorte que deux valeurs pour η'' sont obtenus.

e. Résultats (point 6).

Les coëfficiënts pour les diverses combinaisons d'hélices („schroef") et de nacelles („motorgondel") sont donnés dans les tableaux IV à X inclus, ceux pour les nacelles sans hélice dans les tableaux XI à XIII inclus.

Les coëfficiënts nets c_T, c_M et η sont donnés dans les figures 3 à 5 inclus, les coëfficiënts bruts $c_T{}'$ et η' et le rendement des hélices isolées η'' dans les figures 6 et 7 exprimés en fonction de V/nD. Ici les deux hélices sont différenciées par le genre de la ligne, les nacelles par la forme des points (voir explication („toelichting") fig. 3). Les valeurs données dans les tableaux sont correctes, celles dans les figures ne sont qu'une approximation.

Dans les tableaux XIV à XVI inclus on a donné les différences entre les quantités η. La différence $(\eta'-\eta)$ est déterminée par la résistance de la nacelle (sans influence du courant de l'hélice), la différence $(\eta''-\eta')$ par l'influence réciproque de l'hélice et de la nacelle ainsi donc par l'influence sur l'hélice de la nacelle et par l'influence du courant de l'hélice sur cette dernière.

f. Conclusions.

Les expériences ont conduit aux conclusions suivantes:

a. La combinaison consistant en une nacelle à moteur d'environ la même forme que dans les avions multimoteur et une hélice aux mêmes dimensions relatives que celles employées dans les derniers, a fourni une faible valeur (tout au plus 0,60) du rendement net c.à. d. du rendement, qui est calculé pour le traction fourni par l'hélice et la nacelle considérée comme élément propulsif (point 6b);

b. L'hélice employée, en ne considérant que celle-ci, avait un rendement convenable, le résultat défavorable pour la combinaison est à imputer à la grande résistance de la nacelle et à l'accroissement important de cette résistance par le courant de l'hélice (point 6b);

c. On estime qu'on peut obtenir une amélioration en diminuant la résistance de la nacelle et en employant une plus grande hélice, dans les deux cas l'hélice doit être convenablement adaptée aux circonstances (point 6b);

d. Une amélioration de la résistance de la nacelle peut être probablement obtenue en plaçant un corps fuselé derrière ou en partie autour du moteur, on a eu une indication dans cette direction, qu'en plaçant un corps fuselé, dont le maître-couple était bien plus grand que la surface projetée du moteur, derrière celle-ci on a obtenu une certaine amélioration de la résistance (point 6d);

e. L'emploi d'une hélice relativement plus grande pour le même nacelle a donné une amélioration du rendement net (valeur maximum 0,68); comme l'hélice elle-même était un peu moins favorable, on peut admettre qu'on peut obtenir de meilleurs résultats (point 6c);

f. L'accroissement de la résistance de la nacelle par le courant de l'hélice peut s'élever à plusieurs fois la résistance de celle-ci sans cette influence (point 6b);

g. La présence de la nacelle derrière l'hélice paraît pouvoir causer un sensible accroissement du rendement apparent de celle-ci (point 6b);

h. Les résultats obtenus ne peuvent être appliqués que pour les hélices, dont la vitesse à l'extrémité de la pale est inférieure à une valeur limite, qui est estimée à peu près à 260 m/sec. pour une valeur supérieure on s'attend à une diminution du coëfficiënt de traction et du rendement et à un accroissement du coëfficiënt de moment (point 7).

REPORT A 180.

Experiments with two models of airscrews with bodies placed behind them.

Summary.

a. Purpose and extent of the experiments (points 1 and 2).

The object of the experiments was to obtain by means of simple measurements some, details concerning the working of the combination of airscrew and nacelle, as used in multi-engined aeroplanes and the factors that are of importance in connection herewith.

The thrust of the combination of airscrew and nacelle the torque taken by the screw and the resistance of the nacelle without airscrew were measured.

b. Models (point 3).

Both models of airscrews were of the same form as the metal Reed-propellers. The main-dimensions of the airscrews: blade-angle („bladhoek"), blade-width („bladbreedte") and thickness of the blade („bladdikte") in different sections determined by their distance from the axis („afstand van het hart van de schroef") are given in Table II and III. All dimensions are expressed in % of the diameter of the airscrew („middellijn").

The three models of nacelles are given in figure 1, the engine being a model of the Bristol Jupiter engine (scale 1 : 12).

c. Method of measurement (point 4).

The apparatus employed for the experiments is illustrated in fig. 2. A small fast-running electric engine M (of the Betz type) was placed in case B, the engine M. being able to revolve in ball-bearings K. The nacelle was fixed to this case. Thrust and torque were measured by means of balances B_1 and B_2.

d. Calculation of data (point 5).

From the measured values of the thrust T and torque M, the thrustcoëfficiënt c_T, the torquecoëfficiënt c_M and the efficiency η were calculated. (Formulae (1), (2) and (3)). Here p is the air density, n the rotational speed (r.p.s.), D the diameter of the airscrew, V the velocity relative to undisturbed air, T the thrust of the combination of airscrew and nacelle, η is the efficincy calculated with this value of the thrust (net-coefficients, „netto-coëfficiënten").

The resistance of the nacelles without airscrew was expressed in resistance-coefficients c_w (formula (4)) and $c_w{}'$ (formula (5)). W is the resistance, q the dynamic pressure, 0 the surface calculated from the maximum diamter of the nacelle, D the diameter of the airscrew used with the nacelle. In the case of coefficients c_w the index indicates the main diameter of wich nacelle is used in calculating the coefficient, in the case of coefficient, $c_w{}'$ the airscrew concerned is indicated by it.

By adding the resistance of the nacelle to the net thrust T, the „gross thrust" T' is obtained (formula (6)), from which were estimated the thrustcoefficient $c_T{}'$ (formula (7)) and the efficiency η' (formula (8)) (Gross coefficients „bruto coëfficiënten").

By using the results of English measurements (for literature see Note 2) form the results obtained with nacelle n°. 3 an estimate was made of the efficiency of the separate airscrews (η''). Formula (9) indicates the relations between resistance of the nacelle with and without the influence of the slipstream. For the coëfficiënts a_1 and a_2 occuring here two sets of values derived from above-mentioned measurements were assumed (see point 6b), so that in each case two values were obtained for η''.

e. Results (point 6).

The coefficients for the different combinations of airscrews („schroef") and nacelles („motorgondels") are given in Tabels IV—X; those for the nacelles without airscrews are given in Tables XI—XIII. The net coefficients c_T, c_M and η, are given in figs. 3—5, the gross coefficients $c_T{}'$ and η' and the efficiency of the separate propellers η'' in figures 6 and 7 as functions of V/nD. The two propellers are distinguished by the kind of line, the nacelles by the form of the dots (see explanation („toelichting") to figure 3). The values given in the tables are right, those in the figures are only an approximation.

a. Eine Kombination, bestehend aus Motorgondel von ungefähr derselben Form wie bei mehrmotorigen Flugzeugen gebräuchlich und einer Schraube von entsprechenden Abmessungen, lieferte einen niedrigen Wert (höchstens 0,60) des Netto-Wirkungsgrades, d.h. des Wirkungsgrades der Einheit Motorgondel-Schraube (Punkt 6b);

b. die Luftschraube hatte, für sich betrachtet, einen leidlich guten Wirkungsgrad, das ungünstige Resultat für die Kombination ist dem groszen Widerstand der Motorgondel und seiner bedeutenden Erhöhung durch den Schraubenstrahl zuzuschreiben (Punkt 6b);

c. es steht zu erwarten, dasz Verbesserungen durch Verminderung des Widerstandes der Motorgondel und durch Anwendung einer gröszeren Luftschraube erzielt werden können; in beiden Fällen musz die Schraube den Umständen entsprechend angepaszt werden (Punkt 6b);

d. Verbesserung des Widerstandes der Motorgondel ist wahrscheinlich durch Anbringen eines Stromlinienkörpers hinter dem Motor, oder durch seine teilweise Verkleidung durch einen Stromlinienkörper zu erreichen; einen Fingerzeig in dieser Richtung erhielt man dadurch, dasz durch Anbringen eines mäszig günstig geformten Stromlinienkörpers, dessen Querschnitt bedeutend gröszer war als die projizierte Oberfläche des Motors, doch eine Verminderung des Widerstandes erzielt wurde (Punkt 6d);

e. die Anwendung einer relativ gröszeren Schraube bei derzelben Motorgondel lieferte eine Verbesserung des Netto-Wirkungsgrades (Maximalwert 0,68); da diese Schraube selbst nicht besonders günstig war, darf angenommen werden, dasz bessere Resultate zu erreichen sind (Punkt 6c);

f. der Schraubenstrahl kann den Widerstand der Motorgondel auf ein Mehrfaches erhöhen (Punkt 6b);

g. das Vorhandensein der Motorgondel hinter der Schraube scheint eine bedeutende Vergröszerung des scheinbaren Wirkungsgrades derselbe verursachen zu können (Punkt 6b);

h. die Messergebnisse sind nur solange zuverlässig übertragbar, als die Umfangsgeschwindigkeit einen Grenzwert (der auf ungefähr 260 m/sec geschätzt wird) nicht übersteigt; bei höherer Umfangsgeschwindigkeit ist eine Abnahme des Schubkoeffizienten und des Wirkungsgrades und Zunahme des Drehmomentkoeffizienten zu erwarten (Punkt 7).

Onderzoek van twee schroefmodellen met er achter geplaatste lichamen.

Rapport A 180. Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam,

door

ir. C. KONING.

In het rapport worden metingen beschreven met twee verschillende luchtschroeven en achter deze geplaatste lichamen („motorgondels") van drie verschillende vormen. De beteekenis van de factoren, die invloed hebben op de uitkomsten, wordt nagegaan; de richting, waarin mogelijke verbetering te zoeken is, wordt besproken.

1. Inleiding.

De eigenschappen, die van belang zijn voor de beoordeeling van de werking van een schroef aan een vliegtuig, kunnen in twee groepen gesplitst worden. Tot de eerste worden dan die gerekend, welke rechtstreeks betrekking hebben op de schroef als voortstuwingsorgaan, tot de tweede alle overigen. Als de vraag, die beslissend is met het oog op de tot de eerste groep gerekende eigenschappen kan de volgende beschouwd worden: welk motorvermogen is noodig voor het aandrijven van de beschouwde schroef bij de verschillende vliegtoestanden van een gegeven vliegtuig, zóó dat de gewenschte voortstuwing verkregen wordt? De onmiddellijk hierbij aansluitende vraag of de aangenomen motor dit vermogen bij het gewenschte toerental kan leveren, moge hier verder buiten beschouwing blijven. Voor de beantwoording van de eerste vraag is het niet voldoende, dat de aerodynamische eigenschappen van het vliegtuig zonder schroef en die van de afzonderlijke schroef bekend zijn, daar er een onderlinge beïnvloeding tusschen beide bestaat. Achter de schroef bestaat de slipstroom, een gebied van vergroote snelheid, waarin bovendien een rotatie en sterke werveling optreedt. Deze slipstroom zal in het algemeen een vergrooting van den weerstand van de binnen zijn gebied gelegen deelen van het vliegtuig veroorzaken, waarbij waarschijnlijk niet alleen de grootere snelheid, doch ook de door de rotatie en onregelmatigheden veroorzaakte verandering van den stroomingstoestand een rol spelen. Omgekeerd zullen de voor of op korten afstand achter de schroef gelegen deelen van het vliegtuig een verandering van de snelheden in het vlak van den schroefcirkel en daardoor van de eigenschappen van de schroef veroorzaken. De slipstroom kan ook nog verdere gevolgen hebben als vergrooting van de lift, wijziging van de waarde van den maximum-lift-coëfficient, invloed op stabiliteit en besturing, die tot de tweede groep gerekend worden en hier verder buiten beschouwing mogen blijven.

De moeilijkheid in het bepalen van de eigenschappen van een vliegtuig, welke het gevolg is van deze wisselwerking tusschen schroef en vliegtuig kan ontgaan worden door een compleet vliegtuigmodel met aangedreven schroef te onderzoeken en daarbij de op dit samenstel werkende krachten, benevens het op de schroef werkende moment te meten. Op deze wijze kunnen toerental en moment van de schroef gevonden worden, waarbij voor een gegeven invalshoek de component van de resulteerende kracht in de bewegingsrichting van het vliegtuig nul is, hetgeen dus overeenkomt met den toestand bij horizontaal vliegen met constante snelheid. Bij andere toerentallen zal genoemde component van nul verschillen, zoodat er een kracht optreedt, die bij stijgen evenwicht kan maken met een component van de zwaartekracht. Op deze wijze kan een antwoord op de boven geformuleerde vraag verkregen worden. Stelt men deze echter wat algemeener, door te vragen naar het rendement van de voortstuwingsinrichting, dan blijkt, dat hierop zonder meer geen antwoord is te geven. Eerst dient vastgelegd te worden, wat onder dit rendement te verstaan is. Dat het niet identiek is met het nuttig effect van de afzonderlijke schroef, dus met de verhouding tusschen nuttig vermogen en opgenomen vermogen voor de schroef bij afwezigheid van het vliegtuig, is, na hetgeen boven reeds gezegd is over de onderlinge beïnvloeding, *zonder meer* duidelijk. De beste beoordeeling van het rendement van de voortstuwingsinrichting kan verkregen worden door het vermogen, dat noodig is om het beschouwde vliegtuig, echter ontdaan van de geheele voortstuwingsinrichting, onder dezelfde omstandigheden door de lucht voort te bewegen (dus b.v. met een sleeptouw) te vergelijken met het in het volledige vliegtuig door de schroef opgenomen vermogen. Het vliegtuig zonder voortstuwer zou dan een zweefvliegtuig zijn, waarvan de romp geen uitstekende deelen, als cilinders en koelers bezit en dus de ideale stroomlijnvorm dicht zou kunnen benaderen. Het aandeel toch, dat dergelijke uitsteeksels tot den weerstand van het vliegtuig bijdragen, is immers alleen een gevolg van de aanwezigheid van de voortstuwingsinrichting, het is dus gewenscht deze weerstandsvermeerdering bij de bepaling van haar nuttig-effect in rekening te brengen. De voortstuwingsinrichting is op te vatten als het geheel der veranderingen, welke de zwever ondergaat, wanneer deze tot motorvliegtuig wordt ingericht. Naast de metingen met het volledige vliegtuigmodel met loopende schroef, zou dus ook nog een met den hieruit afgeleiden glijder noodig zijn.

Een onderzoek als hier geschetst is ingewikkeld en tijdroovend. In sommige gevallen is het echter mogelijk op eenvoudiger wijze een inzicht te verkrijgen in de werking van de schroef. Hierbij wordt dan het samenstel vliegtuig-schroef in twee deelen gesplitst gedacht, nu echter zoo, dat het eene deel gevormd wordt door de schroef met de belangrijkste er achter geplaatste deelen. Aangenomen wordt dan, dat de op deze wijze van de schroef gescheiden deelen mogelijk nog wel invloed van den slipstroom kunnen ondervinden, welke invloed desgewenscht afzonderlijk bepaald en in rekening gebracht kan worden, doch dat de terugwerking van deze deelen op de schroef te verwaarloozen, of in het geval van vergelijkingsproeven voor alle schroeven en opstellingen van deze dezelfde is. Op deze wijze komt men er toe om voor een éénmotorig vliegtuig metingen te doen aan een samenstel van romp en schroef, waarbij mogelijk nog inplaats van den romp een lichaam genomen kan worden, waarvan het voorste deel overeenkomt met dat van den romp, het achterste deel vereenvoudigd is tot een min of meer stroomlijnvormig lichaam. Voor een tweemotorig vliegtuig is dan de aangewezen eenheid het samenstel van schroef en motorgondel.

2. Omvang van het onderzoek.

Het hier beschreven onderzoek was oorspronkelijk bedoeld om, in verband met een voorgenomen onderzoek van een model van een tweemotorig vliegtuig, de eigenschappen van de te gebruiken schroeven, als boven beschreven met inbegrip van de motorgondel, te leeren kennen. De motorgondel werd hierbij gevormd door een luchtgekoelden ster-motor met een achter het middendeel hiervan aangebrachten cilinder, die in een stroomlijnpunt eindigde (zie punt 3).

SCHEMA VAN DE OPSTELLING BIJ DE METINGEN.

B : bus, waarin de electromotor M in kogellagers K K draaibaar is opgehangen. dd : ophangdraden; m_1 m_2: meetdraden. B_1 B_2: balansen.

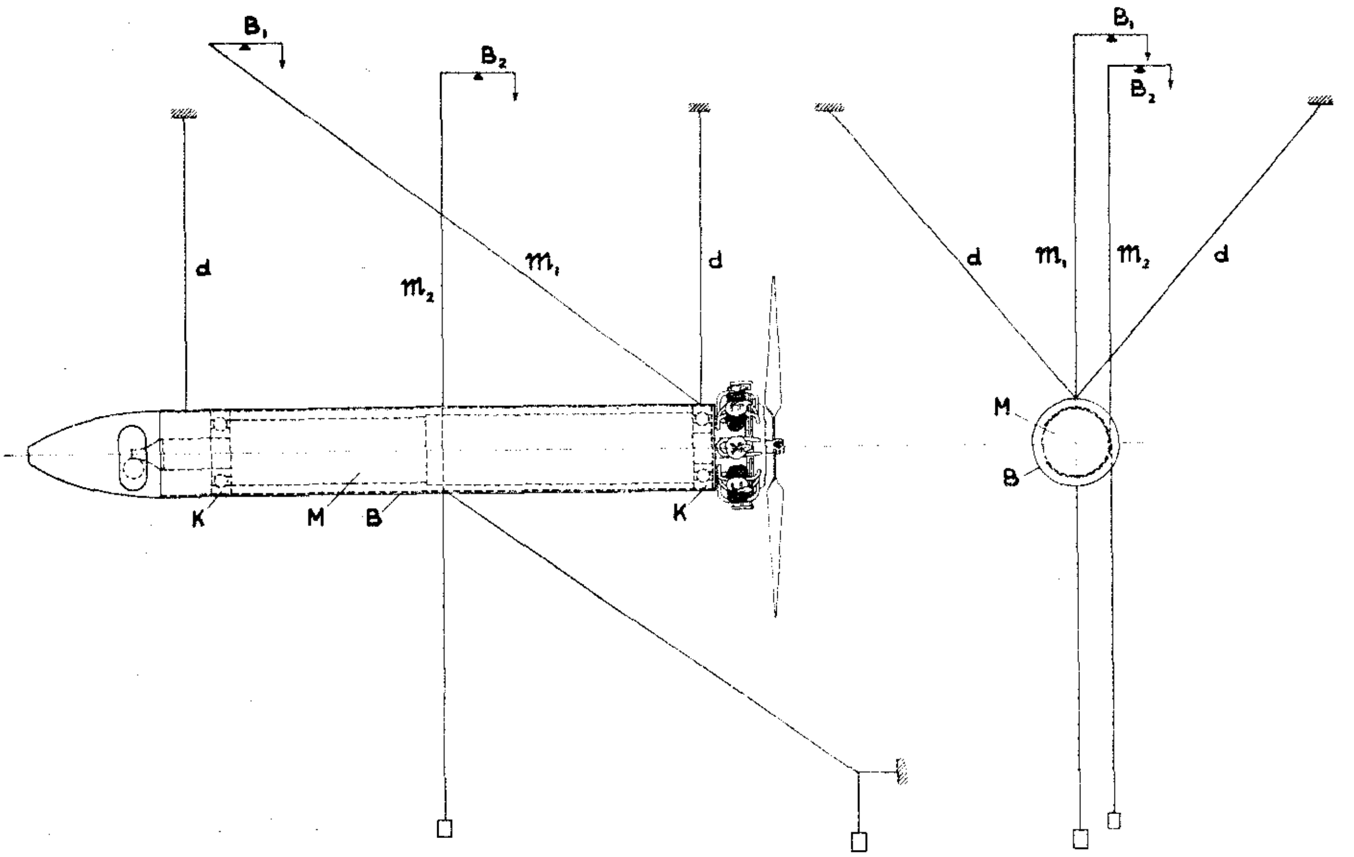


Fig. 2.

n°. 1, 2 en 3; de overeenkomstige indices bij den coëfficient c_W geven aan voor welk oppervlak deze berekend is.

In verband met de in punt *c* te bespreken omrekening werden echter ook nog andere weerstands-coëfficienten ingevoerd, die berekend werden met behulp van de formule:

$$W = c_W{}'\rho V^2 D^2 \qquad (5)$$

De hierin gebezigde notaties hebben de in punt *a* aangegeven beteekenis. De volgens deze definitie bepaalde coëfficient is dus afhankelijk van de bij de motorgondel gebruikte schroef.

De indices 6 en 11 geven nu hierbij aan of de coëfficient berekend is voor schroef n°. 6 ($D = 0.330$ m) dan wel voor schroef n°. 11 ($D = 0.275$ m).

c. Berekening van de „bruto-coëfficienten" voor de schroef.

Tot nu toe werd voor trek en nuttig-effect alleen gesproken over die waarden, welke hiervoor door de combinatie schroef-motorgondel geleverd worden. Uit de uitkomsten van de metingen kan echter nog een tweede stel grootheden afgeleid worden, dat practische beteekenis heeft. Door namelijk bij de netto-trek den weerstand van de motorgondel bij dezelfde snelheid op te tellen, kan een grootheid T' verkregen worden, die verder als „bruto-trek" aangeduid zal worden, terwijl hierbij dan weer een nuttig effect η' („bruto-nuttig-effect") behoort.

De bruto-trek is dus

$$T' = T + W \qquad (6)$$

waaruit als bruto-trek-coëfficient volgt:

$$c_T{}' = c_T + \frac{W}{\rho n^2 D^4} = c_T + c_W{}'\left(\frac{V}{nD}\right)^2 \qquad (7)$$

terwijl het bruto-nuttig-effect wordt:

$$\eta' = \frac{T'V}{2\pi n M} = \frac{1}{2\pi}\frac{c_T{}'}{c_M}\frac{V}{nD} = \eta + \frac{1}{2\pi}\frac{c_W{}'}{c_M}\left(\frac{V}{r_i}\right)^3 \qquad (8)$$

Voor $c_W{}'$ is hierbij dan de in het tweede deel van punt *b* gedefinieerde weerstandscoëfficient, berekend voor de gebruikte schroef, te nemen.

De waarde van den momentencoëfficient blijft onveranderd, omdat bij de metingen het door de schroef opgenomen moment bepaald werd, zonder dat hierbij een eventueel op de motorgondel werkend moment medegemeten werd.

De beteekenis van de bruto-coëfficienten is de volgende. Was er geen wederzijdsche invloed tusschen schroef en motorgondel, dan zou de bruto-trek gelijk zijn aan de trek van de afzonderlijke schroef. Daar dit niet het geval is, is zij de trek, die de schroef levert, terwijl zij beïnvloed wordt door de aanwezigheid van de motorgondel, verminderd met de weerstandsvergrooting van deze door den slipstroom. De bruto-coëfficienten zijn dus de grootheden, die bij de berekening van de eigenschappen van het vliegtuig als coëfficienten voor de schroef ingevoerd zouden moeten worden, indien de aerodynamische eigenschappen van het vliegtuig met inbegrip van de motorgondels, doch zonder schroeven en slipstroominvloed, bekend waren en de onderlinge invloed van de schroeven en de overige deelen van het vliegtuig (d.w.z. met uitzondering van de motorgondels) verwaarloosd werd.

Naast deze practische beteekenis van de bruto-coëfficienten staat nog het voordeel, dat zij een betere beoordeeling van de verkregen uitkomsten mogelijk maken. Zoo geven in gevallen, waarbij metingen met eenzelfde schroef en verschillende motorgondels uitgevoerd zijn, de verschillen in de bruto-coëfficienten een indruk van de verschillen in wederzijdschen invloed van schroef en motorgondel. Het verschil van bruto- en netto-nuttig-effect toont aan welk deel van het motorvermogen verloren gaat door den weerstand van de motorgondel, voor zoover dan afgezien wordt van den slipstroominvloed op dezen.

d. Schatting van het nuttig-effect van de afzonderlijke schroef.

Zooals uit het bovenstaande blijkt, was het niet mogelijk uit de verkregen uitkomsten de eigenschappen van de

NETTO-TREKCOËFFICIENT c_T
(zie punt *5a*).

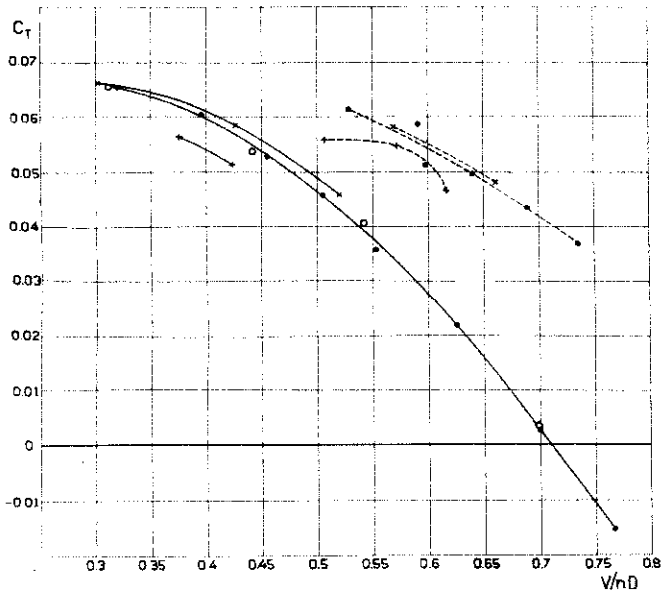


Fig. 3.

MOMENTENCOËFFICIENT c_M
(zie punt *5a*).

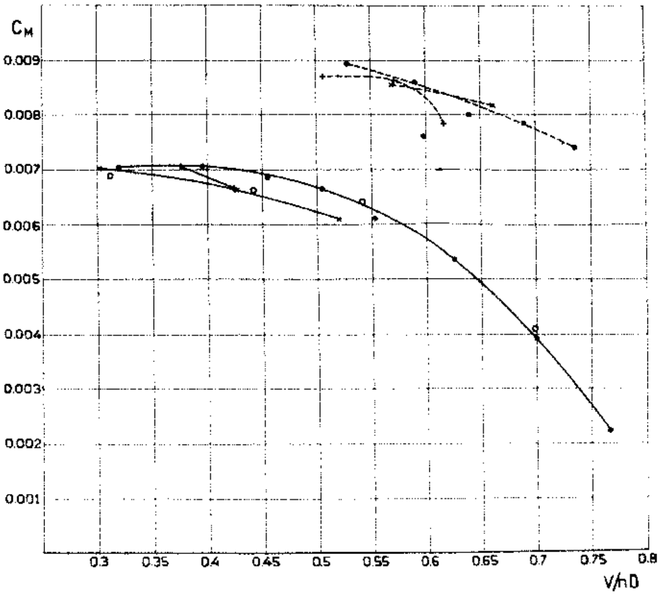


Fig. 4.

Toelichting van de figuren 3 t/m 7.

In deze figuren geeft de lijn de schroef, de punten de motorgondel aan, waaruit de onderzochte combinatie bestaat en wel op de volgende wijze:

— — —: schroef nr. 6 (groote schroef).
· · · : schroef nr. 11 (kleine schroef).
• } Motorgondel nr. 1 (Jupiter-motor) { 1e meting.
o } { 2e meting.
+ Motorgondel nr. 2 (F VII-kop).
× Motorgondel nr. 3 (gladde kop).
□ Nuttig-effect van de afzonderlijke schroef (η'').

afzonderlijke schroef, al dan niet bij aanwezigheid van de motorgondel, te bepalen. Hiertoe zouden uitvoeriger metingen noodig geweest zijn. Daar het echter gewenscht bleek het nuttig-effect van de afzonderlijke schroeven bij benadering te kennen, werd dit berekend met behulp van de uitkomsten van Engelsche metingen [2]). Bij deze metingen werden zoowel de eigenschappen van de schroeven afzonderlijk, als van deze opgesteld voor gelijkvormige lichamen van verschillende afmetingen, benevens de slipstroominvloed op deze laatsten, bepaald. De vorm van de gebezigde lichamen kwam tennaastebij overeen met die van motorgondel n°. 3. De slipstroominvloed op het lichaam werd uitgedrukt in den vorm [3]):

$$\frac{W'}{W} = a_1 + a_2 c_T''\left(\frac{nD}{V}\right)^2 \qquad (9)$$

waarin: W = weerstand van de motorgondel zonder slipstroominvloed,
W' = weerstand van de motorgondel met slipstroominvloed,
c_T'' = trekcoëfficient van de schroef,
a_1, a_2 = coëfficienten.

De hier gebezigde trekcoëfficient is op dezelfde wijze berekend als de in punt *a* en *c* gedefinieerde, doch is afgeleid uit de trekkracht van de schroef vóór de gegeven motorgondel (dus als de bruto-trekcoëfficient, doch zonder slipstroominvloed op de motorgondel). De waarden, die uit de proeven voor de coëfficienten a_1 en a_2 gevonden werden, toonen een invloed van de verhouding van de afmetingen van de motorgondel tot de schroefmiddellijn en van den vorm van de schroef. Deze was echter niet zoo groot, dat het gebruik voor een globale berekening hier ontoelaatbaar scheen.

Bij gebruikmaking van deze gegevens was het dus mogelijk een schatting van den slipstroominvloed voor de metingen met motorgondel n°. 3 te verkrijgen. Daar de trekcoëfficient c_T'' (zie boven) onbekend was, werd deze hierbij vervangen door den bruto-trekcoëfficient c_T'. Door nu de in punt *c* gegeven berekeningen te herhalen, waarbij dan echter onder „weerstand van de motorgondel" die met inbegrip van den slipstroominvloed te verstaan is, werd een nuttig-effect η'' verkregen. Deze grootheid zal verder als „nuttig-effect van de afzonderlijke schroef" aangeduid worden; indien het gewenscht is er de aandacht op te vestigen, dat hierbij de invloed van de motorgondel op de schroef nog een rol speelt, zal gesproken worden van „schijnbaar nuttig-effect". Het verschil tusschen η'' en het in punt *5c* gedefinieerde bruto-nuttig-effect η' bestaat daarin, dat in de eerste grootheid de slipstroominvloed op de motorgondel niet, in de tweede daarentegen wel inbegrepen is.

De resultaten van deze berekening moeten echter als zeer globaal beschouwd worden. Eerstens is hierbij, zooals boven aangegeven werd, voor de bepaling van den slipstroominvloed op de motorgondel een slechts bij benadering juiste trekcoëfficient gebezigd en verder bestaat er een groot verschil in vorm tusschen de bij de Engelsche metingen gebruikte schroeven en de hier beschouwde. Om aan dit laatste bezwaar eenigszins tegemoet te komen, werden voor de coëfficienten a_1 en a_2 de twee stellen getallenwaarden gebruikt, die bij de Engelsche metingen met het lichaam, dat in relatieve grootte het hier gebezigde het meest nabij kwam, als uitersten verkregen werden.

6. Resultaten van het onderzoek.

a. Algemeen.

De uitkomsten van het onderzoek zijn in Tabel IV t/m XIII gegeven. Tabel IV t/m X bevatten de waarden van de in punt *5a* en *5c* gedefinieerde netto- en bruto-coëfficienten voor de verschillende combinaties van schroef en motorgondel, benevens, voor zoover de metingen met motorgondel n°. 3 betreft, het volgens de in punt *5d* gegeven methode berekende nuttig-effect van de afzonderlijke schroef. Tabel XI t/m XIII geven de weerstands-coëfficienten voor de zonder schroef onderzochte motor-

[2]) Aeronautical Research Committee. Experiments with a family of airscrews, including the effect of tractor and pusher bodies.

Part. I. Experiments with the family of airscrews mounted in front of a small body. By FAGE, HOWARD, LOCK and BATEMAN. R.M. 829.

Part. II. Experiments on airscrews with tractor and pusher bodies. By FAGE, LOCK, BATEMAN and WILLIAMS. R.M. 830.

[3]) De oorspronkelijke notaties zijn gewijzigd en zoo goed mogelijk aangepast aan de hier gebezigde.

NETTO-NUTTIG-EFFECT η
(zie punt 5*a*).

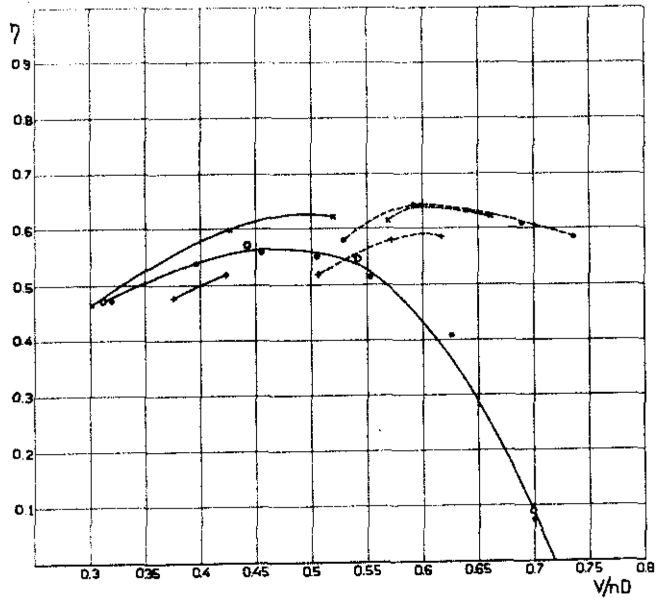


Fig. 5.

gondels. Voor de beteekenis der hierbij gebezigde indices kan verwezen worden naar punt 5*b*.

De netto-coëfficienten zijn in fig. 3 t/m 5, de bruto-coëfficienten en het nuttig-effect van de afzonderlijke schroeven in fig. 6 en 7 als functie van $V/_{nD}$ uitgezet. De figuren geven slechts bij benadering juiste waarden, zij zijn echter voldoende om het algemeene karakter te beoordeelen. De tabellen daarentegen geven de juiste waarden. In gevallen, waar twee stellen waarden beschikbaar waren, is een gemiddelde kromme aangegeven. Voor schroef n°. 11 met motorgondel n°. 1 zijn deze stellen afkomstig van verschillende metingen, voor het nuttig-effect van de afzonderlijke schroeven daarentegen van twee berekeningen met verschillende aannamen.

De nauwkeurigheid van de metingen kan beoordeeld worden door vergelijking van de uitkomsten van de beide metingsseries voor schroef n°. 11 met motorgondel n°. 1. Uit de afwijkingen van de in de figuren afzonderlijk uitgezette metingspunten van de gemiddelde krommen kan de nauwkeurigheid van c_T, c_M en η geschat worden op resp. 0,001, 0.00015 en 0.01. De nauwkeurigheid van de coëfficiënten c_w is als gevolg van het schatten van de correctie van den draadweerstand beperkt. Op de netto-coëfficiënten heeft deze weinig, op de bruto-coëfficiënten in het geheel geen invloed.

Hoewel dit voor practische toepassingen natuurlijk niet de eenige beslissende grootheid is, zal in het volgende bij de vergelijking der uitkomsten hoofdzakelijk gelet worden op het nuttig-effect.

b. Resultaten voor schroef n°. 11 (kleine schroef).

Het meest in het oog vallende van de uitkomsten voor schroef n°. 11 met motorgondel n°. 1, dus voor de combinatie, zooals deze in de praktijk gebruikt wordt, is het lage netto-nuttig-effect. Dit bedraagt namelijk ten hoogste 0.60, hetgeen dus beteekent, dat van het door den motor geleverde vermogen onder de gunstigste omstandigheden slechts ruim de helft beschikbaar is voor voortstuwing van het vliegtuig zonder motorgondels. Dit netto-nuttig-effect is afhankelijk van de volgende drie eigenschappen:

1. het nuttig effect van de schroef,
2. de onderlinge beïnvloeding van schroef en motorgondel,
3. de weerstand van de motorgondel.

Het is van belang na te gaan in hoeverre de hier verkregen ongunstige uitkomst het gevolg is van elk van deze drie factoren. Voor een dergelijke analyse zijn de rechtstreeks uit de metingen verkregen uitkomsten echter niet volledig genoeg, daar het hiermede slechts mogelijk is de gevolgen

BRUTO-TREKCOËFFICIENT c_T'
(zie punt 5*c*).

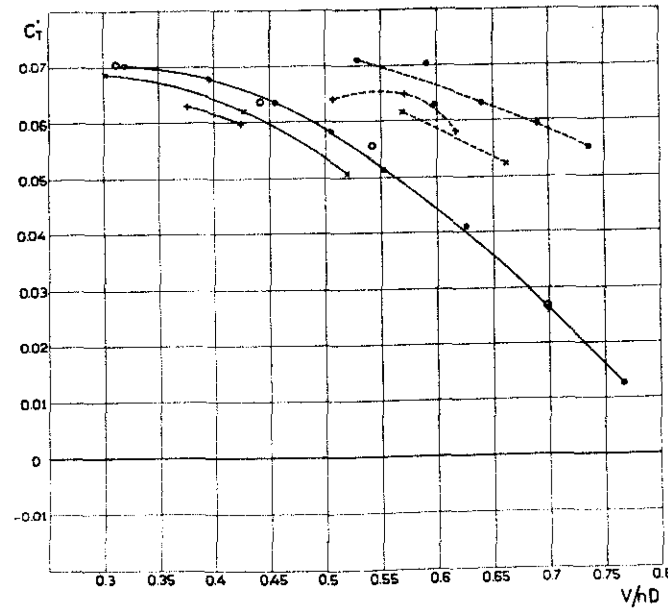


Fig. 6.

BRUTO-NUTTIG-EFFECT η'
(zie punt 5*c*) en nuttig effect voor de afzonderlijke schroeven η'' (zie punt 5*d*).

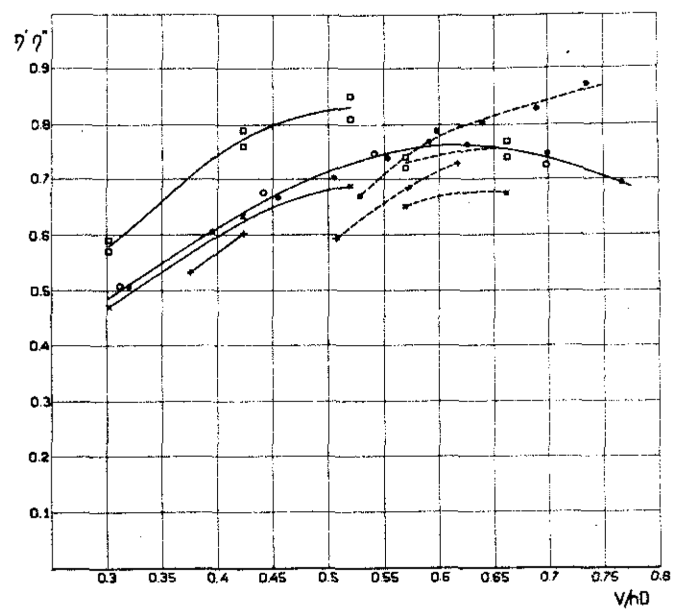


Fig. 7.

van beide eerstgenoemde oorzaken te scheiden van die van de derde. Immers naast het hier beschouwde netto-nuttig-effect, dat door alle drie beïnvloed wordt, staat het in punt 5*c* gedefinieerde bruto-nuttig-effect, dat slechts afhankelijk is van de beide eerste, voor zoover dan onder weerstand van de motorgondel die zonder slipstroom-invloed verstaan wordt. Met behulp van de in punt 5*d* besproken berekening is het echter mogelijk het nuttig-effect van de afzonderlijke schroef bij benadering te leeren kennen. Zooals daar reeds is aangegeven, werd hierbij uitgegaan van de resultaten voor de combinatie schroef-motorgondel n°. 3 en werden voor de coëfficienten a_1 en a_2, die den slipstroominvloed bepalen, twee verschillende stellen waarden aangenomen. Deze zijn:

1e aanname $a_1 = 1.50$ $a_2 = 11.0$
2e aanname $a_1 = 1.00$ $a_2 = 10.0$

De hiermede verkregen waarden van het „nuttig-effect van de afzonderlijke schroef" η'' zijn in Tabel IX en fig. 7 opgenomen, de indices verwijzen naar de beide bovenstaande aannamen. Streng genomen beteekenen deze uitkomsten het schijnbare nuttig-effect van de schroef vóór

TABEL XIV.
Schroef nr. 11 met motorgondel nr. 1.

V/nD	η	η'	η''	η''-η'	η'-η
0.30	0.46	0.49	0.54	0.05	0.03
0.35	0.52	0.55	0.64	0.09	0.03
0.40	0.56	0.61	0.70	0.09	0.05
0.45	0.59	0.67	0.74	0.07	0.08
0.50	0.60	0.71	0.78	0.07	0.11
0.60	0.53	0.76	—	—	0.23
0.70	0.25	0.74	—	—	0.49

motorgondel n°. 3. Het is bekend, dat een dergelijk schijnbaar nuttig-effect grooter kan zijn dan het werkelijke nuttig-effect van de schroef bij afwezigheid van het lichaam, doch dit verschil zal hier waarschijnlijk, dank zij de geringe afmetingen van de motorgondel, niet zeer groot zijn [1]). Houdt men rekening met het feit, dat, zooals uit fig. 7 blijkt, de maximum-waarde van η'' buiten het beschouwde gebied schijnt te vallen, dan mag men niettegenstaande alle onzekerheden, die deze beschouwing aankleven, de schroef n°. 11 een goede schroef noemen. De lage waarde van het netto-nuttig-effect is dus aan de beide oorzaken 2 en 3 toe te schrijven.

Voor een verdere beoordeeling zijn nu in Tabel XIV de waarden van η, η' en η'' bij verschillende waarden van V/nD gegeven. De beteekenis van de hierbij aangegeven verschillen is de volgende. Het verschil van het nuttigeffect van de afzonderlijke schroef en het bruto-nuttigeffect (η''—η') wordt veroorzaakt door de beïnvloeding van de schroef door de motorgondel en door den slipstroominvloed op deze. De eerst oorzaak kan zoowel verandering van de trek als van het moment tengevolge hebben, de tweede daarentegen heeft alleen invloed op de trek. Het verschil van bruto- en netto-nuttig-effect (η'—η) is het gevolg van den weerstand (zonder slipstroominvloed) van de motorgondel en wordt bepaald door het verschil in bruto- en netto-trek.

Over de factoren, die invloed hebben op de grootte van deze verschillen bij verschillende waarden van V/nD kan men zich het beste een beeld vormen door aan te nemen, dat de schroef met constant toerental loopt, de snelheid daarentegen veranderd wordt. Trek en moment zijn in dit geval evenredig met de trek- en momentencoëfficient (zie de in punt 5a en 5c gegeven definities). Bij toenemende waarde van V, dus van V/nD, neemt de bruto-trek af, de weerstand van de motorgondel (zonder slipstroominvloed) daarentegen toe, zoodat de netto-trek in sterkere mate zal verminderen. Het verschil tusschen bruto- en netto-trek neemt dus, door grooter wordenden invloed van den weerstand van de motorgondel, toe. Het verschil in nuttig vermogen TV, zal, daar ook V vergroot wordt, nog sterker toenemen, terwijl het opgenomen vermogen $2\pi nM$ evenredig is met c_M en dus afneemt. Het is dus te verwachten, dat het verschil (η'—η) sterk zal toenemen bij vergrooting van V/nD.

Het verloop van het verschil (η''—η') is niet zoo eenvoudig te overzien, daar dit, als boven werd aangegeven, afhangt van twee factoren, terwijl bovendien de invloed van de eerste, de beïnvloeding van de schroef door de motorgondels, niet van te voren te voorspellen is en waarschijnlijk sterk afhankelijk zal zijn van den vorm van schroef en motorgondel. Voor den invloed van de tweede oorzaak, de weerstandsvergrooting van de motorgondel door den slipstroom, kan evenmin met zekerheid een algemeene wetmatigheid aangegeven worden. Bij gebruikmaking van de in punt 5d besproken berekeningsmethode blijkt, dat hier twee invloeden optreden, die tegengestelde uitwerking hebben. Hierbij dient aangenomen te worden, dat de in het bedoelde punt gegeven uitdrukking voor de verhouding (weerstand van de motorgondel met slipstroominvloed) : (weerstand van deze zonder slipstroominvloed) W'/W voor iedere combinatie schroefmotorgondel geldt, natuurlijk met passende waarden voor de constanten a_1 en a_2. Hieruit volgt dan dat, evenals boven constant toerental en veranderlijke snelheid aannemende, de verhouding W'/W bij toenemende snelheid afneemt, daar zoowel c_T'' als nD/V kleiner worden en a_2 een positieve constante beteekent. Hiertegenover staat echter, dat de weerstand van de motorgondel zonder slipstroominvloed in dit geval toeneemt. Bij de bespreking van de in Tabel XV gegeven waarden voor de uitkomsten met motorgondel n°. 3 zal hierop nader teruggekomen worden.

[1]) Zie o.a. de in noot 7 aangegeven literatuur.

TABEL XV.
Schroef nr. 11 met motorgondels nr. 2 en 3.

Motorgondel nr.	V/nD	η	η'	η''	η''-η'	η'-η
2	0.40	0.52	0.57	0.70	0.13	0.05
3	0.30	0.47	0.48	0.54	0.06	0.01
3	0.35	0.55	0.56	0.64	0.08	0.01
3	0.40	0.60	0.61	0.70	0.09	0.01
3	0.45	0.63	0.64	0.74	0.10	0.01
3	0.50	0.66	0.67	0.78	0.11	0.01

Opgemerkt zij nog, dat, waar de aanwezigheid van de motorgondel kan veroorzaken, dat het schijnbare nuttigeffect van de schroef grooter is dan het nuttig effect van de afzonderlijke schroef, de nadeelige invloed van den slipstroom grooter kan zijn, dan uit het verschil (η''—η') zou blijken.

Gaat men nu de in Tabel XIV gegeven verschillen na, dan blijkt, dat in de omgeving van het punt, waar het netto-nuttig-effect maximum is (V/nD = 0.475), de beide door (η''—η') en (η'—η) uitgedrukte invloeden in ongeveer gelijke mate bijdragen tot de vermindering van het netto-nuttig-effect. Hiermede is dan de in het begin van dit punt gestelde vraag beantwoord: het slechte netto-nuttigeffect van de beschouwde combinatie wordt veroorzaakt zoowel door grooten weerstand van de motorgondel als door een belangrijke vermeerdering van deze door den slipstroom. Verbetering van den toestand moet dus gezocht worden in dusdanige richting, dat beide verminderd worden. Hiertoe kunnen twee middelen aangegeven worden. Door een betere vorm van de motorgondel kunnen zoowel de weerstand van deze als de slipstroominvloed verminderd worden, terwijl bovendien, zooals in punt 2 reeds werd aangeduid, de slipstroominvloed verkleind kan worden door een grootere schroef te gebruiken. Hierbij is dan steeds een gunstige schroef te kiezen, d.w.z. een schroef, die onder de gegeven omstandigheden een goed nuttig-effect heeft en niet door ongunstige snelheidsverdeeling in den slipstroom de totaal-weerstand van de motorgondel meer dan noodzakelijk vergroot. Om uit te maken wat op deze wijze bereikt kan worden is echter een verder experimenteel onderzoek noodig, waarbij dan tevens niet, zooals in deze beschouwingen is geschiedt, de aandacht hoofdzakelijk geconcentreerd moet worden op het punt, waar het nuttig-effect maximum is, doch de waarde van deze grootheid in het geheele, van practisch belang zijnde, gebied beschouwd moet worden.

In Tabel XV zijn op dezelfde wijze de uitkomsten voor schroef n°. 11 met de motorgondels n°. 2 en 3 verwerkt. Het blijkt, dat voor motorgondel n°. 2 (FVII-kop) het verschil (η'—η) dezelfde waarde heeft als voor motorgondel n°. 1. bij dezelfde waarde van V/nD, hetgeen uit het feit, dat de weerstand van beide motorgondels nagenoeg dezelfde is (zie Tabel XI en XII), te verwachten was. Het verschil (η''—η') is daarentegen iets hooger, het zou echter gevaarlijk zijn uit dit enkele geval meer algemeene conclusies te willen trekken.

De uitkomsten voor motorgondel n°. 3 (gladde kop) toonen lage waarden van het verschil $(\eta'-\eta)$, die het gevolg zijn van den geringen weerstand van deze motorgondel. De verschillen $(\eta''-\eta')$ zijn echter van dezelfde orde van grootte als voor motorgondel n°. 1. Uit de wijze van berekening van η'' (zie het begin van dit punt) volgt, dat dit verschil hier alleen veroorzaakt wordt door den slipstroominvloed. Deze is hier dus belangrijk grooter dan de weerstand van de motorgondel. Dit kan men ook rechtstreeks zien uit de in punt 5 *d* gegeven formule, wanneer hierin de voor a_1 en a_2 gebruikte waarden worden ingevoerd. De weerstand van de motorgondel met slipstroominvloed (W') blijkt dan, vooral bij lage waarden van V/nD, vele malen die zonder slipstroominvloed (W) te kunnen bedragen.

Deze uitkomst doet vermoeden, dat, waar voor de schroef met motorgondel n°. 1 de verhouding van de beide verschillen veel kleiner was, er in dat geval een belangrijke beïnvloeding van de schroef door de motorgondel bestond, waardoor het schijnbare nuttig-effect van deze vergroot en daardoor het verschil $(\eta''-\eta')$ verminderd werd. Zekerheid hieromtrent bestaat echter niet, daar niet aangenomen mag worden, dat de slipstroominvloed, uitgedrukt in den weerstand van de motorgondel zonder dezen, in beide gevallen dezelfde zal zijn.

Bij de bespreking van de beteekenis van het verschil $(\eta''-\eta')$ werd er op gewezen, dat niet van te voren aangegeven kon worden, hoe het deel van dit verschil, dat afhankelijk is van den slipstroominvloed, zou veranderen met V/nD. Voor het hier besproken geval blijkt, dat het in het beschouwde gebied langzaam toeneemt met V/nD. Dit mag echter niet als algemeen geldig aangenomen worden.

c. Resultaten voor de schroef n°. 6 (groote schroef).

Uit de metingen met motorgondel n°. 3 werd, met dezelfde waarden van a_1 en a_2 als voor de schroef n°. 11, het nuttig-effect van de afzonderlijke schroef η'' berekend. De uitkomsten hiervoor zijn in Tabel X en fig. 7 gegeven. Hieruit blijkt, dat, waar de hoogste waarde van het gemiddelde 0.76 bedraagt en in de omgeving van het maximum gelegen schijnt te zijn, deze schroef, op zichzelf genomen, minder goed is dan de schroef n°. 11. Niettegenstaande dat werd voor het samenstel motorgondel n°. 1 — schroef n°. 6 een betere maximum-waarde voor het netto-nuttig-effect gevonden en wel ongeveer 0.68 tegenover 0.60 voor schroef n°. 11 met dezelfde motorgondel. Het blijkt dus, dat met een grootere schroef betere resultaten verkregen kunnen worden. Gezien het nuttig-effect van de afzonderlijke schroef behoeft de hier gegeven waarde geenszins als hoogst bereikbare met een schroef van deze middellijn beschouwd te worden.

Met de motorgondels n°. 2 en 3 werden maximum-waarden van het netto-nuttig-effect van resp. 0.62 en 0.67 verkregen.

In Tabel XVI zijn de waarden van de grootheden η en de verschillen tusschen deze gegeven. Bij vergelijking met de overeenkomstige waarden voor schroef n°. 11 valt hierbij de gewijzigde verdeeling van het verschil $(\eta''-\eta')$ en $(\eta'-\eta)$ op. Het feit, dat $(\eta'-\eta)$ hier grooter is, schijnt in tegenspraak met de verwachting, dat bij relatief grootere schroef de weerstand van de motorgondel minder invloed zal hebben. Beschouwt men echter de in punt 5 *c* gegeven formule voor c_T' nader en houdt men rekening met het feit, dat in verband met den grooteren spoed van de schroef het beschouwde gebied bij hoogere waarden van V/nD ligt, dan ziet men, dat weliswaar de waarde van c_W' kleiner zal zijn, daarentegen $(V/nD)^2$ grooter is. Dit laatste blijkt hier te overheerschen, zoodat voor de groote schroef het verschil tusschen c_T en c_T' en daarmede ook dat tusschen η en η' grooter is. Dit verklaart ook, tezamen met de minder goede eigenschappen van de schroef, het geringe verschil in de maximum-waarden voor het netto-nuttig-effect van de motorgondel n°. 3 met de beide schroeven. Uit de uitkomsten met motorgondel n°. 3 volgt, dat de slipstroominvloed hier geringer is.

TABEL XVI.

Schroef nr. 6 met motorgondels nr. 1, 2 en 3.

Motor-gondel nr.	V/nD	η	η'	η''	η''-η'	η'-η
1	0.55	0.64	0.71	—	—	0.07
1	0.60	0.68	0.78	0.74	-0.04	0.10
1	0.65	0.67	0.81	0.76	-0.05	0.14
1	0.70	0.66	0.84	—	—	0.18
2	0.55	0.59	0.65	—	—	0.06
2	0.60	0.62	0.71	0.74	0.03	0.09
3	0.60	0.65	0.67	0.74	0.07	0.02
3	0.65	0.67	0.68	0.76	0.08	0.01

Een tweede bijzonderheid van de uitkomsten is de negatieve waarde van het verschil $(\eta''-\eta')$ voor de motorgondel n°. 1. De slipstroominvloed wordt hier dus overtroffen door het verschil tusschen het nuttig-effect van de afzonderlijke schroef en het schijnbare nuttig-effect van deze voor de motorgondel. Een dergelijk verschil, dat ook reeds bij de resultaten van schroef n°. 11 ter sprake kwam, kan als volgt verklaard worden. Het kan voorkomen, dat bij de afzonderlijke schroef (dus zonder motorgondel er achter) de in de nabijheid van de naaf gelegen deelen van de bladen een ongunstigen invalshoek hebben, zoodat zij weinig bijdragen tot de trek of zelfs een negatieve trek leveren, terwijl zij toch door hun weerstand een belangrijk moment veroorzaken en bovendien de ongunstige verdeeling van de trekkracht over de bladen een verdere bron van energie-verlies vormt. Wordt nu achter de schroef een motorgondel geplaatst, dan beweegt het middendeel van de schroef zich in het gebied, waar door de stuwing voor den kop van de motorgondel de stroomingssnelheid verminderd is. Dit heeft een plaatselijke wijziging van de invalshoeken van de schroefbladen tengevolge, waardoor de bij de afzonderlijke schroef bestaande ongunstige toestand verbeterd en het nuttig-effect vergroot kan worden.

d. De weerstand van de afzonderlijke motorgondels.

Hoewel eenigszins buiten het behandelde onderwerp vallende, zal de weerstand van de afzonderlijke motorgondels hier nog met een enkel woord besproken worden. Vergelijkt men de voor gelijk oppervlak berekende coëfficienten $c_{W\,3}$ (zie Tabel XI t/m XIII), dan blijkt, dat het aanbrengen van den motor aan motorgondel n°. 3 (dus n°. 3 → n°. 1) een zeer belangrijke vergrooting van den weerstand tengevolge heeft. Het aanbrengen van een min-of meer gestroomlijnden romp achter den motor (n°. 1 → n°. 2) geeft, niettegenstaande de belangrijk grootere maten van het grootspant, eenige vermindering van den weerstand. Dit geeft een aanwijzing, dat door het aanbrengen van een behoorlijk stroomlijnlichaam achter of ten deele om den motor een niet-onaanzienlijke verbetering van den weerstand te verkrijgen moet zijn.

Berekent men de weerstandscoëfficient voor motorgondel n°. 1 voor het oppervlak van den omgeschreven cirkel van den motor (c_{W1}), dan blijkt deze ruim 0.5 van die voor een vlakke plaat te zijn.

7. Over het gebruik van de uitkomsten van modelproeven voor schroeven.

Na het voorgaande is het gewenscht een kort overzicht te geven van de voorwaarden, waaronder de uit modelproeven verkregen resultaten voor beoordeeling van waregrootte schroeven gebruikt mogen worden. Voor meer uitvoerige beschouwingen kan verwezen worden naar de bestaande literatuur [5]).

Opdat voor twee in lucht werkende schroeven de op de in punt 5 aangegeven wijze in coëfficienten uitgedrukte uitkomsten dezelfde zullen zijn, moet, streng genomen, voldaan worden aan de volgende voorwaarden:

1e. *meetkundige gelijkvormigheid* van de schroeven en van de in de nabijheid geplaatste lichamen, als motorgondels;

2e. gelijke waarde van $V/_{nD}$ (waarin V = relatieve snelheid op grooten afstand voor de schroef, n = toerental, D = middellijn van de schroef);

3e. gelijke waarde van het Reynolds'sche getal $\frac{VD}{\nu}$ (waarin ν = kinematische wrijvingscoëfficient); hierbij mag inplaats van V ook een andere goed gedefinieerde snelheid gebruikt worden, b.v. de grootheid nD, die een maat is voor de omtreksnelheid;

4e. gelijke waarde van de verhouding $\frac{\pi n D}{c}$, (waarin c = voortplantingssnelheid van het geluid in de lucht);

5e. gelijke elastische vervormingen.

Goed beschouwd zijn dit dezelfde eischen als bij andere modelmetingen, b.v. aan vleugels, gesteld kunnen worden, de formuleering is echter een andere. Zoo beteekent gelijkheid van de onder 2e. bedoelde verhouding van voorwaartsche snelheid tot omtreksnelheid (π wordt hierbij als zijnde een constante factor weggelaten), indien aan de andere voorwaarden voldaan wordt, gelijkheid van de verhouding tusschen de componenten van de relatieve snelheid in axiale en tangentiale richting voor ieder element van het schroefblad, hetgeen dus overeenkomt met de voorwaarde van gelijken invalshoek voor vleugels. Het zwaartepunt van de voorwaarden ligt hier echter anders. Voor vleugelmetingen zijn b.v. onder normale omstandigheden de drie eerstgenoemde voorwaarden beslissend, terwijl de beide laatsten, als zonder practische beteekenis, buiten beschouwing gelaten worden. Voor schroeven daarentegen schijnt de waarde van het Reynolds'sche getal, mits met niet al te kleine schroeven en bij al te lage snelheden gewerkt wordt, bij normale waarden van $V/_{nD}$ van weinig beteekenis te zijn [6]). Daarentegen zijn de beide laatste voorwaarden hier van meer belang.

De invloed van de onder 4e. genoemde verhouding, of zooals het gewone spraakgebruik luidt, van de grootte van de tipsnelheid, is nog niet volledig bekend. Er zijn echter wel eenige Engelsche [7]) en Amerikaansche [8]) metingen over dit onderwerp, die hier in het kort besproken zullen worden. De eerstgenoemde waren onderzoekingen met schroefmodellen met hooge tipsnelheid, waarbij zoowel trek en moment van de geheele schroef, als, door een onderzoek van de strooming, de werking van de verschillende elementen van de bladen bepaald werden. De laatste waren metingen met vleugelmodellen van voor schroefbladen bruikbare profielen bij hooge snelheden.

Bij de Engelsche metingen, waarbij de schroefbladen dubbelgewelfde (lensvormige) profielen met scherpen voor- en achterrand hadden, bleek bij lage waarde van de verhouding (omtreksnelheid van het element: geluidssnelheid) de invloed van deze gering te zijn. Er bestaat echter een grens, waarboven hij plotseling van beteekenis wordt. Deze schijnt in dit geval in de omgeving van 0.7 c te liggen. Boven deze grens neemt de lift af, de weerstand daarentegen sterk toe. Voor trek en moment van de geheele schroef wordt deze invloed echter eerst merkbaar, wanneer de tip-snelheid een waarde van ongeveer 0.8 c overschrijdt.

De Amerikaansche metingen werden uitgevoerd met meer normale vleugelprofielen van verschillende dikte. Hoewel de uitkomsten weinig regelmaat vertoonen, schijnt voor dunne profielen en kleine invalshoeken, dus zooals aan de uiteinden van een schroefblad meest voor zullen komen, hier ook een min of meer gepronónceerde grens bij ongeveer 0.7 c te bestaan. Voor dikke profielen en(of) groote invalshoeken schijnt deze lager te liggen, hetgeen begrijpelijk is, daar eigenlijk niet de snelheid van de ongestoorde strooming, doch de grootste optredende snelheid als beslissende factor beschouwd moet worden.

Bij de in het rapport beschreven metingen was het toerental van de schroef ongeveer 100 per sec., de middellijn van de schroeven n°. 11 en 6 resp. 0.275 en 0.330 m, de tipsnelheid $\pi n D$ dus ongeveer 86, resp. 104 m/sec. In beide gevallen was deze dus belangrijk lager dan de geluidssnelheid (= 330 m/sec.). Neemt men nu als eerste benadering aan, dat de boven gegeven uitkomsten ook hier geldig zijn, dan mogen de verkregen uitkomsten alleen dan voor vergelijking met ware-grootte-schroeven gebezigd worden, indien de tipsnelheid van deze laatsten lager is dan 0.8 c $\approx$ 260 m/sec. Bij hoogere tipsnelheid is afname van trek-coëfficient en nuttig-effect, toename van momenten-coëfficient te verwachten.

De onder 5e. genoemde elastische vervorming van de schroef in belasten toestand vormt eigenlijk een deel van de voorwaarde van meetkundige gelijkvormigheid, daar immers de vorm van de in beweging zijnde schroef en niet die van de schroef in rust beslissend is voor de grootte van de luchtkrachten. Om practische redenen wordt echter meestal de hier aangegeven splitsing (1e en 5e) aangehouden, daar de vorm van de schroef in rust gemakkelijk, die in bewegenden toestand echter zeer moeilijk te controleeren is. De elastische vervorming, die een gevolg is van centrifugaal-kracht en luchtkrachten, kan bestaan uit buiging en wringing van de schroefbladen. De eerste zal waarschijnlijk weinig invloed hebben, de laatste kan door verandering van den invalshoek van de bladelementen van beteekenis zijn. Hierover is echter nog weinig bekend.

8. Conclusies.

Het onderzoek leidde tot de volgende conclusies:

a. de combinatie bestaande uit een motorgondel van ongeveer denzelfden vorm als bij meermotorige vliegtuigen gebruikelijk en een schroef van dezelfde relatieve afmetingen als hierbij gebezigd wordt, leverde een lage waarde (ten hoogste 0,60) van het netto-nuttig-effect, d.w.z. het nuttig-effect, dat berekend werd voor de trek geleverd door de eenheid motorgondel-schroef (punt 6*b*);

b. de gebezigde schroef had, op zichzelf beschouwd, een behoorlijk nuttig-effect, de ongunstige uitkomst voor de combinatie is te wijten aan grooten weerstand van de motorgondel en belangrijke vergrooting van dezen door den slipstroom (punt 6*b*);

c. verwacht wordt, dat verbetering verkregen kan worden door den weerstand van de motorgondel te verminderen en door een grootere schroef te gebruiken, in beide gevallen moet de schroef behoorlijk aangepast worden aan de omstandigheden (punt 6*b*);

---

[5]) Zie o. a. FAGE. A. Airscrews in theory and experiment. (Constable & Co. 1920). Chapter IV.

[6]) Zie o. a. de in de noten [2]) en [5]) gegeven literatuur.

[7]) DOUGLAS G. P. and PERRING G. A. Wind tunnel tests with high tip speed airscrews. The characteristics of a biconvex aerofoil at high speeds. Aeronautical Research Committee. R.M. 1091.

Na het afsluiten van het rapport verscheen:

DOUGLAS G. P. Experiments on model airscrews at high tip speeds. The Journal of the Royal Aeronautical Society, June 1928, p. 482.

Dit artikel, dat hier niet meer besproken kon worden, geeft een overzicht van alle op dit gebied in Engeland uitgevoerde modelmetingen. Het bevat ook eenige opmerkingen over den invloed van de waarde van het Reynolds'sche getal op de grens, waarboven de invloed van groote omtreksnelheid merkbaar wordt en over de elastische vervorming van schroeven.

[8]) BRIGGS L. J., HULL G. F. and DRYDEN H. L. Aerodynamic characteristics of airfoils at high speeds. National Advisory Committee for Aeronautics. Report no. 207.

d. verbetering van den weerstand van de motorgondel is waarschijnlijk te verkrijgen door het aanbrengen van een stroomlijnvormig lichaam achter of ten deele om den motor, een aanwijzing in deze richting werd verkregen, doordat door het aanbrengen van een matig stroomlijnlichaam, waarvan het grootspant belangrijk grooter was dan het geprojecteerde oppervlak van den motor, toch eenige verbetering van den weerstand verkregen werd (punt 6*d*);

e. het gebruik van een relatief grootere schroef aan dezelfde motorgondel gaf een verbetering van het netto-nuttig-effect (maximum-waarde 0,68); daar de schroef zelf iets minder gunstig was, mag aangenomen worden, dat betere resultaten bereikbaar zijn (punt 6*c*);

f. de weerstandsvermeerdering van de motorgondel door den slipstroom kan meerdere malen de weerstand van deze zonder slipstroominvloed bedragen (punt 6*b*);

g. de aanwezigheid van de motorgondel achter de schroef schijnt een belangrijke vergrooting van het schijnbare nuttig-effect van deze te kunnen veroorzaken (punt 6*b*);

h. de verkregen resultaten mogen slechts dan op waregrootte-schroeven toegepast worden, indien de tipsnelheid van deze lager is dan een grenswaarde, die op ongeveer 260 m/sec. geschat wordt, bij hoogere waarden van deze wordt afname van trek-coëfficient en nuttig-effect, toename van momentencoëfficient verwacht (punt 7).

(Afgesloten Juni 1928).

Naschrift.

Op het oogenblik van publicatie van dit rapport is bij den R.S.L. een onderzoek in voorbereiding, waarbij getracht zal worden voor motorgondels van het hier beschouwde type een vorm te vinden, die betere uitkomsten oplevert. Hierbij zal o.m. gebruik gemaakt worden van bij Amerikaansche metingen (N.A.C.A. Report n°. 313 en 314) verkregen resultaten.

TABEL II.

Gegevens van schroefmodel nr. 11.

Afstand v. het hart v. d. schroef	Bladhoek		Bladbreedte		Bladdikte	
	blad 1	blad 2	blad 1	blad 2	blad 1	blad 2
0	—	—	8.53	—	0.73	—
9.1	33°35′	35°10′	8.15	8.15	0.73	0.73
12.2	36°50′	37°20′	7.97	7.97	0.73	0.73
15.1	35°0′	36°0′	7.71	7.68	0.73	0.73
18.1	31°25′	32°25′	7.46	7.41	0.73	0.73
21.1	26°25′	27°40′	7.21	7.13	0.73	0.73
24.2	22°20′	23°40′	6.91	6.84	0.73	0.73
27.2	20°10′	21°35′	6.54	6.54	0.73	0.73
30.2	18°20′	19°30′	6.22	6.18	0.73	0.73
33.3	16°55′	17°0′	5.87	5.82	0.73	0.73
36.3	15°25′	15°30′	5.42	5.40	0.73	0.73
39.4	14°20′	14°10′	4.98	4.88	0.71	0.71
42.4	13°10′	13°0′	4.35	4.25	0.65	0.65
45.4	11°40′	11°40′	3.71	3.60	0.60	0.60
48.4	12°10′	12°35′	2.98	2.90	0.47	0.47

Alle maten in % van de middellijn.
Middellijn van de schroef = 0.275 m.
Spoed op $^2/_3$ van de straal = 0.175 m = 64 % v. d. middellijn.

TABEL III.

Gegevens van schroefmodel nr. 6.

Afstand v. het hart v. d. schroef	Bladhoek		Bladbreedte		Bladdikte	
	blad 1	blad 2	blad 1	blad 2	blad 1	blad 2
0	—	—	9.37	—	0.61	—
5.0	10°20′(?)	12°25′(?)	8.72	8.70	0.61	0.61
10.0	38°30′	37°20′	8.06	8.06	0.61	0.61
15.0	38°0′	38°0′	7.46	7.49	0.61	0.61
20.0	34°40′	34°30′	7.02	7.02	0.61	0.61
25.0	30°35′	29°30′	6.55	6.53	0.61	0.61
30.0	25°30′	24°20′	6.06	6.02	0.61	0.61
35.0	22°25′	21°10′	5.44	5.40	0.61	0.61
40.0	19°50′	18°40′	4.62	4.58	0.61	0.61
45.0	17°25′	16°10′	3.61	3.56	0.61	0.61
47.5	14°25′	14°40′	3.08	3.08	0.61	0.61

Alle maten in % van de middellijn.
Middellijn van de schroef = 0.330 m.
Spoed op $^2/_3$ van de straal = 0.290 m = 88 % v. d. middellijn.

Toelichting van de Tabellen IV *t/m* X.

c_T = netto-trek-coëfficient
c_M = momentencoëfficient
η = netto-nuttig-effect
c'_T = bruto-trek-coëfficient
η' = bruto-nuttig-effect
η'' = nuttig-effect van de afzonderlijke schroef.

De netto-coëfficienten zijn berekend uit de trekkracht geleverd door de combinatie schroef-motorgondel (zie punt 5*a*), de bruto-coëfficienten werden verkregen door hierbij den weerstand van de motorgondel (zonder slipstroominvloed) op te tellen (zie punt 5*c*). Het nuttig effect van de afzonderlijke schroef werd op de in punt 5*d* besproken wijze berekend, de indices 1 en 2 beteekenen verschillende aannamen hierbij over den slipstroominvloed.

TABEL IV.

Schroef nr. 11 (D = 0.275 m) met motorgondel nr. 1 (Jupiter-motor).

1e meting.

V	V/nD	c_T	c_M	η	c_T'	η'
8.5	0.320	0.0663	0.00705	0.481	0.0702	0.507
10.3	0.396	0.0622	0.00706	0.555	0.0678	0.605
11.9	0.455	0.0553	0.00686	0.585	0.0634	0.669
13.3	0.505	0.0487	0.00666	0.588	0.0582	0.702
14.6	0.553	0.0394	0.00611	0.568	0.0513	0.739
16.9	0.626	0.0265	0.00535	0.493	0.0410	0.764
18.9	0.700	0.0086	0.00392	0.244	0.0263	0.747
20.7	0.767	-0.0081	0.00222	-0.444	0.0126	0.693

TABEL V.

Schroef nr. 11 (D = 0.275 m) met motorgondel nr. 1 (Jupiter-motor).

2e meting.

V	V/nD	c_T	c_M	η	c_T'	η'
8.4	0.312	0.0667	0.00688	0.480	0.0704	0.508
12.0	0.442	0.0561	0.00663	0.595	0.0636	0.675
14.7	0.542	0.0443	0.00642	0.594	0.0556	0.747
19.0	0.699	0.0093	0.00411	0.251	0.0268	0.725

TABEL VI.

Schroef nr. 6 (D = 0.330 m) met motorgondel nr. 1 (Jupiter-motor).

V	V/nD	c_T	c_M	η	c_T'	η'
16.9	0.529	0.0638	0.00894	0.600	0.0710	0.669
18.9	0.591	0.0615	0.00860	0.674	0.0703	0.769
19.7	0.598	0.0542	0.00760	0.679	0.0629	0.788
20.7	0.640	0.0530	0.00800	0.675	0.0631	0.803
22.4	0.690	0.0475	0.00785	0.664	0.0593	0.830
24.0	0.736	0.0415	0.00740	0.656	0.0551	0.872

TABEL VII.

Schroef nr. 11 (D = 0.275 m) met motorgondel nr. 2 (F VII-kop).

V	V/nD	c_T	c_M	η	c_T'	η'
10.3	0.376	0.0580	0.00706	0.492	0.0629	0.533
11.8	0.424	0.0535	0.00668	0.540	0.0597	0.603

TABEL VIII.

Schroef nr. 6 (D = 0.330 m) met motorgondel nr. 2 (F VII-kop).

V	V/nD	c_T	c_M	η	c_T'	η'
16.8	0.507	0.0580	0.00870	0.538	0.0639	0.593
18.8	0.572	0.0574	0.00863	0.607	0.0684	0.684
20.6	0.617	0.0498	0.00783	0.624	0.0581	0.729

TABEL IX.

Schroef nr. 11 (D = 0.275 m) met motorgondel nr. 3 (gladde kop).

V	V/nD	c_T	c_M	η	c_T'	η'	η_1'	η_2''
8.4	0.302	0.0678	0.00702	0.474	0.0682	0.477	0.55	0.54
11.8	0.427	0.0606	0.00664	0.620	0.0613	0.627	0.74	0 71
14.5	0.520	0.0492	0.00610	0.666	0.0503	0.681	0.81	0.77

TABEL X.

Schroef nr. 6 (D = 0.330 m) met motorgondel nr. 3 (gladde kop).

V	V/nD	c_T	c_M	η	c_T'	η'	η_1''	η_2''
18.8	0.569	0.0608	0.00856	0.643	0.0615	0.651	0.74	0.71
22.3	0.662	0.0519	0.00817	0.669	0.0523	0.674	0.78	0.74

Toelichting van de tabellen XI *t/m* XIII.

c_{w_1}, c_{w_2}, c_{w_3}, = weerstands-coëfficienten, op de gewone wijze berekend voor de grootspant-oppervlakken resp. van de motorgondels nr. 1, 2 en 3.

c_{w_6}', $c_{w_{11}}'$, = weerstandscoëfficienten, berekend op de in punt *5b* aangegeven wijze, resp. voor de schroeven nr. 6 en 11.

TABEL XI.

Motorgondel nr. 1 (Jupiter-motor) zonder schroef.

V	c_{w_1}	c_{w_3}	c_{w_6}'	$c_{w_{11}}'$
8.4	0.58	1.50	0.0267	0.0383
10.2	0.53	1.38	0.0244	0.0351
11.8	0.59	1.53	0.0272	0.0390
13.2	0.56	1.45	0.0257	0.0369
14.5	0.59	1.52	0.0270	0.0387
16.7	0.56	1.46	0.0258	0.0371
18.7	0.55	1.43	0.0253	0.0363
19.6	0.53	1.37	0.0242	0.0348
20.5	0.53	1.38	0.0244	0.0351

TABEL XII.

Motorgondel nr. 2 (F VII-kop) zonder schroef.

V	c_{w_1}	c_{w_2}	c_{w_3}	c_{w_6}'	$c_{w_{11}}'$
8.4	0.53	0.28	1.37	0.0244	0.0350
11.8	0.52	0.27	1.34	0.0239	0.0343
14.5	0.53	0.28	1.36	0.0241	0.0346
16.8	0.51	0.27	1.32	0.0233	0.0335
18.7	0.49	0.26	1.27	0.0225	0.0322
20.5	0.48	0.25	1.23	0.0219	0.0314

TABEL XIII.

Motorgondel nr. 3 (gladde kop) zonder schroef.

V	c_{w_3}	c_{w_6}'	$c_{w_{11}}'$
11.8	0.26	0.0047	0.0071
16.8	0.16	0.0028	0.0040
20.6	0.08	0.0015	0.0020

Rapport V. 285.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III.

door

ir. C. KONING.

Rapport V. 285: L'influence des nervures sur la résistance des ailes *III.*

Report V. 285: The influence of the ribs on the strength of aeroplane-wings III.

Bericht V. 285: Der Einfluss der Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln III.

RAPPORT V 285.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III.

Uittreksel.

a. Inleiding (punt 1).
In de rapporten V 175 en V 284 [1]) werden de differentiaalvergelijkingen afgeleid voor de liggers van een vleugel, waarbij de invloed van de ribben wèl, die van de bekleeding niet in rekening gebracht werd. Deze vergelijkingen worden hier voor het geval van constanten liggerafstand, zonder verdere beperkende aannamen, in eenvoudiger vorm gebracht.

b. De oorspronkelijke vergelijkingen (punt 2).
Deze zijn voor constanten liggerafstand gegeven als I*a*, of in verkorten vorm geschreven I*b*. De gevraagde oplossingen moeten voldoen aan de randvoorwaarden gegeven door de betrekkingen II 1 t/m 9.

c. Eerste vereenvoudiging (punt 3).
Door integreeren gaan de vergelijkingen over in III.

d. Geconcentreerde lasten (punt 4).
Tot nu toe werd aangenomen, dat de uitwendige belastingen continu over de liggers verdeeld waren. Zijn ook geconcentreerde lasten aanwezig, dan krijgen de vergelijkingen den vorm IV.

e. Tweede vereenvoudiging (punt 5 t/m 7).
Door optellen van de beide vergelijkingen IV, gevolgd door integreeren ontstaat V 1, door samenvoegen van deze vergelijkingen op andere wijze V 2, zoodat de beide vergelijkingen voor de liggers nu in den in punt 7 als V gegeven vorm verkregen zijn. De uitkomsten moeten voldoen aan de randvoorwaarden VI 1 t/m 5.

f. Oplossing van de verkregen vergelijkingen (punt 8).
De oplossing van de vergelijkingen kan met behulp van bekende methoden geschieden. Hierbij kan de vergelijking V 2 als van de 2e orde in $(y_1 - y_2)'$ behandeld worden, een literatuuropgave van hiertoe bestaande benaderingsmethoden is bijgevoegd.

g. Oplossingen in gesloten vorm (punt 9).
Voor bepaalde vormen van de in vergelijking V 2 voorkomende functies is oplossing van deze vergelijking met behulp van Besselsche functies mogelijk.

RAPPORT V 285.

L'influence des nervures sur la résistance des ailes III.

Résumé.

a. Introduction (point 1).
Dans les rapports V. 175 et V. 284 [2]) les équations différentielles ont été données pour les longerons d'une aile en considérant l'influence des nervures, mais pas celle du revêtement.

Ces équations ont été transformées ici dans une forme simplifiée, sans aucune hypothèse restrictive, pour le cas d'une distance constante des longerons.

b. Les équations initiales (point 2).
Les équations pour une distance constante des longerons ont la forme donnée par Ia, ou la forme abrégée donnée par Ib. Les solutions demandées doivent remplir les conditions marginales données par les rapports II 1 jusqu'à 9.

c. Première simplification (point 3).
En intégrant on obtient les équations III.

d. Charges concentrées (point 4).
Jusqu'ici, il fut admis que les charges extérieures étaient réparties continu sur les longerons. S'il y a des charges concentrées, les équations ont la forme IV.

e. Deuxième simplification (point 5, 6, 7).
En additionnant les deux équations IV et en intégrant ensuite, on obtient V 1, en ajoutant ces équations d'une autre manière V 2, de sorte qu'on obtient maintenant les deux équations pour les longerons dans la forme donnée comme V dans le point 7.

Les solutions doivent remplir les conditions marginales VI 1 jusqu'à 5.

f. Solution des équations obtenues (point 8).
La solution des équations peut se faire à l'aide de méthodes connues. Ici l'équation V 2 peut être traitée comme de deuxième ordre en $(y_1 - y_2)'$. Une épreuve de littérature sur les méthodes de rapprochement existant à cet effet est annexée („literatuuropgave").

g. Solution par des fonctions connues (point 9).
Pour des formes spéciaux des fonctions apparaissant dans l'équation V 2 la solution de cette équation est possible avec les fonctions de Bessel.

h. Notations.
x = distance jusqu'au point d'appui (variable indépendante).
y = ordonnée de la ligne de flexion,
S_b = coefficient de rigidité à la flexion,
S_t = coefficient de rigidité à la torsion,
q = charge extérieure continue,
Q = charge concentrée,
b = distance des longerons,
l = longueur des longerons,

Les indices 1 et 2 indiquent si les grandeurs considérées se réfèrent aux longerons avant ou arrière.

Pour M, D et r voir les définitions, données dans point 7.

REPORT V 285.

The influence of the ribs on the strength of aeroplane wings III.

Summary.

a. Introduction (point 1).
In reports V. 175 and V. 284 [3]) the differential equations are given for the spars of a wing, whereby the influence of the ribs was taken into account, but that of the wing-covering was neglected. These equations are transformed here to a simpler form, without further limiting suppositions, for the case of constant spar-distance.

b. The original equations (point 2).
For constant spar-distance these are given as Ia or in a more condensed form as Ib. The solutions required have to fulfil the marginal conditions given by the relations II 1—9.

c. First simplification (point 3).
By integration the equations change into III.

d. Concentrated loads (point 4).
Hitherto it has been assumed that the external loads were continuous. If concentrated loads are also present, the equations take the form IV.

e. Second simplification (points 5—7).
By adding the two equations IV, followed by integration, the equation V 1 arises. V 2 is obtained by combining these equations in another way, so that the equa-

[1]) Zie noot 1 van het rapport.
[2]) Voir note 1 du rapport.
[3]) See note 1 in report.

tions for the spars are now obtained in the form indicated in point 7 as V. The results must fulfil the marginal conditions VI 1—5.

f. Solution of the equations (point 8).

The solution of the equations can be obtained by means of known methods. The equation V 2 is to be treated as one of the second order in $(y_1-y_2)'$. A list of literature concerning the methods of approximation, that may be employed here, is attached („literatuuropgave").

g. Solutions in known functions (point 9).

For certain forms of the functions occuring in equation V 2, a solution of this equation is possible by means of Bessel functions.

h. Notations.

x = distance from the origin (independant variable),
y = ordinate of the elastic line (deflection),
S_b = factor of stiffness against bending,
S_t = factor of stiffness against twisting,
q = continuous external load,
Q = concentrated load,
b = distance of spars,
l = length of spars.

The indices 1 and 2 show whether the quantity under consideration refers to the front or the rear spar.

For M, D and r see definitions given in point 7.

BERICHT V 285.

Der Einfluss der Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln III.

Zusammenfassung.

a. Einleitung (Punkt 1).

In den Berichten V. 175 und V. 284 [1]) wurden die Differentialgleichungen für die Holme eines Flügels abgeleitet, wobei der Einfluss der Rippen berücksichtigt wurde, der der Beplankung aber nicht.

Diese Gleichungen werden hier für den Fall eines konstanten Holmabstands, ohne weitere einschränkende Annahmen, in einfache Form gebracht.

b. Die ursprünglichen Gleichungen (Punkt 2).

Diese sind für konstanten Holmabstand als Ia gegeben, oder in verkürzter Form Ib geschrieben. Die gefragten Lösungen sollen den durch II 1 bis 9 gegebenen Randbedingungen genügen.

c. Erste Vereinfachung (Punkt 3).

Durch Integration van x bis l gehen die Gleichungen in III über.

d. Konzentrierte Lasten (Punkt 4).

Bis jetzt wurde angenommen, dass die äusseren Belastungen stetig über die Holme verteilt waren. Sind auch konzentrierte Lasten vorhanden, dann erhalten die Gleichungen die Form IV.

e. Zweite Vereinfachung (Punkt 5 bis 7).

Durch Zusammenzählen der beiden Gleichungen IV und nachherige Integration entsteht V 1. Durch Zusammenfügen dieser Gleichungen auf andere Weise V 2, sodass die beiden Gleichungen für die Holme nun in der in Punkt 7 als V gegebene Form erhalten sind.

Die Lösungen sollen den Randbedingungen VI 1 bis 5 genügen.

f. Lösung der erhaltenen Gleichungen (Punkt 8).

Die Lösung der Gleichungen kann mit Hilfe bekannter Methoden geschehen. Hierbei kann die Gleichung V2 als von der zweiten Ordnung in $(y_1-y_2)'$ behandelt werden. Eine Literaturangabe von bekannten Näherungsverfahren ist beigefügt („literatuuropgave").

g. Lösungen in geschlossener Form (Punkt 9).

Für gewissen Formen der in der Gleichung V2 vorkommenden Funktionen ist die Lösung dieser Gleichung mit Hilfe von Besselschen Funktionen möglich.

h. Erklärung der benutzten Formelzeichen.

x = Abstand vom Einspannpunkt (unabhängige Variabele),
y = Ordinate der elastischen Linie,
S_b = Biegungssteifigkeit,
S_t = Verdrehungssteifigkeit,
q = stetig verteilte äussere Belastung,
Q = konzentrierte Last,
b = Holmabstand,
l = Holmlänge.

Die Zeiger 1 und 2 geben an, ob die betrachtete Grösse auf den vorderen oder hinteren Holm Bezug hat.

Für M, D und r siehe die in Punkt 7 gegebenen Definitionen.

[1]) s. Fusznote 1 des Berichtes.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III

door

ir. C. KONING.
Rapport V. 285. Rijksstudiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Voor vleugels met constanten liggerafstand wordt een vereenvoudiging van de in rapport V. 175 en V. 284 [1]) afgeleide differentiaalvergelijkingen voor het ligger-rib-systeem van een vleugel zonder bekleeding gegeven. Hierbij worden geen verdere beperkende aannamen ingevoerd. — De gang van de oplossing van de verkregen vergelijkingen voor een willekeurigen vleugel en de mogelijkheid van oplossingen in gesloten vorm in speciale gevallen worden kort besproken.

1. Inleiding.

In rapport V. 175 [1]) werden onder daar nader besproken aannamen de differentiaalvergelijkingen afgeleid voor de liggers van een vleugel, waarbij de invloed van het ribverband wèl, die van de bekleeding daarentegen niet in rekening werd gebracht. Hierbij werden methoden aangegeven om een benaderingsoplossing van deze vergelijkingen te verkrijgen, zoowel voor het meest algemeene geval als voor dat, waarbij de verhouding van de buigingsstijfheidsfactoren van de beide liggers over de geheele vleugelbreedte een constante waarde heeft. Beide methoden geven echter aanleiding tot vrij ingewikkelde berekeningen, waarbij bovendien nog het bezwaar komt, dat hier een randvoorwaarde optreedt, die een vrij diepgaand inzicht in het vraagstuk verlangt en daardoor gemakkelijk aanleiding kan geven tot vergissingen.

In het volgende wordt voor het in de praktijk meest voorkomende geval, dat de liggerafstand over de geheele vleugelbreedte constant is, een omvorming van de differentiaalvergelijkingen gegeven, waardoor deze, en daarmede ook hun oplossing, vereenvoudigd worden, terwijl bovendien de moeilijkheid met de bovenbedoelde randvoorwaarde ontgaan wordt. Er moge hier opgemerkt worden, dat deze vereenvoudiging niet verkregen wordt door het invoeren van verdere aannamen (behalve dan die van constanten liggerafstand).

De hier verkregen vergelijkingen bieden nog een ander voordeel. Zij geven namelijk de mogelijkheid om, op soortgelijke wijze als dit in rapport V. 175 voor het eenvoudige geval van den prismatischen vleugel gegeven werd, doch nu voor meer algemeene gevallen, oplossingen in gesloten vorm te verkrijgen, hetgeen voor een nadere bestudeering van den invloed van verschillende factoren van belang kan zijn (zie verder punt 9).

In de rapporten V. 175 en V. 284 werd de uitwendige belasting van den vleugel als continu verdeeld aangenomen. In vele gevallen zullen echter ook geconcentreerde lasten voorkomen (b.v. bij niet- of half-vrijdragende vleugels; aan den vleugel opgehangen motorgondels; ophangpunten van den romp, die niet samenvallen met de, meestal in het symmetrievlak van den vleugel gedachte „inklempunten"). In het volgende zal daarom de belasting als bestaande uit continu verdeelde belastingen op de liggers en aan deze aangrijpende geconcentreerde lasten aangenomen worden, die allen loodrecht op het vleugelvlak werken.

2. De oorspronkelijke differentiaalvergelijkingen en hun randvoorwaarden.

De in rapport V. 175 (punt 8, vergel. II) en V. 284 (punt 8, vergel. 4b) afgeleide vergelijkingen luiden voor het geval van constanten liggerafstand:

$$\left.\begin{aligned}(S_{1b}\, y_1'')'' &= q_1 + \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}\,(y_1 - y_2)'' + \\ &\quad + \frac{(S_{1t} + S_{2t})'}{b^2}\,(y_1 - y_2)' \\ (S_{2b}\, y_2'')'' &= q_2 - \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}\,(y_1 - y_2)'' - \\ &\quad - \frac{(S_{1t} + S_{2t})'}{b^2}\,(y_1 - y_2)'\end{aligned}\right\} \quad \text{Ia}$$

Schrijft men hierin:

$$r = \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$$

en houdt men rekening met het feit, dat

$$r' = \frac{(S_{1t} + S_{2t})'}{b^2}$$

dan kunnen zij eenvoudiger geschreven worden:

$$\begin{aligned}(S_{1b}\, y_1'')'' &= q_1 + \left\{ r\,(y_1 - y_2)' \right\}' \\ S_{2b}\, y_2'')'' &= q_2 - \left\{ r\,(y_1 - y_2)' \right\}'\end{aligned} \quad . \quad . \quad \text{Ib}$$

Hierin beteekent:

S_b = stijfheidsfactor tegen buiging;
S_t = stijfheidsfactor tegen wringing;
b = liggerafstand;
q = uitwendige belasting (continu verdeeld over den ligger);
y = ordinaat van de elastische lijn.

De indices 1 en 2 geven aan of de beschouwde grootheid betrekking heeft op den voor-, dan wel op den achterligger.

Is het punt $x = 0$ het inklempunt van de liggers en

---

[1]) BIEZENO, C. B., KOCH, J. J. en KONING, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R.S.L. Rapport V. 175. *De Ingenieur*, 13 November 1926 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel IV, blz. 101—137.
In verkorten vorm ook als:
BIEZENO, C. B., KOCH, J. J. und KONING, C. Über die Berechnung von freitragenden *Flugzeugflügeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1926. S. 97—105.
Een eenvoudiger afleiding van de differentiaalvergelijkingen voor een vleugel met constanten ligger-afstand is gegeven in:
KONING, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II. R.S.L. Rapport V. 284. *De Ingenieur*, 12 Januari 1929 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 1—8.

is de liggerlengte l, dan zijn de randvoorwaarden (zie V. 175, punt 11, ook V. 284, punt 9):

$$x = 0 : y_1 = 0;\; y_2 = 0;\; y_1' = 0;\; y_2' = 0; \qquad \text{II } 1,2,3,4$$

$$x = l : y_1'' = 0;\; y_2'' = 0;\; (S_{1b}\, y_1'')' = X;\; (S_{2b}\, y_2'')' = -X$$

$$X = \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}(y_1 - y_2)' \qquad \text{II } 5,6,7,8,9$$

3. Eerste vereenvoudiging van de vergelijkingen voor continu verdeelde belasting.

Door de eerste vergelijking Ib van x naar l te integreeren, wordt verkregen:

$$(S_{1b}\, y_1'')'_{\xi = l} - (S_{1b}\, y_1'')' = \int_x^l q_1\, d\xi +$$

$$+ \left\{ r(y_1 - y_2)' \right\}_{\xi = l} - r(y_1 - y_2)'$$

Hierbij beteekenen de door $\xi = l$ aangeduide grootheden de waarde van deze voor het uiteinde van den ligger, de overigen die voor het punt x.

Volgens de in het vorige punt gegeven betrekkingen II7 en 9 is:

$$(S_{1b}\, y_1'')'_{\xi = l} = \left\{ r(y_1 - y_2)' \right\}_{\xi = l}$$

Wordt dit ingevoerd en bovendien

$$-\int_x^l q_1\, d\xi = D_1$$

gesteld, dan gaat de vergelijking over in:

$$(S_{1b}\, y_1'')' = D_1 + r(y_1 - y_2)'$$

De tweede vergelijking Ib kan op dezelfde wijze behandeld worden, zoodat verkregen wordt

$$\left.\begin{aligned} (S_{1b}\, y_1'')' &= D_1 + r(y_1 - y_2)' \\ (S_{2b}\, y_2'')' &= D_2 - r(y_1 - y_2)' \end{aligned}\right\} \qquad \text{III}$$

met

$$D_1 = -\int_x^l q_1 d\xi, \quad D_2 = -\int_x^l q_2\, d\xi$$

De oplossingen van deze vergelijkingen moeten voldoen aan de in punt 2 als II 1 t/m 6 gegeven randvoorwaarden. De beide randvoorwaarden, gegeven door de betrekkingen II 7 t/m 9, vervallen echter, daar iedere oplossing van de vergelijkingen III hieraan voldoet.

4. Het invoeren van geconcentreerde lasten.

In het volgende zal onder een „buiten" het punt x_1 gelegen punt x een punt verstaan worden, dat tusschen het eerstgenoemde en het vleugeluiteinde ligt ($x_1 < x \leq l$). Het punt x ligt daarentegen „binnen" het punt x_1, wanneer het zich bevindt tusschen het laatstgenoemde en het inklempunt ($0 \leq x < x_1$).

Naast de reeds bestaande continu verdeelde belasting q op een ligger, zij op deze een tweede, voorloopig eveneens continu verdeelde q^* aangenomen, die tusschen de punten $x_1 - \epsilon$ en $x_1 + \epsilon$ de constante waarde $q^* = -\frac{Q}{2\epsilon}$ heeft en in alle overige punten nul is. Voor buiten $(x_1 + \epsilon)$ gelegen punten blijft de in het vorige punt ingevoerde integraal over de uitwendige belasting onveranderd:

$$D = -\int_x^l q\, d\xi$$

voor de binnen $(x_1 - \epsilon)$ gelegen punten wordt zij daarentegen

$$D^{**} = -\int_x^l q\;\; d\xi - \int_{x_1 - \epsilon}^{x_1 + \epsilon} q^*\, d\xi = -\int_x^l q\; d\xi + Q = D + Q$$

Neemt nu ϵ tot nul af, m.a.w. wordt de aanvankelijk continu verdeelde belasting q^* samengetrokken tot een geconcentreerden last Q in het punt x_1, dan blijven deze uitkomsten onveranderd; de integraal over de totale uitwendige belasting vertoont dus een eindigen sprong ter grootte van Q wanneer x door het punt x_1 gaat.

Op grond van deze beschouwing kunnen de vergelijkingen III dus uitgebreid worden voor het geval, dat naast de continu verdeelde belastingen ook geconcentreerde lasten voorkomen. Zij luiden dan:

$$\left.\begin{aligned} (S_{1b}\, y_1'')' &= D_1 + \Sigma\, Q_1 + r(y_1 - y_2)' \\ (S_{2b}\, y_2'')' &= D_2 + \Sigma\, Q_2 - r(y_1 - y_2)' \end{aligned}\right\} \qquad \text{IV}$$

Hierin hebben D_1 en D_2 dezelfde beteekenis als boven bij de vergelijkingen III aangegeven werd, waarbij q_1 en q_2 ook hier alleen de continu verdeelde belastingen zijn. Q daarentegen beteekent een geconcentreerde last, die positief is, wanneer zij naar boven, d.w.z. volgens de negatieve y - *as*, gericht is. De indices 1 en 2 geven ook hier aan of de krachten aan den voor-, dan wel aan den achterligger aangrijpen. De door Σ aangeduide som omvat die krachten, waarvan het aangrijpingspunt buiten het beschouwde punt x ligt.

De in punt 3 besproken randvoorwaarden blijven hier natuurlijk onveranderd.

5. Tweede vereenvoudiging van de vergelijkingen, A. [2])

Worden de beide in punt 4 gegeven vergelijkingen IV bij elkaar opgeteld, dan levert dit:

$$(S_{1b}\, y_1'')' + (S_{2b}\, y_2'')' = D_1 + \Sigma\, Q_1 + D_2 + \Sigma\, Q_2 \quad [3])$$

Integreeren van deze vergelijkingen van x naar l geeft, daar volgens de in punt 2 gegeven randvoorwaarden II 5, 6

$$(S_{1b}\, y_1'')_{\xi = l} = (S_{2b}\, y_2'')_{\xi = l} = 0$$

is:

$$S_{1b}\, y_1'' + S_{2b}\, y_2'' = -\int_x^l D_1\, d\xi - \int_x^l \Sigma\, Q_1\, d\xi - \int_x^l D_2\, d\xi -$$

$$- \int_x^l \Sigma\, Q_2\, d\xi$$

De beteekenis van de integralen $\int_x^l \Sigma\, Q\, d\xi$ dient nog nader besproken te worden. Is er slechts één geconcentreerde last, b.v. Q_{11} aan den voorligger in het punt x_1, dan is door de in punt 4 gegeven beteekenis van het symbool Σ:

$$0 \leq x < x_1 \qquad Q_1 = Q_{11}$$

$$x_1 < x \leq l \qquad Q_1 = 0$$

De bedoelde integraal wordt dus in dit geval

$$0 \leq x < x_1 \qquad \int_x^l \Sigma\, Q_1\, d\xi = \int_x^{x_1} Q_{11}\, d\xi = Q_{11}\,(x_1 - x)$$

[2]) In dit punt wordt een vergelijking (V1) afgeleid, die volgens de in rapport V. 284 aangegeven methode langs eenvoudiger weg, namelijk uit de evenwichtsvoorwaarden van het buiten x gelegen deel van den vleugel, gevonden kan worden. Bij de daar gegeven beschouwingen werden alleen continu verdeelde belastingen aangenomen, doch invoering van geconcentreerde lasten zou geenerlei bezwaar opleveren. Daar nu echter uitgegaan werd van de vergelijkingen in den in punt 2 gegeven vorm, hetgeen met het oog op verdere afleidingen gewenscht was, werd ook de hier aangegeven weg om de bedoelde vergelijking te verkrijgen volledigheidshalve opgenomen.

[3]) De nu volgende wiskundige beschouwingen kan men ontgaan door te letten op de analogie met het vraagstuk van den eenzijdig ingeklemden balk met continu verdeelde belasting en geconcentreerde lasten, welke verkregen wordt door $S_{1b}\, y_1''$ en $S_{2b}\, y_2''$ samen te vatten tot één grootheid $S_b\, y''$, de beide integralen $D_1 = -\int_x^l q_1\, d\xi$ en $D_2 = -\int_x^l q_2\, d\xi$ tot $D = -\int_x^l q\, d\xi$ en de beide sommen $\Sigma\, Q_1$ en $\Sigma\, Q_2$ tot $\Sigma\, Q$. De geldigheid van vergelijking V1 is dan zonder meer duidelijk.

$$x_1 < x \leq l \qquad \int_x^l \Sigma\, Q_1\, d\xi = 0$$

Zijn er meerdere krachten Q, dan zal de integraal $\int_x^l \Sigma\, Q\, d\xi$ bestaan uit even zoovele termen van den aangegeven vorm, dus

$$\int_x^l \Sigma\, Q\, d\xi = \Sigma\, Q_n (x_n - x)$$

Het Σ-teeken behoudt hierbij de in punt 4 besproken beteekenis, namelijk de som van die termen, die het gevolg zijn van de buiten het beschouwde punt aangrijpende krachten.

De geïntegreerde vergelijking gaat dus over in

$$S_{1b}\, y_1'' + S_{2b}\, y_2'' = $$
$$= -\int_x^l D_1\, d\xi - \Sigma\, Q_{1n} (x_n - x) - \int_x^l D_2\, d\xi - \Sigma\, Q_{2n} (x_n - x)$$

of met

$$\int_x^l D_1\, d\xi + \Sigma\, Q_{1n} (x_n - x) = M_1$$

$$\int_x^l D_2\, d\xi + \Sigma\, Q_{2n} (x_n - x) = M_2$$

$$S_{1b}\, y_1'' + S_{2b}\, y_2'' = -M_1 - M_2 \qquad \text{V1.}$$

Gaat men de mechanische beteekenis der hier ingevoerde grootheden M_1 en M_2 na, dan blijken deze gelijk te zijn aan de momenten van de totale uitwendige belasting op het buiten het punt x gelegen deel van den beschouwden ligger om dit punt.

6. Tweede vereenvoudiging van de vergelijkingen, B.

Worden de beide vergelijkingen IV na vermenigvuldiging resp. met $\frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}$ en $\frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}$ van elkaar afgetrokken, dan geeft dit:

$$\frac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} (y_1 - y_2)''' + \frac{S_{1b}'\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, y_1'' -$$
$$- \frac{S_{1b}\, S_{2b}'}{S_{1b} + S_{2b}}\, y_2'' = \frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, D_1 +$$
$$+ \frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, \Sigma\, Q_1 - \frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, D_2 -$$
$$- \frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, \Sigma\, Q_2 + r (y_1 - y_2)'$$

Optellen van deze bij de met $-\frac{S_{1b}\, S_{2b}' - S_{1b}'\, S_{2b}}{(S_{1b} + S_{2b})^2}$ vermenigvuldigde vergelijking V 1 geeft na eenige vereenvoudiging:

$$\frac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} (y_1 - y_2)''' + \frac{S_{1b}^2\, S_{2b}' + S_{1b}'\, S_{2b}^2}{(S_{1b} + S_{2b})^2} (y_1 - y_2)'' -$$
$$- r (y_1 - y_2)' = - \frac{S_{1b}\, S_{2b}' - S_{1b}'\, S_{2b}}{(S_{1b} + S_{2b})^2} (M_1 + M_2) +$$
$$+ \frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, D_1 + \frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, \Sigma\, Q_1 -$$
$$- \frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, D_2 - \frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, \Sigma\, Q_2$$

Nu is:

$$\left(\frac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} \right)' = \frac{S_{1b}^2\, S_{2b}' + S_{1b}'\, S_{2b}^2}{(S_{1b} + S_{2b})^2}$$

$$\left(\frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} \right)' = \frac{S_{1b}\, S_{2b}' - S_{1b}'\, S_{2b}}{(S_{1b} + S_{2b})^2}$$

$$\left(\frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}} \right)' = - \frac{S_{1b}\, S_{2b}' - S_{1b}'\, S_{2b}}{(S_{1b} + S_{2b})^2}$$

en verder, volgens de in punt 5 gegeven definitie van de grootheden M_1 en M_2:

$$M_1' = -D_1 - \Sigma\, Q_1$$
$$M_2' = -D_2 - \Sigma\, Q_2$$

Hierdoor kan de vergelijking eenvoudiger geschreven worden:

$$\left\{ \frac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} (y_1 - y_2)'' \right\}' - r (y_1 - y_2)' = -$$
$$- \left(\frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, M_1 \right)' + \left(\frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, M_2 \right)' \qquad V2.$$

7. Samenvatting van de vereenvoudigde differentiaalvergelijkingen en hun randvoorwaarden.

Door de uitgevoerde vereenvoudigingen zijn de vergelijkingen dus overgegaan in:

$$\left. \begin{aligned} & S_{1b}\, y_1'' + S_{2b}\, y_2'' = -M_1 - M_2 \\ & \left\{ \frac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} (y_1 - y_2)'' \right\}' - r (y_1 - y_2)' = - \\ & - \left(\frac{S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, M_1 \right)' + \left(\frac{S_{1b}}{S_{1b} + S_{2b}}\, M_2 \right)' \end{aligned} \right\} \text{V}$$

Hierin beteekent:

$$M_1 = \int_x^l D_1\, d\xi + \Sigma Q_{1n} (x_n - x)$$

$$M_2 = \int_x^l D_2\, d\xi + \Sigma\, Q_{2n} (x_n - x)$$

$$D_1 = - \int_x^l q_1\, d\xi$$

$$D_2 = - \int_x^l q_2\, d\xi$$

$$r = \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$$

Voor de beteekenis van het Σ-teeken kan verwezen worden naar de voorlaatste alinea van punt 4.

De randvoorwaarden, waaraan de oplossingen moeten voldoen, zijn:

$x = 0 \quad y_1 = 0;\ y_2 = 0;\ y_1' = 0;\ y_2' = 0$ VI 1, 2, 3, 4.

$x = l \quad (y_1 - y_2)'' = 0$ VI 5.

8. Over de oplossing van de verkregen vergelijkingen.

Het is niet de bedoeling hier een oplossingsmethode voor de verkregen vergelijkingen te geven. Eenerzijds schijnt het overbodig aan te toonen, dat een benaderingsoplossing met eenvoudige hulpmiddelen verkregen kan worden, anderzijds ontbreekt het nog aan voldoende rekenervaring om te kunnen aangeven welke methode voor practisch gebruik het meest geschikt is. Er moge hier dus volstaan worden met eenige losse opmerkingen.

De meest geschikte gang van de oplossing schijnt de volgende. De vergelijking V2 kan opgelost worden als differentiaalvergelijking van de 2e orde in $(y_1 - y_2)'$, de oplossing moet hierbij voldoen aan de door VI 3, 4, 5 gegeven randvoorwaarden. Wordt de verkregen uitkomst naar x gedifferentieerd, dan geeft zij te zamen met de vergelijking V1 twee lineaire betrekkingen tusschen de functies y_1'' en y_2'', waaruit deze afzonderlijk bepaald kunnen worden. Hiermede is dan voor de practijk, voor zoover deze geen belang stelt in de vormveranderingen van den vleugel, doch slechts in de in de liggers optredende buigende momenten, de berekening afgeloopen. Worden echter de vormveranderingen van den vleugel ook gevraagd, dan kunnen deze bepaald worden door integratie van de verkregen uitkomsten voor y_1'', y_2'', resp.

$(y_1 - y_2)'$, waarbij dan rekening gehouden moet worden met de randvoorwaarden VI 1 t/m 4

De oplossing van de vergelijking V2 kan in sommige speciale gevallen in gesloten vorm gegeven worden (zie punt 9), meestal zal men op het gebruik van een of andere benaderingsmethode aangewezen zijn. In de literatuur zijn verschillende van dergelijke benaderingsmethoden voor differentiaalvergelijkingen van de 2e orde beschreven [4]). Deze geven over het algemeen de oplossing van een „beginwaarde-probleem", d.w.z. een oplossing, van de vergelijking, waarbij de gevraagde functie en haar eerste afgeleide in één punt („beginpunt") gegeven waarden hebben. Het hier beschouwde geval is echter een „randwaarde-probleem", daar de waarde van de gevraagde functie in één punt, die van haar eerste afgeleide in een ander punt voorgeschreven is. De gevraagde oplossing kan verkregen worden door met passend gekozen beginvoorwaarden twee oplossingen van de vergelijkingen te bepalen, en wel een voor de homogene en een voor de niet-homogene vergelijking, waarna deze zoodanig gecombineerd worden, dat de uitkomst voldoet aan de niet-homogene vergelijking én aan de gegeven randvoorwaarden.

Een methode, die voor de oplossing van vergelijking V2 (ook hier weer beschouwd als vergelijking van de 2e orde in $(y_1 - y_2)'$) bij gegeven beginvoorwaarden zeer bruikbaar schijnt, komt in het kort op het volgende neer. Het gebied $x = 0$ tot $x = l$ wordt verdeeld in een aantal deelen. Voor ieder van deze afzonderlijk worden nu de gegeven functies $\dfrac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}}$ en $\dfrac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$ en zoo noodig ook de bekende functie benaderd door anderen van eenvoudiger vorm, op zoodanige wijze, dat de vergelijking in gesloten vorm opgelost kan worden (zie punt 9). De hierbij voor de afzonderlijke intervallen verkregen oplossingen worden nu samengevat tot een voor het geheele gebied geldende, door voor ieder interval de integratie-constanten zoo te kiezen, dat in de overgangspunten tusschen de intervallen de waarden van $(y_1 - y_2)'$ en $(y_1 - y_2)''$ aan nader vast te stellen voorwaarden voldoen.

9. Over oplossingen van de vergelijking V2 in gesloten vorm.

Voor speciale vormen van de functies

$$\frac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} \quad \text{en} \quad \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$$

is het mogelijk de oplossing van de vergelijking V2 uit te drukken in bekende functies. Het geval, dat beide constant zijn, werd reeds in Rapport V. 175 (punt 15 en 18) uitvoerig besproken. Een meer uitgebreide groep van dergelijke gevallen, waarbij de in de practijk voor vrijdragende vleugels voorkomende verhoudingen beter benaderd worden, wordt verkregen door aan te nemen, dat zij den vorm $A\,(al - x)^m$ resp. $B\,(al - x)^n$ hebben, waarbij A, B, a, m en n constanten zijn. Dit meer algemeene geval zal hier in het kort besproken worden, waarbij het voldoende is alleen de algemeene oplossing van de homogene vergelijking V2 te behandelen, daar zoowel de oplossing van de niet-homogene vergelijking als de verdere berekening van y_1 en y_2 met bekende hulpmiddelen kunnen geschieden. De bedoelde vergelijking wordt hier dus:

$$\left\{A\,(al - x)^m\,(y_1 - y_2)''\right\}' - B\,(al - x)^n\,(y_1 - y_2)' = 0$$

met als algemeene oplossing [5]):

$$(y_1 - y_2)' = (al - x)^{\alpha}\, Z_\nu \left\{ \beta\,(al - x)^{\gamma} \right\}$$

Hierbij beteekent op de gebruikelijke wijze $Z_\nu(z)$ een lineaire combinatie van de Besselsche functies van de orde $+\nu$ en $-\nu$, indien ν geen geheel getal is en van de beide Besselsche functies van de orde ν, wanneer dit wel het geval is. De waarde der in de uitkomst voorkomende coëfficiënten is de volgende:

$$\alpha = \frac{1 - m}{2} \qquad \beta = \frac{2\,i}{n - m + 2}\sqrt{\frac{B}{A}}$$

$$\gamma = \frac{n - m + 2}{2} \qquad \nu = \left|\frac{1 - m}{n - m + 2}\right|$$

Daar A en B uit den aard der zaak positief zijn, is β imaginair. Toepassing van de hier verkregen uitkomst is dus beperkt tot gevallen met zoodanige waarde van m en n, dat voor de bijbehoorende ν getallenwaarden van de Besselsche functies voor imaginair argument beschikbaar zijn of op eenvoudige wijze berekend kunnen worden. Voor kleine geheele waarden van ν bestaat een dergelijk getallen-materiaal [6]), terwijl voor $\nu = \frac{p}{2}$ waarbij p een klein geheel getal is, de Besselsche functies ontaarden in eenvoudiger transcendente functies [7]), waarvan de getallenwaarde gemakkelijk kan berekend worden. Zoo is b.v. voor $m = n = 2$, dus $\nu = {}^1/_2$, de oplossing:

$$(y_1 - y_2)' = \frac{e^{\pm\lambda\,(al - x)}}{al - x}$$

$$\text{met } \lambda = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

Bij de beoordeeling in hoeverre dergelijke uitkomsten practische waarde hebben, dient men de gevallen, waarin een oplossing van de vergelijkingen gevraagd wordt, te splitsen in twee groepen, en wel die:

a. waarbij het de bedoeling is den invloed van de verschillende factoren nader te bestudeeren (dus op soortgelijke wijze als dit in punt 18 en 19. van rapport V. 175 geschiedde voor prismatische vleugels en voor speciale gevallen van vleugels met veranderlijke stijfheidsfactoren);

b. waarin de berekening van een bestaanden of ontworpen vleugel gevraagd wordt.

In het eerste geval heeft men een zekere mate van vrijheid wat de keuze van de functies

$$\frac{S_{1b}\, S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} \quad \text{en} \quad \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$$

betreft, mits deze hetzelfde karakter hebben als voor uitgevoerde vleugels gebruikelijk is. Oplossingen in gesloten vorm kunnen hier dan goede diensten bewijzen.

In het tweede geval zal men slechts bij uitzondering te maken hebben met een vleugel, waarvan de stijfheidsfactoren van de liggers zoodanig verloopen, dat een der boven bedoelde oplossingen bruikbaar is. Anders wordt dit, wanneer op de in het vorige punt aangeduide wijze de vleugelbreedte in een aantal deelen verdeeld en voor ieder interval een afzonderlijke oplossing bepaald wordt, waarbij dan waarschijnlijk wel benaderingsoplossingen in gesloten vorm van het beschreven type bruikbaar zijn. Bij de keuze van de exponenten m en n moet er op gelet worden, dat de in werkelijkheid voorkomende waarden van

$$\frac{S_{1b} S_{2b}}{S_{1b} + S_{2b}} \quad \text{en} \quad \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$$

door de in te voeren functies behoorlijk benaderd worden en dat de uitkomst een zoo eenvoudig mogelijken vorm krijgt. Het lijkt waarschijnlijk, dat voor normale vleugels het boven afzonderlijk vermelde geval $m = n = 2$ bevredigende resultaten zal opleveren.

(Afgesloten September 1928).

---

[4]) Zie literatuuropgave aan het einde van het rapport.

[5]) RIEMANN-WEBERS Differentialgleichungen der Physik I (Braunschweig 1925), S. 332.
JAHNKE, E. u. EMDE, F. Funktionentafeln (Leipzig 1928), S. 166.

[6]) JAHNKE-EMDE (zie 5) S. 130—136.
Verzeichnis berechneter Funktionentafeln I, herausgegeben vom Institut für angewandte Mathematik an der Universität Berlin (Berlin 1928), S. 17, 18.

[7]) RIEMANN-WEBER (zie 5), S. 324.
JAHNKE-EMDE (zie 5), S. 91.

LITERATUUROPGAVE OVER BENADERINGSMETHODEN VOOR HET OPLOSSEN VAN GEWONE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE 2E ORDE.

Een uitvoerig overzicht van numerische en grafische methoden met uitgebreide literatuuropgave (afgesloten 1915), zonder echter in uitvoeringsdetails af te dalen geeft:

1. RUNGE, C. und WILLERS, F. A. Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Enc. Math. Wissensch. Bnd IIIII (Leipzig 1909—1921) S. 141—159. (*l*).

Meer uitvoerige besprekingen van een of meer methoden zijn gegeven in:

2. DUFFING, G. Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen I. und II. Ordnung. Forschungsarbeiten (herausg. vom V.D.I. Berlin 1920). Heft 224, S. 29—50.
3. HORT, W. Die Differentialgleichungen des Ingenieurs (Berlin 1925), S. 274—331. (*l*).
4. MEHMKE, R. Leitfaden zum graphischen Rechnen (Leipzig und Berlin, 1917), S. 138—141 und S. 147. (*l*).
5. NEUENDORF, R. Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in Polarkoordinaten. *Zeitschr. f. angew. Math. und Mechanik* 1923, S. 34—36. (*l*).
6. PASCAL, E. La risoluzione meccanica esatta delle equazioni lineari generali di 2° ordine. (Naar dit artikel wordt, zonder verdere vermelding van plaats van publicatie, verwezen in *Zeitschr. f. Instrumentenk.* 1922, S. 300).
7. RUNGE, C. Graphische Methoden (Leipzig und Berlin 1919). S. 119—130.
8. RUNGE, C. und KÖNIG, H. Vorlesungen über numerisches Rechnen (Berlin 1924), S. 311—323.
9. VON SANDEN. Praktische Analysis (Leipzig und Berlin 1914) S. 171—179. (*l*).

De aanwijzing (*l*) beteekent, dat in de aangeduide publicatie nog andere dan de hier vermelde literatuur opgegeven wordt.

Rapport V. 357.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels IV

door

ir. C. KONING.

Rapport V. 357: L'influence des nervures sur la résistance des ailes IV.

Report V. 357: The influence of the ribs on the strength of aeroplane-wings IV.

Bericht V. 357: Der Einfluss der Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln IV.

RAPPORT V 357.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels IV.

Uittreksel.

a. Omvang van het hier behandelde deel.

In de vorige publicaties over dit onderwerp werden de differentiaalvergelijkingen afgeleid voor de liggers van een vleugel, waarbij de invloed van de ribben wel, die van de bekleeding niet in rekening gebracht werd (*zie lit.* 1 *t/m* 4). Hierbij werden verschillende methoden aangegeven voor het oplossen van deze vergelijkingen. In dit rapport wordt een andere oplossingsmethode besproken, waarvan de praktische uitvoering in vele gevallen eenvoudiger zal zijn.

b. Invoering van dimensielooze grootheden.

Uitgegaan wordt van de vergelijkingen en randvoorwaarden in den in rapport V 285 (*zie lit.* 4) gegeven vorm (I 1 t/m 7), waarin nu in punt 2 dimensielooze grootheden ingevoerd worden.

c. Overzicht van de oplossingsmethode.

In punt 3 van het rapport wordt een overzicht gegeven van de methode voor het oplossen van de vergelijkingen en voor het bepalen van de bereikte nauwkeurigheid.

d. Notaties.

Een overzicht van de gebezigde notaties is te vinden aan het einde van het rapport.

e. Getallenvoorbeeld.

In punt 14 en Tabel I t/m XXI is een uitgewerkt getallenvoorbeeld gegeven.

RAPPORT V 357.

L'influence des nervures sur la résistance des ailes IV.

Résumé.

a. Etendue de la partie traitée ici (point 1).

Dans les rapports antérieurs les équations différentielles ont été déduites pour les longerons d'une aile sans revêtement résistant (voir literature („Literatuuropgave") 1 jusqu'à 4). Des différentes méthodes furent données pour la solution de ces équations. Dans le rapport présenté maintenant une autre méthode est discutée, dont l'application peut donner une simplification considérable dans un nombre de cas pratiques.

b. Les équations différentielles et les conditions de limite (point 2).

Les équations (I 1,2) sont celles données dans le rapport V. 285 (voir lit. 4); les conditions de limites, à qui doivent satisfaire les solutions, sont (I 3 jusqu'à 7). La signification des symboles employés est donnée dans le point *j* de ce résumé. Par substitution de quantités sans dimension (voir point 2 du rapport) on obtient les équations (II 1,2) et les conditions de limite (II 3 jusqu'à 7).

c. Substitution de variables nouvelles, transformation des équations (point 4).

Au lieu des déflections y les moments fléchissants $z = S_b y''$ sont introduits comme fonctions inconnues (équations: IV 1, 2, condition de limite IV 3). Ensuite les équations sont transformées en (V), dont la première ne contient qu'une des fonctions inconnues.

d. Approximation des coefficients de résistance et des charges extérieures (point 5,6).

On suppose que les coefficients de résistance et la partie des charges extérieures, qui est distribuée continue le long des longerons peuvent être approximées par des séries en x (VI 1,2,3; VIII 1,2). En appliquant cette approximation les quantités suivants peuvent être donnés également en séries: les fonctions des coefficients de résistance, qui entrent dans les équations (VI, VII), les efforts tranchants et les moments fléchissants, dus aux charges extérieures (IX) et les fonctions f_1 et f_2 de ces quantités (X, XI).

e. Solution des équations V (point 7,8).

La solution demandée z_1 de l'équation (V1) est:

$$z_1 = z_{11} + K z_{12}$$

dont

$z_{11} = \sum_{o}^{\infty} A_\nu x^\nu$: solution de (V1), satisfaisant à la condition $x = 0 : z_{11} = 0$;

$z_{12} = \sum_{o}^{\infty} B_\nu x^\nu$: solution de l'équation homogène, obtenue en posant $f_1 = 0$, satisfaisant à la condition $x = 0 : \ z_{12} = +1$.

La constante K doit être choisi ainsi, que z_1 satisfait à la condition de limite (V3). Dans les applications pratiques on doit abbréger les séries pour z_{11} et z_{12}. En ce cas *(XII) donne l'approximation de la solution demandée.*

Les coefficients A_ν et B_ν sont obtenus à l'aide de la méthode des coefficients indéfinis: substitution des séries pour z_{11} ou z_{12} et celles pour les autres fonctions, indiquées plus haute, dans les équations, donne les formules de récursion pour ces coefficients (XIII), (XIV).

La solution z_2 est obtenu en substituant dans l'équation (V2) le série $z_1 = \sum_{o}^{n} C_\nu x^\nu$ (XV).

f. Calcul des déflections (point 9).

Les solutions z_1 et z_2 étant obtenues, on peut calculer les courbures y_1'', y_2'' (XVI, XVIII) et les déflections y_1, y_2 (XVII, XIX) des deux longerons.

g. Convergence (point 10).

Pour l'application de la méthode décrite il est nécessaire, que les séries employées convergent dans l'interval $0 \leqq x \leqq +1$. On peut démontrer que les conditions de convergence résultent en la condition suivante: les racines des équations, qu'on obtient en posant zéro les expressions (VI 1,2,3), doivent tous avoir une valeur absolue surpassant l'unité.

h. Méthode pour apprécier le degré d'approximation (point 13).

Les résultats, par exemple les moments z_1 et z_2, qu'on obtient par la méthode décrite, ne sont que des solutions approchées. On peut calculer pour ces moments les charges correspondantes en les substituant dans les équations (V). Les charges, calculées ainsi, et les quantités, qui en dépendent, sont indiquées par les mêmes symboles que les charges originales, mais munis de l'index *. Encore les mêmes symboles, munis du préfixe $\triangle$, indiquent la différence entre ces deux, qui donne une mesure pour le degré d'approximation.

i. Exemple numérique (point 14).

Les tableaux I jusqu'à XXI donnent une exemple numérique.

j. Symboles.

b = distance des longerons;
l = longueur des longerons;
q = charge extérieure continue;
r = „coefficient de résistance de l'aile contre torsion" $= \dfrac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$;
$x(\xi)$ = coordonnée parallèle aux longerons;
y = coordonnée perpendiculaire aux longerons;
z = moment fléchissant dans un longeron $= S_b\, y''$;
D = effort tranchant calculé des charges extérieures continues q (voir point 2);
M = moment fléchissant calculé des charges extérieures continues q et de la charge concentrée Q au bout de l'aile (voir point 2);
M_u = moment fléchissant extérieur au bout de l'aile;
Q = charge concentrée au bout de l'aile;
S_b = coefficient de résistance contre flexion;
S_t = coefficient de résistance contre torsion;
α = inclinaison d'un longeron dans l'encastrement.

Les indices 1 et 2 indiquent les deux longerons.

REPORT V 357.

The influence of the ribs on the strength of aeroplane wings IV.

Summary.

a. Extend of the part treated here (point 1).

In former publications on this subject the differential equations are given for the spars of a wing, taking in account the influence of the ribs, but neglecting that of the wing covering (see literature („Literatuuropgave") 1—4). Some methods for the solution of the equations were indicated there. Now a new method is discussed, the practical application of which will be less tedious in a large number of cases.

b. The differential equations and boundary conditions (point 2).

The method starts from the equations (I 1,2) in the form, which was given in report V 285 (lit. 4); the solution has to satisfy the boundary conditions (I 3—7). The notations used are explained in point *j* of this summary. Introduction of nondimensional quantities (see point 2 of the report) gives the equations (II 1,2), and the boundary conditions (II 3—7).

c. Introduction of new variables, transformation of the equations (point 4).

In stead of the deflexion y the bending moment $z = S_b y''$ is introduced as the unknown function. The equations and boundary conditions are now given by (IV1—3) and may be transformed in (V). In the latter the first equation contains only one of the unknown functions.

d. Coefficients of rigidity and external loads (point 5,6).

It is assumed, that the coefficients of rigidity and the part of the external loads, which is distributed continuously along the spars, may be approximated by power series in x (VI 1—3; VIII 1,2). By introduction of these results the following quantities may be expanded in power series too: the functions of the coefficients of rigidity, which occur in the equations V (VI 4—7, VII), the shearing forces and bending moments, calculated from the external loads (IX) and the functions f_1, f_2 from the latter (X, XI).

e. Solution of the equations V (point 7,8).

The solution z_1 of the equation (V1) may be written in the form

$$z_1 = z_{11} + K z_{12}$$

in which

$z_{11} = \sum\limits_{0}^{\infty} A_\nu x^\nu$: the solution of equation (V1), satifying the condition $x = 0 : z_{11} = 0$;

$z_{12} = \sum\limits_{0}^{\infty} B_\nu x^\nu$: the solution of the homogeneous equation obtained by putting $f_1 = 0$ in equation (V1) and satisfying the condition $x = 0 : z_{12} = +1$.

The value of the constant K is to be determined such, that z_1 satisfies the boundary condition (V 3). In practical applications only a finite number of terms of the series for z_{11} and z_{12}, including those in x^n, can be taken in account. In this case (XII 1) gives an approximative value K_n for the constant K, whereas the corresponding solution z_1 is given by (XII 2).

The coefficients A_ν and B_ν are to be calculated by means of the recursion formulae (XIII) and (XIV), which are obtained by substituting the series for z_{11} or z_{12} and those for the other functions, indicated in point *d*, in the equation and comparing the coefficients of equal powers of x on both sides.

Substitution of $z_1 = \sum\limits_{0}^{n} C_\nu x^\nu$ in equation (V 2) gives the solution for z_2 (XV).

f. Calculation of the deflexions (point 9).

From the bending moments z_1, z_2 the curvature y'' (XVI, XVIII) and the deflexion y (XVII, XIX) may be calculated.

g. Convergence (point 10).

The method of solution discussed here may only be used, if the series converge in the interval $0 \leq x \leq +1$. This will be so, if the equations, obtained by putting the expressions given in (VI 1—3) equal to zero, have no roots the absolute value of which is smaller than or equal to unity.

h. Estimation of the accuracy of the solution (point 13).

The degree of approximation attained by a solution may be estimated by substituting the values of the bending moments, which are calculated, in the equations and determining in this way the corresponding loads. These loads and the functions derived from them are indicated by the same symbols as the original ones, but marked with the sign *, whereas the differences between both load-systems are given with the prefix $\triangle$. The latter are used to judge the accuracy of the solution.

i. Numerical example (point 14).

In Table I—XXI a numerical example is given.

j. Notations.

b = distance of the spars;
l = length of the spars;
q = continuous external load;
r = „coefficient of rigidity against torsion" of the wing $= \dfrac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$;
$x(\xi)$ = coordinate in a direction parallel to the spars;
y = coordinate in a direction perpendicular to the spars = deflection;
z = bending moment in a spar $= S_b y''$;
D = shearing force, calculated from the continuous external load q (see point 2);
M = bending moment, calculated from the continuous external load q and the external end load Q together (see point 2);
M_u = external bending moment at the end of a spar;
Q = external end load;
S_b = coefficient of rigidity against bending;
S_t = coefficient of rigidity against torsion;
α = inclination of a spar at the point $x = 0$.

The indices 1 and 2 denote the point and rearspar.

BERICHT V 357.

Der Einfluss der Rippenverbundwirkung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln IV.

Zusammenfassung.

a. Umfang des hier behandelten Teiles (Punkt 1).

In den vorhergehenden Berichten über Rippenverbundwirkung wurden die Differentialgleichungen abgeleitet für die Holme eines Flügels ohne Beplankung (sehe Literaturangabe („Literatuuropgave") 1 bis 4). Dabei wurden mehrere Verfahren zur Lösung dieser Gleichungen angegeben. In dem vorliegenden Bericht wird ein neues Lösungsverfahren entwickelt, dessen Anwendung manchmal einfacher sein wird.

b. Die Differentialgleichungen und Randbedingungen (Punkt 2).

Die Differentialgleichungen werden in den in Bericht V 285 (sehe Lit. 4) angegebenen Form (I 1, 2) angenommen, während die Lösungen den Randbedingen (I3 bis 7), genügen sollen. Eine Erläuterung der benutzten Formelzeichen ist in Punkt *j* dieser Zusammenfassung gegeben. Durch Einführung von dimensionslosen Gröszen (sehe Punkt 2) gehen die Gleichungen über in (II 1,2), die Randbedingungen in (II 3 bis 7).

c. Einführung von neuen Variablen, Transformation der Gleichungen (Punkt 4).

An Stelle der Durchbiegungen y werden die Biegungsmomente $z = S_b y''$ als die unbekannte Funktionen betrachtet. Die Gleichungen und Randbedingungen werden

jetzt (IV 1 bis 3), können aber mittels einer einfachen Umformung übergeführt werden in (V). In der letzten Form enthält die erste der Gleichungen nur einer der zwei unbekannten Funktionen.

d. Die Steifigkeitszahlen und Belastungen (Punkt 5,6).

Die Steifigkeitszahlen und die äussere Belastungen, soweit diese stetig verteilt sind, werden näherungsweise ersetzt durch Potenzreihen (VI 1 bis 3; VIII 1,2). Darauf werden auch die folgenden Funktionen in Potenzreihen entwickelt: die Funktionen der Steifigkeitszahlen, wie sie in den Gleichungen (V) auftreten (VI 4 bis 7, VII), die aus den äusseren Lasten berechneten Biegungsmomente und Querkräfte (IX) und die beiden Funktionen f_1 und f_2 von diesen Gröszen (X, XI).

e. Lösung der Gleichungen V (Punkt 7, 8).

Die Lösung z_1 der Gleichung (V1) wird in der Form

$$z_1 = z_{11} + K\, z_{12}$$

angenommen, in denen

$z_{11} = \sum\limits_{0}^{\infty} A_\nu\, x^\nu$: Lösung der Gleichung (V1) mit der Anfangsbedingung $x = 0 : z_{11} = 0$;

$z_{12} = \sum\limits_{0}^{\infty} B_\nu\, x^\nu$: Lösung der zu Gleichung (V 1) gehörenden homogenen Gleichung mit der Anfangsbedingung $x = 0 : z_{12} = +1$.

Der Wert der Konstante K soll so gewählt werden, dasz die Lösung z_1 der Randbedingung (V 3) genügt. Bei praktischen Anwendungen werden die Reihen für z_{11} und z_{12} nach dem Gliede in x^n abgebrochen. In diesem Falle gibt (XII 1) den Näherungswert K_n für die Konstante K, die zugehörige Lösung wird von (XII 2) gegeben.

Die Koeffizienten A_ν und B_ν werden bestimmt mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Die Reihe für z_{11} oder z_{12} und die übrigen in Punkt d angegebenen Reihen werden in der betreffenden Gleichung eingeführt. Zusammenfassung von allen Gliedern mit der gleichen Potenz von x gibt die Rekursionsformel (XIII) und (XIV).

Einführung von $z_1 = \sum\limits_{0}^{n} C_\nu x^\nu$ in Gleichung (V 2) gibt die Lösung z_2 (XV).

f. Berechnung der Durchbiegungen (Punkt 9).

Aus z_1 und z_2 können jetzt die Krümmungen y'' (XVI, XVIII) und die Durchbiegungen y (XVII, XIX) berechnet werden.

g. Konvergenz (Punkt 10).

Das beschriebene Lösungsverfahren ist nur dann zulässig, wenn die benutzten Reihen in dem Intervall $0 \leq x \leq +1$ konvergieren. Dies wird der Fall sein, wenn der Absolutwert aller Wurzeln der Gleichungen, die man bekommt, indem man die in (VI 1 bis 3) gegebenen Werte der Steifigkeitszahlen gleich Null setzt, gröszer als eins ist.

h. Bestimmung der Genauigkeit der Approximation (Punkt 13).

Die berechnete Werte der Biegungsmomente z_1 und z_2 werden in den Gleichungen eingeführt und in dieser Weise die dazu gehörigen Lasten bestimmt. Diese Lasten und die aus ihnen berechneten Funktionen werden durch dieselben Formelzeichen, aber mit dem Zeiger *, angegeben wie die wirklichen. Der Unterschied zwischen beiden Lastsystemen, der angegeben wird mit vorgesetzter $\triangle$, ist ein Masz für die Genauigkeit der Lösung.

i. Zahlenbeispiel (Punkt 14).

In Tafel I bis XXI ist ein Zahlenbeispiel gegeben.

j. Formelzeichen.

b = Holmabstand;
l = Holmlänge;
q = stetig verteilte äussere Belastung;
r = „Torsionssteifigkeitszahl" des Flügels $= \dfrac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$;
$x(\xi)$ = Koordinate in der Holmrichtung;
y = Koordinate senkrecht zur Holmrichting = Durchbiegung;
z = Biegungsmoment $= S_b y''$;
D = Querkraft, berechnet aus stetig verteilte äussere Belastung q (sehe Punkt 2);
M = Biegungsmoment, berechnet aus stetig verteilte äussere Belastung q und Endlast Q zusammen (sehe Punkt 2);
M_u = äusseres Biegungsmoment an das Holmende;
Q = äussere Querkraft an das Holmende;
S_b = Biegungssteifigkeitszahl;
S_t = Torsionssteifigkeitszahl;
α = Neigung des Holmes an der Stelle $x = 0$.

Die Zeiger 1 und 2 geben Vorder- und Hinterholm an.

De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels. IV

door

ir. C. KONING.

Rapport V. 357. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Een benaderingsmethode voor het oplossen van de vroeger afgeleide differentiaal-vergelijkingen voor de liggers van een vleugel wordt besproken.

1. Inleiding.

In de vorige publicaties over dit onderwerp [1]) werden de differentiaalvergelijkingen afgeleid voor de elastische lijnen van de liggers van een vleugel, waarbij de invloed van de ribben wel, die van de bekleeding niet in rekening gebracht wordt („vleugel zonder huid") (*lit.* 1, 2, 3). Voor de oplossing van deze vergelijkingen werden verschillende methoden aangegeven (*lit.* 1, 2, 4). Als voortzetting van dit onderzoek werd het geval behandeld, waarbij wel rekening gehouden wordt met de werking van de bekleeding („vleugel met huid") [2]). De hierbij verkregen differentiaalvergelijkingen vertoonen groote overeenkomst in vorm met die voor den vleugel zonder huid. Het bleek, dat hun oplossing, door gebruik te maken van een iteratiemethode, teruggebracht kan worden tot die van vergelijkingen, welke analoog zijn met de laatstgenoemde. Hierdoor wordt de vraag naar een bruikbare oplossingsmethode voor deze nog belangrijker. Toepassing van een der vroeger aangegeven methoden voor de berekening van een gegeven vleugel (*lit.* 6), toonde aan, dat zij aan praktische bruikbaarheid te wenschen overliet: de berekeningen bleken niet alleen zeer tijdroovend te zijn, doch stelden bovendien hooge eischen, wat inzicht in het vraagstuk betreft. Het is waarschijnlijk, dat ook de overige tot nu toe besproken methoden in het algemeen dergelijke bezwaren zullen opleveren.

In het volgende wordt nu een benaderingsmethode voor de oplossing van de differentiaalvergelijkingen ontwikkeld, die sneller tot het doel voert en bovendien het voordeel biedt, dat de *geheele berekening volgens een vast schema* kan verloopen. Tegenover deze voordeelen staat echter theoretisch het bezwaar dat aan het verloop van de stijfheidsfactoren en uitwendige belastingen zekere beperkende voorwaarden opgelegd moeten worden. Deze zijn echter, zooals bij de nadere bespreking in punt 5 en 11 zal blijken, zoo ruim, dat van deze zijde voor praktische toepassing weinig gevaar te duchten is.

De berekeningsmethode zal hier gegeven worden voor den vleugel zonder huid. Uit het boven reeds gezegde volgt, dat zij ook bruikbaar is voor den vleugel met huid. Hiermede zal nu in zooverre rekening gehouden worden, dat de belastingen en randvoorwaarden algemeener aangenomen worden dan streng genomen voor het eerste geval noodig is. Een verdere uitwerking zal in een volgend rapport gegeven worden.

[1]) Zie de literatuuropgave aan het einde van het rapport, de hier tusschen haakjes geplaatste cijfers verwijzen naar de nummers van deze.

[2]) De afleiding van de vergelijkingen voor dit geval en hun toepassing voor een gegeven vleugel, waarbij de berekende uitkomsten vergeleken werden met de experimenteel bepaalde zullen binnenkort gepubliceerd worden (*lit.* 5, 6).

De methode berust op het gebruik van reeksen, voor haar toepassing is dus de vraag naar de convergentie van deze van belang. De convergentie in wiskundigen zin is beslissend voor haar toelaatbaarheid, de voorwaarden, waaronder deze optreedt, zullen in het kort besproken worden. Voor praktische bruikbaarheid is het echter een eisch van het allergrootste belang, dat de in den vorm van een reeks verkregen uitkomst niet alleen convergeert in genoemden zin, doch ook „praktisch convergeert". Hieronder is te verstaan, dat met een beperkt *aantal termen een uitkomst* verkregen wordt, die de werkelijke waarde van de gevraagde grootheid binnen de te stellen nauwkeurigheidsgrenzen benadert. Voor een getallenvoorbeeld, waarbij een geval met in de praktijk te verwachten verhoudingen aangenomen is, zal aangetoond worden, dat de praktische convergentie hier zeer bevredigend is. Dit uitgewerkte geval is tevens bedoeld als voorbeeld van het te gebruiken rekenschema.

2. De differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden.

Uitgegaan wordt van de vergelijkingen voor een vleugel *met constanten liggerafstand in den in rapport* V 285 (*lit.* 4) (vergel. IV 1 en V 1) gegeven vorm:

$$\left.\begin{aligned} (\overline{S}_{1b}\,\overline{y}_1'')' - \overline{r}(\overline{y}_1 - \overline{y}_2)' &= \overline{D}_1 + \overline{Q}_1 \qquad (1)\\ \overline{S}_{1b}\,\overline{y}_1'' + \overline{S}_{2b}\,\overline{y}_2'' &= -\overline{M}_1 - \overline{M}_2 - \overline{M}_{1u} - \overline{M}_{2u} \qquad (2)\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{I})$$

waarin

$$\overline{D}_1 = -\int_x^l \overline{q}_1\, d\,\overline{\xi} \qquad\qquad \overline{D}_2 = -\int_x^l \overline{q}_2\, d\,\overline{\xi}$$

$$\overline{M}_1 = \int_x^l \overline{D}_1\, d\,\overline{\xi} + \overline{Q}_1(l - \overline{x}) \qquad\qquad \overline{M}_2 = \int_x^l \overline{D}_2\, d\,\xi + \overline{Q}_2(l - \overline{x})$$

$$\overline{r} = \frac{\overline{S}_{1t} + \overline{S}_{2t}}{\overline{b}^2}$$

Voor de beteekenis van de gebezigde notaties kan verwezen worden naar het overzicht aan het einde van het rapport, alleen zij er op gewezen, dat de streep boven de verschillende grootheden dient om deze te onderscheiden van de nu in te voeren dimensielooze.

Als uitwendige belastingen zijn naast de continu verdeelde $\overline{q}_1$ en $\overline{q}_2$ ook geconcentreerde lasten $\overline{Q}_1$ en $\overline{Q}_2$ en buigende momenten $\overline{M}_{1u}$ en $\overline{M}_{2u}$ aan de uiteinden van de ligger, aangenomen. Als werkelijk aan een vleugel optredende belastingen zijn deze niet te verwachten, behalve dan als een mogelijkheid bij belastingsproeven. Hiertegenover staat echter, dat zij bij de berekening van een vleugel met huid als schijnbare belastingen zullen optreden. Om deze reden worden zij hier in de berekening ingevoerd.

De randvoorwaarden voor de vergelijkingen in den bovengegeven vorm zijn:

$$\left.\begin{array}{lr} \bar{x} = o : \bar{y}_1 = o;\ \bar{y}_2 = o;\ \bar{y}_1{}' = \bar{a}_1;\ \bar{y}_2{}' = \bar{a}_2 & (3)\ \text{t/m}\ (6) \\ \bar{x} = l : \bar{S}_{1b}\,\bar{y}_1{}'' = -\bar{M}_{1u} & (7) \end{array}\right\}(\mathrm{I})$$

Behalve door de reeds boven besproken aanname van het moment M_{1u} aan het uiteinde van den voorligger, zijn de randvoorwaarden hier algemeener gehouden dan bij de vroegere beschouwingen door het invoeren van de hellingen $\bar{a}_1$ en $\bar{a}_2$ van de beide liggers in het inklempunt.

Teneinde de berekeningen overzichtelijker te houden is het gewenscht de in de vergelijkingen voorkomende grootheden te vervangen door dimensielooze. Dit kan geschieden door aan te nemen:

$$\bar{x} = x\,l \qquad \bar{S}_{1b} = S_b\,S_{1b}$$

$$\bar{\xi} = \xi\,l \qquad \bar{S}_{2b} = S_b\,S_{2b}$$

$$\bar{b} = bl \qquad \bar{S}_{1t} + \bar{S}_{2t} = S_b\,(S_{1t} + S_{2t})$$

$$\bar{y}_1 = \frac{Ql^3}{S_b}\,y_1 \qquad \bar{r} = \frac{S_b\,(S_{1t} + S_{2t})}{l^2\,b^2} = \frac{S_b}{l^2}\,r$$

$$\bar{y}_2 = \frac{Ql^3}{S_b}\,y_2$$

$$\bar{q}_1 = \frac{Q}{l}\,q_1 \qquad \bar{M}_{1u} = Q\,l\,M_{1u}$$

$$\bar{q}_2 = \frac{Q}{l}\,q_2 \qquad \bar{M}_{2u} = Q\,l\,M_{2u}$$

$$\bar{Q}_1 = Q\,Q_1 \qquad \bar{a}_1 = \frac{Ql^2}{S_b}\,a_1$$

$$\bar{Q}_2 = Q\,Q_2 \qquad \bar{a}_2 = \frac{Ql^2}{S_b}\,a_2$$

waarbij:

$$S_b = (\bar{S}_{1b} + \bar{S}_{2b})_{\,x=o}$$

$$Q = \int_o^l (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)\,d\,\bar{\xi} = -(\bar{D}_1 + \bar{D}_2)_{\,x=o}$$

Van de op deze wijze ingevoerde eenheden voor lengte (l), stijfheidsfactor (S_b) en kracht (Q) zullen de beide eerste wel zonder eenig bezwaar in alle gevallen bruikbaar zijn. De laatste, die, zooals uit het bovenstaande blijkt, gelijk is aan de totale vleugelbelasting voor zoover deze continu verdeeld is, kan in speciale gevallen onbruikbaar worden, b.v. wanneer de belastingen op beide liggers gelijk, doch tegengesteld zijn. In dergelijke gevallen kan echter de hier ingevoerde aanname van Q zonder bezwaar vervangen worden door een andere.

Bij invoering van de bovengedefinieerde grootheden in de vergelijkingen (I 1, 2) gaan deze over in:

$$\left.\begin{array}{lr} (S_{1b}\,y''_1)' - r\,(y_1 - y_2)' = D_1 + Q_1 & (1) \\ S_{1b}\,y_1{}'' + S_{2b}\,y_2{}'' = -M_1 - M_2 - M_{1u} - M_{2u} & (2) \end{array}\right\}(\mathrm{II})$$

met

$$D_1 = -\int_x^1 q_1\,d\,\xi \qquad D_2 = -\int_x^1 q_2\,d\,\xi$$

$$M_1 = \int_x^1 D_1\,d\,\xi + Q_1(1-x) \qquad M_2 = \int_x^1 D_2\,d\,\xi + Q_2\,(1-x)$$

$$r = \frac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$$

Ten overvloede zij nog opgemerkt, dat alle grootheden hier nu beschouwd worden als functies van de dimensielooze variabelen x en ξ.

De randvoorwaarden, gegeven door de vergelijkingen (I 3 t/m 7) worden nu:

$$\left.\begin{array}{lr} x = o:\ y_1 = o;\ y_2 = o;\ y_1{}' = a_1;\ y_2{}' = a_2; & (3\ \text{t/m}\ (6) \\ x = 1:\ S_{1b}\,y_1{}'' = -M_{1u} & (7) \end{array}\right\}\mathrm{II}$$

3. Overzicht van de oplossingsmethode.

In de vergelijkingen (II) worden in plaats van y_1 en y_2 als onbekende functies $z_1 = S_{1b}\,y_1{}''$ en $z_2 = S_{2b}\,y_2{}''$ ingevoerd, waarna zij zoo omgevormd worden, dat een van beide slechts een der onbekenden bevat (punt 4, vergel. IV en V).

Alle in de vergelijkingen voorkomende grootheden worden uitgedrukt in machtreeksen in x. Voorzoover de *stijfheidsfactoren* betreft wordt aangenomen, dat deze reeksen na een zekere term afgebroken mogen worden (punt 5, zie ook punt 11).

Invoering van deze reeksen in de vergelijking voor z_1 (vergel. VI) leidt tot oplossing van deze. Om aan de randvoorwaarde voor $x = 1$ te voldoen, is het noodig twee oplossingen te bepalen en wel een voor de vergelijking in den gegeven vorm en een voor de bijbehoorende homogeene vergelijking, beide met passend gekozen beginvoorwaarden. Deze oplossingen worden dan zoodanig gecombineerd, dat aan de niet-homogeene vergelijking èn aan de bovenbedoelde randvoorwaarde voldaan wordt (punt 7).

Met behulp van de op deze wijze verkregen oplossing z_1 wordt nu uit de tweede der vergelijkingen V die voor z_2 bepaald, waarna y_1 en y_2 berekend kunnen worden (punt 8 en 9).

Bij een praktische uitvoering van de berekening is het natuurlijk noodig alle gebezigde reeksen bij een bepaalde term af te breken. Ter beoordeeling van de bereikte nauwkeurigheid is het gewenscht na te gaan, welke fout hierdoor ontstaat. Een methode om deze bij benadering te berekenen wordt afgeleid (punt 13), zij wordt hierbij verkregen als een wijziging van de uitwendige belasting.

De invoering van de onbekende functies z_1 en z_2, die mechanisch beteekent, dat de momenten in plaats van de doorbuigingen als onbekenden beschouwd worden, mag misschien op het eerste gezicht den indruk van een ongewenschte complicatie geven. Dit is echter geenszins het geval. Bij voorloopige berekeningen bleek namelijk, dat bij gebruik van vergelijkingen in de oorspronkelijke variabelen y_1 en y_2 pogingen om het vraagstuk door reeksontwikkeling op te lossen, afstuitten op het bezwaar van slechte convergentie, indien, zooals bij vrijdragende vleugels praktisch steeds het geval zal zijn, de stijfheidsfactoren naar buiten toe sterk afnemen. Bij de hier gevolgde methode blijkt daarentegen in een dergelijk geval de convergentie zeer bevredigend, zoodat de voordeelen, die hiervan het gevolg zijn, ruimschoots opwegen tegen het bezwaar van den wat ingewikkelder opzet.

4. Invoering van nieuwe variabelen, omvorming van de vergelijkingen.

Als onbekende functies worden aangenomen:

$$z_1 = S_{1b}\,y_1{}'' \qquad z_2 = S_{2b}\,y_2{}'' \qquad (1,\ 2)\ (\mathrm{III})$$

Door integreeren van o naar x, waarbij rekening gehouden wordt met de in (II 5, 6) gegeven randvoorwaarden, volgt hieruit:

$$y_1{}' = a_1 + \int_o^x \frac{z_1}{S_{1b}}\,d\,\xi$$

$$y_2{}' = a_2 + \int_o^x \frac{z_2}{S_{2b}}\,d\,\xi$$

Bij invoering van de nieuwe variabelen in de vergelijkingen (II 1, 2) gaan deze over in

$$\left.\begin{array}{lr} z_1{}' - r\int_o^x \left(\dfrac{z_1}{S_{1b}} - \dfrac{z_2}{S_{2b}}\right) d\,\xi = D_1 + Q_1 + r(a_1 - a_2) & (1) \\ z_1 + z_2 = -M_1 - M_2 - M_{1u} - M_{2u} & (2) \end{array}\right\}(\mathrm{IV})$$

met de randvoorwaarde

$$x = 1:\ z_1 = -M_{1u} \qquad (3)\ \ (\mathrm{IV})$$

Oplossing van vergelijking IV 2 naar z_2 en substitutie van de zoo verkregen waarde in vergelijking IV 1 geeft voor deze:

$$z_1' - r\int_0^x z_1\left(\frac{1}{S_{1b}}+\frac{1}{S_{2b}}\right)d\xi = D_1 + Q_1 + r\,(\alpha_1 - \alpha_2) +$$
$$+ r\int_0^x \frac{1}{S_{2b}}\,(M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u})\,d\xi$$

zoodat de vergelijkingen nu worden

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{z_1'}{r} - \displaystyle\int_0^x z_1\left(\frac{1}{S_{1b}}+\frac{1}{S_{2b}}\right)d\xi = f_1(x) & (1) \\ z_1 + z_2 \qquad\qquad\qquad\qquad = f_2(x) & (2) \end{array}\right\}(\mathrm{V})$$

met

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{1}{S_{2b}}(M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u})\,d\xi + \frac{D_1 + Q_1}{r} +$$
$$+ (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$f_2(x) = - M_1 - M_2 - M_{1u} - M_{2u}$$

terwijl de randvoorwaarde onveranderd blijft

$$x = 1 : z_1 = - M_{1u} \qquad (3) \quad (\mathrm{V})$$

De grootheden M, D en Q hebben hier de vroeger in punt 2 gegeven beteekenis.

5. Aannamen voor de stijfheidsfactoren en belastingen.

a. Stijfheidsfactoren.

Aangenomen wordt, dat de stijfheidsfactoren met voldoende nauwkeurigheid voorgesteld kunnen worden door:

$$S_{1b} = \sum_0^m a_\nu x^\nu, \quad S_{2b} = \sum_0^m b_\nu x^\nu, \quad r = \sum_0^m c_\nu x^\nu \ (1 \text{ t/m } 3)\ (\mathrm{VI})$$

en hun omgekeerden door

$$\frac{1}{S_{1b}} = \sum_0^\infty d_\nu x^\nu, \quad \frac{1}{S_{2b}} = \sum_0^\infty e_\nu x^\nu, \quad \frac{1}{r} = \sum_0^\infty f_\nu x^\nu \ (4 \text{ t/m } 6)\ (\mathrm{VI}),$$

terwijl bovendien ingevoerd wordt

$$\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}} = \sum_0^\infty g_\nu x^\nu \qquad (7)\ (\mathrm{VI})$$

Zijn de coëfficiënten a_ν, b_ν en c_ν bekend, dan kunnen d_ν, e_ν, f_ν, g_ν berekend worden met behulp van de gemakkelijk af te leiden betrekkingen:

$$\left.\begin{array}{lll} a_0\,d_0 = +1 & a_0\,d_\nu = - a_1\,d_{\nu-1} - a_2\,d_{\nu-2} \ldots - & \\ & - a_{m-1}\,d_{\nu-m+1} - a_m\,d_{\nu-m} & (1) \\ b_0\,e_0 = +1 & b_0\,e_\nu = - b_1\,e_{\nu-1} - b_2\,e_{\nu-2} \ldots - & \\ & - b_{m-1}\,e_{\nu-m+1} - b_m\,e_{\nu-m} & (2) \\ c_0\,f_0 = +1 & c_0\,f_\nu = - c_1\,f_{\nu-1} - c_2\,f_{\nu-2} \ldots - & \\ & - c_{m-1}\,f_{\nu-m+1} - c_m\,f_{\nu-m} & (3) \\ g_0 = d_0 + e_0 & g_\nu = d_\nu + e_\nu & (4) \end{array}\right\}(\mathrm{VII})$$

De algemeene formules voor d_ν enz. gelden voor alle waarden van $\nu \geqq 1$, mits voor coëfficiënten met indices kleiner dan o de waarde nul ingevoerd wordt.

b. Uitwendige belastingen.

De continu verdeelde uitwendige belastingen worden aangenomen als gegeven door:

$$q_1 = \sum_0^\infty h_\nu x^\nu \qquad q_2 = \sum_0^\infty i_\nu x^\nu \qquad (1,\ 2)\ (\mathrm{VIII})$$

Meestal zullen in deze uitdrukkingen slechts een beperkt aantal coëfficiënten van nul verschillen, voor het volgende is echter de hier ingevoerde algemeene schrijfwijze gemakkelijker.

De door de uitwendige belastingen bepaalde dwarskrachten en momenten worden nu, overeenkomstig de in punt 2 gegeven definities:

$$\left.\begin{array}{lr} D_1 + Q_1 = -\displaystyle\int_x^1 q_1\,d\xi + Q_1 = -\int_x^1 \sum_0^\infty h_\nu \xi^\nu\,d\xi + & \\ \qquad + Q_1 = \displaystyle\sum_0^\infty j_\nu x^\nu & (1) \\ D_2 + Q_2 = -\displaystyle\int_x^1 q_2\,d\xi + Q_2 = -\int_x^1 \sum_0^\infty i_\nu \xi^\nu\,d\xi + & \\ \qquad + Q_2 = \displaystyle\sum_0^\infty k_\nu x^\nu & (2) \\ M_1 + M_{1u} = \displaystyle\int_x^1 D_1\,d\xi + Q_1(1 - x) + M_{1u} = & \\ \displaystyle\int_x^1 \sum_0^\infty j_\nu \xi^\nu\,d\xi + M_{1u} = \sum_0^\infty l_\nu x^\nu & (3) \\ M_2 + M_{2u} = \displaystyle\int_x^1 D_2\,d\xi + Q_2(1 - x) + M_{2u} = & \\ \displaystyle\int_x^1 \sum_0^\infty k_\nu \xi^\nu\,d\xi + M_{2u} = \sum_0^\infty m_\nu x^\nu & (4) \end{array}\right\}(\mathrm{IX})$$

met:

$$j_0 = -\sum_1^\infty \frac{1}{\nu} h_{\nu-1} + Q_1 \qquad \nu \geqq 1 : j_\nu = + \frac{1}{\nu} h_{\nu-1}$$

$$k_0 = -\sum_1^\infty \frac{1}{\nu} i_{\nu-1} + Q_2 \qquad \nu \geqq 1 : k_\nu = + \frac{1}{\nu} i_{\nu-1}$$

$$l_0 = +\sum_1^\infty \frac{1}{\nu} j_{\nu-1} + M_{1u} \qquad \nu \geqq 1 : l_\nu = - \frac{1}{\nu} j_{\nu-1}$$

$$m_0 = +\sum_1^\infty \frac{1}{\nu} k_{\nu-1} + M_{2u} \qquad \nu \geqq 1 : m_\nu = - \frac{1}{\nu} k_{\nu-1}$$

6. Uitwerking van de bekende functies.

De in de vergelijkingen V voorkomende bekende functies kunnen nu met behulp van de in het voorgaande punt ingevoerde ontwikkelingen voor de stijfheidsfactoren en de van de uitwendige belastingen afhankelijke grootheden eveneens in machtreeksen van x uitgedrukt worden. Hiertoe wordt, ter wille van de overzichtelijkheid, $f_1(x)$ als volgt gesplitst:

$$f_1(x) = f_3(x) + f_4(x) + (\alpha_1 - \alpha_2)$$

met

$$f_3(x) = \int_0^x \frac{1}{S_{2b}}(M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u})\,d\xi$$

$$f_4(x) = \frac{1}{r}(D_1 + Q_1)$$

Invoering van de in het vorige punt afgeleide uitkomsten VI 5, IX 3 en IX 4 geeft nu:

$$\frac{1}{S_{2b}}(M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u}) =$$
$$\sum_0^\infty e_\nu x^\nu \left(\sum_0^\infty l_\nu x^\nu + \sum_0^\infty m_\nu x^\nu\right) = \sum_0^\infty p_\nu x^\nu$$

met

$$p_\nu = e_\nu(l_0 + m_0) + e_{\nu-1}(l_1 + m_1) + \ldots +$$
$$+ e_1(l_{\nu-1} + m_{\nu-1}) + e_0(l_\nu + m_\nu)$$

en

$$f_3(x) = \int_0^x \frac{1}{S_{2b}}(M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u})\,d\xi =$$
$$\int_0^x \sum_0^\infty p_\nu \xi^\nu\,d\xi = \sum_0^\infty s_\nu x^\nu$$

met

$$s_0 = 0 \qquad \nu \geqq 1 : s_\nu = + \frac{1}{\nu} p_{\nu-1}$$

Voor $f_4(x)$ wordt bij gebruikmaking van VI 6 en IX 1 verkregen:

$$f_4(x) = \frac{1}{r}(D_1 + Q_1) = \sum_0^\infty f_\nu x^\nu \cdot \sum_0^\infty j_\nu x^\nu = \sum_0^\infty t_\nu x^\nu$$

met

$$t_\nu = f_\nu j_o + f_{\nu-1} j_1 + \ldots . + f_1 j_{\nu-1} + f_o j_\nu$$

De bekende functie $f_1(x)$ wordt dus

$$f_1(x) = \sum_{o}^{\infty} u_\nu x^\nu = \sum_{o}^{\infty} s_\nu x^\nu + \sum_{o}^{\infty} t_\nu x^\nu + (a_1 - a_2) \qquad \text{(X)}$$

zoodat

$$u_o = t_o + (a_1 - a_2) \qquad \nu \geqq 1 : u_\nu = s_\nu + t_\nu$$

Voor $f_2(x)$ volgt onmiddellijk uit de uitkomsten IX 3 en 4:

$$f_2(x) = -M_1 - M_2 - M_{1u} - M_{2u} = \sum_{o}^{\infty} v_\nu x^\nu \qquad \text{(XI)}$$

met

$$v_\nu = -l_\nu - m_\nu$$

7. Oplossing van de vergelijking V1.

a. Samenstelling van de oplossing uit twee andere in verband met de randvoorwaarde.

De gevraagde oplossing van de vergelijking V 1:

$$\frac{z_1'}{r} - \int_o^x z_1 \left(\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}} \right) d\xi = f_1(x)$$

moet voldoen aan de randvoorwaarde V 3:

$$x = 1 : z_1 = -M_{1u}$$

Hiertoe worden twee afzonderlijke oplossingen bepaald, en wel

1e: $z_{11} = \sum_{o}^{\infty} A_\nu x^\nu$ van de vergelijking in den bovengegeven vorm met de beginvoorwaarde $x = o : z_{11} = o$, dus $A_o = o$;

2e: $z_{12} = \sum_{o}^{\infty} B_\nu x^\nu$ van de bij de bovenstaande vergelijking behoorende homogeene, d.w.z. de vergelijking, die verkregen wordt door $f_1(x)$ identiek gelijk nul te stellen, met de beginvoorwaarde $x = o : z_{12} = +1$, dus $B_o = +1$.

Iedere functie van den vorm

$$z_1 = z_{11} + K\, z_{12},$$

waarin K een willekeurige constante is, is nu een oplossing van de vergelijking V 1. Wordt K zoo gekozen, dat voldaan wordt aan de randvoorwaarde V 3, dan is zij de gevraagde oplossing. Hieruit volgt als betrekking voor het bepalen van K

$$z_{11}(1) + K\, z_{12}(1) = -M_{1u}$$

of na invoering van de bovengegeven waarden voor z_{11} en z_{12}:

$$\sum_{o}^{\infty} A_\nu + K \sum_{o}^{\infty} B_\nu = -M_{1u}$$

Bij de praktische uitvoering van de berekening moeten de reeksen voor z_{11} en z_{12} na een zekere term x^n afgebroken worden. De benaderingswaarde K_n voor de constante K wordt nu berekend met behulp van de betrekking

$$\sum_{o}^{n} A_\nu + K_n \sum_{o}^{n} B_\nu = -M_{1u} \qquad \text{(1) (XII)}$$

De benaderingsoplossing van de vergelijking V 1 is dan

$$z_1 = \sum_{o}^{n} C_\nu x^\nu = \sum_{o}^{n} A_\nu x^\nu + K_n \sum_{o}^{n} B_\nu x^\nu \qquad \text{(2) (XII)}$$

zoodat voor alle waarden van $\nu \leqq n$:

$$C_\nu = A_\nu + K_n\, B_\nu \qquad \text{(3) (XII)}$$

Uit de aannamen van de beginvoorwaarden voor de beide oplossingen z_{11} en z_{12} ($A_o = o$, $B_o = +1$) volgt

$$C_o = K_n$$

zoodat dus K_n *het buigend moment in het inklempunt van den voorligger geeft.*

b. De oplossing van de niet-homogeene vergelijking.

De bovenbedoelde oplossing z_{11} wordt verkregen door in vergelijking V 1 in te voeren

$$z_1 = \sum_{o}^{\infty} A_\nu x^\nu$$

waarna de waarden van A_ν gevonden kunnen worden met behulp van de methode der onbepaalde coëfficiënten. Hiertoe worden beide leden der vergelijking als machtreeksen van x beschouwd en de uitdrukkingen, die daarbij als coëfficiënten van x^ν aan weerszijden van het gelijkteeken verschijnen, voor iedere waarde van ν afzonderlijk aan elkaar gelijk gesteld. Oplossing van de op deze wijze verkregen vergelijkingen in A_ν blijkt zeer eenvoudig te zijn, daar ieder van deze coëfficiënten slechts afhankelijk is van de voorgaande. Met het feit, dat volgens aanname $A_o = o$ is, zal bij de afleiding geen rekening gehouden worden, daar later zal blijken, dat zij dan zonder meer ook gebruikt kan worden voor het bepalen van de oplossing van de homogeene vergelijking (zie punt 7 c).

De eerste term van het eerste lid wordt met gebruikmaking van de in punt 5 a gegeven ontwikkeling voor $\frac{1}{r}$ (VI 6):

$$\frac{z_1'}{r} = \sum_{o}^{\infty} (\nu + 1) A_{\nu+1} x^\nu \, . \sum_{o}^{\infty} f_\nu x^\nu = \sum_{o}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu$$

met

$$\gamma_\nu = (\nu + 1) A_{\nu+1} f_0 + \nu A_\nu f_1 + \ldots . + 2 A_2 f_{\nu-1} + A_1 f_\nu.$$

Evenzoo wordt na invoering van de reeks voor $\left(\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}} \right)$ (VI 7):

$$z_1 \left(\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}} \right) = \sum_{o}^{\infty} A_\nu x^\nu \, . \sum_{o}^{\infty} g_\nu x^\nu = \sum_{o}^{\infty} \delta_\nu x^\nu$$

met

$$\delta_\nu = A_\nu g_o + A_{\nu-1} g_1 + \ldots . + A_1 g_{\nu-1} + A_o g_\nu$$

zoodat de tweede term wordt:

$$\int_o^x z_1 \left(\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}} \right) d\xi = \int_o^x \sum_{o}^{\infty} \delta_\nu \xi^\nu \, d\xi = \sum_{1}^{\infty} \epsilon_\nu x^\nu$$

met

$$\epsilon_\nu = \frac{1}{\nu} \delta_{\nu-1} = \frac{1}{\nu} (A_{\nu-1} g_0 + A_{\nu-2} g_1 + \ldots + A_1 g_{\nu-2} + A_o g_{\nu-1}).$$

Worden deze beide uitdrukkingen, benevens de in punt 6 (*X*) gegevene voor $f_1(x)$ in de vergelijking *V* 1 ingevoerd, dan wordt deze

$$\sum_{o}^{\infty} \gamma_\nu x^\nu - \sum_{1}^{\infty} \epsilon_\nu x^\nu = \sum_{o}^{\infty} u_\nu x^\nu$$

zoodat door de boven reeds aangegeven gelijkstelling van de coëfficienten voor gelijke machten van x levert:

$$\nu = o : \gamma_o = u_o$$

$$\nu \geqq 1 : \gamma_\nu - \epsilon_\nu = u_\nu$$

of na invoering van de voor γ_ν en ϵ_ν verkregen waarden:

$$\nu = o : A_1 f_o = u_o$$

$$\nu \geqq 1 :$$

$$\left\{ (\nu + 1) A_{\nu+1} f_o + \nu A_\nu f_1 + \ldots . + 2 A_2 f_{\nu-1} + A_1 f_\nu \right\} -$$

$$- \frac{1}{\nu} \left\{ A_{\nu-1} g_o + A_{\nu-2} g_1 + \ldots . + A_1 g_{\nu-2} + A_o g_{\nu-1} \right\} = u_\nu$$

Wordt in de laatste uitdrukking $(\nu + 1)$ vervangen door ν en worden verder de grootheden

$$\bar{f}_\mu = f_\mu : f_o \qquad \bar{g}_\mu = g_\mu : f_o \qquad \bar{u}_\mu = u_\mu : f_o$$

ingevoerd, dan gaan zij over in:

$$\nu = 1 : A_1 = \bar{u}_o \qquad \text{(1) (XIII)}$$

$$\nu \geqq 2 : \nu A_\nu = -$$

$$\left\{ (\nu-1) A_{\nu-1} \bar{f}_1 + (\nu-2) A_{\nu-2} \bar{f}_2 + \ldots . + 2 A_2 \bar{f}_{\nu-2} + A_1 \bar{f}^{\nu-1} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\nu-1} \left\{ A_{\nu-2} \bar{g}_o + A_{\nu-3} \bar{g}_1 + \ldots . + A_1 \bar{g}_{\nu-3} + A_o \bar{g}_{\nu-2} \right\} + \bar{u}_{\nu-1}$$

$$\text{(2) (XIII)}$$

Wordt nu (zie punt 7a) aangenomen, dat $A_o = o$ is, dan kunnen *hiermede* dus de coëfficiënten A_ν van de oplossing z_{11} berekend worden.

c. De oplossing van de homogeene vergelijking.

Past men de in het vorige punt gegeven oplossingsmethode toe op de homogeene vergelijking

$$\frac{z_1'}{r} - \int_o^x z_1 \left(\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}}\right) d\,\xi = o$$

dan blijkt de berekening geheel analoog te verloopen met die voor de niet-homogeene vergelijking met het eenige verschil, dat alle coëfficiënten $\bar{u}$ hier nul zijn.

De oplossing is dus

$$z_{12} = \sum_o^{\infty} B_\nu\, x^\nu$$

waarbij de coëfficiënten B_ν gegeven zijn door

$$\nu = 1 : B_1 = o \qquad (1)\ (XIV)$$

$$\nu \geqq 2 : \nu B_\nu = -$$

$$\left\{(\nu-1)\, B_{\nu-1} \bar{f}_1 + (\nu-2)\, B_{\nu-2} \bar{f}_2 + \ldots + 2B_2 \bar{f}_{\nu-2} + B_1 \bar{f}_{\nu-1}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\nu-1}\left\{B_{\nu-2}\, \bar{g}_o + B_{\nu-3}\, \bar{g}_1 + \ldots + B_1 \bar{g}_{\nu-3} + B_o\, \bar{g}_{\nu-2}\right\}$$

$$(2)\ (XIV)$$

Dit zijn dan de coëfficiënten van de in punt 7a aangegeven oplossing z_{12}, indien $B_o = +1$ aangenomen wordt.

8. Oplossing van de vergelijking V2.

De uitkomst voor z_1, die voldoet aan de gegeven randvoorwaarde, dus

$$z_1 = \sum_o^n C_\nu\, x^\nu$$

(zie punt 7a, XII 2), wordt nu in vergelijking V2

$$z_1 + z_2 = f_2(x)$$

ingevoerd, waarbij tevens

$$z_2 = \sum_o^n D_\nu\, x^\nu \qquad \text{en } f_2(x) = \sum_o^n v_\nu\, x^\nu$$

gesteld worden. Het laatste is in overeenstemming met de in punt 6 gegeven ontwikkeling voor $f_2(x)$ (XI), alleen wordt hier de reeks na den term in x^n afgebroken. Bovengenoemde vergelijking wordt dus

$$\sum_o^n C_\nu\, x^\nu + \sum_o^n D_\nu\, x^\nu = \sum_o^n v_\nu\, x^\nu \qquad (XV)$$

waaruit volgt

$$o \leqq \nu \leqq n : D_\nu = v_\nu - C_\nu$$

9. Berekening van y_1 en y_2.

Uit de verkregen uitkomsten voor z_1 en z_2 kunnen met behulp van de in punt 5 gegeven ontwikkelingen voor $\frac{1}{S_{1b}}$ en $\frac{1}{S_{2b}}$ (VI 4, 5) y_1 en y_2 berekend worden. Hierbij is dan rekening te houden met de als II 3 t/m 6 gegeven randvoorwaarden en het afbreken van de reeksen voor z_1 en z_2. Zoodoende wordt

$$y_1'' = \frac{z_1}{S_{1b}} = \sum_o^n C_\nu\, x^\nu \,.\, \sum_o^{\infty} d_\nu\, x^\nu \approx \sum_o^n E_\nu\, x^\nu \qquad (XVI)$$

met

$$o \leqq \nu \leqq n : E_\nu = d_o\, C_\nu + d_1\, C_{\nu-1} + \ldots + d_{\nu-1}\, C_1 + d_\nu\, C_o$$

en verder

$$y_1 = a_1\, x + \sum_2^{n+2} \frac{E_{\nu-2}}{\nu\,(\nu-1)}\, x^\nu = \sum_o^{n+2} G_\nu\, x^\nu \qquad (XVII)$$

met

$$G_o = o \qquad G_1 = a_1$$

$$2 \leqq \nu \leqq n+2 : G_\nu = \frac{1}{\nu\,(\nu-1)}\, E_{\nu-2}$$

Evenzoo wordt voor y_2 gevonden

$$y_2'' = \sum_o^n F_\nu\, x^\nu \qquad (XVIII)$$

met

$$o \leqq \nu \leqq n : F_\nu = e_o D_\nu + e_1\, D_{\nu-1} + \ldots + e_{\nu-1}\, D_1 + e_\nu\, D_0$$

en

$$y_2 = \sum_o^{n+2} H_\nu\, x^\nu \qquad (XIX)$$

met

$$H_0 = o \qquad H_1 = +a_2$$

$$2 \leqq \nu \leqq n+2 : H_\nu = \frac{1}{\nu\,(\nu-1)}\, F_{\nu-2}$$

Opgemerkt zij hier nog, dat zoowel de „*momenten*" z_1 en z_2 als de „doorbuigingen" y_1 en y_2, die hier gevonden zijn, de hiervoor in punt 2 ingevoerde dimensielooze grootheden zijn. De werkelijke waarden kunnen met behulp van de daar gegeven formules berekend worden.

10. Eenige meer theoretische beschouwingen over de gegeven oplossingsmethode.

De boven gegeven afleiding van de oplossingsmethode is louter formeel. Aangenomen werd, dat de gevraagde oplossingen in een zekeren *algemeenen vorm gegeven* kunnen worden en hiermee werden dan verschillende bewerkingen uitgevoerd. Over de toelaatbaarheid hiervan werd echter niet gesproken. Bekijkt men de zaak van wiskundig standpunt nader, dan doen zich de volgende vragen voor:

1e. hebben de gegeven vergelijkingen oplossingen, die in het gebied $o \leqq x \leqq 1$ *door convergente* machtreeksen van x voorgesteld kunnen worden?

2e. bestaan eenduidige oplossingen, die aan de gegeven randvoorwaarden voldoen?

3e. onder welke omstandigheden zijn de bij de afleiding der verschillende formules uitgevoerde bewerkingen toelaatbaar?

Het mag overbodig geacht worden hier diep op de beantwoording van deze vragen in te gaan. Een korte bespreking ervan schijnt echter wel gewenscht, te meer waar hierbij een enkel punt naar voren zal komen, dat ook met het oog op praktische toepassing van belang is.

Beschouwt men x en y als komplexe grootheden, dan kan de eerste vraag ook als volgt geformuleerd worden: aan welke voorwaarden moet voldaan worden, opdat de vergelijkingen II oplossingen hebben, die in het gebied $x \leqq 1$ analytisch zijn. Met behulp van de theorie van de lineaire differentiaal-vergelijkingen [3]) kan men nu aantoonen, dat dit hier het geval zal zijn, indien $\frac{1}{S_{1b}}$, $\frac{1}{S_{2b}}$ en $\frac{1}{r}$ in het beschouwde gebied eveneens analytisch zijn. Zijn S_{1b}, S_{2b} en r functies van x *van den in punt 5a aangegeven* vorm, dan beteekent deze voorwaarde, dat de vergelijkingen in x, die verkregen worden door genoemde functies gelijk nul te stellen, geen wortels mogen hebben, waarvan de absolute waarde $\leqq 1$ is.

De in vraag 2 bedoelde eenduidige oplossingen zullen steeds bestaan, tenzij de vergelijkingen eigenfuncties hebben. *Onder eigenfuncties* worden van nul verschillende oplossingen verstaan, die aan de homogeene vergelijkingen èn aan de randvoorwaarden voldoen [4]). Van het feit, dat in het hier beschouwde geval geen eigenfuncties zullen bestaan, kan men zich het beste overtuigen door een beschouwing over de mechanische beteekenis van dergelijke oplossingen. Immers een eigenfunctie zou hier een toestand van den vleugel beteekenen, waarbij deze zonder uitwendige belasting en, het zij ten overvloede opgemerkt, zonder

[3]) Zie hiervoor o.m. RIEMANN-WEBER (*lit.* 7) S. 248 en HILB (*lit.* 8) S. 478.

[4]) Nadere beschouwingen over het begrip „eigenfunctie van een lineaire differentiaal-vergelijking" zijn o.m. gegeven in RIEMANN-WEBER (*lit.* 7) S. 266.

verandering van constructie of materiaaleigenschappen, een vormverandering *vertoonde ten opzichte van den gewonen* onbelasten toestand.

Gaat men de verschillende bij de afleiding der formules uitgevoerde bewerkingen na, dan blijkt, dat hierbij herhaalde malen reeksen termsgewijze gedifferentieerd of geïntegreerd worden. Zooals bekend is, is dit toelaatbaar, indien de reeksen gelijkmatig convergent zijn of, hetgeen hier op hetzelfde neerkomt, de functies, die zij voorstellen, analytisch zijn. Langs dezen weg komt men dan tot dezelfde voorwaarde, die boven bij de bespreking van de eerste vraag aan de stijfheidsfactoren gesteld werd.

Resumeerend kan dus gezegd worden, dat de gegeven methode toelaatbaar is, wanneer de vergelijkingen $S_{1b} = 0$, $S_{2b} = 0$ en $r = 0$ geen wortels hebben, waarvan de absolute waarde ≤ 1 is.

11. De beteekenis van de ingevoerde beperkingen

Bij den opzet van de hier gegeven methode werd aangenomen (zie punt 5), dat het verloop van de stijfheidsfactoren en uitwendige *belastingen zoodanig is*, dat zij door functies van bepaalden, zij het dan ook zeer algemeenen, vorm voldoende nauwkeurig benaderd kunnen worden. Bovendien werd verondersteld, dat geen geconcentreerde lasten aanwezig zijn met uitzondering van die, welke aan het uiteinde van den vleugel aangrijpen.

De functies, die de stijfheidsfactoren weergeven, zijn als geheele rationeele functies met beperkt aantal termen aangenomen, terwijl de uitwendige belastingen door convergente machtreeksen, die echter na een eindig aantal termen afgebroken mogen worden, vervangen moeten kunnen worden. Deze aannamen sluiten in de eerste plaats in, dat de bedoelde grootheden continu of nagenoeg continu verloopen. Kleine discontinuïteiten zijn hierbij van weinig beteekenis, daar zij, vergeleken met een gemiddelden toestand, slechts plaatselijken invloed zullen hebben. Dat voor continue functies een benadering als hier bedoeld, afgezien van *het aantal termen, steeds mogelijk* zal zijn, volgt uit een door WEIERSTRASS [5]) bewezen stelling. Het vermoeden, dat in normale gevallen het aantal der termen in de functies, die de stijfheidsfactoren voorstellen, zeer beperkt kan blijven, berust op de volgende overweging. Bij vrijdragende vleugels is het gebruikelijk, dat alle belangrijke maten, voor zoover zij niet constant zijn, lineair met x verloopen. Afgezien van weinig beteekenende correcties voor de verplaatsing van het zwaartepunt van de doorsnede geeft dit een stijfheidsfactor tegen buiging, die een vierdegraads-functie van x is, terwijl in dit geval de stijfheidsfactor tegen torsie meestal zeer goed door een derdegraads-functie benaderd kan worden. Mochten echter deze benaderingen in een gegeven geval aan nauwkeurigheid te wenschen overlaten, dan bestaat er geen principieel bezwaar tegen een functie van hoogeren graad te kiezen, waardoor het rekenwerk slechts in beperkte mate vermeerderd wordt.

Treden in de stijfheidsfactoren of in de belastingen groote discontinuïteiten op, dan is in beginsel de aangegeven benadering nog steeds mogelijk. Een discontinue functie kan namelijk, voor zoover, wat hier steeds het geval zal zijn, de discontinuïteiten *eindige sprongen zijn*, vervangen worden door een continue. Het is dan echter twijfelachtig of met een beperkt aantal termen volstaan kan worden. Ditzelfde bezwaar kan zich ook voordoen, indien een der te benaderen functies continu is, haar eerste afgeleide daarentegen een belangrijke discontinuïteit vertoont. Gevallen als hier bedoeld zullen in het algemeen bij vrijdragende vleugels niet voorkomen, bij halfvrijdragende vleugels en vleugels, die een onderdeel van een meerdekkercel vormen zijn zij echter mogelijk.

Kan de methode in den hier beschreven vorm niet gebruikt worden, hetzij om de reeds genoemde redenen, hetzij door de aanwezigheid van geconcentreerde lasten, dan kan zij als volgt gewijzigd worden. De vleugel wordt beschouwd als bestaande uit twee deelen, die gescheiden zijn door het punt, waar de discontinuïteit optreedt, respectievelijk de geconcentreerde last aangrijpt. Voor beide deelen worden nu afzonderlijke oplossingen bepaald, die echter nog voorloopig onbekende constanten bevatten. Deze constanten kunnen dan berekend worden met behulp van de voorwaarden, waaraan beide oplossingen in het overgangspunt moeten voldoen.

12. Algemeene beschouwing over de nauwkeurigheid van de verkregen uitkomsten.

Tusschen de met behulp van de hier besproken methode berekende uitkomsten (b.v. doorbuigingen) en die, welke *in werkelijkheid optreden*, zullen in het algemeen verschillen bestaan. De oorzaken hiervan kunnen òf van mechanischen òf van wiskundigen aard zijn.

De eerste groep omvat alle verschillen tusschen de werkelijke eigenschappen van den vleugel en die, welke bij de opstelling van de differentiaal-vergelijkingen aan deze toegedacht zijn. Zij zijn dus het gevolg van onjuistheid der bij den opzet gemaakte aannamen (zie rapport V. 175 (*lit.* 2), punt 2). Ook het eventueele gebruik van onjuiste waarden voor de elastische constanten kan in deze groep gerangschikt worden. Hoewel de hiermede verband houdende vragen voor het probleem van de vleugelberekening als geheel van het grootste belang zijn, kunnen verdere beschouwingen erover, in verband met den aard van het hier behandelde deel, achterwege blijven.

De tweede groep daarentegen heeft betrekking op de onnauwkeurigheden, ingevoerd bij de oplossing van de vergelijkingen en dient hier dus nader besproken te worden. De hiertoe behoorende foutenbronnen kunnen als volgt ingedeeld worden:

a. verschillen tusschen de werkelijke en de bij de berekening aangenomen waarden van de stijfheidsfactoren en belastingen,

b. het afbreken van de in de berekening voorkomende reeksen,

c. reken- en afrondingsfouten.

Een voor de hand liggende methode om de fout te bepalen, die het gevolg is van al deze oorzaken te zamen, is de volgende. In de differentiaal-vergelijkingen worden de als uitkomst van de berekening gevonden waarden van de doorbuigingen en hun afgeleiden, benevens de werkelijke waarden van de stijfheidsfactoren ingevoerd. Zoodoende worden dan de belastingen q^* gevonden, die, te zamen met door soortgelijke overwegingen uit de voorwaarden voor de liggeruiteinden te bepalen eindlasten Q^* en -momenten M^*, aangebracht zouden moeten worden om de berekende doorbuigingen inderdaad te krijgen. De verschillen tusschen deze belastingen en die, welke bij de berekening aangenomen werden, zijn dan een maat voor de nauwkeurigheid van de benadering. Deze contrôle-methode is echter, hoe eenvoudig zij ook in beginsel is, bij praktische uitvoering zeer tijdroovend.

In het volgende punt wordt daarom een andere methode besproken, die bovendien het praktische voordeel biedt, dat zij geheel bij de gegeven berekeningsmethode aansluit. Zij geeft echter alleen die fouten, welke het gevolg zijn van de boven onder b en c genoemde oorzaken, wat de laatsten betreft bovendien alleen de in de berekening van de momenten voorkomende. Deze beperking is echter niet van groot belang, daar het meestal wel mogelijk zal zijn om zonder verdere berekening te beoordeelen of een bepaalde benadering voor de stijfheidsfactoren al dan niet voldoende nauwkeurig is. De fouten, gemaakt door het afbreken van de reeksen zijn echter zonder verdere rekenervaring moeilijker te schatten, zoodat een afzonderlijke contrôle hierop gewenscht blijft.

13. De berekening van de door het afbreken van de reeksen veroorzaakte fouten.

Overeenkomstig het in het vorige punt aangegeven beginsel zullen hier die belastingen bepaald worden, waarbij

[5]) Zie RIEMANN-WEBER (*lit.* 7) S. 163.

de berekende momenten z_1 en z_2 inderdaad exacte oplossingen van de vergelijkingen zijn. Deze belastingen zullen, ter onderscheiding van de bij de berekening gebruikte met * worden aangegeven (b.v. $q_1{}^*$), de verschillen tusschen beide met $\triangle$ (b.v. $\triangle q_1 = q_1{}^* - q_1$). Deze verschillen zullen in het volgende met den naam „correctie-belastingen" aangeduid worden.

De gegeven notatie zal niet alleen voor de belastingen zelve, doch ook voor de andere rechtstreeks van deze afhankelijke grootheden gebezigd worden. Grootheden zonder de hier bedoelde indices beteekenen dus steeds de bij de oorspronkelijke berekening gebruikte.

Als uitgangspunt worden de in punt 4 gegeven vergelijkingen V gekozen, die hier dus den vorm:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{z_1'}{r} - \int_0^x z_1\left(\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}}\right)d\xi = f_1{}^*(x) && (1)\\ &z_1 + z_2 \qquad\qquad\qquad = f_2{}^*(x) && (2)\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{XX})$$

krijgen, waarbij z_1 en z_2 de in punt 7a en 8 verkregen uitkomsten XII2 en XV

$$z_1 = \sum_0^n C_\nu\, x^\nu \qquad z_2 = \sum_0^n D_\nu\, x^\nu$$

zijn en $f_1{}^*(x)$ en $f_2{}^*(x)$, in analogie met de in punt 4 gegeven definities voor $f_1(x)$ en $f_2(x)$, de volgende beteekenis hebben:

$$f_1{}^*(x) = \int^x \frac{1}{S_{2b}}\left(M_1{}^* + M_2{}^* + M_{1u}{}^* + M_{2u}{}^*\right) d\xi +$$

$$+ \frac{D_1{}^* + Q_1{}^*}{r} + (\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$f_2{}^*(x) = -M_1{}^* - M_2{}^* - M_{1u}{}^* - M_{2u}{}^*$$

Wordt aangenomen, dat $(M_1 + M_2)$ geen termen in x van hoogeren dan den n-den macht bevat, zoodat $(z_1 + z_2)$ exact aan vergelijking V2 voldoet, dan blijkt onmiddellijk uit V 2 en XX 2, dat

$$f_2{}^*(x) = f_2(x) \text{ of}$$

$$M_1{}^* + M_2{}^* + M_{1u}{}^* + M_{2u}{}^* = M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u} \quad (1)(\mathrm{XXI})$$

zoodat $f_1{}^*(x)$ overgaat in

$$f_1{}^*(x) = \int_0^x \frac{1}{S_{2b}}\left(M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{D_1{}^* + Q_1{}^*}{r} + (\alpha_1 - \alpha_2) \quad (2)\ (\mathrm{XXI})$$

Wordt nu

$$f_1{}^*(x) = \sum_0^\infty u_\nu{}^*\, x^\nu$$

gesteld, dan volgt, bij invoering van de boven voor z_2 gegeven uitkomst, uit vergelijking XX 1, geheel analoog met de in punt 7b gegeven afleiding, voor de coëfficiënten $u_\nu{}^*$:

$$\left.\begin{aligned} &\nu = 0 : u_0{}^* = C_1 f_0 && (1)\\ &\nu \geqq 1 : u_\nu{}^* = \Big\{ (\nu + 1)\, C_{\nu+1} f_0 + \nu\, C_\nu f_1 + \\ &+ \ldots + 2\, C_2 f_{\nu-1} + C_1 f_\nu \Big\} - \frac{1}{\nu}\left(C_{\nu-1}\, g_0 + \right.\\ &\left. + C_{\nu-2}\, g_1 + \ldots + C_1\, g_{\nu-2} + C_0\, g_{\nu-1}\right) && (2)\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{XXII})$$

Bij toepassing van deze formules dient er op gelet te worden, dat voor $\nu > n$ de coëfficiënten C_ν nul zijn. Vergelijkt men de verkregen uitkomst met die in de punten 7b en 7c, rekening houdende met het feit, dat C_ν volgens XII 3 een lineaire combinatie is van A_ν en B_ν, dan blijkt, dat voor $\nu \leqq n - 1$ $u_\nu{}^* = u_\nu$ zal moeten zijn, zoodat eventueele verschillen $\triangle u_\nu$ hier alleen het gevolg van rekenfouten moeten zijn. Voor $\nu \geqq n$ daarentegen speelt ook de „afbrekingsfout" een rol.

Uit de boven gegeven uitdrukking XII 2 voor $f_1{}^*(x)$ en die in punt 4 voor $f_1(x)$ volgt nu:

$$\triangle f_1(x) = f_1{}^*(x) - f_1(x) = \frac{\triangle (D_1 + Q_1)}{r} =$$

$$= \sum_0^\infty u_\nu{}^*\, x^\nu - \sum_0^\infty u_\nu\, x^\nu = \sum_0^\infty \triangle\, u_\nu \,.\, x^\nu \quad (\mathrm{XXIII})$$

zoodat bij gebruikmaking van de als VI 3 gegeven uitdrukking voor r en invoering van met IX 1 en VIII 1 analoge vormen voor $\triangle (D_1 + Q_1)$ resp. $\triangle q_1$.

$$\triangle(D_1 + Q_1) = r \sum_0^\infty \triangle\, u_\nu \,.\, x^\nu = \sum_0^\infty \triangle j_\nu \,.\, x^\nu \quad (\mathrm{XXIV})$$

met

$$\nu = 0 : \triangle j_0 = c_0 . \triangle u_0$$

$$\nu \geqq 1 : \triangle j_\nu = c_0 . \triangle u_\nu + c_1 . \triangle u_{\nu-1} + \ldots + c_{m-1} \,.$$
$$. \triangle u_{\nu-m+1} + c_m . \triangle u_{\nu-m}$$

en verder:

$$\triangle(D_1 + Q_1) = \sum_0^\infty \triangle j_\nu \,.\, x^\nu = -\int_x^1 \triangle q_1 \,.\, d\xi + Q_1 =$$

$$= -\int_x^1 \sum_0^\infty \triangle h_\nu \,.\, \xi^\nu\, d\xi + Q_1$$

waaruit volgt

$$\triangle q_1 = \sum_0^\infty \triangle h_\nu \,.\, x^\nu \quad (\mathrm{XXV})$$

met

$$\nu \geqq 0 : \triangle h_\nu = (\nu + 1) \,.\, \triangle j_{\nu+1}$$

De waarde voor den correctie-eindlast $\triangle Q_1$ kan op twee verschillende wijzen verkregen worden. Daar voor $x = 1$ $\triangle D_1 = 0$ is, volgt uit XXIII:

$$\triangle Q_1 = r_{x=1} \sum_0^\infty \triangle u_\nu \quad (1)\ (\mathrm{XXVI})$$

en uit XXIV

$$\triangle Q_1 = \sum_0^\infty \triangle j_\nu \quad (2)\ (\mathrm{XXVI})$$

Worden de in deze uitkomsten voorkomende reeksen als oneindige beschouwd, dan zijn de beide waarden natuurlijk gelijk. Worden zij daarentegen, zooals dit bij praktische berekening steeds noodig zal zijn, na een aantal termen afgebroken, dan kunnen verschillen bestaan. (Zie punt 14.)

Hiermede zijn nu de correctiebelastingen voor den voorligger bepaald, immers uit het feit, dat de voor z_1 verkregen uitkomst aan randvoorwaarde V3 voldoet, volgt natuurlijk, dat

$$\triangle M_{1u} = 0$$

het correctie-eindmoment dus nul is.

Een betere indruk van de waarde van de correctiebelastingen en daarmede van de nauwkeurigheid van de oorspronkelijke berekening kan echter verkregen worden door niet deze belastingen zelve, doch hun moment te beschouwen. Dit blijkt bij vergelijking met IX 3 gegeven te zijn door:

$$\triangle M_1 = \int_x^1 \triangle D_1 . d\xi + \triangle Q_1 (1 - x) = \int_x^1 \sum_0^\infty \triangle j_\nu . \xi^\nu\, d\xi =$$

$$\sum_0^\infty \triangle\, l_\nu \,.\, x^\nu \quad (\mathrm{XXVII})$$

met

$$\nu = 0 : \triangle l_\nu = + \sum_0^\infty \frac{1}{\nu + 1} \triangle j_\nu$$

$$\nu \geqq 1 : \triangle l_\nu = - \frac{1}{\nu} \triangle j_{\nu-1}$$

In anderen vorm geschreven geeft XXI 1:

$$\triangle (M_1 + M_2 + M_{1u} + M_{2u}) = 0$$

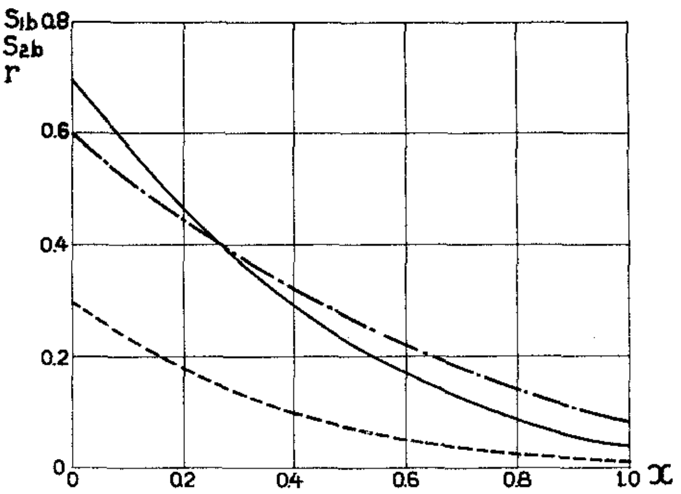
waaruit onmiddellijk volgt:

$$\triangle M_2 = - \triangle M_1$$
$$\triangle Q_2 = - \triangle Q_1$$
$$\triangle q_2 = - \triangle q_1$$

De correctie-belastingen voor den achterligger zijn dus gelijk, doch tegengesteld van teeken, aan die voor den voorligger.

Bij praktische uitvoering van de berekening zullen ook hier de gebezigde reeksen afgebroken moeten worden. Dit zal natuurlijk moeten geschieden bij een term in hoogeren

STIJFHEIDSFACTOREN.



——— $= S_{1b}$; - - - - - $= S_{2b}$; —·— $= r$.

Fig. 1.

dan den n-den macht van x en overigens afhankelijk van de nauwkeurigheid, waarmee men de correctie-belastingen berekenen wil. Aan deze zullen echter in het algemeen geen hooge eischen gesteld worden, daar de berekening in de eerste plaats bedoeld is om een indruk te krijgen van de orde van grootte en het algemeene karakter van de correctie-belastingen. Immers zijn deze groot, dan is dit een aanwijzing, dat de waarde van n in de oorspronkelijke berekening te laag gekozen en er dus met een te beperkt aantal termen in de reeksen gewerkt is. In een dergelijk geval zal de berekening met grooter aantal termen herhaald dienen te worden.

14. Getallenvoorbeeld.

In de tabellen I t/m XXI is als voorbeeld van toepassing van de besproken methode een uitgewerkte berekening gegeven. Hierbij werd voor de stijfheidsfactoren aangenomen:

$$S_{1b} = 0{,}7 - 1{,}33\,x + 0{,}882x^2 - 0{,}2268\,x^3 + 0{,}0151x^4 = 0{,}7\,(1-0{,}6x)^3\,(1-0{,}1x)$$

$$S_{2b} = 0{,}3 - 0{,}72\,x + 0{,}648\,x^2 - 0{,}2592\,x^3 + 0{,}0389\,x^4 = 0{,}3\,(1-0{,}6x)^4$$

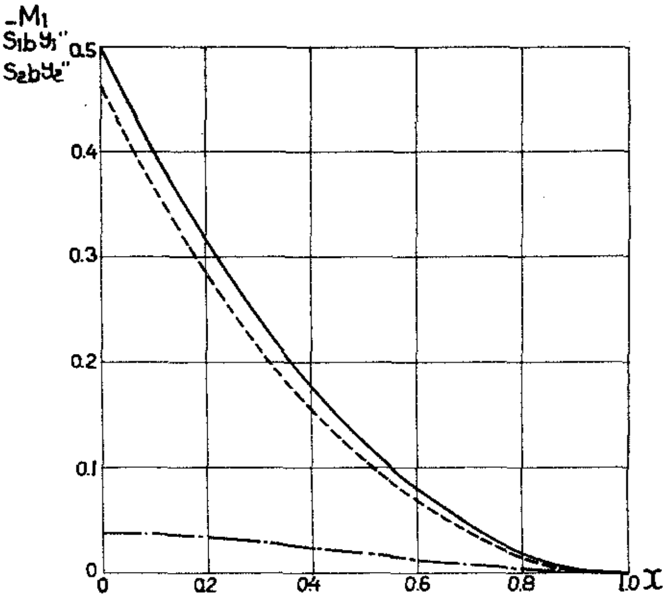
$$r = 0{,}6 - 0{,}84\,x + 0{,}366x^2 - 0{,}0504x^3 + 0{,}0022x^4 = 0{,}6\,(1-0{,}6x)^2\,(1-0{,}1x)^2.$$

Deze uitdrukkingen voldoen aan de in punt *10* besproken voorwaarde, dat zij geen wortels mogen hebben, waarvan de absolute waarde ≤ 1 is. Het verloop van de stijfheidsfactoren komt, zooals uit fig. 1 blijkt, in algemeen karakter overeen met dat wat voor vrijdragende vleugels te verwachten is. Wat de belastingen betreft zijn twee gevallen afzonderlijk behandeld. In het eerste wordt op den voorligger een constante continu verdeelde belasting, op den achterligger geen belasting aangenomen, terwijl in het tweede geval de belasting van voor- en achterligger verwisseld zijn. In beide gevallen zijn de aan de liggeruiteinden werkende krachten en momenten nul.

Bij de berekening wordt $n = 6$ aangenomen, dat wil zeggen, dat in de reeksen voor z_1 en z_2 termen in hoogere dan de 6e macht van x verwaarloosd worden. Bij de bepaling van de correctie-belastingen daarentegen wordt de berekening voortgezet tot en met de 12e macht van x.

Bij iedere tabel zijn de formules, die voor de berekening noodig zijn, benevens de herkomst van de gebruikte gegevens, aangegeven. Een nadere toelichting van den gang van de berekening kan hier dus overbodig geacht worden. In gevallen, waar de berekening van de in één kolom voorkomende grootheden voor verschillende waarden van ν volgens verschillende formules moet geschieden (zie b.v. s_ν en u_ν in Tabel VII en G_ν in Tabel XIV) zijn deze alle boven den kolom in volgorde aangegeven. De getallenwaarden, berekend volgens de verschillende formules, zijn dan door horizontale lijnen gescheiden.

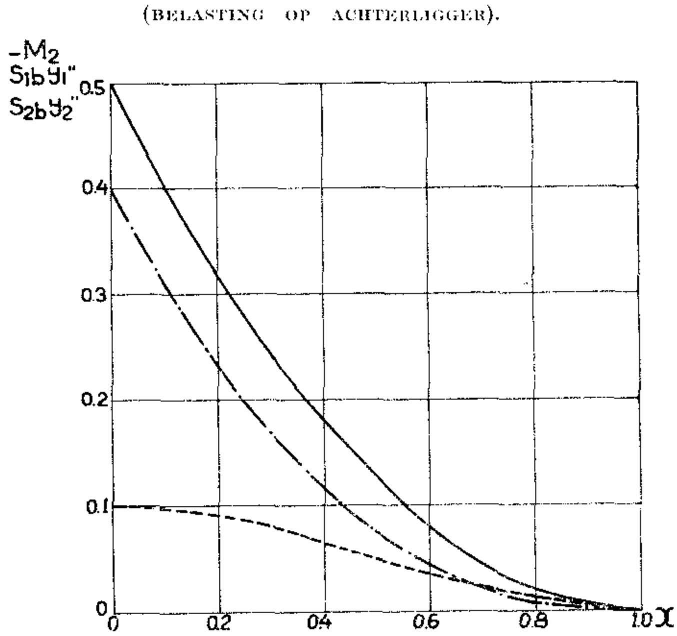
MOMENTEN VOOR BELASTINGSGEVAL 1 (BELASTING OP VOORLIGGER).



——— $= -M_1$ (moment van de uitwendige belasting);
- - - - - $= z_1 = S_{1b}y_1''$ (buigend moment in voorligger);
—·— $= z_2 = S_{2b}y_2''$ (buigend moment in achterligger).

Fig. 2.

MOMENTEN VOOR BELASTINGSGEVAL 2 (BELASTING OP ACHTERLIGGER).



——— $= -M_2$ (moment van de uitwendige belasting);
- - - - - $= z_1 = S_{1b}y_1''$ (buigend moment in voorligger);
—·— $= z_2 = S_{2b}y_2''$ (buigend moment in achterligger).

Fig. 3.

Voor het uitvoeren van de *contrôle-berekening* moet voor verschillende functies de ontwikkeling der reeksen verder voortgezet worden dan voor de momentenberekening noodig is. In deze gevallen geeft een horizontale stippellijn in de tabel aan, waar de berekening afgebroken zou kunnen worden, indien alleen de momenten en daarbij behoorende doorbuigingen, echter niet de correctie-belastingen gevraagd werden.

In het beschouwde geval is voor beide aangenomen belastingtoestanden de „praktische convergentie" (zie punt 1) zeer goed. In de eerste plaats blijkt dit uit het in Tabel XII en XIII gegeven verloop van de constante K_n bij toenemende waarde van n. Van de bepaling van deze grootheid voor $n > 6$ werd gebruik gemaakt van de uitkomsten van een tot $n = 12$ doorgevoerde, hier niet weergegeven, berekening voor z_{11} en z_{12}. Voor kleine waarden van n vertoont K_n sterke wisselingen, die echter spoedig afnemen, zoodat vanaf $n = 6$ de waarde praktisch constant is. Dit beteekent, dat, indien voor n een waarde grooter dan 6 gekozen werd, van de reeksen voor z_{11} en z_{12} dus eenige verdere termen berekend zouden worden, dit slechts zeer geringen invloed zou hebben op de gevonden waarden van K_n en dus ook op die van het buigend moment in het inklempunt van den ligger (zie punt 7a).

Ook de in Tabel XIX en XXI gegeven uitkomsten voor de correctie-belastingen toonen, dat de door het afbreken van de reeksen gemaakte fout gering is. Deze belastingen bestaan in beide gevallen uit een continu verdeelde $\triangle\, q_1$ gericht volgens de positieve y-as en een geconcentreerde eindlast $\triangle\, Q_1$ in tegengestelde richting. Tusschen de volgens de beide verschillende formules voor $\triangle\, Q_1$ berekende waarden bestaat slechts matige overeenstemming, dit is echter van geen praktische beteekenis (zie ook punt 13). Alleen in het 2e belastingsgeval (belasting op den achterligger, Tabel XXI) zijn $\triangle\, q_1$ en $\triangle\, Q_1$ ieder voor zich genomen van eenige beteekenis. Zoo bedraagt de laatste ongeveer 1% van de totale vleugelbelasting. Doordat zij echter in tegengestelden zin werken, is hun invloed ook hier zeer gering, hetgeen blijkt uit de waarde van de correctie-momenten $\triangle\, M_1$. De verkregen uitkomsten geven den indruk, dat voor een praktijkberekening hier waarschijnlijk met een kleinere waarde van n volstaan zou kunnen worden.

Voor vergelijking met vroeger verkregen uitkomsten zijn in fig. 2 en 3 de momenten van de uitwendige belasting M en de in beide liggers werkende buigende momenten z_1 en z_2 uitgezet. De laatsten vertoonen hetzelfde algemeene karakter als die, welke in rapport V. 175 (*lit.* 2) fig. 4 voor vleugels met naar buiten sterk afnemende stijfheidsfactoren gegeven zijn.

(Afgesloten Maart 1930).

NOTATIES.

a. *Grootheden met mechanische beteekenis.*

b = liggerafstand;
l = liggerlengte;
q = continu verdeelde belasting;
r = „*torsiestijfheidsfactor*" van den vleugel $= \dfrac{S_{1t} + S_{2t}}{b^2}$;
x = coördinaat in de richting van de liggers (als integratie-variabele : ξ);
y = coördinaat in de richting loodrecht op de liggers = doorbuiging;
z = buigend moment in een ligger $= S_b\, y''$;
D = dwarskracht tengevolge van de continu verdeelde uitwendige belasting q (zie punt 2);
M = moment van de continu verdeelde uitwendige belasting q en van de geconcentreerde eindlast Q te zamen (zie punt 2);
M_u = aan het liggeruiteinde aangrijpend uitwendig moment;
Q = aan het liggeruiteinde aangrijpende geconcentreerde last;
S_b = stijfheidsfactor tegen buiging;
S_t = stijfheidsfactor tegen wringing;
α = helling van den ligger in het inklempunt.

Indices.

De indices 1 en 2 geven aan of de bedoelde grootheid betrekking heeft op den voor- dan wel op den achterligger. z_1 komt voor met dubbele indices 11 en 12 om twee verschillende oplossingen aan te geven (zie punt 7a). S_b en Q zonder index hebben een speciale beteekenis (zie punt 2). Alle bovenstaande grootheden, met uitzondering van l zijn dimensieloos, tenzij voorzien van een er boven geplaatste streep (zie punt 2).

b. *Coëfficiënten van reeksen.*

De volgende coëfficiënten komen voor in reeksen, die de er na te noemen grootheden of andere daaruit afgeleide voorstellen:

a, b, c, d, e, f, g: stijfheidsfactoren (punt 5a);
h, i, j, k, l, m : uitwendige belastingen (punt 5b);
p, s, t, u, v : bekende functies (punt 6);
A, B, C : buigende momenten in den voorligger (punt 7a);
D : buigende momenten in den achterligger (punt 8);
E, F, G, H : krommingen en doorbuigingen van de liggers (punt 9);
γ, δ, ϵ : hulpfuncties (punt 7b);

Voorts beteekenen

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_\nu &= a_\nu : a_0\\ \bar{b}_\nu &= b_\nu : b_0\\ \bar{c}_\nu &= c_\nu : c_0\end{aligned}\right\}\ \text{(Tabel I)} \qquad \left.\begin{aligned}\bar{f}_\nu &= f_\nu : f_0\\ \bar{g}_\nu &= g_\nu : f_0\\ \bar{u}_\nu &= u_\nu : f_0\end{aligned}\right\}\ \text{(punt 7b)}$$

Bij de berekening van de correctiebelastingen komen sommige van de bovengegeven coëfficiënten voor, voorzien van * of $\triangle$. Voor de beteekenis hiervan kan verwezen worden naar punt 13.

c. *Overige grootheden en indices.*

m, n = indices, die den hoogsten term van een reeks aangeven;
K_n = *constante, afhankelijk van n* (punt 7a);
X, Y, Z, hulpgrootheden bij de berekening van de momenten (Tabel IX).
X_1, Y_1, Z_1, = hulpgrootheden bij de berekening van de correctiebelastingen (Tabel XVIII).
μ, ν = indices en exponenten, die een willekeurige term van een reeks aangeven.

Differentiaalquotienten naar x (ξ) zijn aangegeven door accenten.

LITERATUUR.

1. Biezeno, C. B., Koch, J. J. u. Koning, C. Ueber die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.* April 1926, S. 97—105.
2. Biezeno, C. B., Koch, J. J. en Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R.S.L. Rapport V. 175. *De Ingenieur* 13 November 1926 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel IV, blz. 101—137.
3. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II. R.S.L. Rapport V. 284. *De Ingenieur*, 12 Januari 1929 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 1—4.
4. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III. R.S.L. Rapport V. 285. *De Ingenieur*, 10 Januari 1930 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L. Deel VI, blz. 25—31.
5. Koning, C. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R.S.L. Rapport V. 358 (nog niet gepubliceerd).
6. Koning, C. en Van der Neut, A. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels II. R.S.L. Rapport V. 359 (nog niet gepubliceerd).
7. Riemann-Webers Differentialgleichungen der Physik I (7. Auflage) herausgegeben von R. von Mises (Braunschweig 1925).
8. Hilb, E. Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Bnd. IIII. S. 473—565. (Leipzig 1901—1921).

Tabel I.

STIJFHEIDSFACTOREN.

$$S_{1b} = \sum_{0}^{4} a_\nu x^\nu; \quad S_{2b} = \sum_{0}^{4} b_\nu x^\nu; \quad r = \sum_{0}^{4} c_\nu x^\nu \qquad \text{(VI, 1 t/m 3)}$$

1	2	3	4	5	6	7
ν	a_ν	$\bar a_\nu = a_\nu : a_0$	b_ν	$\bar b_\nu = b_\nu : b_0$	c_ν	$\bar c_\nu = c_\nu : c_0$
0	+0,7000	+1	+0,3000	+1	+0,6000	+1
1	—1,3300	—1,9000	—0,7200	—2,4000	—0,8400	—1,4000
2	+0,8820	+1,2600	+0,6480	+2,1600	+0,3660	+0,6100
3	—0,2268	—0,3240	—0,2592	—0,8640	—0,0504	—0,0840
4	+0,0151	+0,0216	+0,0389	+0,1296	+0,0022	+0,0036

Tabel IV.

OMGEKEERDEN VAN DE STIJFHEIDSFACTOREN (3).

$$\frac{1}{r} = \sum_{0}^{\infty} f_\nu x^\nu \quad \text{(VI 6)}$$

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= + \frac{1}{c_0} = + 1{,}6667 \\ f_\nu &= -\frac{c_4}{c_0} f_{\nu-4} - \frac{c_3}{c_0} f_{\nu-3} - \frac{c_2}{c_0} f_{\nu-2} - \\ &-\frac{c_1}{c_0} f_{\nu-1} = -\bar c_4 f_{\nu-4} - \bar c_3 f_{\nu-3} - \bar c_2 f_{\nu-2} - \bar c_1 f_{\nu-1} \end{aligned}\right\} \text{(VII 3)}$$

$$\bar f_\nu = f_\nu : f_0 = c_0 f_\nu = 0{,}6\, f_\nu$$

Voor de waarden van $\bar c_\nu$ zie Tabel I (7).

1	2	3	4	5	6	7
ν	$-\bar c_4 f_{\nu-4} = -0{,}0036\, f_{\nu-4}$	$-\bar c_3 f_{\nu-3} = +0{,}0840\, f_{\nu-3}$	$-\bar c_2 f_{\nu-2} = -0{,}6100\, f_{\nu-2}$	$-\bar c_1 f_{\nu-1} = +1{,}4000\, f_{\nu-1}$	f_ν	$\bar f_\nu = 0{,}6\, f_\nu$
0					+1,6667	+1
1				+2,3334	+2,3334	+1,4000
2			—1,0167	+3,2668	+2,2501	+1,3500
3		+0,1400	—1,4234	+3,1501	+1,8667	+1,1200
4	—0,0060	+0,1960	—1,3726	+2,6134	+1,4308	+0,8585
5	—0,0084	+0,1890	—1,1387	+2,0031	+1,0450	+0,6270
6	—0,0081	+0,1568	—0,8728	+1,4630	+0,7389	
7	—0,0067	+0,1202	—0,6374	+1,0345	+0,5106	
8	—0,0052	+0,0878	—0,4507	+0,7148	+0,3467	
9	—0,0038	+0,0621	—0,3115	+0,4854	+0,2322	
10	—0,0027	+0,0429	—0,2115	+0,3251	+0,1538	
11	—0,0018	+0,0291	—0,1416	+0,2153	+0,1010	
12	—0,0012	+0,0195	—0,0938	+0,1414	+0.0659	

Tabel II.

OMGEKEERDEN VAN DE STIJFHEIDSFACTOREN (1).

$$\frac{1}{S_{1b}} = \sum_{0}^{\infty} d_\nu x^\nu \quad \text{(VI 4)}$$

$$\left.\begin{aligned} d_0 &= + \frac{1}{a_0} = + \frac{1}{0{,}7} = + 1{,}4286 \\ d_\nu &= -\frac{a_1}{a_0} d_{\nu-1} - \frac{a_2}{a_0} d_{\nu-2} - \frac{a_3}{a_0} d_{\nu-3} - \\ &- \frac{a_4}{a_0} d_{\nu-4} = -\bar a_1 d_{\nu-1} - \bar a_2 d_{\nu-2} - \\ &- \bar a_3 d_{\nu-3} - \bar a_4 d_{\nu-4} \end{aligned}\right\} \text{(VII 1)}$$

Voor de waarden van $\bar a_\nu$ zie tabel I (3).

1	2	3	4	5	6
ν	$-\bar a_4 d_{\nu-4} = -0{,}0216\, d_{\nu-4}$	$-\bar a_3 d_{\nu-3} = +0{,}3240\, d_{\nu-3}$	$-\bar a_2 d_{\nu-2} = -1{,}2600\, d_{\nu-2}$	$-\bar a_1 d_{\nu-1} = +1{,}9000\, d_{\nu-1}$	d_ν
0					+1,4286
1				+2,7143	+2,7143
2			—1,8000	+5,1572	+3,3572
3		+0,4629	—3,4200	+6,3787	+3,4216
4	—0,0309	+0,8794	—4,2301	+6,5010	+3,1194
5	—0,0586	+1,0877	—4,3112	+5,9269	+2,6448
6	—0,0725	+1,1086	—3,9304	+5,0251	+2,1308
7	—0,0739	+1,0107	—3,3324	+4,0485	+1,6529
8	—0,0674	+0,8569	—2,6848	+3,1405	+1,2452
9	—0,0571	+0,6904	—2,0827	+2,3659	+0,9165
10	—0,0460	+0,5355	—1,5690	+1,7413	+0,6618
11	—0,0357	+0,4034	—1,1548	+1,2574	+0,4703

Tabel VIII.

BEKENDE FUNCTIES. (2E BELASTINGSGEVAL).

Voor toelichting zie Tabel VII.

De waarden van $(l_\nu + m_\nu)$ zijn hier dezelfde als voor 1e belastingsgeval (vergelijk Tabel V (8) en Tabel VI (8)), zoodat ook die voor s_ν dezelfde zijn (zie Tabel VII (7)).

De waarden van j_ν (zie Tabel VI (4)) zijn hier nul en daarmede ook die van t_ν.

Voor de waarden van $(l_\nu + m_\nu)$ zie Tabel VI (8).

$a_1 - a_2 = 0$

1	2	3	4	5	6
ν	s_ν	t_ν	$u_\nu = t_0 + (a_1 - a_2) = s_\nu + t_\nu$	$\bar u_\nu = u_\nu : f_0 = 0{,}6\, u_\nu$	$v_\nu = -(l_\nu + m_\nu)$
0	0	0	0	0	+0,5000
1	—1,6667	0	—1,6667	—1,0000	—1,0000
2	—0,3333	0	—0,3333	—0,2000	+0,5000
3	+0,1111	0	+0,1111	+0,0667	0
4	+0,2000	0	+0,2000	+0,1200	0
5	+0,1680	0	+0,1680	+0,1008	0
					0
6	+0,1104	0	+0,1104		
7	+0,0605	0	+0,0605		
8	+0,0259	0	+0,0259		
9	+0,0052	0	+0,0052		
10	—0,0056	0	—0,0056		
11	—0,0101	0	—0,0101		
12	—0,0110	0	—0,0110		

Tabel III.
OMGEKEERDEN VAN DE STIJFHEIDSFACTOREN (2).

$$\frac{1}{S_{2b}} = \sum_{o}^{\infty} e_\nu x^\nu \quad \text{(VI 5)} \qquad e_o = +\frac{1}{b_o} = +\frac{1}{0{,}3} = +\,3{,}3333$$

$$\left.\begin{aligned} e_\nu &= -\frac{b_4}{b_o} e_{\nu-4} - \frac{b_3}{b_o} e_{\nu-3} - \frac{b_2}{b_o} e_{\nu-2} - \frac{b_1}{b_o} e_{\nu-1} = \\ &= -\bar{b}_4 e_{\nu-4} - \bar{b}_3 e_{\nu-3} - \bar{b}_2 e_{\nu-2} - \bar{b}_1 e_{\nu-1} \end{aligned}\right\} \text{(VII 2)}$$

$$\frac{1}{S_{1b}} + \frac{1}{S_{2b}} = \sum_{o}^{\infty} g_\nu x^\nu \text{ (VI 7)} \quad g_\nu = d_\nu + e_\nu \quad \text{(VII 4)}$$

$$\bar{g}_\nu = g_\nu : f_o$$

Voor de waarden van $\bar{b}_\nu$, d_ν en f_o zie resp. Tabel I (5), II (6) en IV (6).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν	$-\bar{b}_4 e_{\nu-4} = -0{,}1296\, e_{\nu-4}$	$-\bar{b}_3 e_{\nu-3} = +0{,}8640\, e_{\nu-3}$	$-\bar{b}_2 e_{\nu-2} = -2{,}1600\, e_{\nu-2}$	$-\bar{b}_1 e_{\nu-1} = +2{,}4000\, e_{\nu-1}$	e_ν	d_ν	$g_\nu = d_\nu + e_\nu$	$\bar{g}_\nu = \frac{g_\nu}{f_o} = 0{,}6\, g_\nu$
0					+ 3,3333	+1,4286	+ 4,7619	+ 2,8571
1				+ 7,9999	+ 7,9999	+2,7143	+10,7142	+ 6,4285
2			— 7,1999	+19,1998	+11,9999	+3,3572	+15,8571	+ 9,2148
3		+ 2,8800	—17,2798	+28,7998	+14,4000	+3,4216	+17,8216	+10,6930
4	—0,4320	+ 6,9119	—25,9198	+34,5600	+15,1201	+3,1194	+18,2395	+10,9437
5	—1,0368	+10,3679	—31,1040	+36,2882	+14,5153	+2,6448	+17,1601	
6	—1,5552	+12,4416	—32,6594	+34,8367	+13,0637	+2,1308	+15,1945	
7	—1,8662	+13,0638	—31,3530	+31,3529	+11,1975	+1,6529	+12,8504	
8	—1,9596	+12,5412	—28,2176	+26,8740	+ 9,2380	+1,2452	+10,4832	
9	—1,8812	+11,2870	—24,1866	+22,1712	+ 7,3904	+0,9165	+ 8,3069	
10	—1,6931	+ 9,6746	—19,9541	+17,7370	+ 5,7644	+6,6618	+ 6,4262	
11	—1,4512	+ 7,9816	—15,9633	+13,8346	+ 4,4017	+0,4703	+ 4,8720	

Tabel VI.
UITWENDIGE BELASTINGEN (2E BELASTINGSGEVAL).

Voor toelichting zie Tabel V.

$$Q_1 = o; \quad Q_2 = o; \quad M_{1u} = o; \quad M_{2u} = o$$

1	2	3	4	5	6	7	8
ν	h_ν	i_ν	$j_\nu = -\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} h_{\nu-1} + Q_1$	$k_\nu = -\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} i_{\nu-1} + Q_2$	$l_\nu = +\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} j_{\nu-1} + M_{1u}$	$m_\nu = +\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} k_{\nu-1} + M_{2u}$	$l_\nu + m_\nu$
			$+\frac{1}{\nu} h_{\nu-1}$	$+\frac{1}{\nu} i_{\nu-1}$	$-\frac{1}{\nu} j_{\nu-1}$	$-\frac{1}{\nu} k_{\nu-1}$	
0	0	+1,0000	0	—1,0000	0	—0,5000	—0,5000
1	0	0	0	+1,0000	0	+1,0000	+1,0000
2	0	0	0	0	0	—0,5000	—0,5000
3	0	0	0	0	0	0	0
			$0 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} h_{\nu-1}$	$+\,1{,}0000 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} i_{\nu-1}$	$0 = -\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} j_{\nu-1}$	$+\,0{,}5000 = -\sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu} k_{\nu-1}$	

Tabel V.

UITWENDIGE BELASTINGEN (1E BELASTINGSGEVAL).

$$q_1 = \sum_{o}^{\infty} h_\nu \, x^\nu \quad \text{(VIII 1)}$$

$$q_2 = \sum_{o}^{\infty} i_\nu \, x^\nu \quad \text{(VIII 2)}$$

$$D_1 + Q_1 = \sum_{o}^{\infty} j_\nu \, x^\nu \quad \text{(IX 1)} \qquad j_o = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} h_{\nu-1} + Q_1;\ \nu \geqq 1 : j_\nu = + \frac{1}{\nu} h_{\nu-1}$$

$$D_2 + Q_2 = \sum_{o}^{\infty} k_\nu \, x^\nu \quad \text{(IX 2)} \qquad k_o = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} i_{\nu-1} + Q_2;\ \nu \geqq 1 : k_\nu = + \frac{1}{\nu} i_{\nu-1}$$

$$M_1 + M_{1u} = \sum_{o}^{\infty} l_\nu \, x^\nu \quad \text{(IX 3)} \qquad l_o = + \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{\nu} j_{\nu-1} + M_{1u};\ \nu \geqq 1 : l_\nu = - \frac{1}{\nu} j_{\nu-1}$$

$$M_2 + M_{2u} = \sum_{o}^{\infty} m_\nu \, x^\nu \quad \text{(IX 4)} \qquad m_o = + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} k_{\nu-1} + M_{2u};\ \nu \geqq 1 : m_\nu = - \frac{1}{\nu} k_{\nu-1}$$

$$Q_1 = o\ ;\ Q_2 = o\ ;\ M_{1u} = o\ ;\ M_{2u} = o.$$

1	2	3	4	5	6	7	8
ν	h_ν	i_ν	$j_\nu = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} h_{\nu-1} + Q_1$	$k_\nu = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} i_{\nu-1} + Q_2$	$l_\nu = +\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} j_{\nu-1} + M_{1u}$	$m_\nu = +\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} k_{\nu-1} + M_{2u}$	$l_\nu + m_\nu$
			$+ \frac{1}{\nu} h_{\nu-1}$	$+ \frac{1}{\nu} i_{\nu-1}$	$- \frac{1}{\nu} j_{\nu-1}$	$- \frac{1}{\nu} k_{\nu-1}$	
0	+1,0000	0	—1,0000	0	—0,5000	0	—0,5000
1	0	0	+1,0000	0	+1,0000	0	+1,0000
2	0	0	0	0	—0,5000	0	—0,5000
3	0	0	0	0	0	0	0
			$+1{,}0000 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} h_{\nu-1}$	$0 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} i_{\nu-1}$	$+0{,}5000 = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} j_{\nu-1}$	$0 = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu} k_{\nu-1}$	

Tabel VII.

BEKENDE FUNCTIES (1e BELASTINGSGEVAL).

$$f_1(x) = \sum_{o}^{\infty} u_\nu x^\nu \text{ (X)} \qquad p_\nu = e_\nu (l_o + m_o) + e_{\nu-1}(l_1 + m_1) + \ldots + e_1 (l_{\nu-1} + m_{\nu-1}) + e_o (l_\nu + m_\nu)$$

$$f_2(x) = \sum_{o}^{\infty} v_\nu x^\nu \text{ (XI)} \qquad s_o = o;\ \nu \geqq 1 : s_\nu = + \frac{1}{\nu} p_{\nu-1}$$

$$t_\nu = f_\nu j_o + f_{\nu-1} j_1 + \ldots + f_1 j_{\nu-1} + f_o j_\nu$$

$$u_o = t_o + (a_1 - a_2);\ \nu \geqq 1 : u_\nu = s_\nu + t_\nu$$

$$\bar{u}_\nu = u_\nu : f_o$$

$$v_\nu = -(l_\nu + m_\nu)$$

Voor de waarden van e_ν, f_ν, j_ν en $(l_\nu + m_\nu)$ zie resp. Tabel III (6), IV (6), V (4) en V (8).

$\alpha_1 - \alpha_2 = o$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ν	e_ν	$e_\nu(l_o + m_o) =$ $-0{,}5000\ e_\nu$	$e_{\nu-1}(l_1 + m_1) =$ $+1{,}0000\ e_{\nu-1}$	$e_{\nu-2}(l_2 + m_2) =$ $-0{,}5000\ e_{\nu-2}$	p_ν	$s_\nu = o$ / $+\frac{1}{\nu} p_{\nu-1}$	f_ν	$f_\nu j_o =$ $-f_\nu$	$f_{\nu-1} j_1 =$ $+f_{\nu-1}$	t_ν	$u_\nu = t_o + (\alpha_1 - \alpha_2)$ / $s_\nu + t_\nu$	$\bar{u}_\nu = u_\nu : f_o =$ $0{,}6\ u_\nu$	$v_\nu =$ $-(l_\nu + m_\nu)$
0	+ 3,3333	—1,6667			—1,6667	0	+1,6667	—1,6667		—1,6667	—1,6667	—1,0000	+0,5000
1	+ 7,9999	—4,0000	+ 3,3333		—0,6667	—1,6667	+2,3334	—2,3334	+1,6667	—0,6667	—2,3334	—1,4000	—1,0000
2	+11,9999	—6,0000	+ 7,9999	—1,6667	+0,3332	—0,3333	+2,2501	—2,2501	+2,3334	+0,0833	—0,2500	—0,1500	+0,5000
3	+14,4000	—7,2000	+11,9999	—4,0000	+0,7999	+0,1111	+1,8667	—1,8667	+2,2501	+0,3834	+0,4945	+0,2967	0
4	+15,1201	—7,5600	+14,4000	—6,0000	+0,8400	+0,2000	+1,4308	—1,4308	+1,8667	+0,4359	+0,6359	+0,3815	0
5	+14,5153	—7,2576	+15,1201	—7,2000	+0,6625	+0,1680	+1,0450	—1,0450	+1,4308	+0,3858	+0,5538	+0,3323	0
6	+13,0637	—6,5319	+14,5153	—7,5600	+0,4234	+0,1104	+0,7389	—0,7389	+1,0450	+0,3061	+0,4165		0
7	+11,1975	—5,5987	+13,0637	—7,2576	+0,2074	+0,0605	+0,5106	—0,5106	+0,7389	+0,2283	+0,2888		
8	+ 9,2380	—4,6190	+11,1975	—6,5319	+0,0466	+0,0259	+0,3467	—0,3467	+0,5106	+0,1639	+0,1898		
9	+ 7,3904	—3,6952	+ 9,2380	—5,5987	—0,0559	+0,0052	+0,2322	—0,2322	+0,3467	+0,1145	+0,1197		
10	+ 5,7644	—2,8822	+ 7,3904	—4,6190	—0,1108	—0,0056	+0,1538	—0,1538	+0,2322	+0,0784	+0,0728		
11	+ 4,4017	—2,2008	+ 5,7644	—3,6952	—0,1316	—0,0101	+0,1010	—0,1010	+0,1538	+0,0528	+0,0427		
12	—	—	—	—	—	—0,0110	+0,0659	—0,0659	+0,1010	+0,0351	+0,0241		

Tabel IX.

DE OPLOSSING z_{11} (1E BELASTINGSGEVAL).

$$z_{11} = \sum_{o}^{\infty} A_\nu x^\nu \qquad \nu A_\nu = -\left\{ \overline{f}_1 (\nu-1) A_{\nu-1} + \overline{f}_2 (\nu-2) A_{\nu-2} + \ldots + \overline{f}_{\nu-2}\, 2\, A_2 + \overline{f}_{\nu-1}\, A_1 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\nu-1} \left\{ \overline{g}_o A_{\nu-2} + \overline{g}_1 A_{\nu-3} + \ldots + \overline{g}_{\nu-3} A_1 + \overline{g}_{\nu-2} A_o \right\} + \overline{u}_{\nu-1} = -X + \frac{1}{\nu-1} Y + \overline{u}_{\nu-1} = -X + Z + \overline{u}_{\nu-1} \quad \text{(XIII 2)}$$

Voor de waarden van $\overline{f}_\nu$, $\overline{g}_\nu$ en $\overline{u}_\nu$ zie resp. Tabel IV (7), III (9) en VII (13).

$$A_o = o$$

		$\nu =$ 0	1	2	3	4	5	6
1	νA_ν	0	—1,0000	0	—0,2285	—0,4062	—0,2408	
2	$\overline{f}_1 (\nu-1) A_{\nu-1} = +1{,}4000\ (\nu-1)\ A_{\nu-1}$		0	—1,4000	0	—0,3199	—0,5687	—0,3371
3	$\overline{f}_2 (\nu-2) A_{\nu-2} = +1{,}3500\ (\nu-2)\ A_{\nu-2}$			0	—1,3500	0	—0,3085	—0,5484
4	$\overline{f}_3 (\nu-3) A_{\nu-3} = +1{,}1200\ (\nu-3)\ A_{\nu-3}$				0	—1,1200	0	—0,2559
5	$\overline{f}_4 (\nu-4) A_{\nu-4} = +0{,}8585\ (\nu-4)\ A_{\nu-4}$					0	—0,8585	0
6	$\overline{f}_5 (\nu-5) A_{\nu-5} = +0{,}6270\ (\nu-5)\ A_{\nu-5}$						0	—0,6270
7	X		0	—1,4000	—1,3500	—1,4399	—1,7357	—1,7684
8	A_ν	0	—1,0000	0	—0,0762	—0,1015		
9	$\overline{g}_o\ A_{\nu-2} = +2{,}8571\ A_{\nu-2}$			0	—2,8571	0	—0,2177	—0,2900
10	$\overline{g}_1\ A_{\nu-3} = +6{,}4285\ A_{\nu-3}$				0	—6,4285	0	—0,4899
11	$\overline{g}_2\ A_{\nu-4} = +9{,}2143\ A_{\nu-4}$					0	—9,2143	0
12	$\overline{g}_3\ A_{\nu-5} = +10{,}6930\ A_{\nu-5}$						0	—10,6930
13	Y		0	0	—2,8571	—6,4285	—9,4320	—11,4729
14	$Z = \frac{1}{\nu-1} Y$		0	0	—1,4285	—2,1428	—2,3580	—2,2946
15	$\overline{u}_{\nu-1}$		—1,0000	—1,4000	—0,1500	+0,2967	+0,3815	+ 0,8323
16	$\nu A_\nu = -X + Z + \overline{u}_{\nu-1}$		—1,0000	0	—0,2285	—0,4062	—0,2408	—0,1939
17	A_ν	0	—1,0000	0	—0,0762	—0,1015	—0,0482	—0,0323
18	ΣA_ν		—1,0000	—1,0000	—1,0762	—1,1777	—1,2259	—1,2582

Tabel X.

DE OPLOSSING z_{11} (2E BELASTINGSGEVAL).

Voor toelichting zie Tabel IX.

Voor de waarden $\bar{f}_\nu$, $\bar{g}_\nu$ en $\bar{u}_\nu$ zie resp. Tabel IV (7), III (9) en VIII (5).

$A_\circ = 0$

		$\nu =$						
		0	1	2	3	4	5	6
1	νA_ν	0	0	—1,0000	+1,2000	—0,7395	+0,1375	
2	$\bar{f}_1\ (\nu-1)\ A_{\nu-1} = +1,4000\ (\nu-1)\ A_{\nu-1}$		0	0	—1,4000	+1,6800	—1,0353	+0,1925
3	$\bar{f}_2\ (\nu-2)\ A_{\nu-2} = +1,3500\ (\nu-2)\ A_{\nu-2}$			0	0	—1,3500	+1,6200	—0,9983
4	$\bar{f}_3\ (\nu-3)\ A_{\nu-3} = +1,1200\ (\nu-3)\ A_{\nu-3}$				0	0	—1,1200	+1,3440
5	$\bar{f}_4\ (\nu-4)\ A_{\nu-4} = +0,8585\ (\nu-4)\ A_{\nu-4}$					0	0	—0,8585
6	$\bar{f}_5\ (\nu-5)\ A_{\nu-5} = +0,6270\ (\nu-5)\ A_{\nu-5}$						0	0
7	X		0	0	—1,4000	+0,3300	—0,5353	—0,3203
8	A_ν	0	0	—0,5000	+0,4000	—0,1849		
9	$\bar{g}_0\ A_{\nu-2} = +2,8571\ A_{\nu-2}$			0	0	—1,4285	+1,1428	—0,5283
10	$\bar{g}_1\ A_{\nu-3} = +6,4285\ A_{\nu-3}$				0	0	—3,2142	+2,5714
11	$\bar{g}_2\ A_{\nu-4} = +9,2143\ A_{\nu-4}$					0	0	—4,6071
12	$\bar{g}_3\ A_{\nu-5} = +10,6930\ A_{\nu-5}$						0	0
13	Y		0	0	0	—1,4285	—2,0714	—2,5640
14	$Z = \frac{1}{\nu-1}\ Y$		0	0	0	—0,4762	—0,5178	—0,5128
15	$\bar{u}_{\nu-1}$		0	—1,0000	—0,2000	+0,0667	+0,1200	+0,1008
16	$\nu\ A_\nu = -X + Z + \bar{u}_{\nu-1}$		0	—1,0000	+1,2000	—0,7395	+0,1375	—0,0917
17	A_ν	0	0	—0,5000	+0,4000	—0,1849	+0,0275	—0,0153
18	$\Sigma\ A_\nu$	0	0	—0,5000	—0,1000	—0,2849	—0,2574	—0,2727

Tabel XI.
DE OPLOSSING z_{12}.

$$z_{12} = \sum_{0}^{\infty} B_\nu x^\nu \qquad \nu B_\nu = -\left\{\bar{f}_1 (\nu-1) B_{\nu-1} + \bar{f}_2 (\nu-2) B_{\nu-2} + \ldots + \bar{f}_{\nu-2}\, 2\, B_2 + \bar{f}_{\nu-1} B_1\right\} +$$
$$+ \frac{1}{\nu-1}\left\{\bar{g}_0 B_{\nu-2} + \bar{g}_1 B_{\nu-3} + \ldots + \bar{g}_{\nu-3} B_1 + \bar{g}_{\nu-2} B_0\right\} = -X + \frac{1}{\nu-1} Y = -X + Z \qquad \text{(XIV 2)}$$

Voor de waarden van $\bar{f}_\nu$ en $\bar{g}_\nu$ zie resp. Tabel IV (7) en III (9).

$B_0 = +1.$

		$\nu =$						
		0	1	2	3	4	5	6
1	νB_ν	0	0	+2,8571	−0,7857	+1,6748	+0,2980	
2	$\bar{f}_1 (\nu-1) B_{\nu-1} = +1{,}4000\ (\nu-1) B_{\nu-1}$		0	0	+3,9999	−1,1000	+2,3447	+0,4172
3	$\bar{f}_2 (\nu-2) B_{\nu-2} = +1{,}3500\ (\nu-2) B_{\nu-2}$			0	0	+3,8571	−1,0607	+2,2610
4	$\bar{f}_3 (\nu-3) B_{\nu-3} = +1{,}1200\ (\nu-3) B_{\nu-3}$				0	0	+3,2000	−0,8800
5	$\bar{f}_4 (\nu-4) B_{\nu-4} = +0{,}8585\ (\nu-4) B_{\nu-4}$					0	0	+2,4528
6	$\bar{f}_5 (\nu-5) B_{\nu-5} = +0{,}6270\ (\nu-5) B_{\nu-5}$						0	0
7	X		0	0	+ 3,9999	+2,7571	+4,4840	+4,2510
8	B_ν	+1,0000	0	+1,4285	−0,2619	+0,4187		
9	$\bar{g}_0\ B_{\nu-2} = +2{,}8571\ B_{\nu-2}$			+2,8571	0	+4,0814	−0,7483	+1,1963
10	$\bar{g}_1\ B_{\nu-3} = +6{,}4285\ B_{\nu-3}$				+6,4285	0	+9,1831	−1,6836
11	$\bar{g}_2\ B_{\nu-4} = +9{,}2143\ B_{\nu-4}$					+9,2143	0	+13,1626
12	$\bar{g}_3\ B_{\nu-5} = +10{,}6930\ B_{\nu-5}$						+10,6930	0
13	$\bar{g}_4\ B_{\nu-6} = +10{,}9437\ B_{\nu-6}$							+10,9437
14	Y		0	+2,8571	+6,4285	+13,2957	+19,1278	+23,6190
15	$Z = \frac{1}{\nu-1} Y$		0	+2,8571	+3,2142	+4,4319	+ 4,7820	+4,7238
16	$\nu B_\nu = -X + Z$		0	+2,8571	−0,7857	+1,6748	+0,2980	+0,4728
17	B_ν	+1,0000	0	+1,4285	−0,2619	+0,4187	+0,0596	+0,0788
18	ΣB_ν	+1,0000	+1,0000	+2,4285	+2,1666	+2,5853	+2,6449	+2,7237

Tabel XII.

DE COEFFICIENT K_n (1E BELASTINGSGEVAL).

$$K_n = \frac{-M_{1u} - \sum\limits_{o}^{n} A_\nu}{\sum\limits_{o}^{n} B_\nu} \qquad \text{(XII 1)}$$

Voor de waarden van $\sum\limits_{o}^{n} A_\nu$ en $\sum\limits_{o}^{n} B_\nu$ zie resp. Tabel IX (18) en XI (18).

$$M_{1u} = o$$

1	2	3	4	5
n	$\sum\limits_{o}^{n} A_\nu$	$-M_{1u} - \sum\limits_{o}^{n} A_\nu$	$\sum\limits_{o}^{n} B_\nu$	K_n
1	—1,0000	+1,0000	+1,0000	+1,0000
2	—1,0000	+1,0000	+2,4285	+0,4118
3	—1,0762	+1,0762	+2,1666	+0,4967
4	—1,1777	+1,1777	+2,5853	+0,4555
5	—1,2259	+1,2259	+2,6449	+0,4635
6	—1,2582	+1,2582	+2,7237	+0,4619
7				+0,4621
8				+0,4620
9				+0,4620
10				+0,4620
11				+0,4620
12				+0,4620

Tabel XIII.

DE COEFFICIENT K_n (2E BELASTINGSGEVAL).

Voor toelichting zie Tabel XII.

Voor de waarden van $\sum\limits_{o}^{n} A_\nu$ en $\sum\limits_{o}^{n} B_\nu$ zie resp. Tabel X (18) en XI (18).

$$M_{1u} = o$$

1	2	3	4	5
n	$\sum\limits_{o}^{n} A_\nu$	$-M_{1u} - \sum\limits_{o}^{n} A_\nu$	$\sum\limits_{o}^{n} B_\nu$	K_n
1	0	0	+1,0000	0
2	—0,5000	+0,5000	+2,4285	+0,2059
3	—0,1000	+0,1000	+2,1666	+0,0462
4	—0,2849	+0,2849	+2,5853	+0,1102
5	—0,2574	+0,2574	+2,6449	+0,0973
6	—0,2727	+0,2727	+2,7237	+0,1001
7				+0,1001
8				+0,1003
9				+0,1004
10				+0,1005
11				+0,1005
12				+0,1006

Tabel XIV.

DE OPLOSSINGEN z_1 en y_1 (1E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$)

$z_1 = z_{11} + K_n z_{12} = \sum\limits_{o}^{n} C_\nu x^\nu$	(XII 2)	$C_\nu = A_\nu + K_n B_\nu$
$y_1'' = \sum\limits_{o}^{n} E_\nu x^\nu$	(XVI)	$E_\nu = d_o C_\nu + d_1 C_{\nu-1} + \ldots + d_{\nu-1} C_1 + d_\nu C_o$
$y_1 = \sum\limits_{o}^{n+2} G_\nu x^\nu$	(XVII)	$G_o = o;\ G_1 = +\alpha_1;\ \nu \geqq 2 : G_\nu = \frac{1}{\nu(\nu-1)} E_{\nu-2}$

Voor de waarden van A_ν, B_ν, K_n en d_ν zie resp. Tabel IX (17), XI (17), XII (5) en II (6).

$\alpha_1 = o$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ν	A_ν	B_ν	$K_n B_\nu = + 0{,}4619 B_\nu$	C_ν	$d_o C_\nu = +1{,}4286\ C_\nu$	$d_1 C_{\nu-1} = +2{,}7143\ C_{\nu-1}$	$d_2 C_{\nu-2} = +3{,}3572\ C_{\nu-2}$	$d_3 C_{\nu-3} = +3{,}4216\ C_{\nu-3}$	$d_4 C_{\nu-4} = +3{,}1194\ C_{\nu-4}$	$d_5 C_{\nu-5} = +2{,}6448\ C_{\nu-5}$	$d_6 C_{\nu-6} = +2{,}1308\ C_{\nu-6}$	E_ν	$\nu(\nu-1)$	$G_\nu = 0$ $+\alpha_1$ $\frac{1}{\nu(\nu-1)} E_{\nu-2}$
0	0	+1,0000	+0,4619	+0,4619	+0,6599							+0,6599		0
1	—1,0000	0	0	—1,0000	—1,4286	+1,2537						—0,1749		0
2	0	+1,4285	+0,6598	+0,6598	+0,9426	—2,7143	+1,5507					—0,2210	2	+0,3300
3	—0,0762	—0,2619	—0,1210	—0,1972	—0,2817	+1,7909	—3,3572	+1,5804				—0,2676	6	—0,0291
4	—0,1015	+0,4187	+0,1934	+0,0919	+0,1313	—0,5353	+2,2152	—3,4216	+1,4409			—0,1695	12	—0,0184
5	—0,0482	+0,0596	+0,0275	—0,0207	—0,0296	+0,2494	—0,6620	+2,2576	—3,1194	+1,2216		—0,0824	20	—0,0134
6	—0,0323	+0,0788	+0,0364	+0,0041	+0,0059	—0,0562	+0,3085	—0,6747	+2,0582	—2,6448	+ 0,9842	—0,0189	30	—0,0056
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	42	—0,0020
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	56	—0,0003

Tabel XV.

DE OPLOSSINGEN z_1 EN y_1 (2E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$).

Voor toelichting zie Tabel XIV.

Voor de waarden van A_ν, B_ν, K_n en d_ν zie resp. Tabel X (17), XI (17), XIII (5) en II (6).

$a_1 = o$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ν	A_ν	B_ν	$K_n B_\nu$ $+0{,}1001\,B_\nu$	C_ν	$d_0\,C_\nu =$ $+\,1{,}4286$ C_ν	$d_1\,C_{\nu-1} =$ $+\,2{,}7143$ $C_{\nu-1}$	$d_2\,C_{\nu-2}$ $+\,3{,}3572$ $C_{\nu-2}$	$d_3\,C_{\nu-3}$ $+\,3{,}4216$ $C_{\nu-3}$	$d_4\,C_{\nu-4}$ $+\,3{,}1194$ $C_{\nu-4}$	$d_5\,C_{\nu-5}$ $+\,2{,}6448$ $C_{\nu-5}$	$d_6 C_{\nu-6}$ $+\,2{,}1308$ $C_{\nu-6}$	E_ν	$\nu\,(\nu-1)$	$G_\nu =$ 0 / $+\,a_1$ / $\frac{1}{\nu\,(\nu-1)}\,E_{\nu-2}$
0	0	+1,0000	+0,1001	+0,1001	+0,1430							+0,1430		0
1	0	0	0	0	0	+0,2717						+0,2717		0
2	—0,5000	+1,4285	+0,1430	—0,3570	—0,5100	0	+0,3361					—0,1739	2	+0,0715
3	+0,4000	—0,2619	—0,0262	+0,3738	+0,5340	—0,9690	0	+0,3425				—0,0925	6	+0,0453
4	—0,1849	+0,4187	+0,0419	—0,1430	—0,2043	+1,0146	—1,1985	0	+0,3123			—0,0759	12	—0,0145
5	+0,0275	+0,0596	+0,0060	+0,0335	+0,0479	—0,3881	+1,2549	—1,2215	0	+0,2647		—0,0421	20	—0,0046
6	—0,0153	+0,0788	+0,0079	—0,0074	—0,0106	+0,0909	—0,4801	+1,2790	—1,1136	0	+0,2133	—0,0211	30	—0,0025
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	42	—0,0010
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	56	—0,0004

Tabel XVI.

DE OPLOSSINGEN z_2 EN y_2 (1E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$).

$$z_2 = \sum_{o}^{n} D_\nu x^\nu \qquad \text{(XV)} \qquad D_\nu = v_\nu - C_\nu$$

$$y_2'' = \sum_{o}^{n} F_\nu x^\nu \qquad \text{(XVIII)} \quad F_\nu = e_o D_\nu + e_1 D_{\nu-1} + \ldots + e_{\nu-1} D_1 + e_\nu D_o$$

$$y_2 = \sum_{o}^{n+2} H_\nu x^\nu \qquad \text{(XIX)} \qquad H_o = o;\ H_1 = + \alpha_2\ ;\ \nu \geqq 2 : H_\nu = \frac{1}{\nu(\nu-1)} F_{\nu-2}$$

Voor de waarden van C_ν, v_ν en e_ν zie resp. Tabel XIV (5), VII (14) en III (6).

$a_2 = o$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ν	C_ν	v_ν	$D_\nu = v_\nu - C_\nu$	$e_o D_\nu = + 3{,}3333\ D_\nu$	$e_1 D_{\nu-1} = + 7{,}9999\ D_{\nu-1}$	$e_2 D_{\nu-2} = + 11{,}9999\ D_{\nu-2}$	$e_3 D_{\nu-3} = + 14{,}4000\ D_{\nu-3}$	$e_4 D_{\nu-4} = + 15{,}1201\ D_{\nu-4}$	$e_5 D_{\nu-5} = + 14{,}5153\ D_{\nu-5}$	$e_6 D_{\nu-6} = + 13{,}0637\ D_{\nu-6}$	F_ν	$\nu(\nu-1)$	$H = o$ / $+ a_2$ / $\frac{1}{\nu(\nu-1)} F_{\nu-2}$
0	+0,4619	+0,5000	+0,0381	+0,1270							+0,1270		0
1	—1,0000	—1,0000	0	0	+0,3048						+0,3048		0
2	+0,6598	+0,5000	—0,1598	—0,5327	0	+0,4572					—0,0755	2	+0,0635
3	—0,1972	0	+0,1972	+0,6573	—1,2784	0	+0,5486				—0,0725	6	+0,0508
4	+0,0919	0	—0,0919	—0,3063	+1,5776	—1,9176	0	+0,5761			—0,0702	12	—0,0063
5	—0,0207	0	+0,0207	+0,0690	—0,7352	+2,3664	—2,3011	0	+0,5530		—0,0479	20	—0,0036
6	+0,0041	0	—0,0041	—0,0137	+0,1656	—1,1028	+2,8397	—2,4162	0	+0,4977	—0,0297	30	—0,0023
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	42	—0,0011
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	56	—0,0005

Tabel XVII.

DE OPLOSSINGEN z_2 EN y_2 (2E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$).

Voor toelichting zie Tabel XVI.

Voor de waarden van C_ν, v_ν en e_ν zie resp. Tabel XV (5), VIII (6) en III (6).

$a_2 = 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ν	C_ν	v_ν	$D_\nu = v_\nu - C_\nu$	$e_0 D_\nu = +3{,}3333\ D_\nu$	$e_1 D_{\nu-1} = +7{,}9999\ D_{\nu-1}$	$e_2 D_{\nu-2} = +11{,}9999\ D_{\nu-2}$	$e_3 D_{\nu-3} = +14{,}4000\ D_{\nu-3}$	$e_4 D_{\nu-4} = +15{,}1201\ D_{\nu-4}$	$e_5 D_{\nu-5} = +14{,}5153\ D_{\nu-5}$	$e_6 D_{\nu-6} = +13{,}0637\ D_{\nu-6}$	F_ν	$\nu(\nu-1)$	$H_\nu =$ 0 / $+a_2$ / $\frac{1}{\nu(\nu-1)} F_\nu$
0	+0,1001	+0,5000	+0,3999	+1,3330							+1,3330		0
1	0	—1,0000	—1,0000	—3,3333	+3,1992						—0,1341		0
2	—0,3570	+0,5000	+0,8570	+2,8566	—7,9999	+ 4,7988					—0,3445	2	+0,6665
3	+0,3738	0	—0,3738	—1,2460	+6,8559	—11,9999	+ 5,7586				—0,6314	6	—0,0223
4	—0,1430	0	+0,1430	+0,4767	—2,9904	+10,2839	—14,4000	+6,0465			—0,5833	12	—0,0287
5	+0,0335	0	—0,0335	—0,1117	+1,1440	— 4,4856	+12,3408	—15,1201	+ 5,8047		—0,4279	20	—0,0316
6	—0,0074	0	+0,0074	+0,0247	—0,2680	+ 1,7160	— 5,3827	+12,9579	—14,5153	+5,2242	—0,2432	30	—0,0194
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	42	—0,0102
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	56	—0,0043

Tabel XVIII.

CONTROLEBEREKENING (1E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$) (1E DEEL).

$$\triangle f_1(x) = \sum_{o}^{\infty} \triangle u_\nu \,.x^\nu \qquad \text{(XXIII)}$$

$$\triangle u_\nu = u_\nu^* - u_\nu$$

$$u_\nu^* = \left\{ f_\circ(\nu+1)\ C_{\nu+1} + f_1 \nu C_\nu + \ldots + f_{\nu-1}\, 2C_2 + f_\nu\, C_1 \right\} - \frac{1}{\nu} \left\{ g_\circ\, C_{\nu-1} + g_1\, C_{\nu-2} + \ldots + g_{\nu-2}\, C_1 + g_{\nu-1}\, C_\circ \right\} = X_1 - \frac{1}{\nu}\, Y_1 = X_1 - Z_1 \qquad \text{(XXII)}$$

Voor de waarden van C_ν, f_ν, g_ν en u_ν zie resp. Tabel XIV (5), IV (6), III (8) en VII (12).

Nr		$\nu =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$(v+1)\ C_{\nu+1}$	—1,0000	+1,3196	—0,5916	+0,3676	—0,1035	+0,0246	0	0	0	0	0	0	0
2	$f_\circ(\nu+1)\, C_{\nu+1} = +1{,}6667\,(\nu+1)\, C_{\nu+1}$	—1,6667	+2,1994	—0,9860	+0,6127	—0,1725	+0,0410							
3	$f_1\, \nu C_\nu = +2{,}3334\ \nu C_\nu$		—2,3334	+3,0792	—1,3804	+0,8578	—0,2415	+0,0574						
4	$f_2\,(\nu-1)\, C_{\nu-1} = +2{,}2501\,(\nu-1)\, C_{\nu-1}$			—2,2501	+2,9692	—1,3312	+0,8271	—0,2329	+0,0554					
5	$f_3\,(\nu-2)\, C_{\nu-2} = +1{,}8667\,(\nu-2)\, C_{\nu-2}$				—1,8667	+2,4633	—1,1043	+0,6862	—0,1932	+0,0459				
6	$f_4\,(\nu-3)\, C_{\nu-3} = +1{,}4308\,(\nu-3)\, C_{\nu-3}$					—1,4308	+1,8881	—0,8465	+0,5260	—0,1481	+0,0352			
7	$f_5\,(\nu-4)\, C_{\nu-4} = +1{,}0450\,(\nu-4)\, C_{\nu-4}$						—1,0450	+1,3790	—0,6182	+0,3841	—0,1082	+0,0257		
8	$f_6\,(\nu-5)\, C_{\nu-5} = +0{,}7389\,(\nu-5)\, C_{\nu-5}$							—0,7389	+0,9751	—0,4371	+0,2716	—0,0765	+0,0182	
9	$f_7\,(\nu-6)\, C_{\nu-6} = +0{,}5106\,(\nu-6)\, C_{\nu-6}$								—0,5106	+0,6738	—0,3021	+0,1877	—0,0528	+0,0126
10	$f_8\,(\nu-7)\, C_{\nu-7} = +0{,}3467\,(\nu-7)\, C_{\nu-7}$									—0,3467	+0,4575	—0,2051	+0,1274	—0,0359
11	$f_9\,(\nu-8)\, C_{\nu-8} = +0{,}2322\,(\nu-8)\, C_{\nu-8}$										—0,2322	+0,3064	—0,1374	+0,0854
12	$f_{10}\,(\nu-9)\, C_{\nu-9} = +0{,}1538\,(\nu-9)\, C_{\nu-9}$											—0,1538	+0,2030	—0,0910
13	$f_{11}(\nu-10) C_{\nu-10} = +0{,}1010(\nu-10)\, C_{\nu-10}$												—0,1010	+0,1338
14	$f_{12}(\nu-11) C_{\nu-11} = +0{,}0659(\nu-11)\, C_{\nu-11}$													—0,0659
15	X_1	—1,6667	—0,1340	—0,1569	+0,3348	+0,3866	+0,3654	+0,3043	+0,2345	+0,1719	+0,1218	+0,0844	+0,0574	+0,0385
16	C_ν	+0,4619	—1,0000	+0,6598	—0,1972	+0,0919	—0,0207	+0,0041	0	0	0	0	0	0
17	$g_\circ\ C_{\nu-1} = +4{,}7619\ C_{\nu-1}$		+2,1995	—4,7619	+3,1419	—0,9390	+0,4376	—0,0986	+0,0195					
18	$g_1\ C_{\nu-2} = +10{,}7142\ C_{\nu-2}$			+4,9489	—10,7142	+7,0692	—2,1128	+0,9846	—0,2218	+0,0439				
19	$g_2\ C_{\nu-3} = +15{,}3571\ C_{\nu-3}$				+7,0934	—15,3571	+10,1326	—3,0284	+1,4113	—0,3179	+0,0630			
20	$g_3\ C_{\nu-4} = +17{,}8216\ C_{\nu-4}$					+8,2318	—17,8216	+11,7587	—3,5144	+1,6378	—0,3689	+0,0731		
21	$g_4\ C_{\nu-5} = +18{,}2395\ C_{\nu-5}$						+8,4248	—18,2395	+12,0344	—3,5968	+1,6762	—0,3776	+0,0748	
22	$g_5\ C_{\nu-6} = +17{,}1601\ C_{\nu-6}$							+7,9263	—17,1601	+11,3222	—3,3840	+1,5770	—0,3552	+0,0704
23	$g_6\ C_{\nu-7} = +15{,}1945\ C_{\nu-7}$								+7,0183	—15,1945	+10,0253	—2,9964	+1,3964	—0,3145
24	$g_7\ C_{\nu-8} = +12{,}8504\ C_{\nu-8}$									+5,9356	—12,8504	+8,4787	—2,5341	+1,1810
25	$g_8\ C_{\nu-9} = +10{,}4832\ C_{\nu-9}$										+4,8422	—10,4832	+6,9168	—2,0673
26	$g_9\ C_{\nu-10} = +8{,}3069\ C_{\nu-10}$											+3,8370	—8,3069	+5,4809
27	$g_{10}\ C_{\nu-11} = +6{,}4262\ C_{\nu-11}$												+2,9683	—6,4262
28	$g_{11}\ C_{\nu-12} = +4{,}8720\ C_{\nu-12}$													+2,2504
29	Y_1	0	+2,1995	+0,1870	—0,4789	—0,9951	—0,9394	—0,6969	—0,4128	—0,1697	+0,0034	+0,1086	+0,1601	+0,1747
30	$Z_1 = \frac{1}{\nu}\ Y_1$	0	+2,1995	+0,0935	—0,1596	—0,2488	—0,1879	—0,1161	—0,0590	—0,0212	+0,0004	+0,0109	+0,0146	+0,0146
31	$u_\nu^* = X_1 - Z_1$	—1,6667	—2,3335	—0,2504	+0,4944	+0,6354	+0,5533	+0,4204	+0,2935	+0,1931	+0,1214	+0,0735	+0,0428	+0,0239
32	u_ν	—1,6667	—2,3334	—0,2500	+0,4945	+0,6359	+0,5538	+0,4165	+0,2888	+0,1898	+0,1197	+0,0728	+0,0427	+0,0241
33	$\triangle u_\nu = u_\nu^* - u_\nu$	0	—0,0001	—0,0004	—0,0001	—0,0005	—0,0005	+0,0039	+0,0047	+0,0033	+0,0017	+0,0007	+0,0001	—0,0002
34	$\Sigma\ \triangle\ u_\nu$													+0,0126

Tabel XIX.

CONTROLEBEREKENING (1E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$) (2E DEEL).

$\triangle (D_1 + Q_1) = \overset{\infty}{\underset{o}{\Sigma}} \triangle j_\nu \cdot x^\nu$ **(XXIV)** $\qquad \triangle j_\nu = c_o \cdot \triangle u_\nu + c_1 \cdot \triangle u_{\nu-1} + \ldots + c_{m-1} \cdot \triangle u_{\nu-m+1} + c_m \cdot \triangle u_{\nu-m}$

$\triangle Q_1 = \overset{m}{\underset{o}{\Sigma}} c_\nu \cdot \overset{\infty}{\underset{o}{\Sigma}} \triangle u_\nu$ **(XXVI 1)**

$\triangle Q_1 = \overset{\infty}{\underset{o}{\Sigma}} \triangle j_\nu$ **(XXVI 2)**

$\triangle q_1 = \overset{\infty}{\underset{o}{\Sigma}} \triangle h_\nu \cdot x^\nu$ **(XXV)** $\qquad \triangle h_\nu = + (\nu + 1) \cdot \triangle j_{\nu+1}$

$\triangle M_1 = \overset{\infty}{\underset{o}{\Sigma}} \triangle l_\nu \cdot x^\nu$ **(XXVII)** $\qquad \triangle l_o = + \overset{\infty}{\underset{o}{\Sigma}} \frac{1}{\nu + 1} \triangle j_\nu; \quad \nu > o : \triangle l_\nu = - \frac{1}{\nu} \triangle j_{\nu-1}$

Voor de waarden van $\triangle u_\nu$ en c_ν zie resp. Tabel XVIII (33) en I (6).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν	$\triangle u_\nu$	$c_o \cdot \triangle u_\nu =$ $+0{,}6000\ \triangle u_\nu$	$c_1 \cdot \triangle u_{\nu-1} =$ $-0{,}8400\ \triangle u_{\nu-1}$	$c_2 \cdot \triangle u_{\nu-2} =$ $+0{,}3660\ \triangle u_{\nu-2}$	$c_3 \cdot \triangle u_{\nu-3} =$ $-0{,}0504\ \triangle u_{\nu-3}$	$c_4 \cdot \triangle u_{\nu-4} =$ $+0{,}0022\ \triangle u_{\nu-4}$	$\triangle j_\nu$	$\triangle h_\nu =$ $(\nu+1) \cdot \triangle j_{\nu+1}$	$\frac{1}{\nu+1} \triangle j_\nu$	$\triangle l_\nu =$ $+ \overset{\infty}{\underset{o}{\Sigma}} \frac{1}{\nu+1} \triangle j_\nu$ / $- \frac{1}{\nu} \triangle j_{\nu-1}$
0	0	0					0	—0,0001	0	+0,0001
1	—0,0001	—0,0001	0				—0,0001	—0,0002	0	0
2	—0,0004	—0,0002	+0,0001	0			—0,0001	+0,0006	0	0
3	—0,0001	—0,0001	+0,0003	0	0		+0,0002	—0,0012	0	0
4	—0,0005	—0,0003	+0,0001	—0,0001	0	0	—0,0003	+0,0005	—0,0001	0
5	—0,0005	—0,0003	+0,0004	0	0	0	+0,0001	+0,0150	0	+0,0001
6	+0,0039	+0,0023	+0,0004	—0,0002	0	0	+0,0025	—0,0049	+0,0004	0
7	+0,0047	+0,0028	—0,0033	—0,0002	0	0	—0,0007	—0,0040	—0,0001	—0,0004
8	+0,0033	+0,0020	—0,0039	+0,0014	0	0	—0,0005	—0,0027	—0,0001	+0,0001
9	+0,0017	+0,0010	—0,0028	+0,0017	—0,0002	0	—0,0003	0	0	+0,0001
10	+0,0007	+0,0004	—0,0014	+0,0012	—0,0002	0	0	—0,0011	0	0
11	+0,0001	+0,0001	—0,0006	+0,0006	—0,0002	0	—0,0001	0	0	0
12	—0,0002	—0,0001	—0,0001	+0,0003	—0,0001	0	0	—	0	0
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
							$+0{,}0007 = \Sigma \triangle j_\nu$		$+0{,}0001 = \Sigma \frac{1}{\nu+1} \triangle j_\nu$	

$\triangle Q_1 = \underset{o}{\Sigma} c_\nu \cdot \overset{m}{\Sigma} \triangle u_\nu = +0{,}0778 \times 0{,}0126 = +0{,}0010$

$\triangle Q_1 = \Sigma \triangle j_\nu = +0{,}0007$

Tabel XX.

CONTROLEBEREKENING (2E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$) (1E DEEL).

Voor toelichting zie Tabel XVIII.

Voor de waarden van C_ν, f_ν, g_ν en u_ν zie resp. Tabel XV (5), IV (6), III (8) en VIII (4).

Nr		$\nu =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$(\nu+1)\ C_{\nu+1}$	0	—0,7140	+1,1214	—0,5720	+0,1675	—0,0444	0	0	0	0	0	0	0
2	$f_0(\nu+1)\ C_{\nu+1} = +1{,}6667\ (\nu+1)\ C_{\nu+1}$	0	—1,1900	+1,8690	—0,9534	+0,2792	—0,0740							
3	$f_1\ \nu C_\nu = +2{,}3334\ \nu C_\nu$		0	—1,6660	+2,6167	—1,3347	+0,3908	—0,1036						
4	$f_2(\nu-1)\ C_{\nu-1} = +2{,}2501\ (\nu-1)\ C_{\nu-1}$			0	—1,6066	+2,5233	—1,2871	+0,3769	—0,0999					
5	$f_3(\nu-2)\ C_{\nu-2} = +1{,}8667\ (\nu-2)\ C_{\nu-2}$				0	—1,3328	+2,0933	—1,0678	+0,3127	—0,0829				
6	$f_4(\nu-3)\ C_{\nu-3} = +1{,}4308\ (\nu-3)\ C_{\nu-3}$					0	—1,0216	+1,6045	—0,8184	+0,2397	—0,0635			
7	$f_5(\nu-4)\ C_{\nu-4} = +1{,}0450\ (\nu-4)\ C_{\nu-4}$						0	—0,7461	+1,1719	—0,5977	+0,1750	—0,0464		
8	$f_6(\nu-5)\ C_{\nu-5} = +0{,}7389\ (\nu-5)\ C_{\nu-5}$							0	—0,5276	+0,8286	—0,4227	+0,1238	—0,0328	
9	$f_7(\nu-6)\ C_{\nu-6} = +0{,}5106\ (\nu-6)\ C_{\nu-6}$								0	—0,3646	+0,5726	—0,2921	+0,0855	—0,0227
10	$f_8(\nu-7)\ C_{\nu-7} = +0{,}3467\ (\nu-7)\ C_{\nu-7}$									0	—0,2475	+0,3888	—0,1983	+0,0581
11	$f_9(\nu-8)\ C_{\nu-8} = +0{,}2322\ (\nu-8)\ C_{\nu-8}$										0	—0,1658	+0,2604	—0,1328
12	$f_{10}(\nu-9)\ C_{\nu-9} = +0{,}1538\ (\nu-9)\ C_{\nu-9}$											0	—0,1098	+0,1725
13	$f_{11}(\nu-10) C_{\nu-10} = +0{,}1010(\nu-10) C_{\nu-10}$												0	—0,0721
14	$f_{12}(\nu-11) C_{\nu-11} = +0{,}0659(\nu-11) C_{\nu-11}$													0
15	X_1	0	—1,1900	+0,2030	+0,0567	+0,1350	+0,1014	+0,0639	+0,0387	+0,0231	+0,0139	+0,0083	+0,0050	+0,0030
16	C_ν	+0,1001	0	—0,3570	+0,3738	—0,1430	+0,0335	—0,0074	0	0	0	0	0	0
17	$g_0\ C_{\nu-1} = +\ 4{,}7619\ C_{\nu-1}$		+0,4767	0	—1,7000	+1,7800	—0,6810	+0,1595	—0,0352					
18	$g_1\ C_{\nu-2} = +10{,}7142\ C_{\nu-2}$			+1,0725	0	—3,8250	+4,0050	—1,5321	+0,3589	—0,0793				
19	$g_2\ C_{\nu-3} = +15{,}3571\ C_{\nu-3}$				+1,5372	0	—5,4825	+5,7405	—2,1961	+0,5154	—0,1136			
20	$g_3\ C_{\nu-4} = +17{,}8216\ C_{\nu-4}$					+1,7839	0	—6,3623	+6,6617	—2,5485	+0,5970	—0,1319		
21	$g_4\ C_{\nu-5} = +18{,}2395\ C_{\nu-5}$						+1,8258	0	—6,5115	+6,8179	—2,6082	+0,6110	—0,1350	
22	$g_5\ C_{\nu-6} = +17{,}1601\ C_{\nu-6}$							+1,7177	0	—6,1262	+6,4144	—2,4539	+0,5749	—0,1270
23	$g_6\ C_{\nu-7} = +15{,}1945\ C_{\nu-7}$								+1,5210	0	—5,4244	+5,6797	—2,1728	+0,5090
24	$g_7\ C_{\nu-8} = +12{,}8504\ C_{\nu-8}$									+1,2863	0	—4,5876	+4,8035	—1,8376
25	$g_8\ C_{\nu-9} = +10{,}4832\ C_{\nu-9}$										+1,0494	0	—3,7425	+3,9186
26	$g_9\ C_{\nu-10} = +\ 8{,}3069\ C_{\nu-10}$											+0,8315	0	—2,9656
27	$g_{10}\ C_{\nu-11} = +\ 6{,}4262\ C_{\nu-11}$												+0,6433	0
28	$g_{11}\ C_{\nu-12} = +\ 4{,}8720\ C_{\nu-12}$													+0,4877
29	Y_1	0	+0,4767	+1,0725	—0,1628	—0,2611	—0,3327	—0,2767	—0,2012	—0,1353	—0,0854	—0,0512	—0,0286	—0,0149
30	$Z_1 = \frac{1}{\nu} Y_1$	0	+0,4767	+0,5363	—0,0543	—0,0653	—0,0665	—0,0461	—0,0287	—0,0169	—0,0095	—0,0051	—0,0026	—0,0012
31	$u^*_\nu = X_1 - Z_1$	0	—1,6667	—0,3333	+0,1110	+0,2003	+0,1679	+0,1100	+0,0674	+0,0400	+0,0234	+0,0134	+0,0076	+0,0042
32	u_ν	0	—1,6667	—0,3333	+0,1111	+0,2000	+0,1680	+0,1104	+0,0605	+0,0259	+0,0052	—0,0056	—0,0101	—0,0110
33	$\Delta u_\nu = u^*_\nu - u_\nu$	0	0	0	—0,0001	+0,0003	—0,0001	—0,0004	+0,0069	+0,0141	+0,0182	+0,0190	+0,0177	+0,0152
34	$\Sigma\Delta u_\nu$													+0,0908

Tabel XXI.

CONTROLEBEREKENING (2E BELASTINGSGEVAL; $n = 6$) (2E DEEL).

Voor toelichting zie Tabel XIX.

Voor de waarden van $\triangle u_\nu$ en c_ν zie resp. Tabel XX (33) en I (6).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ν	$\triangle u_\nu$	$c_o . \triangle u_\nu =$ $+0{,}6000$ $\triangle u_\nu$	$c_1 . \triangle u_{\nu-1} =$ $-0{,}8400$ $\triangle u_{\nu-1}$	$c_2 . \triangle u_{\nu-2} =$ $+0{,}3660$ $\triangle u_{\nu-2}$	$c_3 . \triangle u_{\nu-3} =$ $-0{,}0504$ $\triangle u_{\nu-3}$	$c_4 . \triangle u_{\nu-4} =$ $+0{,}0022$ $\triangle u_{\nu-4}$	$\triangle j_\nu$	$\triangle h_\nu =$ $(\nu+1) \triangle j_{\nu+1}$	$\frac{1}{\nu+1} \triangle j_\nu$	$\triangle l_\nu =$ $+\sum_{o}^{\nu} \frac{1}{\nu+1} \triangle j_\nu$ $- \frac{1}{\nu} \triangle j_{\nu-1}$
0	0	0					0	0	0	+0,0011
1	0	0	0				0	0	0	0
2	0	0	0	0			0	—0,0003	0	0
3	—0,0001	—0,0001	0	0	0		—0,0001	+0,0012	0	0
4	+0,0003	+0,0002	+0,0001	0	0	0	+0,0003	—0,0020	+0,0001	0
5	—0,0001	—0,0001	—0,0003	0	0	0	—0,0004	0	—0,0001	—0,0001
6	—0,0004	—0,0002	+0,0001	+0,0001	0	0	0	+0,0308	0	+0,0001
7	+0,0069	+0,0041	+0,0003	0	0	0	+0,0044	+0,0208	+0,0005	0
8	+0,0141	+0,0085	—0,0058	—0,0001	0	0	+0,0026	+0,0144	+0,0003	—0,0005
9	+0,0182	+0,0109	—0,0118	+0,0025	0	0	+0,0016	+0,0100	+0,0002	—0,0003
10	+0,0190	+0,0114	—0,0153	+0,0052	—0,0003	0	+0,0010	+0,0066	+0,0001	—0,0002
11	+0,0177	+0,0106	—0,0160	+0,0067	—0,0007	0	+0,0006	+0,0036	0	—0,0001
12	+0,0152	+0,0091	—0,0149	+0,0070	—0,0009	0	+0,0003	—	0	0
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
$\triangle Q_1 = \sum_{o}^{m} c_\nu . \Sigma \triangle u_\nu = +0{,}0778 \times 0{,}0908 = +0{,}0071$ $\triangle Q_2 = \Sigma \triangle j_\nu = +0{,}0103$							$+0{,}0103 =$ $\Sigma \triangle j_\nu$		$+0{,}0011 =$ $\Sigma \frac{1}{\nu+1} \triangle j_\nu$	

Rapport S. 48.

Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers

door

ir. A. VAN DER NEUT.

Rapport S. 48: La résistance à la torsion et au cisaillement des poutres creuses à connexion multiple.

Report S. 48: Twisting and bending by endload of multiply-connected box-spars.

Bericht S. 48: Torsion und Schul von mehrfach zusammenhängenden Kastenholmen.

RAPPORT S. 48.

Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers.

door ir. A. VAN DER NEUT.

Uittreksel.

a. *Aanduiding van het onderzoek.*

De liggers met meervoudig samenhangende dwarsdoorsneden, voor zoover zij het onderwerp van dit rapport vormen, zijn samengesteld uit dunne wanden, die bij n + 1-voudigen samenhang n „cellen" omsluiten.

Deze wanden kunnen afgewisseld zijn met meer geconcentreerd gedimensioneerde onderdeelen, zooals de gordingen in een vliegtuigvleugel-doosligger; echter zal steeds het totaal materiaaloppervlak in de dwarsdoorsnede klein moeten zijn tegenover het totaal omspannen oppervlak.

Het rapport geeft de theoretische berekening van de spanningsverdeelingen bij wringing en bij torsievrije buiging door dwarskracht, en van het torsiecentrum voor doosliggers van willekeurig veelvoudigen samenhang. Volledigheidshalve is ook de afleiding gegeven van de spanningsverdeeling bij torsie, hoewel deze uit de literatuur bekend is.

In punt 11 zijn de formules samengevat, die voor practische toepassing der aangegeven methode, benoodigd zijn.

b. *Notaties.* (zie punt 11).

c. *Zuivere wringing.* (punt 4).

De spanningsfunctie F valt uiteen in n concrete grootheden, welke aan de verschillende cellen zijn toegevoegd. Dit n-tal F's wordt berekend uit de stelling van L. Prandtl, volgens welke de lijn-integraal van de schuifspanning evenredig is met het door de lijn omspannen oppervlak (vergelijking 11), gecombineerd met vergelijking (9).

Met de zeepvliesanalogie wordt het spanningsbeeld geïllustreerd (fig. 2, punt 4b).

d. *Torsievrije buiging door dwarskracht en torsiecentrum.* (punt 6).

Op grond van de lineaire buigspanningsverdeeling volgens B. de Saint-Vénant volgt uit de evenwichtsvoorwaarde voor een liggergedeelte, dat in de liggerrichting elementair klein is en in het vlak van de liggerdoorsnede een eindig gedeelte dezer doorsnede omvat, de grootte van de som der schuif-krachten per lengte-eenheid in de doorsneden wanden (vergelijking 16).

Aan alle evenwichtsvoorwaarden wordt voldaan, indien de schuifkracht in een willekeurig punt gegeven wordt in den vorm van vergelijking (17). Aan iedere cel is een grootheid T toegevoegd, die het analogon vormt van de spanningsfunctie T bij zuivere torsie, en waarin alle onbekendheid betreffende het spanningsbeeld, die na inachtname der evenwichtsvoorwaarden nog overblijft, is geconcentreerd. Van de beide overige ingevoerde grootheden geeft t'_{ij} de bekende verandering aan van de schuifkracht langs een wand (vergelijking 18), terwijl t_{ij} voor iederen wand een constante waarde heeft, die zoodanig gekozen is, dat het evenwicht van de knooppunten waar de wanden elkaar ontmoeten gegarandeerd blijft (vergelijking 19) (punt 6*c*).

Uit de definitie van het torsiecentrum volgt, dat het arbeidsvermogen, opgevat als functie der T's, minimaal is (vergelijking 22). Hierna volgt dat bij torsievrije buiging de lijnintegraal van de schuifspanning rond ieder complex van cellen nul is (vergelijking 28) (punt 6*d*).

Het torsiecentrum wordt gevonden als zwaartepunt van de door de vergelijkingen (28) opgeleverde schuifspanningen.

Uitgaande van vergelijking (17) wordt een zeepvliesanalogie ontworpen voor de spanningsverdeeling, indien de dwarskracht in een willekeurig punt aangrijpt (punt 10).

e. *Niet homogene liggers* (punt 8).

Indien de ligger heterogeen van samenstelling is, blijkt de spanningstoestand te kunnen worden afgeleid uit die van een homogenen ligger, die zoodanig gedimensioneerd is ten opzichte van de origineele, dat de wanddikten omgekeerd evenredig zijn met de glijdingsmoduli.

f. *Uitgewerkt voorbeeld* (punt 12).

Aan den tweecelligen ligger worden de resultaten toegelicht. De algemeene uitdrukking voor de torsiestijfheid wordt afgeleid (punt 12*a*, vergelijking 41).

In geval de bijdragen van de normaalspanningen in de wanden aan het buigend moment verwaarloosbaar zijn tegenover die der massa-concentraties in de knooppunten (fig. 4), zijn de schuifkrachten in de wanden constant. Deze vereenvoudigende omstandigheid maakt het mogelijk een algemeene uitdrukking voor de coördinaten van het torsiecentrum op te stellen (punt 12b, c vergelijking 45).

Aan een concreet voorbeeld (fig. 5), dat de toestand bij vliegtuigvleugel-voorliggers van bepaald type benadert, is de berekening uitgevoerd zonder en met verwaarloozing der buigingsstijfheid van de wanden tegenover die der gordingen, terwijl deze verwaarloozing ruim 20 % van het totaal uitmaakt. In het eerste geval wordt de spanningsverdeeling beschreven door vergelijking (51), terwijl de ligging van het torsiecentrum is aangegeven door (52), terwijl in het laatste geval de vergelijkingen (54) en (55) de overeenkomstige grootheden geven (fig. 6) (punt 12*d*).

RAPPORT S. 48.

La résistance à la torsion et au cisaillement des poutres creuses à connexion multiple.

par ir. A. VAN DER NEUT.

Résumé.

a. *Indication de l'étude.*

Les poutres à section de connexion multiple formant l'objet de l'étude sont composées de parois minces, entourant n „cellules" à raison de connexion multiple de $n + 1$. Les parois peuvent être alternées de parties plus ou moins ramassées, comme les semelles dans les longerons-caissons des ailes; toutefois la surface de la section, occupée par la matière, ne formera qu'une partie peu considérable proportionnellement à la surface, enclose par le pourtour de la section.

L'étude produit les calculs théoriques de la répartition des efforts de glissement en cas de torsion et de flexion par un effort tranchant, et ceux du centre de torsion pour les poutres creuses à connexion multiple quelconque.

Pour être complets nous donnons ici la dérivation de la répartition des efforts en cas de torsion bien que ce sujet ait été traité dans la littérature.

Les formules nécessaires à l'application pratique de la méthode, sont réunies au § 11.

b. *Nomenclature.*

a	$\int \frac{ds}{2Gb}$ l'intégration s'étend le long de la paroi entière entre deux cellules.
b	épaisseur d'une paroi.
c	angle de torsion spécifique.
D_x et D_y	charges transversales, perpendiculaires aux axes x et y.
ds	élément différentiel de l'axe d'une paroi.
F	quantité adjointe à une cellule.
G	le coefficient d'élasticité de glissement, variable le long des parois.
I_x et I_y	moments d'inertie principaux de la section entière par rapports aux axes x et y.
i et j	indice d'une cellule quelconque.
ij	indice d'une quantité de la paroi entre les cellules i et j.
k	un noeud quelconque des parois.
n	nombre des „cellules."
O	surface, enclose par l'axe d'un nombre de parois attenantes.
S_x et S_y	moment statique d'une partie de la section par rapport aux axes x et y; par rapport à la semelle au noeud k, s'il est pourvu de l'indice k; par rapport à la paroi ij entre le noeud k et un point quelconque s'il est muni des indices $\frac{ij}{k}$.

τ.	effort de glissement moyen.
W	moment de torsion.
x et y	axes principaux d'inertie de la section.

La direction positive dans la paroi ij est celle ou la cellule i est située à gauche.

c. *La torsion simple* (§ 4.)

La fonction de torsion F est décomposable en n quantités concretes, lesquelles sont adjointes aux cellules. Les quantités F sont calculées à l'aide du théorème de L. PRANDTL: l'intégral des efforts de glissement le long d'une ligne fermée est proportionel à la surface entourée (équation 11), combiné avec l'équation (9).

La répartition des efforts est illustrée par l'analogie, avec les pellicules savonneuses soumises à une pression (§ 4, fig. 2)

d. *La flexion sans torsion resultant d'un effort transversal et centre de torsion* (§ 6).

Partant de la répartition linéaire des efforts de flexion d'après B. DE SAINT-VÉNANT, on peut calculer la somme des efforts de glissement dans les parois sectionnées en faisant intervenir la condition d'équilibre, pour une partie de la poutre, ayant dans la direction de l'axe une longueur élémentaire, et contenant une partie délimitée de la section transversale. (équation 16).

Toutes les conditions d'équilibre seront remplies, si l'effort de glissement en un point quelconque est donné par l'équation (17). A chaque cellule a été adjointe une quantité T formant l'analogue de la fonction de torsion F, et où se trouve concentré tout ce qui est encore inconnu concernant la répartition des efforts de glissement, après qu'on a tenu compte des conditions d'équilibre (16). Quant aux quantités t'_{ij} et t_{ij}, la première indique le variation de l'effort de glissement le long de la paroi, variation qu'on connait en appliquant l'équation (16) (équation 18), tandis que la dernière a une valeur constante à chaque paroi, cette valeur ayant été choissie telle que l'équilibre des noeuds, exigé par l'équation (16), est garanti (équation 19) (§ 6c).

Il résulte de la définition du centre de torsion, que l'énergie de déformation considérée comme fonction des T, est minimale (équation 22), d'où le théorème: l'intégral des efforts de glissement le long des parois entourant un groupe quelconque de cellules est égal à zéro (équation 28) (§ 6*d*).

On trouve le centre de torsion en déterminant le centre de gravité des efforts de glissement, rendus par l'équation (28).

Partant de l'équation (17) nous conclûmes que la pellicule savonneuse pouvait nous être utile pour établir l'analogie de la répartition des efforts de glissement dans le cas où la charge transversale agit en un point quelconque de la section (§ 10).

e. *Les poutres non-homogènes* (§ 8).

La répartition des efforts dans les poutres, composées de matériaux différents, peut être dérivée des efforts intervenant dans une poutre homogène, dont l'épaisseur des parois est réduite par rapport à celle de la poutre non-homogène, en proportion des coefficients d'élasticité de glissement.

f. *Exemple numérique* (§ 12).

Pour commenter les résultats obtenus nous avons pris comme exemple la poutre à deux cellules. On dérive la formule générale pour la rigidité torsionelle (§ 12*a*, équation 41). Au cas que le moment fléchissant, absorbé par les parois, soit négligeable par rapport au moment, absorbé par les semelles, (fig. 4), les efforts de glissement dans les parois seront constants. Cette circonstance, qui simplifie le calcul, permet de dériver une formule générale pour les coördonnées du centre de torsion (§ 12*b*, *c*. équation 45).

A un exemple concret (fig. 5), approchant les conditions dans les longerons avants de certaines ailes d'avion, les calculs sont exécutés: a, en tenant compte de la rigidité contre la flexion des parois comparée avec celle des semelles et b, en négligeant celle-ci; la quantité négligée excédant 20 % du total. Dans le premier cas les efforts sont exprimés par l'équation (51), et le centre de torsion est donné par l'équation (52) dans le dernier les équations (54) (55) déterminent les quantités correspondantes (fig. 6) (§ 12d).

REPORT S. 48.

Twisting and bending by endload of multiply-connected box-spars.

by ir. A. VAN DER NEUT.

Summary.

a. *Indication of the investigation.*

The beams of multiply-connected cross-section, which form the object of this report, are built up of thin walls, which enclose n „cells" in $n+1$-ply-connection. These walls may be interchanged by more concentrated parts, like the flanges in an aeroplane-boxspar; however the total surface of the material must not be more than an inferior part of the total cross-section of the beam.

The report gives the theoretical calculations of stress and strain in torsion and in bending by endload, and of the centre of torsion for box-spars of any connection.

For completeness' sake the determination of stress and strain in torsion has been given, though it has been dealt with in literature.

Point 11 contains the formulas, which are necessary for the practical application of the method indicated.

b. *Notation.*

a	$\int \frac{ds}{2Gb}$ the integration extends over the entire length of the wall between two cells.
b	thickness of the wall.
c	specific twist of the cross-section.
D_x and D_y	applied load-component, perpendicular to x- and y-axis.
ds	element of the centre-line of a wall.
F	quantity appended to a cell.
G	the rigidity, that may be different in different walls.
I_x and I_y	principal moments of inertia of the entire cross-section as regards x- and y-axis.
i and j	indication of any given cell.
ij	index of a quantity, concerning the wall between the cells i and j.
k	any given joint of walls.
n	number of „cells."
O	surface enclosed by the centre-line of a number of connected walls.
S_x and S_y	statical moment of a part of the cross-section as regards x- and y-axis, provided with index k if referring to a flange in joint k; provided with the indices $\frac{ij}{k}$ if referring to the wall ij between k and any given point.
τ.	mean shearing stress.
W	torsional couple.
x and y	principal axes of inertia of the cross-section.

c. *Torsion* (point 4).

The torsion-function F degenerates into n concrete quantities, which are appended to the cells. These F's are calculated from L. PRANDTL's theorem:, the integral of the shearing stresses along a closed line is proportional to the surface enclosed (equation 11), combined with equation (9).

The stress-figure is illustrated by the soap-film-anology (point 4*b*, fig. 2).

d. *Torsion-less bending by endload, and centre of torsion* (point 6).

On the ground of the linear distribution of normal tensions after B. de Saint-Vénant, the equilibrium of a part of the beam, of elementary dimension in the direction of the central line and of finite dimensions in the plane of the cross-section, gives the sum of shearing stresses in the intersected walls (equation 16).

All conditions of equilibrium are fulfilled if the shearing stress in any point is given in the form of equation (17).

To each cell has been appended a quantity T, that may be called the analogue of the torsion-function. The quantities T contain all the indefiniteness about the division of shearing stresses, that remains after having taken into consideration the equilibrium; t'_{ij} describes the change of the shearing stress along the wall (equation 18), and t_{ij}, having a constant value for each wall, together with t of the other walls garantees the equilibrium of the joints (equation 19). Both t'_{ij} and t_{ij} are calculated by applicating equation (16). From the definition of the centre of torsion it results that the strain-energy, considered as a function of T, is minimal. Consequently the line- integral of shearing stresses round any couple of cells is zero (equation 28) (point 6*d*).

The centre of torsion is found in determining the centre of gravity of the shearing stresses, resulting from equation (28).

On the ground of equation (17) a soap-film-analogy has been constructed, showing the shearing stresses for transverse load, applied in any point of the cross-section.

e. *Inhomogeneous beams.* (point 8).

If the beam has been built up out of heterogeneous parts, stress and strain can be derivated from the conditions in case of an homogeneous beam, in which the thickness of the wall is reduced in proportion to the rigidity.

f. *Numerical examples.* (point 12).

With the example of the beam, containing two cells, the obtained results are illustrated. The general formula for the torsional rigidity is derivated (point 12*a* equation 41). If the contributions of the tensions in the walls to the bending moment are neglectable with regard to those of the big concentrated parts in the joints (fig. 4), the shearing forces in the walls are constant. This simplifying condition enables the derivation of a general formula for the coordinates of the centre of torsion (point 12 *b, c*, equation 45).

At a concrete example (fig. 5), showing approximately the dimensions of aeroplane wing-frontspars of certain type, stress and strain have been calculated neglecting and not neglecting the flexural rigidity of the webs with regard to that of the flanges; this neglect amounting to over 20 % of the total rigidity.

In the last case the shearing stresses are given with equation (51) and (52) indicates the position of the centre of torsion; in the first case the equations (54) and (55) indicate the corresponding quantities (fig. 6). (point 12*d*.)

BERICHT S. 48.

Torsion und Schub von mehrfach zusammenhängenden Kastenholmen.

von ir. A. VAN DER NEUT.

Zusammenfassung.

a. *Erörterung der Untersuchung.*

Die Holme mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt, die den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bilden, sind aus dünnen Wänden zusammengesetzt, welche unter $n+1$-fachem Zusammenhang n „Zellen" einschlieszen. Diese Wände können abwechseln mit mehr gedrängten Konstruktionsteilen, wie die Gurte in einem Flugzeugflügel-Holm; jedoch musz der gesamte Material-Querschnitt der ganzen, vom Querschnitt unspannenen Oberfläche gegenüber, klein sein.

Der Bericht gibt die theoretische Berechnung der Spannungs-verhältnisse bei Torsion und bei torsionsfreier Biegung durch Querkraft, und des Drehpunktes beliebig-mehrfach-zusammenhängender Kastenholme. Vollständigkeitshalber ist auch die Ableitung der Spannungsverteilung bei reiner Torsion gegeben, obgleich diese in der Literatur vorhanden ist. In Nummer 11 sind die Formeln gesammelt, die zur praktischen Verwendung des Verfahrens benötigt sind.

b. *Verzeichnis der Formelzeichen.*

a	$\int \frac{ds}{2Gb}$, Integral über die ganze Länge der Zwischenwand zweier Zellen.
b	Wandstärke.
c	specifischer Verdrehungswinkel.
D_x und D_y	Querkraftkomponenten senkrecht zur x- und y-Achse.
ds	Element der Wand-Mittellinie.
F	Hilfsgrösze, einer Zelle zugeordnet.
G	Schubmodul.
I_x und I_y	Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts um x- und y-Achse.
i und j	Bezeichnung einer beliebigen Zelle.
ij	Indizes einer Grösze, welche sich bezieht auf die Wand zwischen den Zellen i und j.
k	ein beliebiger Knotenpunkt der Wände.
n	die Zellen-Zahl des Holmes.
O	Oberfläche umspannen von der Mittellinie zusammenschlieszender Wände.
S_x und S_y	Statisches Moment eines beliebigen Teiles des Querschnitts um x- und y-Achse; mit Indice k in Bezug auf eine Materialanhäufung in k (Gurt); mit Indizes $\frac{ij}{k}$ in Bezug auf die Wand zwischen k und einen beliebigen Punkt der Wand y.
τ.	Mittelwert der Schubspannung.
W	Drehmoment.
x und y	Hauptträgheitsachsen des Querschnitts.

In der Wand ij ist diejenige Richtung positiv gerechnet, welche die Zelle i an der linken Seite läszt.

c. *Reiner Torsion* (Nr. 4).

Die Spannungsfunktion F entartet zu n konkreten Gröszen, welche den verschiedenen Zellen zugeordnet sind. Diese Gröszen werden berechnet nach dem Prandtlschen Satze: das Linienintegral der Schubspannung ist der von der Linie unspannenen Oberfläche proportional (Gleichung 11), kombiniert mit Gleichung (9).

Am Seifenhautgleichnis wird das Spannungsbild illustriert (Nr. 4*b*, Fig. 2).

d. *Torsionsfreie Biegung durch Querkraft und Drehpunkt* (Nr. 6).

Mit Rücksicht auf die lineare Verteilung der Biegungsspannungen nach B. de Saint-Vénant ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung für einen Holmteil, der in der Richtung des Holmes eine elementare Länge hat und im Holmquerschnitt einen endlichen Teil des Querschnitts umfasst, die Summe der Schubkräfte auf der Längeneinheit der durchschnittenen Wände (Gleichung 16).

Allen Gleichgewichtsbedingungen werden entsprochen wenn die Schubkraft in einem beliebigen Punkte gegeben wird mit dem Ansatze (17).

Jeder Zelle ist eine Grösze T zugeordnet, die der Spannungsfunktion bei reiner Torsion analog ist, und in welcher alle Unbestimmtheit in Bezug auf die Spannungsverteilung konzentriert ist. Von den beiden übrigen Gröszen gibt t'_{ij} die aus dem Gleichgewicht bekannte Änderung der Schubkraft längs der Wand an (Gleichung 18), und hat t_{ij} für jede Wand einen konstanten Wert, der in Verbindung mit den Werten t anderer Wände das Gleichgewicht der Knotenstellen verbürgt (Gleichung 19) (Nr. 6*c*.)

Aus der Begriffsbestimmung des Drehpunktes ergibt sich, dasz die Deformationsarbeit, als Funktion der Gröszen T, minimal ist; (Gleichung 22) woraus die Schluszfolgerung entsteht: das Linienintegral der Schubspannungen um jeden Zellenkomplex ist gleich Null (Gleichung 28) (Nr. 6*d*).

Der Drehpunkt ergibt sich als Schwerpunkt der mit *Gleichung* (28) ermittelten Schubspannungen.

Ausgehend von Gleichung (17) wird ein Seifenhautgleichnis abgeleitet für den Spannungszustand welcher von einer *beliebig angreifenden Kraft herrührt* (Nr. 10).

e. *Nicht-homogene Holme* (Nr. 8).

Wenn der Holm heterogener Struktur ist, kann die Spannungsverteilung berechnet werden aus der Spannungsverteilung in einem *homogenen Holmen mittels* Reduktion der Wandstärken in Verhältnis der Schubmodulen.

f. *Zahlenbeispiel*. Nr. (12).

Die Rechnung wird durchgeführt am zweizelligen Holmen. *Der allgemeine Ausdruck* für die Verdrehsteifigkeit wird abgeleitet (Nr. 12a, Gleichung 41)

Falls die Beiträge der Normalspannungen in den Wänden am Biegungsmoment gegenüber denjenigen der Massenanhäufungen in den Knotenpunkten *vernachlässigbar* sind (Fig. 4), sind die Schubkräfte in den Wänden konstanter Grösze. Unter dieser vereinfachenden Bedingung läszt sich ein allgemeiner Ausdruck zur Berechnung des Drehpunktes auffinden (Nr. 12*b*, *c* Gleichung 45).

An einem konkreten Beispiel, das sich dem Zustande an Flugzeugflügelvorderholme bestimmter Typen annähert, ist die Rechnung ohne und mit Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit der *Wände den Gurten* gegenüber durchgeführt worden, indem die erstere mehr als 20 % der Gesamtsteifigkeit war. Die Spannungen im ersteren Falle werden gegeben mit Gleichung (51), während (52) *die* Lage des Drehpunktes erwähnt. Im letzteren Falle sind dieselben Gröszen mit den Gleichungen (54) und (55) gegeben (Nr. 12*d*, Fig. 6).

Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers

door

ir. A. VAN DER NEUT.

Rapport S. 48. Rijksstudiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Overzicht.

Voor, uit dunne wanden bestaande, prismatische doosliggers van willekeurig-veelvoudigen samenhang, worden de vergelijkingen opgesteld, welke de spanningsverdeeling bepalen, zoowel voor het geval van den, in het uiteinde door een dwarskracht belasten, ligger als voor den zuiver getordeerden. Tevens wordt een onderzoek ingesteld naar de ligging van het torsiecentrum. Aan het voorbeeld van een drievoudig samenhangend prisma worden de gewonnen resultaten toegelicht.

1. Technische omschrijving.

De meervoudig samenhangende doosliggers vormen een groep van constructie-elementen, welke in den vliegtuigvleugelbouw uitgebreide toepassing vindt. Zij kenmerken zich door hun geringe materiaaloppervlak vergeleken met het oppervlak van de omspannen dwarsdoorsnede. In den regel zijn behalve de dunne wanden enkele zwaarder gedimensioneerde onderdeelen in het systeem opgenomen, welke bedoeld zijn als centra voor de opname van buigspanningen. Daarentegen bestaat de functie van de wanden voornamelijk in het opnemen van de schuifspanningen in de dwarsdoorsnede.

2. Notaties.

Iedere rondom door wanden omsloten ruimte wordt in het volgende „cel" genoemd. Iedere cel wordt aangeduid met een index geplaatst achter de, op de cel betrekking hebbende, grootheid: b.v. O_i is het oppervlak van cel i. Iedere wand wordt aangeduid met de twee indices van de aangrenzende cellen, b.v. b_{ij} is de wanddikte tusschen de cellen i en j. In een wand wordt die richting als positief aangenomen, welke den celwand doet doorloopen in de richting, tegengesteld aan die, waarin zich de wijzers van een uurwerk bewegen, rondom de cel, die door de eerste index wordt aangegeven. Een gerichte grootheid, b.v. de schuifspanning τ_{ij}, is positief als zij de gedefinieerde richting ten opzichte van cel i heeft.

Het systeem wordt geplaatst in een coördinatenstelsel, zoodanig dat de z-as de zwaartepunten van de dwarsdoorsneden bevat en de x- en y-assen hoofdtraagheidsassen van deze doorsneden zijn. De oorsprong wordt gedacht in het eindvlak van het prisma, waar ook de belastende dwarskracht aangrijpt.

3. Graad van samenhang.

De graad van samenhang van een vlakke figuur is gelijk aan het aantal gesloten lijnen dat in haar getrokken kan worden, zonder de beschouwde figuur te verlaten, en welke niet door continue transformatie in elkaar kunnen worden overgevoerd. Een andere definitie, welke hetzelfde uitspreekt, zegt: de graad van samenhang is gelijk aan het hoogste aantal doorsnijdingen, welke van begrenzing tot begrenzing loopen, dat noodig is om den samenhang der figuur te verbreken.

Op deze wijze is de dwarsdoorsnede van een massief prisma enkelvoudig samenhangend, en is een n-cellig prisma $n + 1$-voudig samenhangend.

Uitgaande van het ondoorsneden n-cellig prisma, beteekent de aanbrenging van een doorsnijding opheffing van een vormveranderingsvoorwaarde, welke aan het systeem gesteld was. Maximaal kunnen n-doorsnijdingen worden aangebracht, terwijl de samenhang toch behouden blijft, en het lichaam, afgezien van de mogelijkheid van breuk, in staat blijft alle belastingen op te nemen.

Dit n-voudig doorsneden lichaam verkeert onder minimum-condities ten opzichte van zijn bestaansmogelijkheid; slechts één doorsnijding meer is voldoende om het lichaam zijn bepaalde geometrische gedaante te doen verliezen. Met de n-doorsnijdingen is het lichaam nog juist bestaanbaar, het zou genoemd kunnen worden, „kinematisch bepaald", met de benaming ten opzichte van vakwerken gebruikelijk. De analogie doorvoerend kan het n-voudig doorsneden lichaam „statisch bepaald" genoemd worden, terwijl het n-tal vormveranderingsvoorwaarden het niet doorsneden prisma n-voudig statisch onbepaald doet zijn, voor zoover de spanningstoestand in een wand door één enkele grootheid bepaald wordt.

4. Zuivere wringing.

a) *Algemeen* [1]). (fig. 1).

De vormveranderingen bij zuivere wringing kenmerken zich door:

1°. zij zijn onafhankelijk van de z-coördinaat;

2°. de punten in een normaaldoorsnede van het prisma verplaatsen zich in het vlak van deze doorsnede niet ten opzichte van elkaar; iedere doorsnede draait in haar geheel terwijl de specifieke torsiehoek c constant is;

3°. de verplaatsingen w evenwijdig aan de beschrijvende lijnen van het prisma voldoen aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hieruit volgt voor de schuifspanningen loodrecht op x- en y-as resp.

$$\tau_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + c\,x\right) \qquad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - c\,y\right) \ldots \quad (2)$$

terwijl alle andere spanningen nul zijn.

In den vorm van de vergelijkingen (1) en (2) is het torsieprobleem gesteld door B. DE SAINT-VÉNANT. Op grond hiervan laat zich op eenvoudige wijze een stelling van L. PRANDTL afleiden.

Hiertoe wordt de schuifspanning in een punt van het xy-vlak ontbonden in componenten τ_{sz} en τ_{nz} resp. in de als positief gedefinieerde richting van de raaklijn aan een

[1]) DR. A. FÖPPL: Vorlesungen u. Technische Mechanik III §§ 73,75.

ASSENSTELSEL.

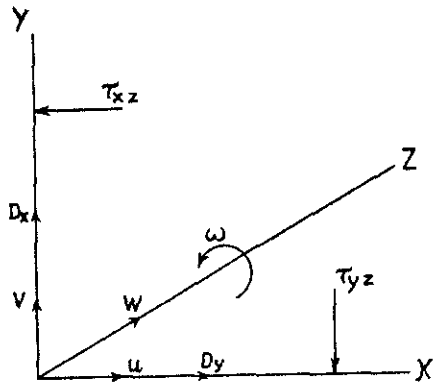


Fig. 1.

ZEEPVLIESMODEL.

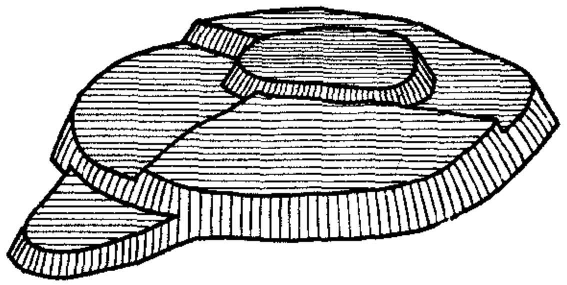


Fig. 2.

kromme s, welke door dit punt gaat en in de richting daar loodrecht op. Van deze componenten wordt τ_{sz} gevonden uit de componenten τ_{yz} en τ_{xz} als: $-\tau_{sz} = \tau_{yz}\dfrac{dy}{ds} + \tau_{xz}\dfrac{dx}{ds}$

of na substitutie van (2)

$$-\tau_{sz}\, ds = G\left(\frac{\partial w}{\partial y}\, dy + \frac{\partial w}{\partial x}\, dx + cx\, dy - cy\, dx\right)$$

De eerste twee termen vormen de totale differentiaal van w, terwijl de laatste twee herleid worden met

$$d\,(xy) = x\, dy + y\, dx.$$

$$+\tau_{sz}\, ds = G\left[-dw + c\,(dxy - 2x\, dy)\right]$$

Bij integratie langs een gesloten kromme, welke nergens het lichaam verlaat, in de als positief gedefinieerde richting, volgt $\int\limits_K \tau_{sz}\, ds = -2cG\int x dy = -2\, cG\, O \ldots.$ (3)

waarin O het door de kromme omspannen oppervlak voorstelt.

b) *Zeepvliesanalogie* [2]).

De algemeene vergelijking (3), welke reeds de bepaling van de spanningsverdeeling in meervoudig samenhangende prisma's mogelijk maakt, kan in iets gewijzigden vorm gebracht worden, en eenigszins aanschouwelijk worden gemaakt met behulp van de analogie, welke bestaat tusschen de zuiver getordeerde staaf en het membraan onder overdruk; op welke analogie L. PRANDTL de aandacht vestigde, teneinde langs experimenteelen weg de schuifspanningen te onderzoeken door metingen aan zeepvliezen.

Wanneer de spanningen worden uitgedrukt door middel van een spanningsfunctie F, zoodanig dat

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} \qquad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

gaat (1) over in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2\, cG \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

[2]) Dr. A. FÖPPL: Vorlesungen über Technische Mechanik V §§ 29,30.

EVENWICHT VAN HET ZEEPVLIES.

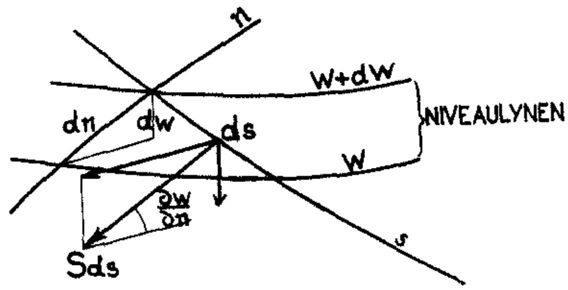


Fig. 3.

Uit (4) volgt dat lijnen van constanten F steeds in de richting van de schuifspanning loopen, zoodat op iedere begrenzing van de dwarsdoorsnede F noodzakelijk constant is. De absolute grootte van F staat in geen verband tot het spanningsvraagstuk, daar slechts zijn afgeleide mechanische beteekenis bezit (4). De spanningsfunctie kan daarom langs één begrenzing een willekeurige waarde gegeven worden, voor welke begrenzing de buitencontour van de doorsnede gekozen wordt. In het geval van $n + 1$-voudig samenhangende doorsnede zijn dan nog de waarden, welke het n-tal F's aan de contouren der n-cellen heeft, onbekend.

Een vlies dat onder een overdruk p staat, heeft, onder voorwaarde dat zijn hellingen klein zijn, doorbuigingen W welke voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{p}{S} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

waarin S de oppervlaktespanning in het vlies per eenheid van lengte is.

De overeenkomst tusschen de vergelijkingen (5) en (6), strekt zich uit tot een gelijkvormigheid tusschen de functies F en W, wanneer ervoor gezorgd is, dat ook de randvoorwaarden analoog zijn. Daartoe wordt het membraan gespannen over den rand van constante hoogte, welke gelijkvormig is met den contour van de te onderzoeken doorsnede. Bij een enkelvoudig samenhangende doorsnede is hiermede het analoge zeepvliesmodel voltooid.

Een beeld van de functie F van de meervoudig samenhangende doorsnede wordt verkregen, wanneer een vlies gespannen is tusschen den buitencontour en de celcontouren, welke de hoogte F_i boven den buitenrand liggen. Binnen de celruimten wordt het vlies onderbroken door platte vlakken evenwijdig aan het grondvlak. Deze vlakken kunnen niet door zeepvliezen worden verwezenlijkt, maar moeten worden opgevat als buigingsstijve platen zonder gewicht, welke door de zeepvliezen, in de spleten tusschen deze platen, in evenwicht worden gehouden.

De juiste hoogten F_i stellen zich in onder den overdruk welke zoowel op de stijve platen als op het zeepvlies aanwezig is. Het op deze wijze geconstrueerde model is een uit n terrassen opgebouwd lichaam, alleen bij de overgangen der terrassen zijn vliezen (fig. 2). Het model heeft in dezen vorm voor experimenteele spanningsbepaling geen waarde, daar de uitvoering al te groote moeilijkheden in den weg staan.

P. NEMÉNYI heeft een methode aangegeven om door middel van metingen aan $n + 1$ zeepvliezen de oplossing van het torsieprobleem van $n + 1$-voudig samenhangende doorsneden terug te brengen tot de oplossing van $n + 1$-liniaire vergelijkingen met $n + 1$ onbekenden [3]).

Al moet voor experimenteele oplossing naar andere hulpmiddelen worden omgezien, heeft het ontworpen zeepvliesmodel als hulpvoorstelling zijn waarde. Dat het inderdaad analoog is met het getordeerde meervoudig

[3]) Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1921, S. 364. Lösung des Torsionsproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt.

samenhangende prisma blijkt uit de volgende beschouwingen (fig. 3).

Dat de overdruk p ook toegelaten is op de stijve platen, moet tot nu als een willekeurige maatregel worden gezien. De spanningen in het vlies rond een cel hebben daardoor tot taak gekregen evenwicht te maken, onder meer met den overdruk op de plaat. Het model is dan gelijkwaardig met de oplossing van het torsieprobleem wanneer deze evenwichtsvoorwaarde analoog blijkt te zijn met de voorwaarde (3) rond de cel. Deze vergelijking is in de grootheden, welke op het zeepvlies betrekking hebben

$$\int_K S \frac{\partial w}{\partial n} ds = -p\,O$$

In het membraan worden gedacht twee lijnen van constant niveau, w en $w + dw$. Een willekeurig vlak doorsnijdt het vlies volgens de lijn s, welke tusschen de snijpunten met de niveaulijnen de lengte ds heeft.

Op het lijnelement ds werkt de spankracht $S\,ds$, waarvan de ontbondene loodrecht op het grondvlak bepaald wordt door den hellingshoek, die het zeepvlies in de richting normaal op s heeft. Indien de normaalrichting n genoemd wordt, is deze hellingshoek $\frac{\partial w}{\partial n}$ zoodat de verticale componente $S\,ds \frac{\partial w}{\partial n}$ groot is.

Deze spankrachten, geïntegreerd langs een gesloten lijn, moeten evenwicht maken met den overdruk p op het omsloten oppervlak O

$$\int_K S \frac{\partial w}{\partial n} ds + p\,O = 0 \qquad \text{q. e. d.}$$

Geven dus de hellingen van het zeepvlies in het voorgestelde model de grootte der spanningen bij wringing aan, ook de inhoud van het model heeft dezelfde beteekenis als bij het enkelvoudig samenhangend prisma, n.l. het wringend koppel

$$W = 2 \int F\, df\ ^{4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

c. *Dunwandige lichamen.*

In het zeepvliesmodel overspannen de vliezen de spleten tusschen de platen, welke nu verondersteld worden dun te zijn. De vliezen zullen dan weinig gelegenheid hebben hun helling in de richting loodrecht op den terrasrand te wijzigen, zoodat zich een gemiddelde helling laat definieeren, die slechts verwaarloosbare bedragen van de werkelijke hellingen afwijkt.

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial n} = \frac{1}{b_{ij}} \int_i^j \frac{\partial F}{\partial n} dn = \frac{F_j - F_i}{b_{ij}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Daar, krachtens de definitie van F, de schuifspanning $\tau = \frac{\partial F}{\partial n}$, is hiermee het onderzoek naar de spanningsverdeeling teruggebracht tot het onderzoek naar de grootte der n onbekende F's.

Eén vergelijking wordt geleverd door (7), welke vergelijking voor het uit dunne wanden samengestelde lichaam overgaat in

$$W = 2 \sum_{i=1}^{n} F_i\, O_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

waarin O_i het door de middenlijn van de celwanden omspannen oppervlak is.

Bij toepassing van (3) op het meervoudig samenhangend systeem wordt, onder gebruikmaking van (8), bij integratie langs den contour van het celoppervlak O_i gevonden:

$$\int_{K_i} \frac{F_j - F_i}{b_{ij}} d\,s_{ij} = -2c\,G O_i$$

Zoolang de integratie één bepaalden wand betreft is $F_j - F_i$ constant. Er is slechts een eindig aantal celwanden, zoodat geschreven kan worden

$$\frac{1}{O_i} \Sigma\,(F_j - F_i)\,a_{ij} = -c$$

waarin

$$a_{ij} = \frac{1}{2\,G_{ij}} \int_{ij} \frac{ds}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

en de sommatie over j alle, aan cel i grenzende, cellen betreft.

(In verband met de in punt 8 in te voeren niet-homogene lichamen, wordt de notatie G_{ij} reeds gebruikt, hoewel voorloopig G nog een constante waarde is toegedacht).

Indien de lijnintegraal (3) meerdere cellen omsluit met het gezamenlijk oppervlak O wordt de meest algemeene vorm gevonden, voor de vergelijkingen, welke de spanningsverdeeling bepalen.

$$\frac{1}{O} \Sigma\,(F_j - F_i)\,a_{ij} = -c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Vergelijking (11) kan n malen worden benut, b.v. door achtereenvolgens de oppervlakken van alle cellen afzonderlijk te omspannen, zonder dat een vergelijking gevonden wordt welke afhankelijk is van de n-1 overige. Totaal levert dus (11) n vergelijkingen, die in combinatie met (9) de n onbekende F's en c eenduidig bepalen.

5. Het torsiecentrum.

Is het wringend koppel afkomstig van een dwarskracht, welke ergens in het eindvlak aangrijpt, zoo is niet zonder meer te zeggen welke grootte dit koppel heeft. Het is dan noodig de plaats te kennen, waar de dwarskracht aangrijpen moet, opdat een torsievrije vervorming optreedt. Dit punt heet het torsiecentrum. Volgens definitie is dus het torsiecentrum dat punt, waar een willekeurige dwarskracht moet aangrijpen, opdat de hoekverdraaiing van de dwarsdoorsnede nul zij. Volgens de reciprociteitsstelling van MAXWELL is het torsiecentrum dan tevens: het punt, dat geen verplaatsing ondergaat, wanneer de belasting uit een koppel bestaat.

Uit de eerstgenoemde eigenschap zal de plaats van het torsiecentrum worden afgeleid, terwijl tegelijkertijd de schuifspanningsverdeeling ten gevolge van de dwarskracht berekend zal kunnen worden.

6. De torsievrije buiging door dwarskracht.

a. *De mogelijkheid van een torsiecentrum.*

B. DE SAINT-VÉNANT [5]) heeft aangetoond, dat bij een bepaalde verdeeling van de dwarskracht in de einddoorsnede over het oppervlak van de doorsnede van een prismatischen balk, de buigspanningen exact het lineair verloop bezitten.

Echter kan niet verwacht worden, dat de hoekverdraaiing in alle punten van een normale doorsnede dezelfde is; wat men in de eerste plaats moet weten is, wat onder de hoekverdraaiing van een doorsnede verstaan zal moeten worden. Dit wordt reeds gedemonstreerd door den zuiver gebogen balk, waar de, ten gevolge van de dwarscontractie, optredende „zadelbuiging” in de verschillende punten van de doorsnede een verschillende verdraaiing bewerkt.

Uit de verplaatsingen u,v,w, welke de St.-Vénant af-

[4]) In Dr. A. FÖPPL: Vorlesungen über Technische Mechanik V, § 29, wordt de afleiding van (7) gegeven voor een enkelvoudig samenhangend lichaam. Op geheel dezelfde wijze laat zij zich in het algemeen afleiden voor lichamen van meervoudigen samenhang.

[5]) Encyklopädie der Math. Wissensch. IV, 4 Art. 25 II.

leidt, volgt, wanneer de dwarskrachten loodrecht op x- en y-as resp. D_x en D_y zijn, de hoekverdraaiing

$$\omega = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{mE}\left(\frac{D_x}{I_x}x + \frac{D_y}{I_y}y\right)z - $$
$$- c\,(l-z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Hieruit blijkt, dat de hoekverdraaiing is samengesteld uit een voor alle punten van de doorsnede constant deel — c (l—z) en een van punt tot punt varieerend gedeelte.

Er laat zich een gemiddelde verdraaiing definieeren:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{f}\int \omega\, df = -c\,(l-z) \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

welke blijkbaar gelijk is aan het constante deel in (12).

In het grensgeval, waarin de dwarskracht tot nul nadert, terwijl het koppel om het torsiecentrum eindig blijft, wordt het veranderlijk gedeelte van ω nul, zoodat het constante gedeelte alleen overblijft en blijkbaar nu de beteekenis van torsiehoek bij zuivere wringing heeft.

Hoewel niet in dien absoluten zin, waarin bij zuivere torsie over de hoekverdraaiing van een doorsnede gesproken kan worden, heeft ook bij belasting door een dwarskracht — $c\,(l-z)$ de beteekenis van hoekverdraaiing, terwijl c de specifieke torsiehoek is. Beide grootheden zijn dan bedoeld als gemiddelden over de doorsnede.

Het vlak $z=0$ onderscheidt zich van de overige dwarsvlakken door het constant zijn van ω in de punten van dit vlak, zoodat van de verdraaiing van dit vlak exact gesproken kan worden, terwijl hiermee ook het begrip: verplaatsing van het torsiecentrum, dat als het binnen een cel ligt immaterieel is, beteekenis verkrijgt.

b. *Het evenwicht.*

De samengestelde liggers, welke hier voornamelijk in het oog gevat zijn, bezitten de eigenaardigheid, dat hun buigingsstijfheid-gevende elementen hoofdzakelijk in enkele centra zijn opgehoopt. Deze centra bevinden zich in den regel in knooppunten van de wanden.

Hoewel de aanwezigheid van deze materiaalophoopingen niet noodzakelijk is, zal in het volgende haar aanwezigheid in het algemeen worden verondersteld. Het ontbreken van een buigingsstijfheid gevend centrum rangschikt zich dan onder het algemeene geval als het bijzondere, waarbij de materiaal-ophooping in het knooppunt nul bedraagt.

Omdat de materiaalophoopingen, in tegenstelling tot de wanden, die langgerekt zijn, geconcentreerd zijn gedacht, zijn de schuifspanningen in deze gebieden klein in vergelijking tot die in de wanden. Hieruit volgt, dat de bijdrage van eerstgenoemde schuifspanningen in den vervormingsarbeid verwaarloosbaar klein is; en daar deze arbeid, zooals blijken zal (punt 6*d*), het criterium levert voor de schuifspanningsverdeeling over de wanden, is de schuifspanningsverdeeling in het knooppunt niet nader in de beschouwingen betrokken.

Uit den ligger wordt een knooppunt met zijn omgeving over een lengte $d\,z$ uitgesneden gedacht. Op de vlakken z en $z + d\,z$ werken normaalspanningen σ en $\sigma + d\sigma$ in de richting van de *z-as*. In de wanddoorsnijdingen werken in z-richting de schuifspanningen τ. Deze gezamenlijk zijn in evenwicht met het verschil van de resulteerende normaalkrachten op de dwarsvlakken

$$dz\, \Sigma \int \tau\, dn + \int (\sigma + d\sigma)\, df - \int \sigma\, df = o$$

of
$$\Sigma \int \tau\, dn + \int \frac{\partial \sigma}{\partial z}\, df = o \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Hierin omvat de sommatie alle wanden, welke in het knooppunt samenkomen, terwijl de integratie over *dn* zich uitstrekt langs de normaal op één bepaalden wand tusschen twee cellen, en de integratie over *df* alle oppervlakte-elementen van het uitgesneden gedeelte omvat. De positieve richting van τ is dusdanig, dat zij in de doorsnede z naar het knooppunt gericht is.

Uit de lineaire buigspanningsverdeeling volgt:

$$\sigma = z\left(\frac{D_x}{I_x}y + \frac{D_y}{I_y}x\right)$$

waarmee

$$\int \frac{\partial \sigma}{\partial z}\, df = \frac{D_x}{I_x}\int y\, df + \frac{D_y}{I_y}\int x\, df = \frac{D_x\, S_x}{I_x} + \frac{D_y\, S_y}{I_y},$$

waarin S_x en S_y het statisch moment van het beschouwde gedeelte resp. ten opzichte van de x- en y-*as*.

Evenals dit in het geval van zuivere torsie gedaan is, wordt ook hier een gemiddelde schuifspanning gedefinieerd door:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{b}\int \tau dn \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

zoodat (14) zich laat schrijven

$$\Sigma\, \bar{\tau}\, b + \frac{D_x\, S_x}{I_x} + \frac{D_y\, S_y}{I_y} = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Toepassing van deze vergelijking op een gedeelte van den ligger, dat geen knooppunt bevat, doet inzien dat de schuifspanning in alle punten van een wand tusschen twee knooppunten bekend is, wanneer ze in één punt van dien wand bekend is.

Hiermee is uitgesproken, dat bij een aantal van q-wanden er q onbekende schuifspanningen zijn. Deze onbekenden worden door (16) niet eenduidig bepaald.

Is k het aantal knooppunten, en wordt de dwarsdoorsnede verdeeld in k gebieden, welke ieder één knooppunt bevatten, zoo laat zich voor ieder dezer gebieden de vergelijking (16) opstellen. Echter vertegenwoordigt dit systeem slechts k—1 onafhankelijke vergelijkingen, wat blijkt bij sommatie van alle k vergelijkingen. Omdat de sommatie alle knooppunten met hun omgeving en dus de volle dwarsdoorsnede betreft is $\Sigma\, S_x = \Sigma\, S_y = 0$; tevens is $\Sigma\, \bar{\tau}\, b = 0$ daar iedere wand tweemaal voorkomt telkens met tegengesteld teeken n.l. bij de behandeling van ieder der knooppunten waartusschen ze zich uitstrekt. Sommatie van alle k vergelijkingen geeft een identiteit, waarom slechts k-1 onafhankelijke vergelijkingen van het type (16) kunnen bestaan.

De q onbekenden worden door deze k-1 vergelijkingen niet eenduidig bepaald, daar steeds $q > k$-1: In ieder knooppunt komen minstens 2 wanden samen en in k knooppunten minstens 2 k wanden, welke echter dubbel geteld zijn, zoodat het aantal wanden $q \geqq k$

Uit deze beschouwingen blijkt dat het niet-bepaald-zijn van de oplossing uit de statische voorwaarde (16) door den samenhang van het systeem wordt veroorzaakt, zoodat zij moeten worden aangevuld met zulke, die de vormveranderingsvoorwaarden, welke door den n + 1-voudigen samenhang gesteld worden, recht laten wedervaren. Bij eenvoudige symmetrische lichamen kunnen in de plaats van deze vormveranderingsvoorwaarden vergelijkingen treden, die uit de symmetrie-eigenschappen zijn afgeleid. Echter wijken ook deze in wezen niet af van vormveranderingsvoorwaarden.

c. *Keuze der veranderlijken.*

Alvorens in de aangegeven richting wordt voortgegaan, zal eerst het probleem in een vorm gesteld worden, welke de tot nu toe gevonden resultaten impliciete vertegenwoordigt.

De n + 1voudige samenhang maakt het mogelijk de schuifspanningen te definieeren als funkties van $n + 1$ grootheden $T_1 \ldots\ldots T_i \ldots\ldots T_{n+1}$. Dit funktionaal verband wordt gekozen in den vorm

$$(\bar{\tau} b)_{ij} = T_j - T_i + t_{ij} + t'_{ij} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Aan iedere cel is op deze wijzen een grootheid T toegevoegd. Ook het gebied buiten den buitensten contour is als cel opgevat om een voor alle wanden uniforme notatie te kunnen bezigen.

Evenals de grootheden F in het geval van zuivere torsie, heeft ook hier de absolute waarde van T geen mechanische beteekenis, daar blijkens (17) alleen de verschillen in relatie staan tot het spanningsbeeld.

Zoo is dan ook het systeem der T's op te vatten als een stelsel van n onbekende grootheden. Eén T, b.v. die van het buitengebied kan een willekeurige waarde worden gegeven.

De grootheden t_{ij} en t'_{ij} verdienen nadere toelichting. Met de volgorde der indices i en j hangt samen een richting, welke als positief is gedefinieerd ten opzichte van cel i (zie punt 2). Deze richting is gericht naar één der beide knooppunten van den wand. De grootheden t_{ij} en t'_{ij} zijn verwant aan dit knooppunt en niet aan het tegenoverliggende. Bij dit knooppunt is t'_{ij} gelijk nul gekozen, waarmee ook de waarden van t'_{ij} in alle andere punten van den wand ij bekend zijn, indien nog gegeven is dat t_{ij} een constante is. Immers geeft (16) toegepast op het deel van den wand tusschen het knooppunt k en een willekeurig punt

$$(\bar{\tau}b)_{ij} - (\bar{\tau}b)_{ij}^{k} + \left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_k^{ij} = 0,$$

na substitutie van (17)

$$(T_j - T_i + t_{ij} + t'_{ij}) - (T_j - T_i + t_{ij} + 0) +$$
$$+ \left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_k^{ij} = 0$$

of

$$t'_{ij} + \left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_k^{ij} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Minder scherp gedefinieerd zijn de grootheden t_{ij}. Slechts wordt van hen verlangd, dat zij het evenwicht van knooppunt en wand garandeeren.

Het evenwicht van het enkele knooppunt geeft:

$$\sum_k \bar{\tau} b = \sum_k (T_j - T_i) + \sum_k t_{ij} = -\left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_k$$

Omdat de sommatie alle wanden rond het knooppunt betreft, begint zij in een cel en eindigt daar ook weer, zoodat $\sum_k (T_j - T_i) = 0$. De evenwichtsvoorwaarde, die hierna overblijft, stelt aan t_{ij} de voorwaarde

$$\sum_k t_{ij} + \left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Het evenwicht van een geheelen wand legt het verband tusschen t_{ij} en t_{ji}

$$\sum_{ij} \bar{\tau}\, b = -(\bar{\tau}\, b)_{ij}^{k1} - (\bar{\tau}\, b)_{ji}^{k2} = -(T_j - T_i + t_{ij}) -$$
$$-(T_i - T_j + t_{ji}) = -\left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_{ij}$$

of

$$-(t_{ij} + t_{ji}) + \left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_{ij} = 0 \qquad (20)$$

waarin S_{ij} het statisch moment van den geheelen wand beteekent.

De wijze, waarop de als positief gedefinieerde richting samenhangt met de volgorde der incides i en j, maakt dat (17) ook tot uitdrukking moet brengen:

$$(\bar{\tau}\, b)_{ij} = -(\bar{\tau}\, b)_{ji}$$

De afhankelijkheid tusschen $\bar{\tau}\, b$ en T is zoodanig gekozen dat, voorzoover de verantwoordelijkheid van T reikt, aan deze relatie wordt voldaan.

Een nog te vervullen voorwaarde is dan

$$t_{ij} + t_{ji} + t'_{ij} + t'_{ji} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Sommatie van de evenwichtsvergelijkingen (18) van de beide wandgedeelten tusschen de beide knooppunten en een willekeurig punt van denzelfden wand geeft

$$t'_{ij} + t'_{ji} + \left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y\right)_{ij} = 0$$

Na aftrekking van (20) blijft de voorwaarde (21) over, die blijkbaar reeds in de vroeger gestelde is inbegrepen.

De grootheden t worden door (19) en (20) niet eenduidig bepaald. Immers levert sommatie van alle vergelijkingen (19) en (20) de indentiteit $0 = 0$ (zie punt 6*b*), en zijn er dus totaal door (19) en (20) $k + q - 1$ betrekkingen tusschen $2q$ grootheden t gelegd; en daar $q > k$ (zie punt 6*b*) is het stelsel t_{ij} onbepaald.

Binnen het raam van (19) en (20) bezit t_{ij} dus een zekere vrijheid. Dit beteekent echter niet, dat de waarde van t_{ij} als een onbekende behandeld moet worden, integendeel is aan t_{ij} al een vaste waarde toegekend, doch de vrijheid in keuze is ten deele ingeperkt door de gebondenheid aan de vergelijkingen (19) en (20).

Met het systeem vergelijkingen (18), (19) en (20) is alle onbepaaldheid in (17) saamgedrongen in de n grootheden T.

d. *Minimum vormveranderingsarbeid.*

In ieder elastisch systeem, dat in onbelasten toestand spanningsloos is, treedt bij belasting een zoodanige vormverandering op, dat, met in achtname van de evenwichtsvoorwaarden, de daarbij verrichte arbeid minimaal is.

Een oneindig kleine variatie van één der grootheden, welke de spanningsverdeeling bepalen, heeft dan geen verandering van het arbeidsvermogen ten gevolge: in het hier beschouwde geval $\frac{\partial A}{\partial T_i} = 0$. Echter dient wel zekerheid te bestaan, dat een variatie van T onder gelijk blijvende belasting niet in conflict is met het evenwicht, m.a.w. T moet in den vollen zin van het woord „statisch onbepaald" zijn.

Hieraan voldoet T in zooverre, dat, wat ook haar waarde zij, de dwarskracht, welke de resultante is van de schuifspanningen in het vlak xy, steeds de componenten D_x en D_y zal bezitten. Echter verandert met T de plaats van deze resultante, of ook de grootte van het koppel om het torsie-centrum.

Het onderzoek is gericht op die spanningsverdeeling, welke het aangrijpingspunt harer resultante heeft in het torsiecentrum. Deze bijzonderheid brengt een consequentie met zich, welke voorkomt uit de mechanische eigenaardigheid van het torsiecentrum.

Een willekeurige variatie van één of meer der grootheden T, vanuit de nog onbekende waarde, welke zij in den evenwichtstoestand bezitten, brengt de resulteerende dwarskracht een oneindig kleinen afstand buiten het torsiecentrum, of anders gezegd: voegt aan de dwarskracht in het torsiecentrum een oneindig klein koppel δW toe. Ten gevolge hiervan wordt op de vervormingen een zuivere wringing met torsiehoek $\delta\omega$ gesuperponeerd; bij definitie verplaatst zich het torsiecentrum, waar de dwarskracht aangrijpt, hierbij niet (zie punt 5). De toename van het arbeidsvermogen is daarom alleen de arbeid, welken het koppel δW heeft verricht, n.l. $\delta A = \frac{1}{2}\,\delta W\,\delta\omega$, zoodat

$$\lim_{\delta W=0} \frac{\delta A}{\delta W} = \tfrac{1}{2} \qquad \lim_{\delta W=0} \delta\omega = 0$$

en omdat δW een lineaire functie is van δT

$$\frac{\partial A}{\partial T_i} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n \quad (22)$$

Het arbeidsvermogen in den ligger kan gesplitst worden in een gedeelte, dat direct afhankelijk is van de normaalspanningen en een gedeelte, afhankelijk van de schuifspanningen volgens het gekozen assensysteem:

$$A = A_\sigma + A_\tau \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Hierin is A_σ onafhankelijk van de grootheden T zoodat

$$\frac{\partial A}{\partial T_i} = \frac{\partial A_\tau}{\partial T_i}$$

$$A_\tau = \tfrac{1}{2} \int \frac{\tau^2}{G}\, dv = \frac{l}{2} \iint \frac{\tau^2}{G}\, dn\, ds \qquad (24)$$

Indien τ gegeven is als functie van de plaats op de normaal n van den wand door $\tau = \bar{\tau} + \epsilon$ geeft ϵ de verandering van τ aan in normaalrichting. Substitutie in (15) geeft $\int \epsilon\, dn = 0$.

De onder (24) voorkomende integraal wordt hierna

$$\int \tau^2\, dn = \int \bar{\tau}^2\, dn + 2\bar{\tau} \int \epsilon\, dn + \int \epsilon^2\, dn = \bar{\tau}^2 b + \int \epsilon^2\, dn.$$

Dank zij de dunwandigheid is ϵ steeds klein ten opzichte van $\bar{\tau}$, en is dus de verwaarloozing van ϵ^2 tegenover $\bar{\tau}^2$ toelaatbaar.

$$\int \tau^2\, dn = \bar{\tau}^2\, b \qquad (25)$$

Hiermee wordt (24)

$$A = l \int (\bar{\tau}\, b)^2 \frac{ds}{2\, Gb}$$

en

$$\frac{\partial A}{\partial T_i} = l \int (\bar{\tau}\, b) \frac{\partial(\bar{\tau}\, b)}{\partial T_i} \frac{ds}{G\, b} = 0 \qquad (26)$$

De integraal (26) kan gesplitst worden in evenveel deelen als er wanden zijn. Ieder van deze deelen is een functie van die T's, welke de indices bezitten van de beide cellen, waartusschen de wand loopt. Hieruit volgt, dat $\dfrac{\partial(\bar{\tau}\, b)}{\partial T_i}$ voor die wanden, welke niet aan cel i grenzen, steeds nul oplevert, terwijl blijkens (17) voor de bijdragen van de wanden tusschen de cel j en de cel i gevonden wordt $\dfrac{\partial(\bar{\tau}\, b)_{ij}}{\partial T_i} = -1$.

De wanden, welke de van nul verschillende bijdragen leveren, omspannen gezamenlijk de cel i, zoodat het eerste lid van (26) een lijnintegraal blijkt te zijn, door de wanden van i in de als positief gedefinieerde richting.

$$-l \int_{K_i} (\bar{\tau}\, b) \frac{ds}{Gb} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots n \qquad (27)$$

Voor ieder der cellen geldt deze betrekking. Optelling van meerdere vergelijkingen (27) geeft als resultaat een lijnintegraal rond het cellencomplex, zoodat in het algemeen geldt:

$$\int_K \frac{\bar{\tau}}{G}\, ds = 0 \qquad (28)$$

mits de gesloten lijn, waarlangs geïntegreerd wordt, nergens de wanden verlaat.

Het torsiecentrum wordt dan gevonden, door de plaats te bepalen van de resultante der schuifspanningen, die verdeeld zijn volgens (28), zooals nader is uitgewerkt aan het voorbeeld van een tweecellig lichaam (punt 10).

7. Dwarskracht buiten het torsiecentrum.

Het belastingsgeval, waarin de dwarskracht op een willekeurige plaats aangrijpt, laat zich samenstellen door superpositie van de belastingen:

I. Torsievrije buiging door een gelijk gerichte dwarskracht van gelijke grootte;

II. zuivere wringing door een koppel gelijk aan de dwarskracht, vermenigvuldigd met haar afstand tot het torsiecentrum.

De gemiddelde schuifspanningen tengevolge van deze belastingen worden aangeduid resp. met τ_I en τ_{II}. Zij voldoen aan

$$\int_K \frac{\tau_I}{G}\, ds = 0 \qquad (28)$$

en

$$\frac{1}{O} \int_K \frac{\tau_{II}}{G}\, ds = -2\, c \qquad (3)$$

Combinatie van deze vergelijkingen levert

$$\frac{1}{O} \int_K \frac{\tau}{G}\, ds = -2\, c \qquad (29)$$

De vergelijkingen (29), gecombineerd met de vergelijkingen (17), (18), (19) en (20) en met de voorwaarde, dat de resultante der schuifspanningen samenvalt met de belastende dwarskracht, leveren de gegevens, waaruit zich de schuifspanningsverdeeling en de torsiehoek c oplossen, zoodat niet noodzakelijk eerst het torsiecentrum behoeft bepaald te worden.

8. Niet homogene lichamen.

In de technisch voorkomende gevallen zijn de liggers opgebouwd uit afzonderlijke wanden, welke van verschillend materiaal kunnen zijn.

Zoolang elk der wanden isotroop en homogeen blijft, kan de oplossing voor zulke lichamen aangegeven worden. Gedacht wordt een homogene doosligger, waarvan één der wanden weggenomen is en vervangen wordt door de spanningen in de doorsnijdingsvlakken. Indien het gelukt naast het uitgesneden gedeelte een geometrisch gelijk gevormd lichaam te stellen met andere elastische constanten, dat, onder invloed van dezelfde spankrachten als optreden in de doorsnijdingsvlakken van den uitgenomen wand, dezelfde vervormingen als deze heeft, zal het mogelijk zijn de substitutiespanningen in de doorsnijdingsvlakken van den doosligger op haar beurt te vervangen door dezen wand; immers werken erop dezelfde spankrachten en past zij exact in de opening, daar haar vervormingen dezelfde zijn als die van het uitgenomen gedeelte.

De uitgenomen wand zij aangeduid met de index I, de te substitueeren wand heeft de index II.

De vervormingsvoorwaarden zijn $\gamma_I = \gamma_{II}$ en $\epsilon_I = \epsilon_{II}$ resp. de afschuivingshoek en de rek. Deze voorwaarden kunnen ook geschreven worden in den vorm

$$\left(\frac{\tau}{G}\right)_I = \left(\frac{\tau}{G}\right)_{II} \text{ en } \left(\frac{\sigma}{E}\right)_I = \left(\frac{\sigma}{E}\right)_{II} \qquad (30)$$

De voorwaarde, dat de uitwendige spankrachten dezelfde zijn, beteekent in verband met de gelijke geometrische gedaante van de beide wanden.

$$(\tau b)_I = (\tau\, b)_{II} \text{ en } (\sigma\, b)_I = (\sigma\, b)_{II} \qquad (31)$$

Uit (30) en (31) volgt dan

$$(Gb)_I = (Gb)_{II} \qquad \text{en} \qquad (Eb)_I = (Eb)_{II}$$

of ook $(Gb)_I = (Gb)_{II}$ (a) $\quad \left(\dfrac{G}{E}\right)_I = \left(\dfrac{G}{E}\right)_{II}$ (b) .. (32)

In het algemeen kan aan de 2de dezer voorwaarden niet voldaan worden. Zij is echter overbodig wanneer het de spanningsverdeeling door zuivere torsie betreft. Immers zijn hier de normaalspanningen nul en dus ook de vervormingen, welke met E verband houden, zoodat alleen de voorwaarde (32a) gehandhaafd blijft, aan welke altijd voldaan kan worden.

Voor zoover de bijdragen in het buigend moment van de normaalspanningen in de wanden verwaarloosbaar zijn tegenover de bijdrage van de normaalspanningen in de buigingsstijve centra, heeft het niet vervuld zijn van de voorwaarde (32b) geen gevolgen voor de spanningsverdeeling, zoodat in dit geval alleen aan (32a) voldaan moet worden.

In al die gevallen, waarin de normaalspanningen in de wanden niet verwaarloosd worden, maar waarin toch haar beteekenis gering is ten opzichte van die in de buigingsstijve centra, zal een afwijking van (32b) slechts een zeer ondergeschikte wijziging in het spanningsbeeld veroorzaken. Ten koste van een geringe fout laat zich het torsiecentrum vinden met behulp van de enkele voorwaarde

$$(Gb)_I = (Gb)_{II}$$

Op deze wijze laat zich de spanningstoestand in liggers (II), waarvan de verschillende wanden verschillende G bezitten, afleiden uit den spanningstoestand in liggers (I) met wanden van éénzelfde G en waarvan de dikte b_I wordt afgeleid uit b_{II} door

$$(Gb)_I = (Gb)_{II} \qquad (33)$$

De gemiddelde schuifspanning in II wordt afgeleid uit

$$(\tau b)_I = (\tau b)_{II} \qquad (34)$$

De schuifspanningsverdeeling in den ligger ((I) voldoet bij torsie en afschuiving, of wel bij combinatie van beide belastingen, in het algemeen aan (29) waarvoor geschreven kan worden

$$\frac{1}{O}\int_K (\tau b)_I \frac{ds}{2\,(Gb)_I} = -c$$

Daar τb en Gb volgens (33) en (34) in ligger (II) dezelfde waarde hebben, kan ook geschreven worden.

$$\frac{1}{O}\int_K (\tau b)_{II} \frac{ds}{2\,(Gb)_{II}} = -c \qquad (35)$$

of ook:

$$\frac{1}{O}\int_K \tau_{II} \frac{ds}{G_{II}} = -2\,c$$

waarin G_{II} nu niet langer een constante is, doch van wand tot wand een verschillende waarde aannemen kan.

9. De afschuiving.

Het arbeidsvermogen, dat in den gedeformeerden ligger is opgehoopt, is gelijk aan den arbeid, die uitwendig erop verricht is, toen de dwarskracht D van nul tot zijn eindwaarde aangroeide. Deze laatste arbeidshoeveelheid is gelijk aan het halve product van doorbuiging en dwarskracht.

De totale vervorming door een willekeurige dwarskracht laat zich splitsen in een gedeelte, verkregen bij belasting door de gelijk gerichte en even groote dwarskracht in het torsiecentrum, en een ander gedeelte, verkregen bij torsie door het koppel, dat gelijk is aan het product van de dwarskracht en zijn afstand tot het torsiecentrum. Nadat het torsiecentrum gevonden is, is deze laatste vervorming, de specifieke torsiehoek c, bekend uit het nu bekende torsiekoppel. De eerste vervorming wordt gevonden uit de gelijkheid van verrichte arbeid en vervormingsarbeid.

De vervormingsarbeid is gelijk aan

$$A = A_\sigma + A_\tau \qquad (23)$$

Bij oneindig groote stijfheid tegen afschuiving wordt $A = A_\sigma$ en is de vervorming alleen doorbuiging. De doorbuiging in het uiteinde is

$$f_{1\,x} = \frac{D_y\, l^3}{3\, EI_y} \qquad f_{1\,y} = \frac{D_x\, l^3}{3\, EI_x}$$

De bij deze vervorming verrichte arbeid is

$$A_\sigma = \frac{l^3}{6\,E}\left(\frac{D_x^{\,2}}{I_x} + \frac{D_y^{\,2}}{I_y}\right)$$

Bij eindige waarde van G vermeerdert de componente van de doorzakking in de richting van D ten gevolge van afschuiving met het bedrag f_2, zoodanig dat

$$\tfrac{1}{2}\, D f_2 = A_\tau = l \int (\bar{\tau} b)^2 \frac{ds}{2\, Gb} \qquad 36)$$

waarin $\bar{\tau}$ de schuifspanning bij dwarskracht in het torsiecentrum.

In het uitgewerkte voorbeeld zal ook de bepaling van f_2 in de berekening worden opgenomen. (punt 12).

10. Zeepvliesanalogie.

De beteekenis, die de grootheid F had in het geval van zuivere torsie, wordt in het geval van buiging door dwarskracht overgenomen door de ingevoerde grootheid T.

Het bleek mogelijk een model van den spanningstoestand bij torsie te ontwerpen door middel van zeepvliezen, die in hun doorbuigingen volkomen analoog waren met de functie F.

Een gelijke mogelijkheid bestaat hier. Zij laat zich opbouwen aan de hand van de gevolgde oplossingsmethode (punt 6c).

Evenals bij het torsiemodel, wordt de ruimte binnen een cel ingenomen door een vlakke plaat. De verschillende vlakken platen liggen op verschillende hoogte ten opzichte van den buitencontour, Deze hoogte is T_i. Een vlies, gespannen tusschen de plaatcontouren, geeft in zijn hellingen het gedeelte van de schuigspanningen $\frac{T_j - T_i}{b}$. Wat hierna nog aan de totale schuifspanningen ontbreekt, wordt in het model afgebeeld door verhoogde plaatranden. Ziende in de positieve richting van den wand ij wordt deze rechts verhoogd met het bedrag $\tfrac{1}{2}\,(t_{ij} + t'_{ij})$ en links met hetzelfde bedrag verlaagd. Deze splitsing van $t_{ij} + t'_{ij}$ is uitgevoerd om in het midden van den wand, in de richting van dezen het zeepvlies niet te doen hellen, op deze wijze tot uitdrukking brengend, dat de schuifspanning in de richting loodrecht op den wand nul is. Weliswaar is de helling in andere punten op de normaal ongelijk nul, terwijl de schuifspanning op deze plaatsen toch ook nul is; doch het model bedoelt slechts de analogie te leveren van de gemiddelde schuifspanningen, en inderdaad is op de aangegeven wijze de gemiddelde helling nul. De randhoogten, voor zoover van t'_{ij} afhankelijk, zijn gegeven door (18); t_{ij} wordt willekeurig gekozen onder beperking, dat voldaan wordt aan de vergelijkingen (19) en (20).

De vormveranderingsvoorwaarden $\int_K \frac{\tau}{G}\, ds = 0$, die in het voorgaande bepalend waren voor de onbekenden T_i, beteekenen in het zeepvliesmodel evenwichtsvergelijkingen voor de richting loodrecht op de vlakke platen, indien op deze geen overdruk aanwezig is. Immers vindt in het model τ zijn analogon in $\frac{T_j - T_i + t_{ij} + t'_{ij}}{b}$, d.i. de helling van het zeepvlies loodrecht op den celrand. Met de oppervlaktespanning S levert het lijnelement ds in de richting loodrecht op de vlakke plaat de componente

$$Sds\, \frac{T_j - T_i + t_{ij} + t'_{ij}}{b}$$

Indien geen overdruk wordt uitgeoefend, en de plaat gewichtsloos gedacht is, moeten de spanningen in de vliezen rond een cel met elkaar evenwicht maken, m.a.w. haar resultante is nul

$$\int_K Sds\, \frac{T_j - T_i + t_{ij} + t'_{ij}}{b} = 0 \qquad (37)$$

Deze evenwichtsvergelijking is geen andere dan de vormveranderingsvoorwaarde $\int_K \frac{\tau}{G}\, ds = 0$.

Indien overdruk wordt uitgeoefend, is het evenwicht bepaald door

$$\int_K Sds\, \frac{T_j - T_i + t_{ij} + t'_{ij}}{b} = -p\, O \qquad (38)$$

Het zeepvlies, dat zich hier instelt, is analoog met de spanningsverdeeling door dwarskracht buiten het torsiecentrum, terwijl $\frac{p}{S}$ de plaats inneemt van $2\,c\,G$.

Ook voor niet-homogene lichamen geldt dit model, daar een niet-homogeen lichaam zich laat herleiden tot een homogeen door de wanddikten te veranderen. (punt 8).

Evenmin als het zeepvliesmodel voor zuivere torsie van meervoudig samenhangende lichamen, heeft het model voor dwarskracht beteekenis voor experimenteel onderzoek. Als illustratie van de verwantschap tot zuivere torsiebelasting verdiende het genoemd te worden.

11. Samenvatting.

Voor de bepaling van de spanningsverdeeling en de vervorming van prismatische doosliggers van willekeurig-veelvoudigen samenhang, onder zuivere wringing of door dwarskracht op buiging belast, zijn vergelijkingen afgeleid, waarin de volgende grootheden optreden:

n : het totaal aantal cellen van den ligger.
i en j : aanduiding van een willekeurige cel.
ij : index geplaatst bij een grootheid, welke op den wand tusschen de cellen i en j betrekking heeft.
k : een willekeurig knooppunt of splitsingspunt van wanden.
O : oppervlak omspannen door de middenlijn van een aantal aaneengesloten wanden.
ds : lijnelement van de middenlijn van een wand.
b : wanddikte.
G : glydingsmodulus van den wand. Deze kan in verschillende wanden verschillend zijn.
a : $\int \frac{ds}{2Gb}$; geintegreerd is over de volle lengte van den scheidingswand tusschen 2 cellen.
x en y : *hoofdtraagheidsassen* van de dwarsdoorsnede.
S_x en S_y : statisch moment ten opzichte van resp. x- en y-*as*; voorkomend met index k wanneer het betreft een in het knooppunt k aanwezige materiaalophooping (gording); voorzien van de indices $\frac{ij}{k}$ wanneer het betreft den wand tusschen k en een willekeurig punt van den wand ij.
I_x en I_y : traagheidsmoment van de dwarsdoorsnede ten opzichte van x- en y-as.
D_x en D_y : belastende dwarskracht resp. loodrecht op x- en y-as.
W : belastend wringend koppel.
c : specifieke hoekverdraaiing van de dwarsdoorsnede, verdraaiing per lengte-eenheid.
τ : gemiddelde schuifspanning.
F : hulp-grootheid toegevoegd aan een cel.

In een wand wordt die richting als positief aangenomen, welke de celwand doet doorloopen in de richting rondom de cel, waarbij men deze aan de linkerhand heeft. De schuifspanning τ_{ij} is positief, als zij de gedefinieerde richting ten opzichte van cel i heeft; hieruit volgt, dat zij als τ_{ji} negatief is ten opzichte van cel i.

I. *Zuivere torsie.*

Uit de hulpgrootheden volgt de schuifspanning door

$$\tau_{ij} = \frac{F_j - F_i}{b_{ij}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

Het n-tal F's en c volgen uit:

$$\frac{1}{O} \Sigma (F_j - F_i)\, a_{ij} + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

en

$$W = 2 \sum_{i=1}^{n} F_i\, O_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

De sommatie in (b) betreft alle wanden, welke het oppervlak O omspannen. Als oppervlakken O kunnen gekozen worden achtereenvolgens de n oppervlakken der cellen, of ook willekeurige combinatie's van cellen. Echter levert (b) niet meer dan n onafhankelijke vergelijkingen.

De sommatie in (c) omvat alle n cellen.

II. *Buiging door dwarskracht.*

De algebraïsche som van de schuifkrachten per lengteeenheid $(\tau b)_{ij}^{k}$ van alle in een knooppunt k samenkomende wanden, waarin de spanningen naar het knooppunt gericht positief in rekening gebracht worden, voldoet aan

$$\sum_{ij} (\tau b)_{ij}^{k} + \left(D_x \frac{S_x}{I_x} + D_y \frac{S_y}{I_y} \right)_k = 0 \quad \ldots\ldots (d)$$

De schuifkracht per lengteeenheid in een willekeurig punt van den wand $(\tau b)_{ij}$ staat in verband tot $(\tau b)_{ij}^{k}$ naast

TWEECELLIG LICHAAM.

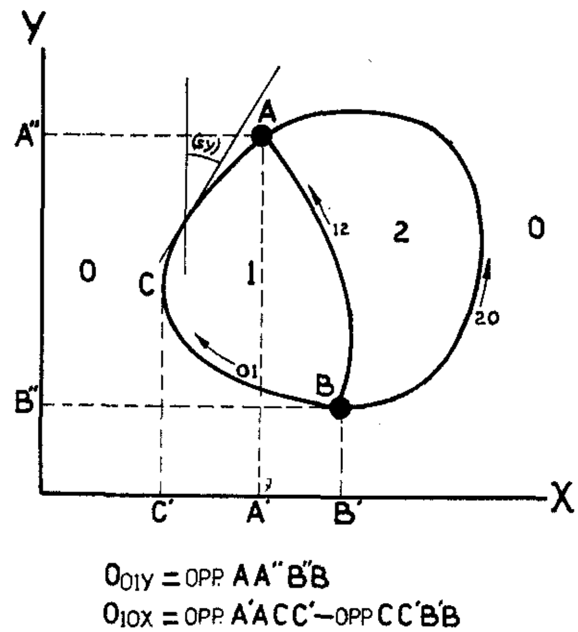


Fig. 4.

het knooppunt door

$$(\tau b)_{ij} - (\tau b)_{ij}^{k} + \left(\frac{D_x}{I_x} S_x + \frac{D_y}{I_y} S_y \right)_k^{ij} = 0 \quad \ldots\ldots (e)$$

Voldaan moet worden aan de n met (b) verwante vergelijkingen

$$\frac{1}{O} \oint_K \tau b \; d\, a + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

waarin de lijnintegraal, evenals de sommatie in (b) betrekking heeft op alle wanden, welke het oppervlak O omspannen.

De voorwaarde, dat de resultante der schuifspanningen samenvalt met de gegeven dwarskracht, *voltooit het aantal* gegevens, dat noodig is ter bepaling van de schuifspanningsverdeeling en den torsiehoek.

De ligging van het torsiecentrum wordt gevonden als aangrijpingspunt van de dwarskracht voor welke $c = 0$

Wanneer het geoorloofd is de buigingsstijfheid van de dunne wanden te verwaarloozen tegenover de bijdragen van de buigingsstijve centra in de knooppunten (gordingen), volgt uit (e) dat het product ($\tau\, b$) in een wand constant is, zoodat in de plaats van (f) treedt:

$$\frac{1}{O} \Sigma (\tau b)_{ij}\, a_{ij} + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

12. Toepassing op tweecellige lichamen ($n = 2$).

Als voorbeeld, waaraan de voorgaande resultaten worden toegelicht, is gekozen het tweecellig lichaam (fig. 4), dat uitgebreide toepassing vindt als samenstel voorliggerneus van vleugels.

Afgezien van den bijzonderen vorm, welken het lichaam heeft, kunnen formules opgesteld worden, welke in het algemeen voor de exacte schuifspanningsverdeeling bij zuivere torsie gelden. Bovendien blijkt het mogelijk de schuifspanningsverdeeling bij dwarskracht, en het torsiecentrum algemeen te bepalen, onder aanname, dat het gedeelte van het buigend moment, dat opgenomen wordt door de dunne wanden, verwaarloosbaar is.

a. *Zuivere torsie.*

Indien de som (b) (punt 11) genomen wordt resp. langs de contouren der cellen 1 en 2, wordt gevonden

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{O_1} \Big[-F_1\, a_{10} + (F_2 - F_1)\, a_{12} \Big] + c = 0 \\ \frac{1}{O_2} \Big[-F_2\, a_{20} + (F_1 - F_2)\, a_{21} \Big] + c = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (39)$$

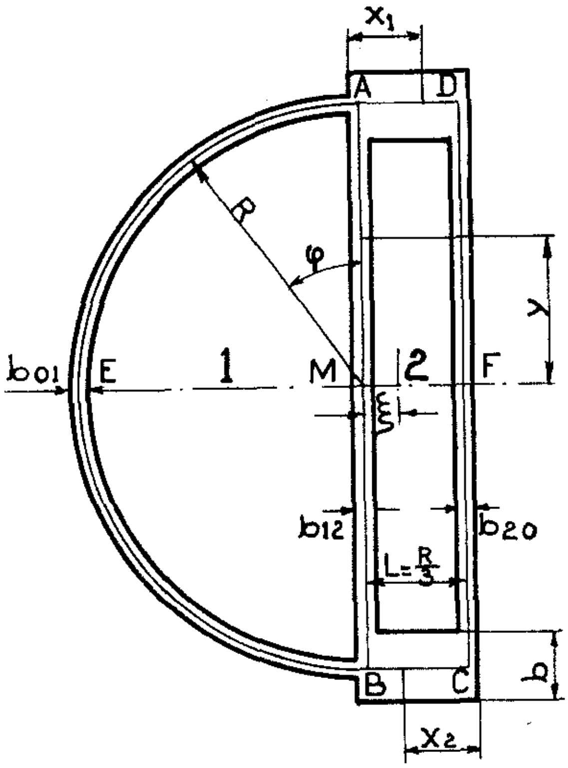


Fig. 5.

Volgens (c) $\qquad W = 2\,(F_1\, O_1 + F_2\, O_2)$

Hieruit volgt

$$F_1 = \tfrac{1}{2}\, \frac{a_{20}\, O_1 + a_{12}\, O}{a_{20}\, O_1^2 + a_{12}\, O^2 + a_{01}\, O_2^2}\, W \quad \text{en}$$

$$F_2 = \tfrac{1}{2}\, \frac{a_{01}\, O_2 + a_{12}\, O}{a_{20}\, O_1^2 + a_{12}\, O^2 + a_{01}\, O_2^2}\, W \qquad \ldots (40)$$

De torsiestijfheid, welke gedefinieerd is door $W = c\, S_t$, blijkt te zijn

$$S_t = 2\, \frac{O_1^{\ 2} a_{20} + O^2\, a_{12} + O_2^{\ 2}\, a_{01}}{a_{01}\, a_{12} + a_{12}\, a_{20} + a_{20}\, a_{01}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Hierin is $O = O_1 + O_2$, het door de doorsnede totaal omspannen oppervlak.

b. *Buiging door dwarskracht zonder torsie.*

Uit de veronderstelling, dat de bijdragen van de normaalspanningen in de wanden tot het buigend moment verwaarloosbaar zijn, volgt dat het product τb voor eenzelfden wand een constante waarde heeft. Alle buigspanningen zijn geconcentreerd gedacht in de gebieden, waar de drie wanden samenkomen.

De sommaties (g) (punt 11) rond de cellen 1 en 2 leveren op:

$$\begin{aligned} (\tau b)_{12}\, a_{12} + (\tau b)_{10}\, a_{10} &= o \\ (\tau b)_{20}\, a_{02} = (\tau b)_{21}\, a_{21} &= o \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

waarin $(\tau b)_{12} = -(\tau b)_{21}$

De vergelijkingen (42) regelen de verhoudingen $\dfrac{(\tau b)_{10}}{(\tau b)_{12}}$ en $\dfrac{(\tau b)_{20}}{(\tau b)_{21}}$,

De waarde van $(\tau b)_{12}$ kan bepaald worden uit de omstandigheid, dat de resultante der schuifspanningen gelijk is aan de gegeven dwarskracht D. De resulteerende schuifkracht in een wand is $\int (\tau b)_{ij}\, ds\, \cos\,(sy)$ in de richting der y-*as*, en daar $ds\, \cos\,(sy) = dy$ volgt voor het tweecellig lichaam

$$\begin{aligned} D_x &= [(\tau b)_{01} + (\tau b)_{12} + (\tau b)_{20}]\,(y_A - y_B) \\ D_y &= [(\tau b)_{02} + (\tau b)_{21} + (\tau b)_{10}]\,(x_B - x_A) \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

De 4 vergelijkingen (42) en (43) bepalen de 3 onbekenden τb. De afhankelijkheid van deze vergelijkingen wordt geëischt door de omstandigheid, dat een dwarskracht steeds in de richting van de verbindingslijn van A en B moet vallen, daar loodrecht op die richting buigingsstijfheid ontbreekt, zoodat alleen evenwicht mogelijk is onder voorwaarde $\dfrac{D_x}{D_y} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

c. *Het torsiecentrum.*

Het torsiecentrum laat zich vinden als zwaartepunt van de gezamenlijke schuifkrachten. De bijdrage in het statisch moment ten opzichte van de y-as, welke geleverd wordt door den wand ij is

$$\int (\tau b)_{ij}\, x ds\, cos(sy) = \int (\tau b)_{ij}\, x dy = (\tau b)_{ij}\, O_{ijy}$$

waarin O_{ijy} het oppervlak tusschen y-as en wand beteekent.

Voor het moment van alle spanningen om den coördinaten oorsprong wordt gevonden

$$\begin{aligned} M &= (\tau b)_{01}\,(O_{01y} - O_{10x}) + (\tau b)_{12}\,(O_{12y} - O_{21x}) + \\ &+ (\tau b)_{20}\,(O_{20y} - O_{02x}) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (44) \end{aligned}$$

De dwarskracht D, evenwijdig aan AB heeft tot den oorsprong den afstand a, zoodat $Da = M$.

Met gebruikmaking van (42) en (43), en na invoering van $AB = h$ volgt

$$a = \frac{1}{h}\, \frac{a_{12}a_{20}(O_{01y} - O_{10x}) + a_{01}a_{20}(O_{12y} - O_{21x}) + a_{01}a_{12}(O_{20y} - O_{02x})}{a_{01}a_{12} + a_{12}a_{20} + a_{20}a_{01}} \quad (45)$$

Deze uitdrukking gaat, indien de massa's in A en B slechts klein van afmeting zijn, over in

$$a = \frac{1}{h} \left\{ O_{12y} - O_{21x} + 2\, a_{12}\, \frac{a_{01}\, O_2 - a_{20} O_1}{a_{01}a_{12} + a_{12}a_{20} + a_{20}a_{01}} \right\}$$

Waar de veronderstelling over den aard van het lichaam de mogelijkheid van een anders gerichte dwarskracht uitsluit, kan op de gevonden lijn geen punt worden aangewezen, dat in het bijzonder torsiecentrum is.

d. *Exacte oplossing.*

Voor de schuifspanningsverdeeling door dwarskracht en voor het torsiecentrum van tweecellige lichamen kunnen, wanneer de invloed van de wanden op de buigingsstijfheid niet verwaarloosd wordt, geen algemeene vergelijkingen worden gesteld, welke in eenvoud vergelijkbaar zijn met (42) en (45).

In het volgende wordt de berekening doorgevoerd voor een lichaam van bijzonderen vorm, dat zich goed numerisch laat behandelen (fig. 5). Dit lichaam onderscheidt zich hierin van de combinatie ligger-neus bij vliegtuigvleugels, dat de neus vervangen is door een halven cirkelboog. De oplossing, welke gegeven wordt, wijkt af van de exacte oplossing, voorzoover in de gordingen, die de korte zijden van den doosligger vormen, ook schuifspanningen kunnnen optreden in de richting van de y-as. Naarmate de dikte van de gording kleiner is ten opzichte van de overige afmetingen in y-richting, nadert de te geven oplossing meer tot de exacte.

Het, ten opzichte van de x-as symmetrische lichaam heeft ten gevolge van een dwarskracht D_y een schuifspanningsverdeeling, welke onmiddellijk volgt na de overweging, dat in de symmetrie-doorsnede geen schuifspanningen aanwezig kunnen zijn.

Slechts wordt de schuifspanningsverdeeling ten gevolge van D_x onderzocht.

Overeenkomstig de afspraak in punt 2 worden de schuifspanningen τ_{01}, τ_{12} en τ_{20} resp. in de wanden BEA, BMA en BCDA positief genoemd in de richting naar A. Indien haar waarde in A bekend is, is alles bekend over de spanningsverdeeling.

Als onbekenden worden gekozen de producten

$$(\tau b)^A_{01},\ (\tau b)^A_{12}\ \text{en}\ (\tau b)^A_{20}.$$

Volgens (e) (punt 11) is (τb) in een ander punt van den wand $(\tau b) = (\tau b)^{A} - \frac{D_x}{I_x} S_x$

waarin S_x het statisch moment van het gedeelte wand tusschen A en het beschouwde punt is.

$$\left.\begin{aligned}
(\tau b)^{\phi}_{01} &= (\tau b)^{A}_{01} - \frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \sin\phi \\
(\tau b)^{y}_{12} &= (\tau b)^{A}_{12} - \frac{D_x}{I_x} b_{12} \frac{R^2-y^2}{2} \\
(\tau b)^{x_1}_{20} &= (\tau b)^{A}_{20} - \frac{D_x}{I_x} b R x_1 \\
(\tau b)^{y}_{20} &= (\tau b)^{A}_{20} - \frac{D_x}{I_x} \left(b L R + b_{20} \frac{R^2-y^2}{2}\right) \\
(\tau b)^{x_2}_{20} &= (\tau b)^{A}_{20} - \frac{D_x}{I_x} b R (L-x_2)
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Omdat het „centrum van buigingsstijfheid", de gording als een deel der wand is beschouwd, geeft vergelijking (d) (punt 11)

$$(\tau b)^{A}_{01} + (\tau b)^{A}_{12} + (\tau b)^{A}_{20} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Gezocht wordt naar die schuifspanningsverdeeling, waarbij geen torsie optreedt, dus

$$\int_K \tau b \, da = 0 \qquad (f)\ (\text{punt } 11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{K_1} \tau b \frac{ds}{b} = \int_{-R}^{R} (\tau b)^{y}_{12} \frac{dy}{b_{12}} - \int_0^{\pi} (\tau b)^{\phi}_{01} R \frac{d\phi}{b_{01}} = 0 \\
&\int_{K_2} \tau b \frac{ds}{b} = -\int_L^0 (\tau b)^{x_2}_{20} \frac{dx_2}{b} + \int_{-R}^{R} (\tau b)^{y}_{20} \frac{dy}{b_{20}} - \\
&\qquad - \int_L^0 (\tau b)^{x_1}_{20} \frac{dx_1}{b} + \int_R^{-R} (\tau b)^{y}_{12} \frac{dy}{b_{12}} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Na substitutie van (46) wordt (48)

$$(\tau b)^{A}_{12} \cdot \frac{2R}{b_{12}} - (\tau b)^{A}_{01} \frac{\pi R}{b_{01}} + \frac{D_x}{I_x} \frac{4}{3} R^3 = 0$$

$$(\tau b)^{A}_{20} \left(\frac{2L}{b} + \frac{2R}{b_{20}}\right) - (\tau b)^{A}_{12} \frac{2R}{b_{12}} - \frac{D_x}{I_x} LR \left(L + 2 \frac{b}{b_{20}} R\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

De oplossing van (47) en (49) gesubstitueerd in (46) geeft (50)

$$(\tau b)^{\phi}_{01} = -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \times$$

$$\left[\frac{-\frac{4}{3}\left(1 + \frac{b_{12}}{b_{20}}\right) + \frac{L}{R}\left(2\frac{b}{b_{20}} - \frac{4}{3}\frac{b_{12}}{b}\right) + \frac{L^2}{R^2}}{\pi\left(1 + \frac{b_{12}}{b_{20}}\right) + 2\frac{b_{01}}{b_{20}} + \frac{L}{R}\left(\frac{2b_{01}}{b} + \pi\frac{b_{12}}{b}\right)} + \sin\phi\right]$$

$$(\tau b)^{y}_{12} = -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \times$$

$$\left[\frac{\frac{4}{3}\frac{b_{12}}{b_{20}} + \frac{L}{R}\frac{b_{12}}{b_{20}}\left(\frac{4}{3}\frac{b_{20}}{b} + \frac{\pi b}{b_{01}}\right) + \frac{L^2}{R^2}\frac{\pi}{2}\frac{b_{12}}{b_{01}}}{\pi\left(1 + \frac{b_{12}}{b_{20}}\right) + 2\frac{b_{01}}{b_{20}} + \frac{L}{R}\left(\frac{2b_{01}}{b} + \pi\frac{b_{12}}{b}\right)} + \frac{b_{12}}{2b_{01}}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)\right]$$

$$(\tau b)^{x_1}_{20} = -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \times$$

$$\left[\frac{\frac{4}{3} + \frac{L}{R}\pi\frac{b}{b_{01}} + \frac{L^2}{R^2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{b_{12}}{b_{01}}\right)}{\pi\left(1 + \frac{b_{12}}{b_{20}}\right) + 2\frac{b_{01}}{b_{20}} + \frac{L}{R}\left(2\frac{b_{01}}{b} + \pi\frac{b_{12}}{b}\right)} - \frac{b}{b_{01}}\frac{(L - x_1)}{R}\right]$$

$$(\tau b)^{y}_{20} = -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \times$$

$$\left[\frac{\frac{4}{3} + \frac{L}{R}\pi\frac{b}{b_{01}} + \frac{L^2}{R^2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{b_{12}}{b_{01}}\right)}{\pi\left(1 + \frac{b_{12}}{b_{20}}\right) + 2\frac{b_{01}}{b_{20}} + \frac{L}{R}\left(2\frac{b_{01}}{b} + \pi\frac{b_{12}}{b}\right)} + \frac{b_{20}}{2b_{01}}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)\right]$$

$$(\tau b)^{x_2}_{20} = -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \times$$

$$\left[\frac{\frac{4}{3} + \frac{L}{R}\pi\frac{b}{b_{01}} + \frac{L^2}{R^2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{b_{12}}{b_{01}}\right)}{\pi\left(1 + \frac{b_{12}}{b_{20}}\right) + 2\frac{b_{01}}{b_{20}} + \frac{L}{R}\left(2\frac{b_{01}}{b} + \pi\frac{b_{12}}{b}\right)} + \frac{b}{b_{01}}\frac{(L - x_2)}{R}\right]$$

Voor zoover de oplossing algemeen gehouden is, is dit niet aan haar overzichtelijkheid ten goede gekomen. Een getallenvoorbeeld, dat in overeenstemming met technische uitvoeringsvormen gekozen is, zal meer aanschouwelijk illustreeren, welke benadering verkregen wordt met de onder 12*b* en *c* gegeven oplossing in vergelijking tot de exacte (50).

Met de verhoudingen:

$\frac{b_{12}}{b_{01}} = \frac{b_{20}}{b_{01}} = 3$, $\frac{b}{b_{01}} = 30$, en $\frac{L}{R} = {}^{1}/_{3}$ wordt gevonden

$$\left.\begin{aligned}
(\tau b)^{\phi}_{01} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[0.5746 + \sin\phi\right] \\
(\tau b)^{y}_{12} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[4.7080 + 1.5 \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)\right] \\
(\tau b)^{x_1}_{20} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[-5.2826 + 30 \frac{x_1}{R}\right] \\
(\tau b)^{y}_{20} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[4.7174 + 1.5 \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)\right] \\
(\tau b)^{x_2}_{20} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[4.7174 - 30 \frac{x_2}{R}\right]
\end{aligned}\right. \quad (51)$$

Het torsiecentrum wordt gevonden als zwaartepunt van de schuifkrachten

$$D_x \xi = \int_0^{\pi} (\tau b)^{\phi}_{01} R^2 \, d\phi - \int_0^{L} (\tau b)^{x_1}_{20} R \, dx_1 - \int_{-R}^{R} (\tau b)^{y}_{20} L dy -$$

$$- \int_0^{L} (\tau b)^{x_2}_{20} R dx_2 = -0{,}1819 \frac{D_x}{I_x} R^4 b_{01}$$

en met $I_x = R^3 b_{01} \left(24 + \frac{\pi}{2}\right)$ volgt

$$\xi = -0{,}007\, R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Een vereenvoudiging wordt reeds verkregen, wanneer gebruik gemaakt wordt van het inzicht, dat de, ten opzichte van de spanningen in de wanden, kleine schuifspanningen in de gordingen slechts verwaarloosbare bedragen aan den vervormingsarbeid toevoegen, daar ze in de tweede macht voorkomen. Deze conceptie sluit zich aan bij de opvatting, welke zich centra van buigingsstijfheid in de knooppunten van de wanden denkt.

De wanden 01, 12 en 20 welke in dit centrum, de gording, elkander ontmoeten dragen schuifkrachten $(\tau b)^{A}_{01}$, $(\tau b)^{A}_{12}$ en $(\tau b)^{D}_{12}$, welke aan vergelijking (d) (punt 11) moeten voldoen.

$$(\tau b)^{A}_{01} + (\tau b)^{A}_{12} + (\tau b)^{D}_{20} + D_x \frac{S}{I_x} = 0$$

De vergelijking (f) levert op

$$\int_{R}^{R} (\tau b)^{y}_{12} \frac{dy}{b_{12}} - \int_0^{\pi} (\tau b)^{\phi}_{01} R \frac{d\phi}{b_{01}} = 0$$

$$\int_{-R}^{R} (\tau b)^{y}_{20} \frac{dy}{b_{20}} - \int_{R}^{-R} (\tau b)^{y}_{12} \cdot \frac{dy}{b_{12}} = 0$$

Bij het gekozen numerieke voorbeeld volgt

$$\begin{aligned}
(\tau b)^{\phi}_{01} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[0.5755 + \sin\phi\right] \\
(\tau b)^{y}_{12} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[4.7122 + 1.5\,(1-\frac{y^2}{R^2})\right] \qquad (53)\\
(\tau b)^{y}_{20} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01} \left[4.7122 + 1.5\,(1-\frac{y^2}{R^2})\right]
\end{aligned}$$

$$\xi = 0{,}000\, R$$

Zoodat de benadering nauwelijks aan het resultaat merkbaar is.

Bij verwaarloozing van de normaalspanningen in de wanden levert toepassing van (42) en (*d*) (punt 11)

$$(\tau b)_{12} \frac{2R}{b_{12}} - (\tau b)_{01} \frac{\pi R}{b_{01}} = 0$$

$$(\tau b)_{20} \frac{2R}{b_{20}} - (\tau b)_{12} \frac{2R}{b_{12}} = 0$$

$$(\tau b)_{01} + (\tau b)_{12} + (\tau b)_{20} + \frac{D_x}{I} S = 0$$

zoodat $\qquad \tau_{12} = \tau_{20} = \frac{\pi}{2} \tau_{01}$

In het gekozen getallenvoorbeeld

$$(\tau b)_{01} = -\frac{D_x}{I} R^2 b_{01}\, 0.9592.$$

$$(\tau b)_{12} = -\frac{D_x}{I} R^2 b_{01}\, 4.5204.$$

$$(\tau b)_{20} = -\frac{D_x}{I} R^2 b_{01}\, 4.5204.$$

Echter is hierin I een andere grootheid dan I_x in de vorige berekeningen, omdat ze nu slechts betrekking heeft op de gordingen. Om vergelijking van beide resultaten mogelijk te maken, wordt geschreven

$$\begin{aligned}
(\tau b)_{01} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01}\, 1.222 \\
(\tau b)_{12} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01}\, 5.766 \qquad (54)\\
(\tau b)_{20} &= -\frac{D_x}{I_x} R^2 b_{01}\, 5.766
\end{aligned}$$

Deze schuifspanningen liggen tusschen de kleinste en de grootste spanning, die werkelijk in den wand aanwezig is. (zie fig. 6).

Ten slotte geeft toepassing van (45) het torsiecentrum

$$\xi = 0\, R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

In het behandelde geval beteekent verwaarloozing van de buigspanningen in de wanden een verwaarloozing van 20 % der buigingsstijfheid. Desondanks geeft de schuifspanningsverdeeling en de ligging van het torsiecentrum ten gevolge van deze verwaarloozing een zoodanige benadering van de exacte oplossing, dat de eischen, welke een technische berekening stelt, er door zullen worden bevredigd.

De invloed van de verwaarloozing op de grootte der vervorming is zeer gering. Volgens (36) is de afschuiving te bepalen uit

$$\tfrac{1}{2}\, D f_2 = l \int (\tau b)^2 \frac{ds}{2Gb}.$$

SCHUIFSPANNINGSVERDEELING 7*b*.

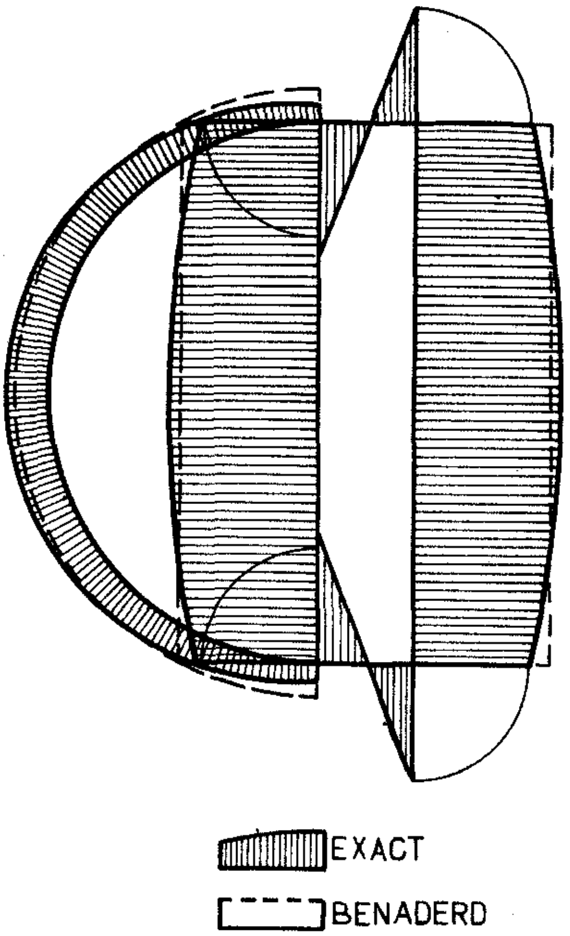


Fig. 6.

De spanningsverdeeling volgens (51), hierin gesubstitueerd, geeft

$$f_2 = 48.89 \frac{D}{G} \frac{R^5}{I_x^2} b_{01}\, l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

terwijl bij de verwaarloozing van de normaalspanningen in de wanden, die de schuifspanningverdeeling (54) opleverde, een afschuiving gevonden wordt, die slechts $^1/_4$ % van het voorgaande resultaat afwijkt

$$f_2 = 49.02 \frac{D}{G} \frac{R^5}{I_x^2} b_{01}\, l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

De absolute grootte van deze vervorming is vrij aanzienlijk. Zij is zeker niet te verwaarloozen tegenover de vervorming tengevolge van doorbuiging.

$I_x = 25.57\, R^3 b_{01}$ gesubstitueerd in (56) geeft

$$f_2 = \frac{Dl^3}{3\ EI} \cdot 3 \cdot \frac{48.89}{25.57} \frac{E}{G} \left(\frac{R}{l}\right)^2,$$

zoodat f_2 grooter is dan de doorbuiging $f_1 = \dfrac{D\, l^3}{3\, E\, I}$ voor alle liggers van deze samenstelling, waarin

$$\frac{l}{R} < \sqrt{3\, \frac{48.89}{25.57} \frac{E}{G}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

De verhouding $\frac{E}{G}$ is voor triplex ongeveer 10, zoodat met $\frac{l}{R} < 7.5$ de afschuiving grooter is dan de doorbuiging.

Rapport A. 321.

Nomogrammen voor het bepalen van de wortels van vierde-graads-vergelijkingen

door

ir. C. KONING.

Rapport A. 321: Nomogrammes pour la détermination des racines des équations du quatrième degré.

Report A. 321: Nomograms for the determination of the roots of biquadratic equations.

Bericht A. 321: Nomogramme zur Berechnung der Wurzeln von Gleichungen vierten Grades.

Overgedrukt uit het Weekblad „De Ingenieur" 1931 no. 39. Algemeen gedeelte.

RAPPORT A. 321.

Nomogrammen voor het bepalen van de wortels van vierde-graads-vergelijkingen.

Uittreksel.

a. Inleiding (punt 1, 2c).
In het rapport worden nomogrammen besproken voor het bepalen van de reëele en complexe wortels van vierde-graads-vergelijkingen.

Deze moeten hiertoe eerst door een eenvoudige transformatie in den vorm (12*b*) gebracht worden.

b. Constructie van de nomogrammen (punt 2a, b, 3, 4).
Bij deze constructie werd gebruik gemaakt van een bekende, in punt 3 kort beschreven, methode. Voor het nomogram voor het bepalen van de reëele wortels (fig. 4) kon hierbij zonder meer van de vergelijking uitgegaan worden. Voor de nomogrammen voor de wortels van de vergelijking met vier complexe wortels (fig. 5, 6) en voor dat voor de complexe wortels van de vergelijking met twee reëele wortels (fig. 7) werd gebruik gemaakt van de hulpvergelijkingen (5) en (7) resp. (10).

c. Gebruiksaanwijzing (punt 5).
Om het gebruik van de nomogrammen te vergemakkelijken is een afzonderlijk overzicht van de benoodigde bewerkingen gegeven.

d. Het bepalen van nauwkeuriger waarden (punt 6).
Voor het bepalen van meer nauwkeurige waarden voor de complexe wortels, zonder dat hierbij berekeningen met complexe grootheden noodig zijn, kan gebruik gemaakt worden van de onder *b* genoemde hulpvergelijkingen.

e. Getallenvoorbeelden (punt 7).
Eenige uitgewerkte getallenvoorbeelden worden gegeven, waarbij voor één geval de uit de nomogrammen verkregen uitkomsten vergeleken worden met die, welke op de gebruikelijke wijze berekend werden.

RAPPORT A. 321.

Nomogrammes pour la détermination des racines des équations du quatrième degré.

Résumé.

a. Introduction (article 1, 2c, d).
Le rapport donne des nomogrammes pour déterminer les racines réelles et complexes des équations du quatrième degré. Les équations doivent être données sous la forme (12*b*), dont le coefficient b_2 a une des valeurs $\pm$ 1,0, mais toute autre équation y peut être réduite par les transformations (11, 12).

La figure 2 fait voir le caractère des racines de l'équation (12*b*) en fonction des coefficients b_2, c_2, d_2 (I: quatre racines réelles, II: quatre racines complexes, III: deux racines réelles).

b. Méthode générale de construction des nomogrammes (article 3).
Les nomogrammes ont été construits selon la méthode connue pour les nomogrammes à points alignés. Pour l'équation (19) entre les trois variables *r*, *s*, *t*, les échelles du nomogramme sont données par (20) (voir aussi fig. 3).

c. Nomogramme pour les racines réelles (article 4b).
Le nomogramme I (fig. 4) donne les racines réelles et positives, si on prend le coefficient c_2 avec le même signe qu'il a dans l'équation, et les racines réelles et négatives, si ce signe est renversé.

d. Nomogrammes pour les racines de l'équation sans racines réelles (article 2a, 4c).
Pour construire ces nomogrammes on doit se servir de l'équation en Z (5), qui est dérivée de celle en z (4). Entre les racines de ces deux ils existent les relations suivantes:

1°. les racines réelles X de (5) sont égales à la partie réelle x des racines $+ x + i\,y_1$; $- x + i\,y_2$ (4);

2°. les racines imaginaires $i\ Y_1$, $i\ Y_2$ de (5) et les parties imaginaires y_1, y_2 des racines de (4) sont reliées par:

$$c_2 > 0 : y_1 = Y_1 + Y_2 \,.\, y_2 = Y_1 - Y_2,$$
$$c_2 < 0 : y_1 = Y_1 - Y_2 \,,\, y_2 = Y_1 + Y_2.$$

Ici Y_1 et Y_2 sont les valeurs positives, et y_1 est la plus grande.

Les nomogrammes II et III (fig. 5, 6) donnent les valeurs de x, et de Y_1, Y_2.

e. Nomogramme pour les racines complexes de l'équation avec deux racines réelles (article 2b, 4d).
En ce cas, les racines réelles x_1 et x_2 étant données par le nomogramme I, la partie réelle x des racines complexes $x \pm i\,y$ peut être déterminée à l'aide de la relation (10*a*), tandis que la partie imaginaire y est donnée par le nomogramme IV (fig. 7), qui est déduit de (10*b*).

f. Méthode pour déterminer des valeurs plus exactes (article 6).
Pour obtenir des valeurs plus exactes pour les racines complexes, on peut employer les méthodes connues pour des racines réelles et éviter tout calcul avec des grandeurs complexes en employant les équations (5) et (7) ou (10) au lieu de (12*b*).

g. Exemples numériques (article 7).
Des exemples numériques pour divers cas sont donnés. Le tableau II donne, pour l'équation (31), qui a quatre racines réelles, une comparaison entre les valeurs obtenues à l'aide des nomogrammes et celles, déterminées en appliquant la méthode numérique ordinaire sur l'équation (31) et les deux équations (33) et (35), qui en sont déduites.

REPORT A. 321.

Nomograms for the determination of the roots of biquadratic equations.

Summary.

a. Introduction (point 1, 2c, d).
Nomograms are discussed, which give the real and complex roots of the biquadratic equation (12*b*), in which b_2 has one of the values $\pm$ 1,0. The general equation may be reduced to this special form by means of the transformations (11, 12).

The character of the roots of (12*b*) in dependance of the coefficients b_2, c_2, d_2 is demonstrated by fig. 2 (I: four real roots; II: four complex roots; III: two real roots).

b. General method of construction (point 3).
The method used for the construction of the nomograms is a known one. The function of the three variables *r*, *s*, *t* being of the form (19), the scales of the nomogram are given by (20) (See also fig. 3).

c. Nomogram for the real roots (point 4b).
Nomogram I (fig. 4) gives the real roots. To obtain the positive roots, c_2 should be taken with the same sign, which it has in the equation, whereas for the negative ones this sign should be reversed.

d. Nomograms for the complex roots of the equation without real roots (point 2a, 4c).
For the construction of these nomograms use has been made of the equation (5) derived from (4). If (4) has no real roots, the following relations exist:

1°. the real roots X of (5) are equal to the real part x of the roots $+ x \pm i y_1$, $- x \pm i y_2$ of (4);

2°. the imaginary parts y_1, y_2 of the roots of (4) may be calculated from the imaginary roots iY_1, iY_2 of(5) by means of:

$$c_2 > 0 : y_1 = Y_1 + Y_2 , y_2 = Y_1 - Y_2,$$
$$c_2 < 0 : y_1 = Y_1 - Y_2 , y_2 = Y_1 + Y_2.$$

Y_1 and Y_2 are to be taken here with the positive sign and Y_1 is the largest of the two values.

The nomograms II and III (fig. 5, 6) give the values of x and Y_1, Y_2.

e. Nomogram for the complex roots of the equation with two real roots (point 2b, 4d).

In this case, the real roots x_1, x_2 being determined from nomogram I, the real part x of the complex roots $x \pm i y$ is given by (10*a*), their imaginary part y by nomogram IV (fig. 7) derived from (10*b*).

f. Method for the determination of more accurate values (point 6).

To get more accurate values of the complex roots it is possible to apply the methods, which in general are used for the calculation of real roots, and to avoid calculations with complex numbers by using (5) and (7) or (10) instead of (12*b*).

g. Numerical examples (point 7).

Numerical examples are given for the different cases. Table II contains a comparison between the four real roots of equation (31) as they are determined from the nomogram and their values calculated by ordinary methods for this equation and the equations (33) (35), derived from it.

BERICHT A. 321.

Nomogramme zur Berechnung der Wurzeln von Gleichungen vierten Grades.

Zusammenfassung.

a. Einführung (Punkt 1, 2c, d).

Nomogramme zur Berechnung der reelen und komplexen Wurzeln der Gleichung (12*b*), in welcher der Koeffizient b_2 einen der Werte $\pm$ 1,0 hat, werden beschrieben. Wenn die Gleichung in der mehr allgemeinen Form (1) vorliegt, soll sie mittels der Substitutionen (11, 12) umgeformt werden. Fig. 2 gibt den allgemeinen Charakter der Lösungen für die Gleichung (12*b*) in Abhängigkeit von den Koeffizienten b_2, c_2, d_2 an (I: vier reele Wurzeln; II: vier komplexe Wurzeln; III: zwei reele Wurzeln).

b. Allgemeine Grundlage bei der Konstruktion der Nomogramme (Punkt 3).

Bei dieser Konstruktion ist ein bekanntes Verfahren verwendet worden. Wenn die Beziehung (19) zwischen den drei Variablen r, s, t erfüllt werden soll, sind die Skalen des Nomogrammes von (20) gegeben (siehe auch Fig. 3).

c. Nomogramm für die reelen Wurzeln (Punkt 4b).

Nomogram I (Fig. 4) gibt die reelen Wurzeln. Für die positiven Wurzeln soll c_2 mit dem Vorzeichen aus der Gleichung angenommen werden, für die negativen dagegen mit entgegengesetztem Vorzeichen.

d. Nomogramme für die komplexe Wurzeln der Gleichung ohne reele Wurzeln (Punkt 2a, 4c).

Bei der Konstruktion dieser Nomogramme wurde die aus Gleichung (4) abgeleitete Gleichung (5) benutzt. Wenn (4) keine reele Wurzeln hat, bestehen die Beziehungen:

1°. die reele Wurzeln X von (5) sind den reelen Teilen x der Wurzeln $+ x \pm iy_1$, $- x \pm i y_2$ von (4) gleich;

2°. die imaginäre Teile y_1, y_2 der Wurzeln von (4) können aus den imaginären Wurzeln iY_1, iY_2 von (5) berechnet werden mittels:

$$c_2 > 0 : y_1 = Y_1 + Y_2 , y_2 = Y_1 - Y_2,$$
$$c_2 < 0 : y_1 = Y_1 - Y_2 , y_2 = Y_1 + Y_2.$$

Y_1 und Y_2 sind hier positiv anzunehmen, während Y_1 den grö̈szten Wert hat.

Die Nomogramme II und III (Fig. 5 und 6) geben die Werte von x und Y_1, Y_2.

e. Nomogramm für die komplexe Wurzeln der Gleichung mit zwei reelen Wurzeln (Punkt 2b, 4d).

In diesem Falle werden die reele Wurzeln x_1, x_2 aus Nomogramm I bestimmt. (10*a*) — gibt dann den reelen Teil x der komplexen Wurzeln $x \pm iy$, Nomogram IV (Fig. 7), das aus (10*b*) abgeleitet ist, den imaginären Teil y.

f. Verfahren zur Bestimmung von genaueren Werten (Punkt 6).

Zur weiteren Approximation der komplexen Wurzeln können besser (5) und (7) oder (10) statt (12*b*) benutzt werden, weil man dabei nur die bekannte Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von reelen Wurzeln braucht und keine Rechnungen mit komplexen Zahlen vorkommen.

g. Zahlenbeispiele (Punkt 7).

Zahlenbeispiele für die verschiedenen Fälle werden gegeben. Tafel II enthält zur Beurteilung der Genauigkeit der Nomogramme die Werte von den reelen Wurzeln der Gleichung (31) wie sie aus diesen bestimmt und wie sie aus der Gleichung (31) und den beiden reduzierten Gleichungen (33) (35) berechnet sind.

Nomogrammen voor het bepalen van de wortels van vierde-graads-vergelijkingen

door

ir. C. KONING.

Rapport A. 321. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

In het volgende worden nomogrammen besproken voor het bepalen van benaderingswaarden voor de reëele en complexe wortels van vierde-graads-vergelijkingen.

1. Inleiding.

Zooals bekend is spelen bij de bestudeering van de trillingen, die systemen met twee graden van vrijheid kunnen uitvoeren, vierde-graads-vergelijkingen een belangrijke rol. Het bepalen of benaderen van de wortels van deze vergelijkingen met behulp van de hiervoor gebruikelijke methoden is echter zeer tijdroovend, vooral wanneer deze wortels, zooals juist bij de bovengenoemde problemen meestal het geval zal zijn, complexe waarden hebben. Nomogrammen werden daarom ontworpen om benaderingswaarden voor de wortels te bepalen. De voor de opstelling van deze nomogrammen benoodigde hulpvergelijkingen bleken tevens een zeer geschikt middel te bieden om de verkregen waarden voor de complexe wortels desgewenscht te verfijnen.

Voordat overgegaan kan worden tot de beschrijving van de nomogrammen, moeten echter eenige algemeene eigenschappen en omvormingen van de vergelijkingen besproken worden, terwijl ook het algemeene beginsel, waarop de constructie van nomogrammen als de hier beschouwde berust, kort behandeld zal worden.

Om het gebruik van de nomogrammen zonder voorafgaande bestudeering van hetgeen hier over de constructie ervan besproken wordt mogelijk te maken, zijn in punt 5 resp. 7 een „gebruiksaanwijzing" en eenige uitgewerkte voorbeelden gegeven. Van deze laatste zal dan tevens gebruik gemaakt worden om een indruk te geven van de te verwachten nauwkeurigheid.

2. Eenige voorbereidende beschouwingen over vierde-graads-vergelijkingen.

a. De Z-vergelijking.

Wanneer een willekeurige vierde-graads-vergelijking in z met reëele coëfficiënten

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \tag{1}$$

die verder kortheidshalve aangeduid zal worden als de „z-vergelijking", gegeven is, dan kan men uit deze, zonder haar op te lossen, een andere afleiden, waarvan de wortels gelijk zijn aan de helft van de sommen van de, twee aan twee genomen, wortels van vergelijking (1).

Deze vergelijking, die voor het volgende van groot belang zal blijken te zijn, zal in het vervolg de aan vergelijking (1) toegevoegde „Z-vergelijking" genoemd worden. Zet men de wortels van de beide vergelijkingen in het complexe getallenvlak uit, dan liggen die van de Z-vergelijking, zooals in fig. 1a aangegeven is, midden tusschen die van de z-vergelijking in.

De Z-vergelijking kan als volgt afgeleid worden: een willekeurig paar wortels van de z-vergelijking kan voorgesteld worden door

$$z = Z \pm \zeta \tag{2}$$

Bij invoering hiervan in vergelijking (1) valt deze uiteen in de twee afzonderlijke vergelijkingen in Z en ζ:

$$\zeta^4 + (6Z^2 + 3aZ + b)\,\zeta^2 + (Z^4 + aZ^3 + bZ^2 + cZ + d) = 0$$
$$(4Z + a)\,\zeta^3 + (4Z^3 + 3aZ^2 + 2bZ + c)\,\zeta = 0,$$

waaruit door eliminatie van ζ de Z-vergelijking verkregen wordt:

$$Z^6 + AZ^5 + BZ^4 + CZ^3 + DZ^2 + EZ + F = 0 \tag{3}$$

met

$$A = +\tfrac{3}{2}a$$

$$B = +\tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}b$$

$$C = +\tfrac{1}{8}a^3 + \tfrac{1}{2}ab$$

$$D = +\tfrac{1}{8}a^2b + \tfrac{1}{16}ac + \tfrac{1}{16}b^2 - \tfrac{1}{4}d$$

$$E = +\tfrac{1}{32}a^2c + \tfrac{1}{32}ab^2 - \tfrac{1}{8}ad$$

$$F = +\tfrac{1}{64}abc - \tfrac{1}{64}a^2d - \tfrac{1}{64}c^2$$

Heeft nu de z-vergelijking een stel complexe wortels:

$$z = x \pm i\,y$$

dan zal, zooals uit (2) en ook uit fig. 1a onmiddellijk blijkt, de Z-vergelijking een reëelen wortel x hebben. Met andere woorden: de reëele deelen van complexe wortels van de z-vergelijking komen voor onder de reëele wortels van de Z-vergelijking.

Is in de z-vergelijking de coëfficiënt a van den tweeden term nul, heeft dus deze vergelijking den specialen vorm:

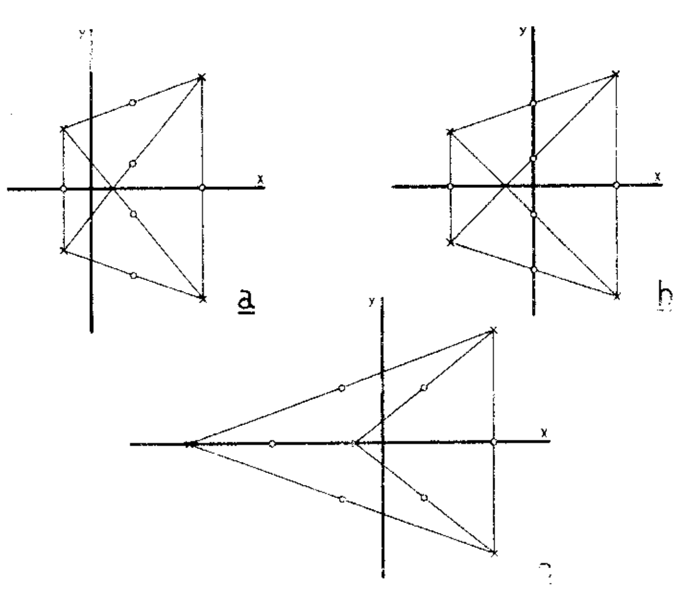
$$z^4 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{4}$$

dan wordt de Z-vergelijking:

$$Z^6 + \tfrac{1}{2}bZ^4 + \left(\tfrac{1}{16}b^2 - \tfrac{1}{4}d\right)Z^2 - \tfrac{1}{64}c^2 = 0 \tag{5}$$

Wordt hierin Z^2 vervangen door Z_1, dan komt zij in dit geval overeen met de bij de rechtstreeksche oplossing van vierde-graads-vergelijkingen voorkomende zoogenaamde gereduceerde vergelijking. Naast het boven reeds besproken verband tusschen de reëele deelen van de wortels van de z-vergelijking en de reëele wortels van de

WORTELS IN HET COMPLEXE GETALLENVLAK.



× Wortels van de z-vergelijking.
O Wortels van de Z-vergelijking.

a. Willekeurige z-vergelijking met vier complexe wortels.
b. z-vergelijking met vier complexe wortels en $a = o$.
c. z-vergelijking met twee reëele, twee complexe wortels en $a = o$.

Fig. 1.

Z-vergelijking, geldt hier, indien de z-vergelijking 4 complexe wortels heeft, nog een andere belangrijke eigenschap. Uit het feit, dat $a=0$ is, volgt namelijk, dat de som van alle wortels van de z-vergelijking nul is, zoodat deze moeten zijn:

$$z = +x \pm iy_1 \qquad z = -x \pm iy_2 \tag{6}$$

Uit de definitie van de Z-vergelijking volgt nu, zoowel ook uit fig. 1*b* blijkt, dat de wortels van deze nu zullen zijn:

$$Z = \pm x, \ \pm \frac{i}{2}(y_1 + y_2), \ \pm \frac{i}{2}(y_1 - y_2)$$

De Z-vergelijking heeft hier dus, naast twee reëele, twee stellen zuiver imaginaire wortels $\pm iY_1$, $\pm iY_2$. De waarden van Y_1 en Y_2 kunnen het eenvoudigste bepaald worden als reëele wortels van de vergelijking:

$$Y^6 - \tfrac{1}{2} bY^4 + (\tfrac{1}{16} b^2 - \tfrac{1}{4} d)\, Y^2 + \tfrac{1}{64} c^2 = 0 \tag{7}$$

die uit vergelijking (5) ontstaat door de wortels met i te vermenigvuldigen.

Zijn Y_1 en Y_2 bekend, dan kunnen op grond van het bovenstaande y_1 en y_2 hieruit afgeleid worden. Hierbij dienen echter eenige voorzorgen in acht genomen te worden om tot de juiste teekens te komen. Aannemende, dat Y_1 de grootste en Y_2 de kleinste positieve reëele wortel van vergelijking (7) is en dat y_1 en y_2 de in (6) gegeven beteekenis hebben, waarbij x een positief getal is, dan kan aangetoond worden, dat:

$$\left.\begin{array}{lll} y_1 = Y_1 + Y_2 & y_2 = Y_1 - Y_2 & \text{voor } c > 0 \\ y_1 = Y_1 - Y_2 & y_2 = Y_1 + Y_2 & \text{voor } c < 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Hierbij is c de in vergelijking (4) als zoodanig aangegeven coëfficiënt.

b. De vergelijking met één stel complexe wortels.

De in het vorige punt besproken methode om met behulp van de Z-vergelijking de complexe wortels te bepalen, kan alleen gebruikt worden, indien de vergelijking geen reëele wortels heeft. Hebben slechts twee der wortels een complexe waarde, dan heeft namelijk, zooals uit fig. 1*c* blijkt, de Z-vergelijking geen zuiver imaginaire wortels.

Voor dit geval kunnen echter eenvoudige betrekkingen afgeleid worden, waardoor het mogelijk is de complexe wortels te berekenen, wanneer de reëele bekend zijn.

Heeft de vergelijking

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

de reëele wortels

$$z_1 = +x_1 \qquad z_2 = +x_2$$

en de complexe

$$z_{3,4} = +x_3 \pm iy,$$

dan bestaan tusschen deze en de beide eerste coëfficiënten van de vergelijking de betrekkingen:

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = -(x_1 + x_2 + 2x_3)$$

$$b = +(z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_3z_4) = x_1x_2 + 2x_3(x_1 + x_2) + x_3^2 + y^2$$

Opgelost naar x_3 en y^2 geeft dit na eenige omvorming:

$$x_3 = -\tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \tag{9a}$$

$$y^2 = b - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}a\,(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 \tag{9b}$$

Ontbreekt de tweede term van de vergelijking, m.a.w. is $a = 0$, dan gaan deze uitkomsten over in

$$x_3 = -\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \tag{10a}$$

$$y^2 = b + \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 \tag{10b}$$

c. Reductie van de vergelijking.

In de z-vergelijking in haar oorspronkelijken vorm (1) komen vier coëfficiënten voor, die een willekeurige waarde kunnen hebben. Voor het opstellen van de nomogrammen is het echter gewenscht, dit aantal tot twee terug te brengen.

In de eerste plaats wordt hiertoe de tweede term verdreven met behulp van de substitutie

$$z = z_1 - \frac{a}{4} \tag{11a}$$

waardoor de vergelijking overgaat in

$$z_1^4 + b_1 z_1^2 + c_1 z_1 + d_1 = 0 \tag{11b}$$

De hierin voorkomende coëfficiënten kunnen het eenvoudigste bepaald worden met behulp van de bekende methode van HORNER [1]). Een getallenvoorbeeld voor deze berekening is in punt 7*b* gegeven.

Als volgende stap wordt ingevoerd:

$$z_1 = \sqrt{|\,b_1\,|}\; z_2 \tag{12a}$$

De vergelijking wordt nu:

$$z_2^4 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 = 0 \tag{12b}$$

waarin:

$$b_2 = \frac{b_1}{|\,b_1\,|} \qquad c_2 = \frac{c_1}{|\,b_1\,|^{3/2}} \qquad d_2 = \frac{d_1}{|\,b_1\,|^2}$$

In vergelijking (12*b*) heeft dus b_2 de waarde $+1$ of -1, zoodat aan den bovengestelden eisch voldaan is, dat slechts twee willekeurige coëfficiënten, te weten c_2 en d_2, voorkomen. De op deze wijze verkregen vergelijking zal de „gereduceerde vergelijking" genoemd worden. Het geval kan zich voordoen, dat in vergelijking (11*b*) de coëfficiënt b_1 nul is; een verdere reductie is dan overbodig. In het volgende zal dus rekening gehouden moeten worden met drie mogelijke waarden van b_2.

d. De aard van de wortels in afhankelijkheid van de coëfficiënten c_2 en d_2.

Worden de wortels van een vergelijking bepaald met behulp van de nomogrammen, dan blijkt hierbij vanzelf of, en zoo ja hoeveel, reëele wortels zij heeft. Het kan echter gewenscht zijn, dit reeds van te voren te overzien. Voor de gereduceerde vergelijking (12*b*) wordt, bij gegeven waarde van b_2, de aard van de wortels geheel bepaald door de coëfficiënten c_2 en d_2. Worden deze coëfficiënten opgevat als de rechthoekige coördinaten van een punt in het „c_2d_2-vlak", dan zal ieder punt van dit vlak een bepaalde vergelijking vertegenwoordigen. Alle vergelijkingen, die b.v. 4 reëele wortels hebben, nemen dan een gebied van dit vlak in. De gebieden met verschillend aantal reëele wortels worden hierbij gescheiden door de „krommen voor tweevoudige wortels", die bestaan uit die punten c_2/d_2, waarvoor de vergelijking tweevoudige wortels heeft.

Nu zal een wortel z van de vergelijking

$$f(z) = z^4 + b_2 z^2 + c_2 z + d_2 = 0$$

slechts dan tweevoudig zijn, indien zij ook een wortel is van

$$f_2'(z) = 4z^3 + 2b_2 z + c_2 = 0$$

Eliminatie van z uit deze twee vergelijkingen zou dus de betrekking opleveren, die hier tusschen c_2 en d_2 moet bestaan, m.a.w. de vergelijking van de „kromme voor tweevoudige wortels" in het c_2d_2-vlak. Deze kromme kan echter eenvoudiger bepaald worden door z als parameter te beschouwen en de kromme punt voor punt te berekenen met behulp van de betrekkingen

$$c_2(z) = -4z^3 - 2b_2z$$

$$d_2(z) = +3z^4 + b_2z^2,$$

die onmiddellijk uit het bovenstaande volgen.

In fig. 2 is nu de op deze wijze bepaalde verdeeling van het c_2d_2-vlak in gebieden met gelijk aantal reëele wortels gegeven voor de drie hier te gebruiken waarden van b_2, waarbij tevens eenige verdere bijzondere punten aangegeven zijn. De uiterste waarden voor c_2 en d_2 zijn hier dezelfde als in de nomogrammen.

e. De oplossing van derde-graads-vergelijkingen.

De nomogrammen kunnen ook gebruikt worden voor het bepalen van de wortels van derde-graads-vergelijkingen. Immers gaat een dergelijke vergelijking

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

door vermenigvuldiging met z over in de vierde-graads-vergelijking:

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz = 0,$$

die verder op de gewone wijze behandeld kan worden. Hierbij dient er op gelet te worden, dat door deze vermenigvuldiging een wortel $z = 0$ ingevoerd wordt.

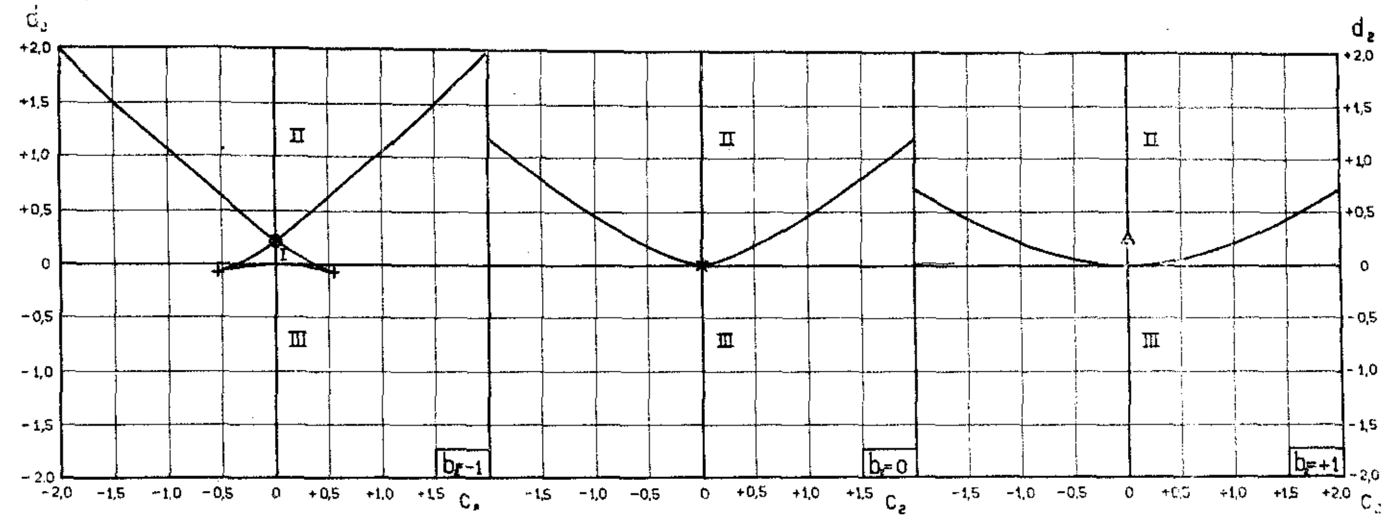
3. Beginsel, waarop de constructie van de nomogrammen berust.

Hoewel in de literatuur over nomografie [2]) de wijze, waarop nomogrammen als de hier beschrevene ontworpen

[1]) Zie literatuur 6, 7, 8.

[2]) Zie literatuur 9, 10.

AARD VAN DE WORTELS VAN DE GEREDUCEERDE VERGELIJKING: $z^4 + b_2z^2 + c_2z + d_2 = 0$



I: vier reëele wortels. II: vier complexe wortels. III: twee reëele, twee complexe wortels. +: drievoudige reëele wortel. ×: viervoudige reëele wortel. O: twee reëele tweevoudige wortels. △: twee complexe tweevoudige wortels.

Fig. 2.

NOMOGRAM VOOR DE BETREKKING.
$u(\delta - \xi) + v(\delta + \xi) = 2\,\delta\,\eta.$

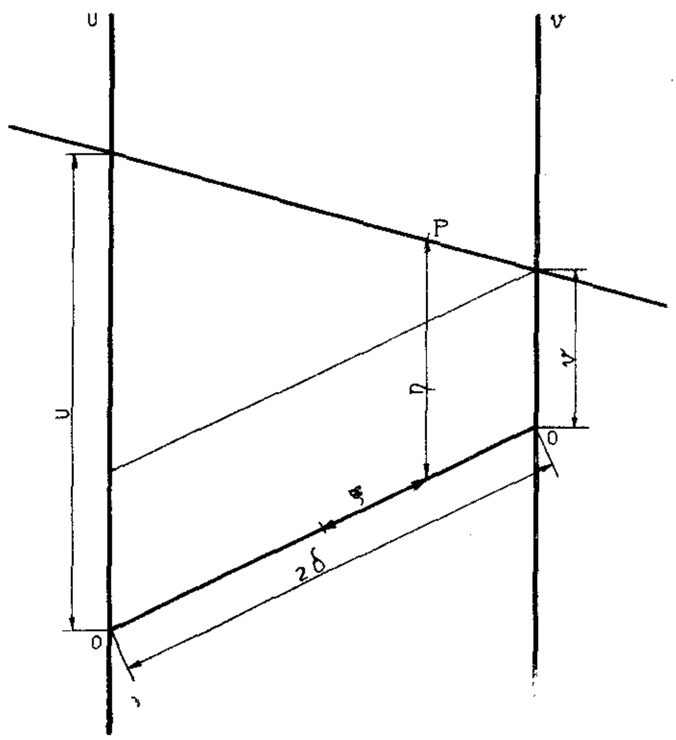


Fig. 3.

worden, uitvoerig besproken wordt, lijkt het toch gewenscht, als inleiding, een korte uiteenzetting van de grondgedachte te geven.

Op twee evenwijdige lijnen, de „u- en v-as" (fig. 3), worden willekeurige nulpunten aangenomen. De verbindingslijn van deze nulpunten, de „nullijn", moge de lengte 2δ hebben. De ligging van het punt P is, zooals fig. 3 aangeeft, ten opzichte van het midden van de nullijn gegeven door de scheefhoekige coördinaten ξ en η. Tusschen de stukken u en v, die door een willekeurige rechte door het punt P van de u- en v-as afgesneden worden, bestaat dan, zooals onmiddellijk uit de figuur afgelezen kan worden, de betrekking:

$$(\eta - v) : (u - v) = (\delta - \xi) : 2\delta$$

of

$$u\,(\delta - \xi) + v\,(\delta + \xi) = 2\delta\eta$$

Een gegeven punt P legt dus een lineair verband tusschen u en v vast.

Men kan zich nu omgekeerd de vraag voorleggen, hoe het punt P gekozen moet worden, opdat dit verband gegeven zij door:

$$au + bv + c = 0 \qquad (13)$$

waarin a, b en c gegeven constanten zijn.

Een eenvoudige berekening leert, dat dit het geval zal zijn, indien P gegeven is door de coördinaten:

$$\xi = \delta\,\frac{b-a}{b+a} \qquad \eta = \frac{-c}{b+a} \qquad (14)$$

Hiermede is dan een nomogram voor de door (13) gegeven betrekking tusschen u en v verkregen. Haar groote practische beteekenis krijgt de hier uiteengezette methode echter eerst door twee uitbreidingen.

Worden de grootheden a, b en c niet als constanten, doch als functies van één variabele beschouwd, zoodat (13) dus den vorm

$$u\,f_1(t) + v\,g_1(t) + h_1(t) = 0 \qquad (15)$$

aanneemt, dan behoort bij iedere waarde van t één punt P (t), dat voor die waarde van t als boven besproken de betrekking tusschen u en v geeft. Alle waarden van t tezamen geven nu een kromme, waarvoor bij ieder punt een bepaalde waarde van t behoort, dus een „t-schaal". De punten van deze t-schaal zijn, zooals uit (14) volgt, gegeven door:

$$\xi\,(t) = \delta\,\frac{g_1(t) - f_1(t)}{g_1(t) + f_1(t)} \qquad \eta\,(t) = \frac{-h_1(t)}{g_1(t) + f_1(t)} \qquad (16)$$

Op deze wijze verkrijgt men dus een nomogram, dat de door (15) uitgedrukte betrekking tusschen de drie variabelen u, v en t geeft.

Tot nu toe beteekenden u en v niet anders dan de lengten van de van de u- en v-as afgesneden stukken. Men kan hen echter nog een meer algemeene beteekenis toekennen. Voert men namelijk in

$$u = \mu_1\,F(r) \qquad (17a)$$

waarin μ_1 een lengteschaal en $F(r)$ een gegeven functie van de nieuwe variabele r is, dan vertegenwoordigt ieder punt u dus een bepaalde waarde van r. Wordt nu nog op analoge wijze ingevoerd:

$$v = \mu_2\,G(s) \qquad (17b)$$

dan gaat (15) over in:

$$\mu_1\,F(r)\;f_1(t) + \mu_2\;G(s)\;g_1(t) + h_1(t) = 0$$

Nadat nog geschreven is:

$$f(t) = \mu_1 f_1(t) \quad g(t) = \mu_2 g_1(t) \quad h(t) = h_1(t) \qquad (18)$$

is hiermede de meest algemeene vorm verkregen van de betrekking tusschen de drie variabelen r, s en t, die in een nomogram van het hier beschouwde type omgezet kan worden:

$$F(r)\;f(t) + G(s)\;g(t) + h(t) = 0 \qquad (19)$$

De schalen op de u- en v-as en de punten van de t-schaal zijn dan, zooals uit (17), (18) en (16) volgt, gegeven door

$$\left.\begin{array}{ll} u = \mu_1 F(r) & (a) \\ v = \mu_2 G(s) & (b) \\ \xi(t) = \delta \dfrac{\mu_1 g(t) - \mu_2 f(t)}{\mu_1 g(t) + \mu_2 f(t)} & (c) \\ \eta(t) = -\dfrac{\mu_1 \mu_2 h(t)}{\mu_1 g(t) + \mu_2 f(t)} & (d) \end{array}\right\} \quad (20)$$

De hierin voorkomende constanten μ_1, μ_2 en δ, die bepaalde positieve lengten voorstellen, zijn willekeurig. Hun waarden werden op grond van overwegingen betreffende de practische bruikbaarheid van het nomogram vastgesteld.

4. Bespreking van de nomogrammen.

a. Algemeen.

In het onderstaande worden achtereenvolgens de nomogrammen besproken, die dienen ter bepaling van de reëele wortels, van de complexe van de vergelijking zonder reëele wortels en die van de vergelijking met twee reëele wortels. Hierbij worden de algemeene formules voor de berekening van de schalen van deze nomogrammen afgeleid, waarbij voor de constanten μ_1, μ_2 en δ geen getallenwaarden of andere aannamen ingevoerd worden. Deze uitkomsten zijn daardoor bruikbaar voor de constructie van nomogrammen voor willekeurige intervallen van c_2 en d_2.

Voor practisch gebruik werden met behulp van de gegeven formules de in de fig. 4 t/m 7 gegeven nomogrammen berekend, waarbij als uiterste waarden voor c_2 en d_2 $\pm$ 2 aangenomen werd. De hierbij voor de oorspronkelijke nomogrammen gebruikte waarden van de constanten zijn in punt 4e gegeven.

b. Het nomogram voor de reëele wortels. (Nomogram I, fig. 4).

De gereduceerde vergelijking (12*b*):

$$z_2^4 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 = 0$$

kan in den met (19) analogen vorm

$$F(c_2) f(z_2) + G(d_2) g(z_2) + h(z_2) = 0 \quad (21)$$

geschreven worden, waarin dan:

$$F(c_2) = +c_2 \qquad G(d_2) = +d_2$$

$$f(z_2) = +z_2 \qquad g(z_2) = +1 \qquad h(z_2) = z_2^4 + b_2 z_2^2$$

De c_2- en d_2-schalen, resp. op de u- en v-as, zijn dus, volgens de in punt 3 gegeven formules (20*a*, *b*):

$$u = +\mu_1 c_2 \qquad v = +\mu_2 d_2 \quad (22a, b)$$

terwijl de z-schaal, volgens (20*c*, *d*) bepaald is door:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi(z_2) = \delta \dfrac{\mu_1 - \mu_2 z_2}{\mu_1 + \mu_2 z_2} & (c) \\ \eta(z_2) = -\dfrac{\mu_1 \mu_2 (z_2^4 + b_2 z_2^2)}{\mu_1 + \mu_2 z_2} & (d) \end{array}\right\} \quad (22)$$

Voor iedere waarde van b_2 wordt dus een afzonderlijke z-schaal verkregen.

Uit (22*c*) blijkt, dat voor alle positieve waarden van z_2 ξ een waarde tusschen $-\delta$ en $+\delta$ heeft, en dus het bijbehoorende deel van de z_2-schaal tusschen u- en v-as ligt. Voor negatieve waarden van z_2 daarentegen wordt ξ grooter dan $+\delta$, zoodat de schaal buiten het genoemde gebied valt, hetgeen voor practisch gebruik ongewenscht is.

Door een kleinen kunstgreep kan echter aan dit bezwaar tegemoet gekomen worden. Wordt namelijk in de vergelijking (12*b*) het teeken van den coëfficiënt c_2 omgekeerd, dan blijft de absolute waarde van de wortels onveranderd, terwijl hun teeken wisselt. Door in het nomogram c_2 met het omgekeerde teeken te nemen, vindt men dus de negatieve reëele wortels van de vergelijking eveneens als snijpunt met het deel van de z-schaal, dat tusschen de assen gelegen is.

c. De nomogrammen voor de vergelijking met 4 complexe wortels. (Nomogram II, III; fig. 5, 6).

Uit het in punt 2a besprokene volgt, dat, indien de gereduceerde vergelijking (12b) alleen complexe wortels heeft, de reëele deelen $\pm x$ van deze de eenige reëele wortels zijn van de toegevoegde Z-vergelijking (zie ook fig. 1*b*). Een uitzondering hierop komt voor, indien $c_2 = 0$ is. In dit geval heeft de Z-vergelijking ook nog een wortel $Z = 0$, die hier echter, zoolang er nog andere reëele wortels zijn, geen rol speelt. De vergelijking voor x volgt zoodoende onmiddellijk uit (5) als

$$x^6 + \tfrac{1}{2} b_2 x^4 + (\tfrac{1}{16} b_2^2 - \tfrac{1}{4} d_2) x^2 - \tfrac{1}{64} c_2^2 = 0 \quad (23)$$

Voor de constructie van het nomogram voor x kan deze geschreven worden als

$$F(c_2) f(x) + G(d_2) g(x) + h(x) = 0$$

met

$$F(c_2) = +c_2^2 \qquad G(d_2) = d_2$$

$$f(x) = +\tfrac{1}{64} \qquad g(x) = +\tfrac{1}{4} x^2$$

$$h(x) = -x^6 - \tfrac{1}{2} b_2 x^4 - \tfrac{1}{16} b_2^2 x^2$$

zoodat hier, overeenkomstig (20*a* t/m *d*) de schalen gegeven zijn door

$$\left.\begin{array}{ll} u = +\mu_1 c_2^2 \qquad v = +\mu_2 d_2 & (a,\ b) \\ \xi(x) = \delta \dfrac{16\mu_1 x^2 - \mu_2}{16\mu_1 x^2 + \mu_2} & (c) \\ \eta(x) = +\dfrac{64\mu_1 \mu_2 (x^6 + \frac{1}{2} b_2 x^4 + \frac{1}{16} b_2^2 x^2)}{16\mu_1 x^2 + \mu_2} & (d) \end{array}\right\} \quad (24)$$

Zooals eveneens in punt 2*a* besproken werd, kan het imaginaire deel van de wortels van de hier beschouwde vergelijking bepaald worden met behulp van de reëele wortels Y van de vergelijking

$$Y^6 - \tfrac{1}{2} b_2 Y^4 + (\tfrac{1}{16} b_2^2 - \tfrac{1}{4} d_2) Y^2 + \tfrac{1}{64} c_2^2 = 0 \quad (25)$$

waarvoor op geheel dezelfde wijze, als boven besproken werd, een nomogram geconstrueerd kan worden. De schalen hiervoor worden

$$\left.\begin{array}{ll} u = +\mu_1 c_2^2 \qquad v = -\mu_2 d_2 & (a,\ b) \\ \xi(Y) = \delta \dfrac{16\mu_1 Y^2 - \mu_2}{16\mu_1 Y^2 + \mu_2} & (c) \\ \eta(Y) = -\dfrac{64\mu_1\mu_2 (Y^6 - \frac{1}{2} b_2 Y^4 + \frac{1}{16} b_2^2 Y^2)}{16\mu_1 Y^2 + \mu_2} & (d) \end{array}\right\} \quad (26)$$

Zooals uit vergelijking met (24*a* t/m *d*) blijkt, kunnen de schalen hier op zeer eenvoudige wijze uit die van het vorige nomogram afgeleid worden.

Uit de eigenschap, dat de bekende term van een vierdegraads-vergelijking gelijk is aan het product van de vier wortels, volgt onmiddellijk, dat vier complexe wortels alleen voor kunnen komen bij positieve waarde van d_2 (zie ook fig. 2). In de nomogrammen II en III werd daarom de d_2-schaal beperkt tot positieve waarden.

d. Het nomogram voor de complexe wortels van de vergelijking met twee reëele wortels. (Nomogram IV, fig. 7).

De beide reëele wortels x_1 en x_2 van de gereduceerde vergelijking (12*b*) worden in dit geval bepaald met behulp van nomogram I. Hieruit volgt dan (zie punt 2*b*) de waarde van het reëele deel der complexe wortels

$$x = -\frac{x_1 + x_2}{2}$$

terwijl voor het imaginaire deel de betrekking

$$y^2 = b_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 \quad (27)$$

geldt.

Deze kan nu weer in een nomogram verwerkt worden door haar te schrijven in den met (19) analogen vorm:

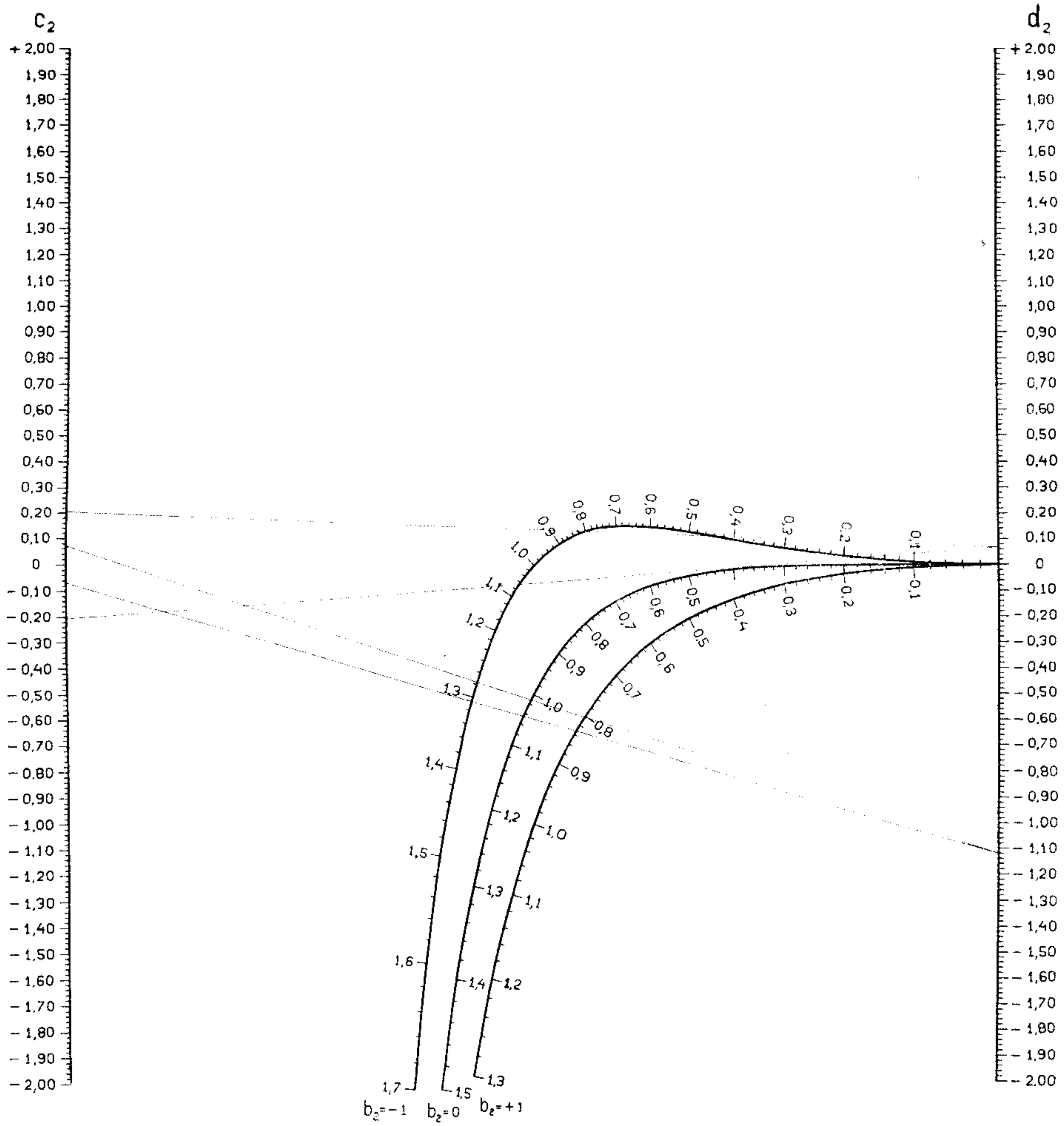
$$F(x_1 + x_2)\ f(y) + G(x_1 - x_2)\ g(y) + h(y) = 0$$

met

$$F(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 \qquad G(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

$$f(y) = +\tfrac{1}{2} \qquad g(y) = +\tfrac{1}{4} \qquad h(y) = b_2 - y^2$$

NOMOGRAM I.



Reëele wortels z_2 van de vergelijking: $z_2^4 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 = o$.
Positieve wortels: c_2 met zelfde teeken als in vergelijking.
Negatieve wortels: c_2 met tegengesteld teeken als in vergelijking.
Fig. 4.

De schalen van het nomogram zijn dus volgens (20*a* t/m *d*):

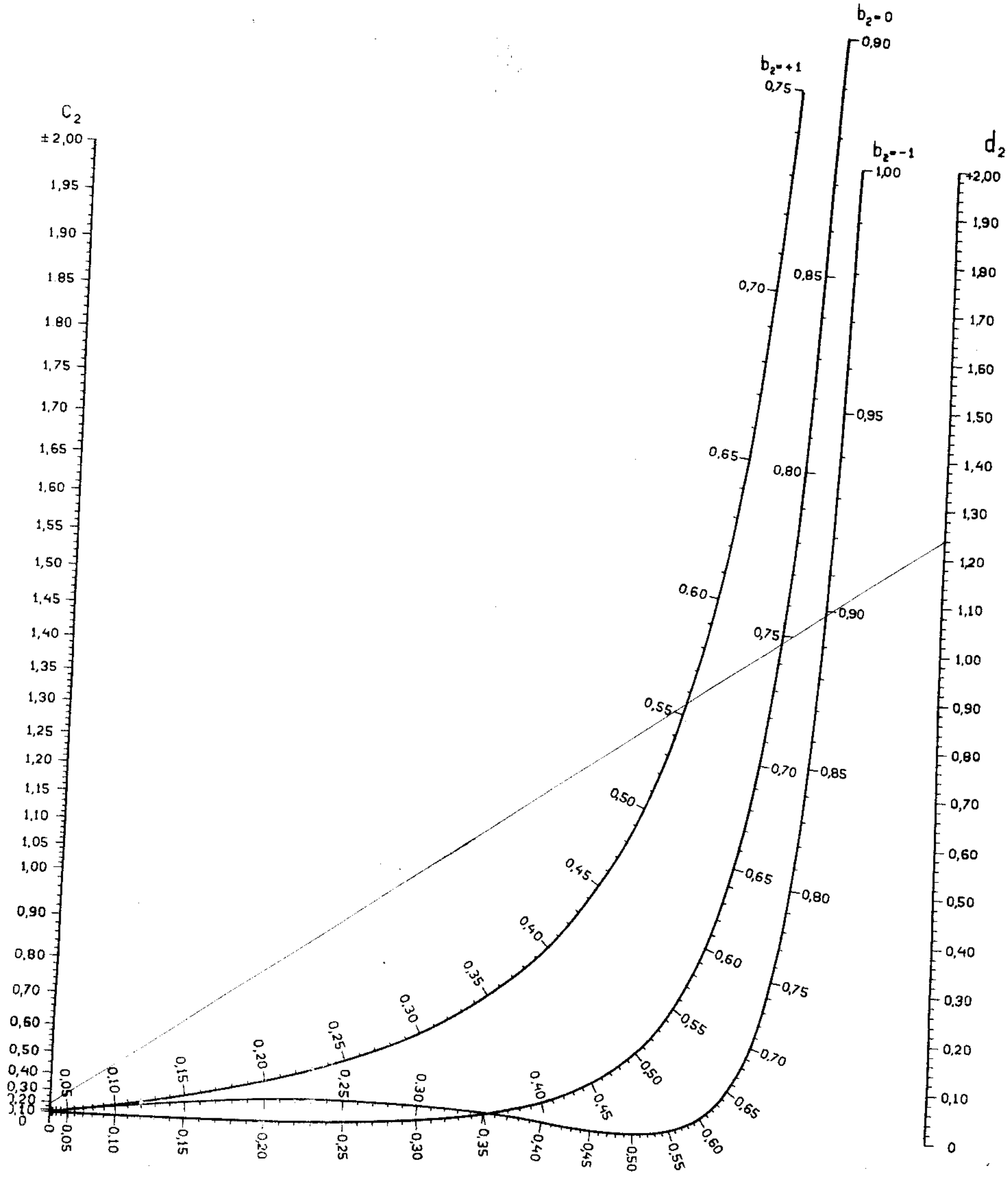
$$\left.\begin{aligned} u &= \mu_1 (x_1 + x_2)^2 && (a) \\ v &= \mu_2 (x_1 - x_2)^2 && (b) \\ \xi(y) &= \delta \frac{\mu_1 - 2\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} && (c) \\ \eta(y) &= + \frac{4\mu_1 \mu_2 (y^2 - b_2)}{\mu_1 + 2\mu_2} && (d) \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Uit (28*c*) blijkt, dat ξ hier onafhankelijk van y, de y-schaal dus een rechte evenwijdig aan de u- en v-as is. Daar ξ bovendien onafhankelijk is van b_2, zouden hier de y-schalen voor verschillende waarden van dezen coëfficiënt op elkaar komen te vallen. Dit bezwaar werd in nomogram IV ondervangen door voor iedere waarde van b_2 een verschillende waarde van δ te kiezen.

e. Getallenwaarden voor μ_1, μ_2 en δ.

De waarden van deze grootheden, zooals zij voor de oorspronkelijke nomogrammen gebruikt werden, zijn in Tabel I (blz. A. 402) gegeven. Bij het teekenen van de nomogrammen is het, indien de nullijn niet loodrecht staat op de u- en v-as, eenvoudiger om, inplaats van met de lengte 2δ van de nullijn, met den loodrechten afstand $2\delta_1$ van deze assen te werken. In overeenstemming hiermede wordt dan niet ξ, doch de „horizontale projectie” ξ_1 van deze coördinaat berekend. η behoudt echter hierbij haar in punt 3 gegeven beteekenis.

NOMOGRAM II.



Reëel deel x van de complexe wortels $z_2 = \left\{ \begin{matrix} + x \pm iy_1 \\ - x \pm iy_2 \end{matrix} \right\}$ van de vergelijking: $z_2^4 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 = 0$. met *vier complexe* wortels.

Fig. 5.

5. Gebruiksaanwijzing voor de nomogrammen.

a. Reduceer de gegeven vergelijking

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \qquad (29)$$

op de in punt 2*c* aangegeven wijze (voor voorbeeld zie punt 7*b*) tot de vergelijking

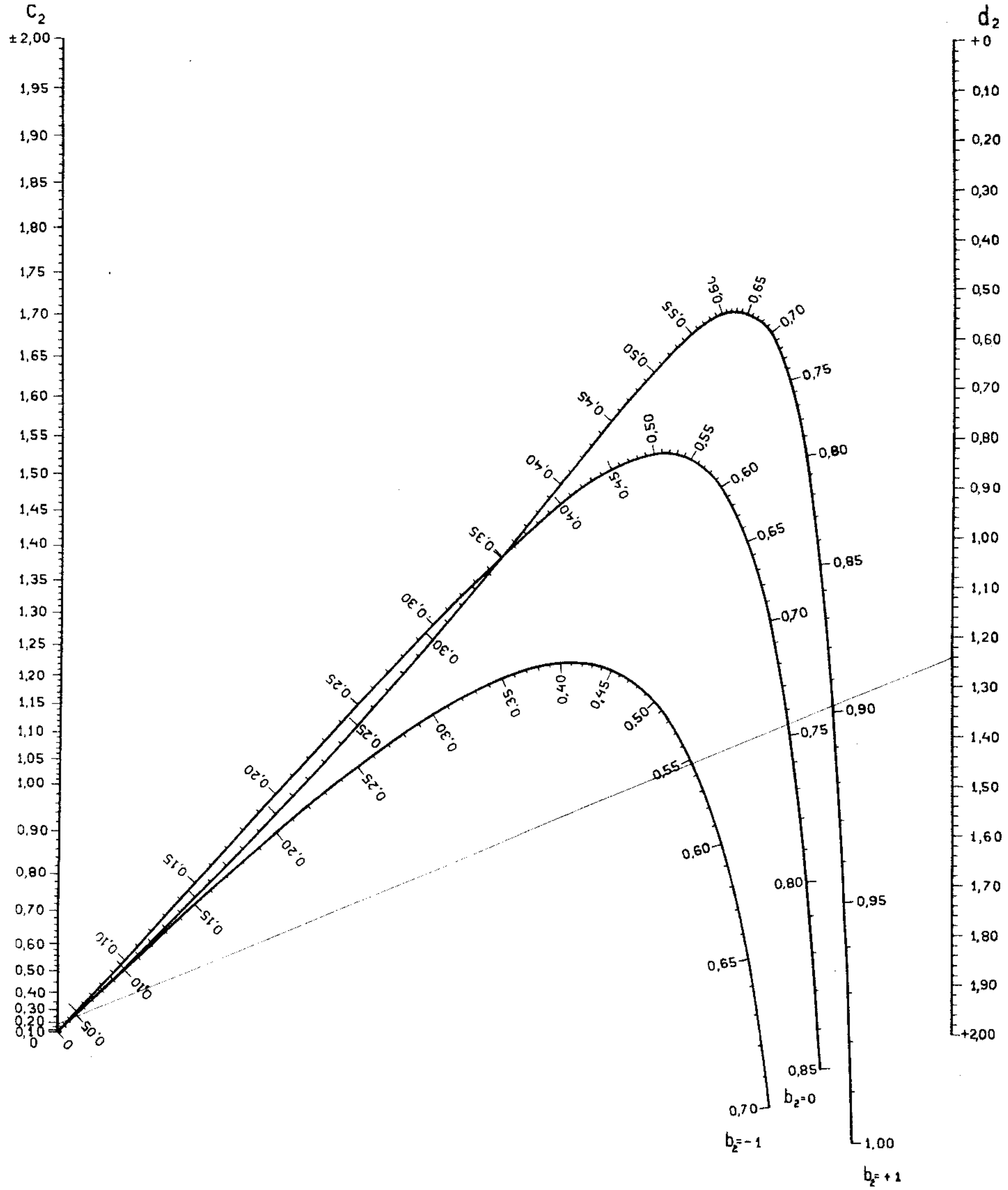
$$z_2^4 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 = 0 \qquad (30)$$

waarin b_2 een van de waarden $\pm$ 1 of 0 heeft.

b. Bepaal *desgewenscht* den aard van de wortels van de vergelijking met behulp van fig. 2.

c. Bepaal de reëele wortels uit nomogram I (fig. 4). Voor de positieve wortels zijn hierbij c_2 en d_2 te gebruiken met het teeken, waarmee zij in de vergelijking voorkomen, voor de negatieve wortels is daarentegen c_2

NOMOGRAM III.



Grootheden Y_1 en Y_2 voor de berekening van het imaginaire deel van de wortels $z_2 = \left\{ \begin{matrix} +x \pm iy_1 \\ -x \pm iy_2 \end{matrix} \right\}$ van de vergelijking: $z_2^4 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 = o$ met *vier complexe* wortels.
Voor de berekening van y_1 en y_2 hieruit zie punt 5*d*.
Fig. 6.

met het omgekeerde teeken te nemen (voor voorbeeld zie punt 7*b*).

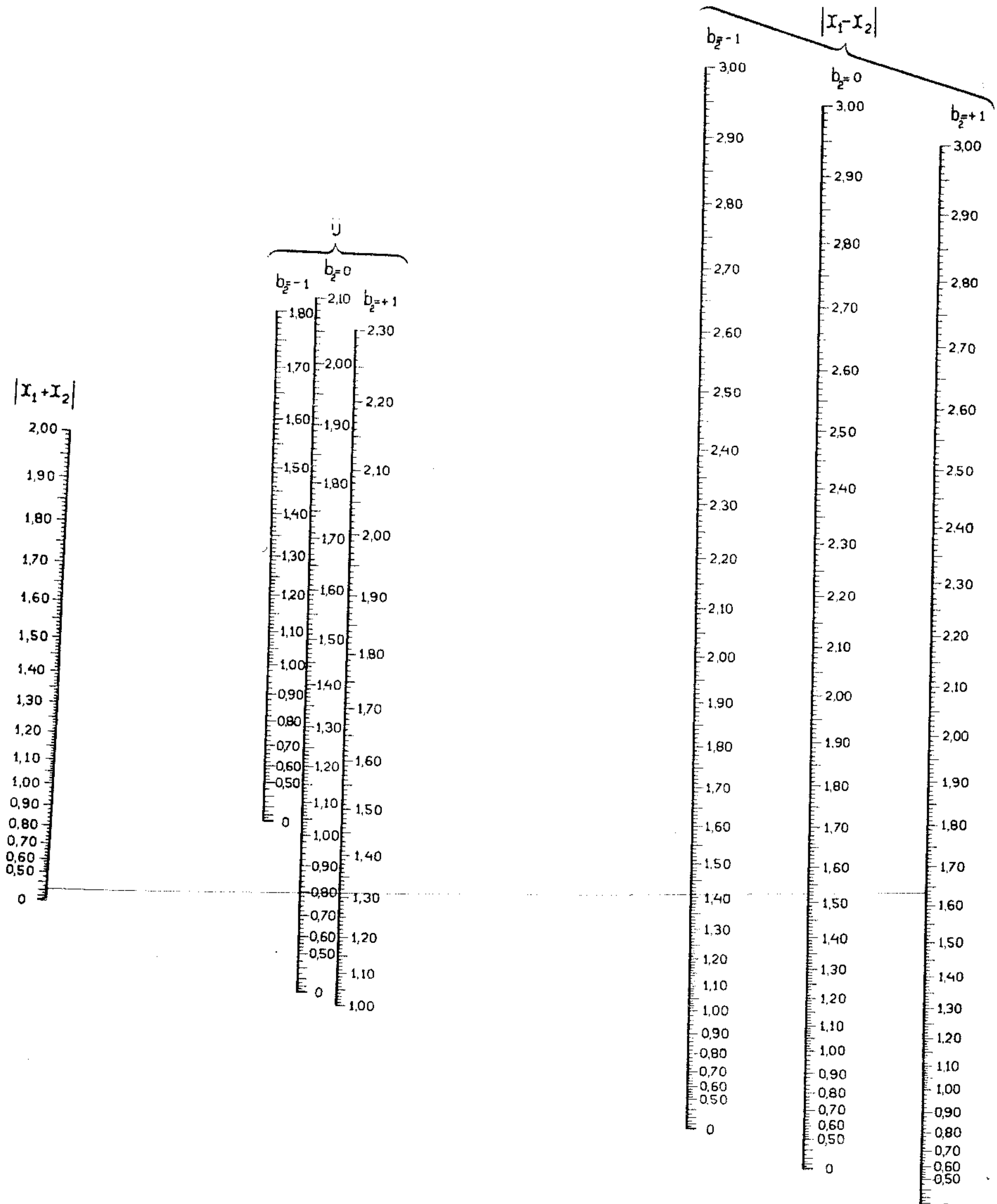
d. Heeft de vergelijking *geen reëele wortels*, bepaal dan x uit nomogram II (fig. 5) en Y_1 en Y_2 uit nomogram III (fig. 6). Deze drie grootheden zijn als positief te beschouwen, terwijl Y_1 de grootste der beide Y-waarden is. De complexe wortels zijn nu

$$z = +x \pm i\,(Y_1 + Y_2), \quad z = -x \pm i\,(Y_1 - Y_2) \quad \text{indien } c_2 > 0$$

$$z = +x \pm i\,(Y_1 - Y_2), \quad z = -x \pm i\,(Y_1 + Y_2) \quad \text{indien } c_2 < 0$$

(voor voorbeeld zie punt 7*c*).

NOMOGRAM IV.



Imaginair deel y van de complexe wortels $z_2 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \pm iy$ van de vergelijking: $z_2 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2 = 0$ met *twee complexe* wortels.
x_1 en x_2 zijn de met nomogram I bepaalde reëele wortels.
Fig. 7.

e. Heeft de vergelijking *twee reëele wortels* en zijn deze (bepaald als onder *c* is aangegeven) x_1 en x_2, dan wordt uit nomogram IV (fig. 7) het imaginaire deel y van de complexe wortels bepaald. Deze zijn dan

$$z = -\frac{x_1 + x_2}{2} \pm iy$$

(voor voorbeeld zie punt 7*d*).

f. De onder *c* t/m *e* aangegeven bewerkingen leveren de wortels van de vergelijking (30). Die van vergelijking (29) worden nu bepaald met behulp van de formules (12*a*) en (11*a*) (punt 2*c*) (voor voorbeeld zie punt 7*b*).

g. Zijn de verkregen benaderingswaarden voor de wortels

TABEL I.
Maten in cm.

NOMOGRAM	SCHALEN		HALVE ASAFSTAND δ_1			
	μ_1	μ_2	Alle waarden van b_2	$b_2 = -1$	$b_2 = 0$	$b_2 = +1$
I	5,0	5,0	9,0	—	—	—
II	5,0	10,0	9,0	—	—	—
III	5,0	10,0	9,0	—	—	—
IV	2,4	2,4	—	6,6	7,8	9,0

nog niet voldoende nauwkeurig, dan kunnen zij op de in punt 6 aangegeven wijze gebruikt worden als beginwaarden voor verdere benadering.

6. Het bepalen van nauwkeuriger waarden voor de wortels.

De nomogrammen leveren benaderingswaarden voor de wortels van de gereduceerde vergelijking. Voldoen deze nog niet aan de gestelde nauwkeurigheidseischen, dan kunnen zij als uitgangspunt voor verdere benadering gebruikt worden.

Voor de reëele wortels kan hierbij zonder meer gebruik gemaakt worden van bekende methoden [3]. Op grond van het in punt 2*a* en *b* besprokene kunnen deze echter ook voor verder benaderen van de complexe wortels gebezigd worden.

Voor de gereduceerde vergelijking met vier complexe wortels leveren immers de vergelijkingen (5) en (7) het reëele deel van de wortels, resp. de waarden van Y_1 en Y_2, waaruit volgens (8) het imaginaire deel van deze bepaald kan worden.

Heeft de gereduceerde vergelijking twee reëele wortels, dan moeten deze eerst tot den gewenschten graad van nauwkeurigheid bepaald worden, waarna met behulp van (10*a*, *b*) de complexe wortels berekend kunnen worden.

Daar de reductie van de vergelijking in 't algemeen eenige onnauwkeurigheid tengevolge zal hebben, kan het aanbeveling verdienen voor het hier bedoelde verfijnen van de wortels niet uit te gaan van de gereduceerde vergelijking (12*b*) doch van de vergelijking in haar oorspronkelijken vorm (1). Dit is, behoudens één uitzondering, toelaatbaar, mits inplaats van de vergelijkingen (5) en (10) de meer algemeene (3) en (9) gebruikt worden. Bedoelde uitzondering wordt gevormd door het imaginaire deel van de wortels voor een vergelijking met vier complexe wortels. Zooals uit het in punt 2*a* besprokene volgt kan vergelijking (7) namelijk alleen gebruikt worden, indien in de *z*-vergelijking de tweede term ontbreekt. De oorspronkelijke vergelijking moet dus steeds tot dezen vorm teruggebracht worden. Het tweede deel van de in punt 2*c* beschreven reductie kan hier echter achterwege blijven.

7. Getallenvoorbeelden.

a. Algemeen.

Ter toelichting van het gebruik van de nomogrammen worden hier eenige getallenvoorbeelden gegeven. Om een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid, welke bij het gebruik van de nomogrammen bereikt wordt, werden de verkregen uitkomsten op de in punt 6 aangegeven wijze als uitgangspunt voor een verdere benadering gebruikt, die dan tot één cijfer verder voortgezet werd.

In het eerste geval wordt, ter demonstratie van de te gebruiken reductie-methode, uitgegaan van een vergelijking in willekeurigen vorm. In de verdere gevallen daarentegen wordt alleen de gereduceerde vergelijking beschouwd.

b. Getallenvoorbeeld 1 (4 reëele wortels).

De op te lossen vergelijking is

$$z^4 + 1{,}24z^3 - 2{,}04z^2 - 0{,}64z + 0{,}48 = 0 \qquad (31)$$

Hieruit wordt door substitutie van

$$z = z_1 - \frac{1{,}24}{4} = z_1 - 0{,}31 \qquad (32)$$

de tweede term verdreven, welke substitutie het eenvoudigste uitgevoerd kan worden door gebruik te maken van de methode van HORNER [4].

+1	+1,24	—2,04	—0,64	+0,48
	—0,31	—0,288	+0,722	—0,025
+1	+0.93	—2,328	+0,082	+0,455
	—0,31	—0,192	+0,781	
+1	+0,62	—2,520	+0,863	
	—0,31	—0,096		
+1	+0,31	—2,616		
	—0,31			
+1	0			

De vergelijking wordt dus:

$$z_1^4 - 2{,}616z_1^2 + 0{,}863z_1 + 0{,}455 = 0 \qquad (33)$$

en kan nu in den gewenschten vorm gebracht worden door de substitutie

$$z_1 = \sqrt{2{,}616}\,z_2 = 1{,}62z_2 \qquad (34)$$

De coëfficiënten worden daarbij, zooals in punt 2*c* is aangegeven:

$$b_2 = -\frac{2{,}616}{2{,}616} = -1, \quad c_2 = +\frac{0{,}863}{1{,}62 \times 2{,}616} = +0{,}204,$$

$$d_2 = +\frac{0{,}455}{2{,}616^2} = +0{,}067$$

zoodat de gereduceerde vergelijking is:

$$z_2^4 - z_2^2 + 0{,}204z_2 + 0{,}067 = 0 \qquad (35)$$

Deze vergelijking heeft 4 reëele wortels, zooals onmiddellijk uit de ligging van het punt met de coördinaten $c_2 = +0{,}204$ en $d_2 = +0{,}067$ in fig. 2 volgt. De beide positieve wortels van de vergelijking worden in nomogram I (fig. 4) bepaald uit de snijpunten van de verbindingslijn van de punten $c_2 = +0{,}204$ en $d_2 = +0{,}067$ met de kromme voor $b = -1$. Zij blijken te zijn:

$$z_2 = +0{,}800 \qquad z_2 = +0{,}445$$

De negatieve wortels, die op dezelfde wijze bepaald worden met behulp van de verbindingslijn van de punten $c_2 = -0{,}204$ en $d_2 = +0{,}067$, zijn

$$z_2 = -0{,}175 \qquad z_2 = -1{,}070$$

Op grond van (34) en (32) volgen hieruit de wortels van de vergelijkingen (33) en (31):

$$z_1 = +1{,}296 \;,\; +0{,}721 \;,\; -0{,}283 \;,\; -1{,}733$$
$$z = +0{,}986 \;,\; +0{,}411 \;,\; -0{,}593 \;,\; -2{,}043$$

De nauwkeurigheid van deze uitkomsten kan beoordeeld worden door ze te vergelijken met de rechtstreeks benaderde wortels van vergelijking (31). De hierbij gevonden verschillen komen echter slechts ten deele voor rekening van het nomogram, daar ook de reductie van de vergelijking, waarbij de benoodigde berekeningen met rekenschuif-nauwkeurigheid uitgevoerd werden, hiervoor mede verantwoordelijk is. Om een oordeel te kunnen vormen, in hoeverre de verschillende bewerkingen tot de onnauwkeurigheid bijdragen werden niet alleen de wortels van de vergelijking (31) rechtstreeks benaderd, doch ook de wortels van de vergelijkingen (33) en (35) op dezelfde wijze bepaald en daarna met behulp van (32) en (34) op *z* omgerekend.

[3]) Zie literatuur 2 t/m 5.

[4]) Zie literatuur 6, 7 en 8.

TABEL II.

BEPAALD UIT	WAARDE VAN DE WORTELS							
	z	$\triangle$	z	$\triangle$	z	$\triangle$	z	$\triangle$
vergel. (31).............	+0,9862	—	+0,4018	—	—0,5962	—	—2,0318	—
vergel. (33).............	+0,9858	—0,0004	+0,4022	+0,0004	—0,5964	—,00002	—2,0316	+0,0002
vergel. (35).............	+0,9865	+0,0003	+0,4059	+0,0041	—0,5984	—0,0022	—2,0340	—0,0022
nomogram	+0,986	—0,000²	+0,411	+0,009²	—0,593	+0,003²	—2,043	—0,011²

De uitkomsten zijn verzameld in Tabel II, waarbij $\triangle$ het verschil aangeeft tusschen de waarde van de uit het nomogram bepaalde of langs den hier aangeduiden omweg berekenden wortel en zijn waarde, zooals deze rechtstreeks uit vergelijking (31) volgt.

Hieruit blijkt, dat de overgang van vergelijking (31) op (33), dus het eerste deel van de reductie, hier slechts weinig invloed had op de waarde van de wortels. Het tweede deel van de reductie daarentegen had grootere afwijkingen tengevolge, die, hoewel kleiner dan de verschillen tusschen de uit het nomogram bepaalde waarden en de rechtstreeks uit de oorspronkelijke vergelijking volgende, toch over het algemeen van dezelfde orde van grootte zijn als laatstgenoemden. Dit bevestigt het in punt 6 uitgesproken vermoeden omtrent den mogelijken invloed van de reductie op de nauwkeurigheid.

c. *Getallenvoorbeeld* 2 (4 complexe wortels).

Voor de vergelijking

$$z^4 + z^2 + 0,18z + 1,24 = 0$$

die volgens fig. 2 vier complexe wortels zal hebben, volgt uit nomogram II (fig. 5), daar

$$b_2 = +1, \quad c_2 = +0,18, \quad d_2 = +1,24,$$

$x = 0,555$, en uit nomogram III (fig. 6):

$$Y_1 = 0,898 \qquad Y_2 = 0,046$$

Daar hier $c_2 > 0$ is, zijn dus de wortels

$$z = -x \pm i(Y_1 - Y_2) = -0,555 \pm 0,852i$$
$$z = +x \pm i(Y_1 + Y_2) = +0,555 \pm 0,944i$$

Onder gebruikmaking van de in punt 6 beschreven methode werden de wortels verder benaderd, zij bleken hierbij te worden:

$$z = -0,5552 \pm 0,8528i$$
$$z = +0,5552 \pm 0,9430i$$

d. *Getallenvoorbeeld* 3 (2 reëele, 2 complexe wortels).

De vergelijking

$$z^4 + z^2 + 0,07z - 1,12 = 0$$

heeft volgens fig. 2 twee reëele en twee complexe wortels. De reëele wortels zijn op de in punt 7a besproken wijze bepaald uit nomogram I (fig. 4):

$$z = x_1 = +0,801 \qquad z = x_2 = -0,833$$

waaruit volgt:

$$|x_1 + x_2| = 0,032 \qquad |x_1 - x_2| = 1,634$$

Verder is hier $b_2 = +1$, zoodat uit nomogram IV fig. 7) verkregen wordt

$$y = 1,310$$

en de wortels van de vergelijking dus zijn

$$z = +0,801 \quad , \quad -0,833 \quad , \quad +0,016 \pm 1,310i$$

Nauwkeuriger bepaling van de wortels op de in punt 6 aangegeven wijze levert hier

$$z = +0,8039 \quad , \quad -0,8338 \quad , \quad +0,0149 \pm 1,2926i$$

(Afgesloten Maart 1931).

LITERATUUR.

Algemeene eigenschappen van hoogere-machts-vergelijkingen.

1. Schuh, F. Lessen over Hoogere Algebra. Deel I. (Groningen 1921).

Methoden voor het benaderen van de reëele wortels.

2. von Sanden, H. Praktische Analysis. (Leipzig u. Berlin 1914) S. 148.
3. Schuh (zie 1) blz. 455.
4. Runge, C. und König, H. Numerisches Rechnen (Berlin 1924). S. 150.
5. von Mises, R. und Pollaczek-Geiringer, H. Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1929. S. 58.

Methode van Horner voor de reductie van vergelijkingen.

6. von Sanden (zie 2) S. 40.
7. Schuh (zie 1) blz. 325.
8. Runge und König (zie 4) S. 92.

Nomogrammen met evenwijdige assen.

9. d'Ocagne. Principes usuels de Nomographie (Paris 1920) p. 14.
10. Verdere literatuur zie rapport A. 58. Versl. en Verh. R. S. L., Deel III (Amsterdam, 1925) blz. 31.

Rapport A. 329.

Modelproeven met verschillende windschermen aan het Fokker-verkeersvliegtuig type F. VIII

door

ir. A. G. VON BAUMHAUER.

Rapport A. 329: Essais de maquette de plusieurs pares-brise de l'avion de transport Fokker, type F. VIII.

Report A. 329: *Modeltests with different* windscreens on the transport machine type F. VIII.

Bericht A. 329: Modellversuche *mit verschiedenen* Windschutzformen am Fokker-Verkehrsflugzeug Typ F. VIII.

RAPPORT A 329.

Modelproeven met verschillende windschermen aan het Fokker-verkeersvliegtuig type F. VIII.

Overzicht.

Bij de K.L.M. werd een wijziging aangebracht aan een verkeersvliegtuig, welke van invloed kon zijn op de strooming over den vleugel. Aan den R.S.L. werd aan het vliegtuigmodel onderzocht of belangrijke afwijkingen in de aërodynamische eigenschappen waren te verwachten. Dit bleek niet het geval te zijn. De vliegproeven bevestigden deze uitkomst.

REPORT A 329.

Modeltests with different windscreens on the transport machine type F. VIII.

Summary.

The Royal Dutch Airlines (K.L.M.) modified a machine in such a way that the flow over the leading edge of the wing might be spoiled.

In the windtunnel of the National Institute for Aeronautical Research the influence of this alteration on the aerodynamic properties was investigated. It was found that it was small. The full scale tests are in full agreement with this result.

RAPPORT A 329.

Essais de maquette de plusieurs pares-brise de l'avion de transport Fokker type F. VIII.

Résumé.

Dans les ateliers de la K.L.M. (Société Royale de Navigation Aérienne) on a fait des altérations au pare-brise d'un avion de transport, modifications au bord d'attaque de l'aile qui pourraient nuire aux qualités aérodynamiques de l'avion. Dans le tunnel de ce service on a étudié l'influence de ces modifications, qui s'est montrée insignifiante. Les essais en vol confirment ce résultat.

BERICHT A 329.

Modellversuche mit verschiedenen Windschutzformen am Fokker-Verkehrsflugzeug Typ F. VIII.

Zusammenfassung.

Bei der Königlichen Luftfahrt-Gesellschaft (K.L.M.) wurde eine Aenderung an einem Verkehrsflugzeug angebracht, welche von Einfluss auf die Luftströmung an der Tragfläche sein könnte.

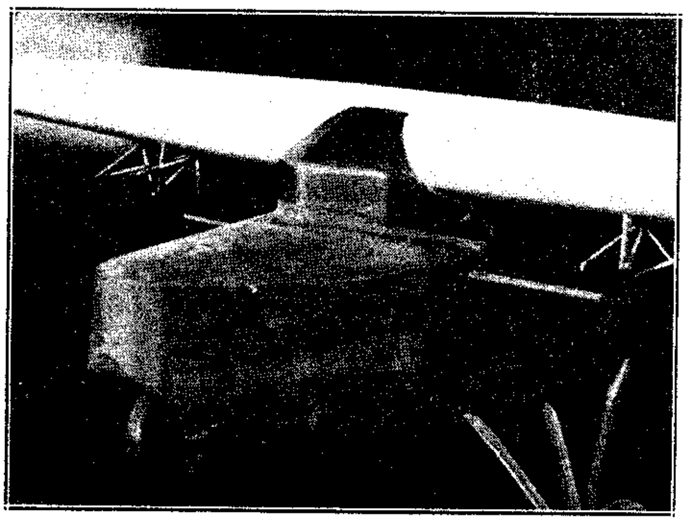
In dieser Anstalt wurde im Windkanal untersucht, ob erhebliche Abweichungen in den aerodynamischen Eigenschaften zu erwarten seien. Dies war nicht der Fall. Die Versuche im Fluge haben das Ergebnis bestätigt.

Modelproeven met verschillende windschermen aan het Fokker-verkeersvliegtuig type F. VIII

door

ir. A. G. VON BAUMHAUER.

Rapport van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, A. 329.



Inleiding.

Teneinde den bestuurder, vooral in den winter, meer comfort te bieden, wenschte men een verkeersvliegtuig van de Koninklijke Luchtvaart Mij. voor Nederland en Koloniën te voorzien van een gesloten windscherm (zie fig. 2).

Daar dit windscherm, dat een glazen stuurhuis levert, aan den bovenkant doorgetrokken is tot boven op den vleugel, werd het dezerzijds mogelijk geacht, dat daardoor de vleugelstrooming kon worden verstoord.

Uit vroegere metingen was het namelijk bekend, dat veranderingen aan den voorrand van een dikken vleugel aanzienlijken invloed kunnen hebben op de luchtkrachten en wel zoo, dat de draagkracht kleiner en de weerstand grooter wordt. Dit heeft in het bijzonder plaats bij langzaam vliegen (groote invalshoek), en bij de landing. (1) *)

Daarbij kan ook het onrustige wervelgebied achter den vleugel grooter worden, waardoor de werking der staartvlakken in ongunstigen zin kan worden beïnvloed.

*) De literatuur opgaven zijn aan het slot vermeld.

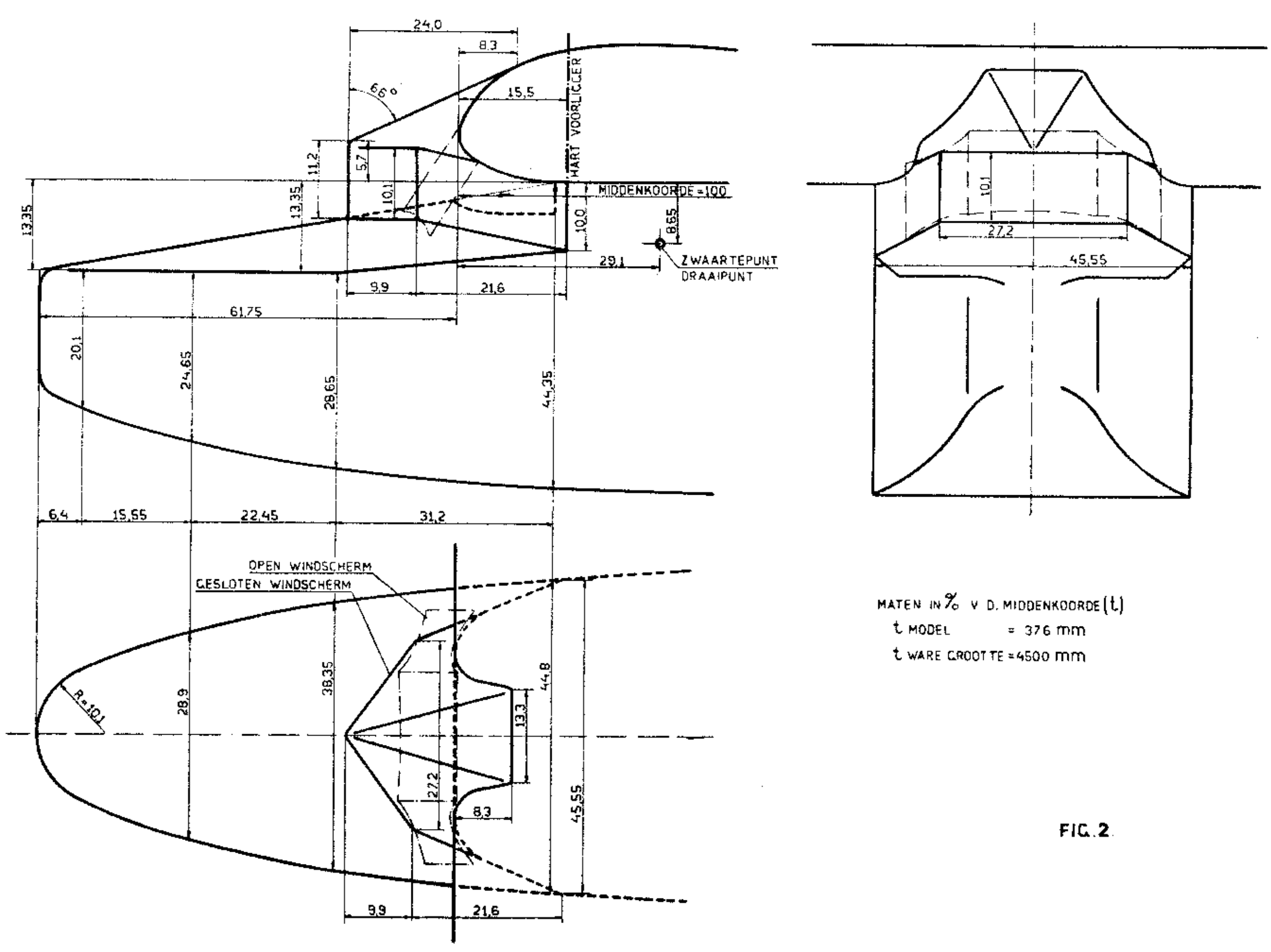


FIG. 2

In verband hiermede was het gewenscht te voren aan een model in den windtunnel na te gaan in hoeverre er storingen waren te vreezen. De K.L.M. droeg den R.S.L. op dit onderzoek te verrichten. **) Aan het vliegtuig was opgemerkt, dat van den scherpen zijrand van het gewone (open) windscherm een discontinuïteitsvlak uitgaat met een gebied van sterke werveling naast den romp, dit is een aanwijzing voor energieverlies. Daar bij een gesloten windscherm een aan het vliegtuig beter aanliggende strooming zonder wervelgebied werd verwacht, hoopte men, dat het vliegtuig met gesloten windscherm minder weerstand zou hebben, dus grooter snelheid zou kunnen behalen. Naar aanleiding van het bovenstaande is het F. VIII-model onderzocht:

a. zonder windscherm (model 29);

b. met het open windscherm (model 29*a*);

c. met het gesloten windscherm (model 29*b*).

Daarbij werd nagegaan wat de invloed was van het windscherm:

1. op de maximale draagkracht, in verband met de groote van de minimale snelheid en het al of niet plotseling doorzakken van het vliegtuig;

2. op den weerstand en op de draagkracht ter beoordeeling der prestaties;

3. op de duikmomenten, in verband met het langsevenwicht;

4. op de werking van het hoogteroer bij invalshoeken, die overeenkomen met snel en met zeer langzaam vliegen.

Bij dit model-onderzoek bleek de invloed van de verandering van het windscherm gering te zijn.

De uitkomsten der vliegproeven zijn hiermede in overeenstemming.

Beschrijving van het model.

Het F. VIII-model is uitgevoerd op een twaalfde van de ware grootte.

Dit model was voor voorgaande proeven zoo groot mogelijk gebouwd om de strooming bij den romp nauwkeurig te kunnen bestudeeren. De vleugel heeft afgestompte einden, daar deze anders te groot is voor den windtunnel van den R.S.L. Aangenomen wordt, dat het afknotten der vleugeleinden voor dit onderzoek niet van invloed is.

De vleugelbreedte (vlucht) is nu 1300 mm, d.i. 68 % van de juiste waarde.

De gondels van dit twee-motorige vliegtuig waren wel opgesteld op de juiste plaats ten opzichte van den vleugel, maar waren, evenals bij vorige metingen, niet aan het model, doch aan den tunnelwand bevestigd.

Bij deze vergelijkende proeven, waarbij het ging om de strooming over den vleugel boven den romp, werden de schroeven niet aangedreven, in de onderstelling, dat de schroefstralen hierbij niet van belang waren.

De metingen geschiedden op de gebruikelijke wijze (2), waarbij het model vóór was opgehangen aan draaipunten, die op een dwarsscheepsche zwaartelijn lagen. Het zwaartepunt van het beladen vliegtuig is daarbij ondersteld te liggen in het symmetrievlak op 29,1 % achter den vleugelneus en 8,65 % onder den vleugel, uitgedrukt in % van de middenkoorde (in analogie met de maten in fig. 2).

De uitkomsten.

Uit de gemeten krachten zijn afgeleid de gebruikelijke verhoudingsgetallen, of wel dimensielooze coëfficiënten.

Deze zijn bepaald door:

draagkracht (of lift)	$L = c_a\ q\ 0$
weerstand (of drift)	$W = c_w\ q\ 0$
duikmoment	$M = c_m\ q\ 0\ t$

**) Hierbij wordt aan deze Maatschappij dank uitgesproken voor hare bereidwilligheid dit onderzoek voor publicatie beschikbaar te stellen.

Hierin is q de stuwdruk van den luchtstroom ($= \frac{1}{2}$ dichtheid $\times$ (snelheid)^2, 0 het vleugeloppervlak van het afgeknotte model en t de grootste vleugelkoorde. Het duikmoment is gemeten om het zwaartepunt.

De coëfficiënten zijn in de tabellen als functie van den invalshoek (α) gegeven. Dit is de hoek, die de onderkant van den vleugel bij benadering met een onbegrensden luchtstroom zou maken, indien daarbij dezelfde draagkracht zou optreden, als in den windtunnel. Deze invalshoek is gevonden door den hoek, tusschen vleugelkoorde en tunnelas, te corrigeeren voor den wandinvloed, volgens een door Prandtl gegeven methode (3).

In het algemeen blijkt de invloed der windschermen op de luchtkrachten gering te zijn.

1. De maximale draagkracht is met het gesloten windscherm iets kleiner dan in de andere gevallen; ze treedt op bij een grooteren invalshoek (fig. 3).

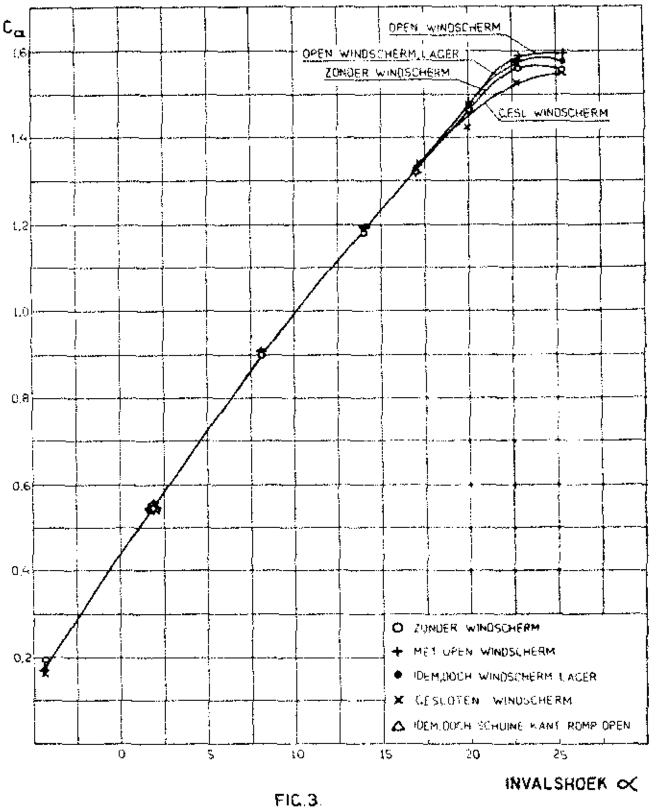


FIG. 3.

2. Bij grooten liftcoëfficiënt is de weerstand met het gesloten windscherm merkbaar grooter, dit doet echter voor de praktijk weinig ter zake.

Bij de laagste waarde van c_a, waarbij werd gemeten, is de weerstand met het gesloten windscherm het kleinst (zie fig. 4).

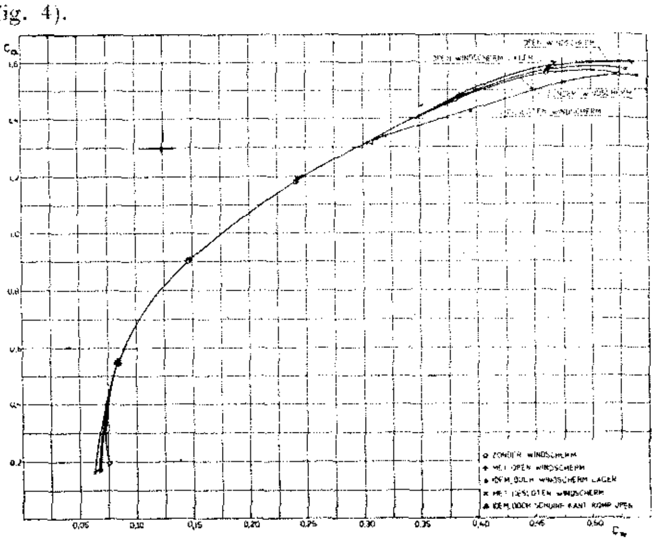


Fig. 4.

3. De verschillen in duikmoment om het zwaartepunt met de verschillende modelvormen zijn gering (fig. 5).

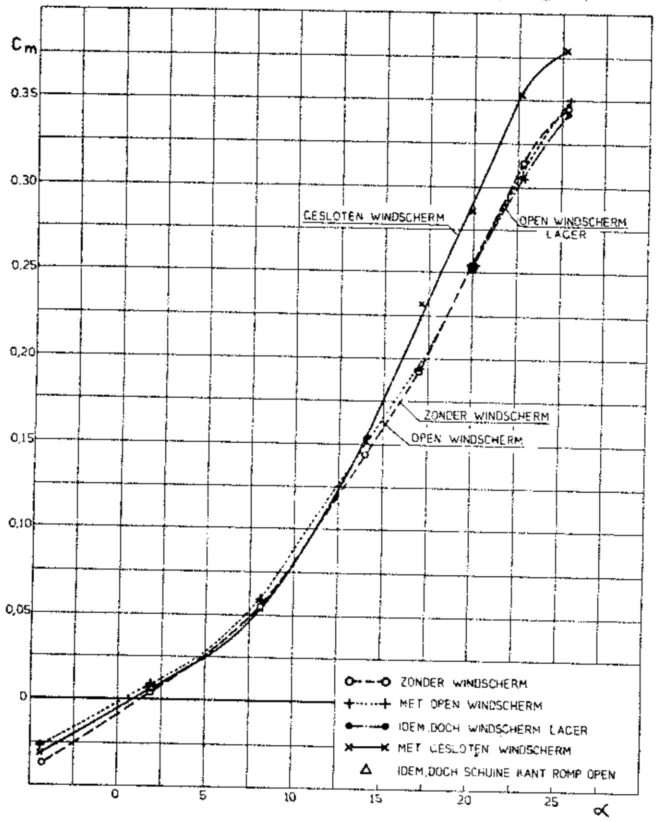


FIG. 5.

Boven c_a = 1,2 blijkt het model met het gesloten windscherm stabieler te zijn dan de andere vormen.

4. De momenten zijn bij verschillende hoogteroer-standen bepaald om de werking van dat stuurvlak na te gaan. Als invalshoek van den vleugel werd gekozen $\alpha = 1{,}9^\circ$ en $22{,}9^\circ$, overeenkomende met de vlucht bij groote snelheid resp. met minimale snelheid. Met het gesloten windscherm werden bij den grooten invalshoek dubbelwaarden gevonden, reden waarom de metingen werden herhaald met kleinere verstellingen van het hoogteroer.

De afwijkingen zijn niet groot. Het is niet onmogelijk, dat ze afkomstig zijn van de wrijving in de ophangpunten. De waarden van den coëfficiënt c_m zijn uitgezet op den hoogteroerhoek β, gemeten van uit den middenstand (zie fig. 6).

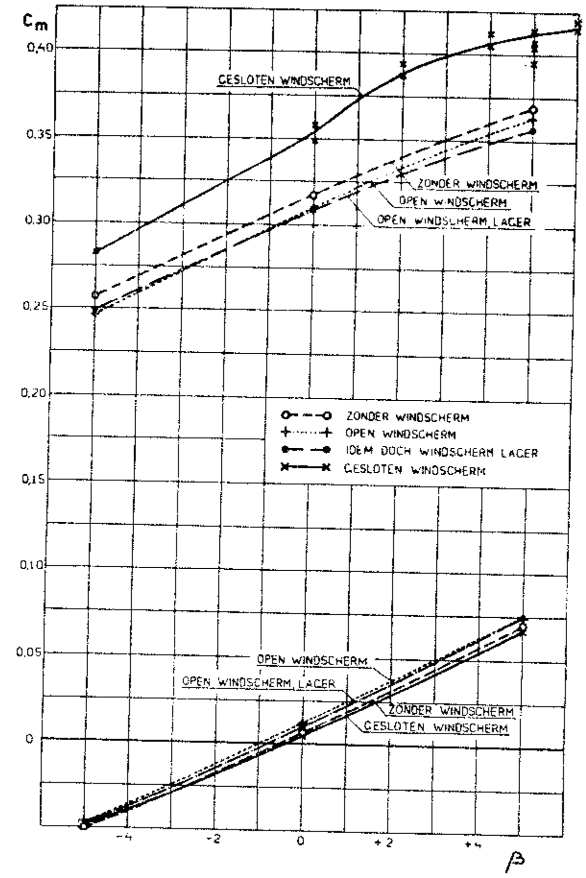


FIG. 6.

Bij $\alpha = 1{,}9^\circ$ vallen de momentlijnen vrijwel samen. Voor grooten invalshoek zijn ze wel ongeveer evenwijdig, doch dekken elkaar niet.

De werking van het hoogteroer lijkt in alle gevallen wel bevredigend.

Daar bij de nameting van het model bleek, dat het open windscherm iets te hoog was geplaatst (zie fig. 7), worden

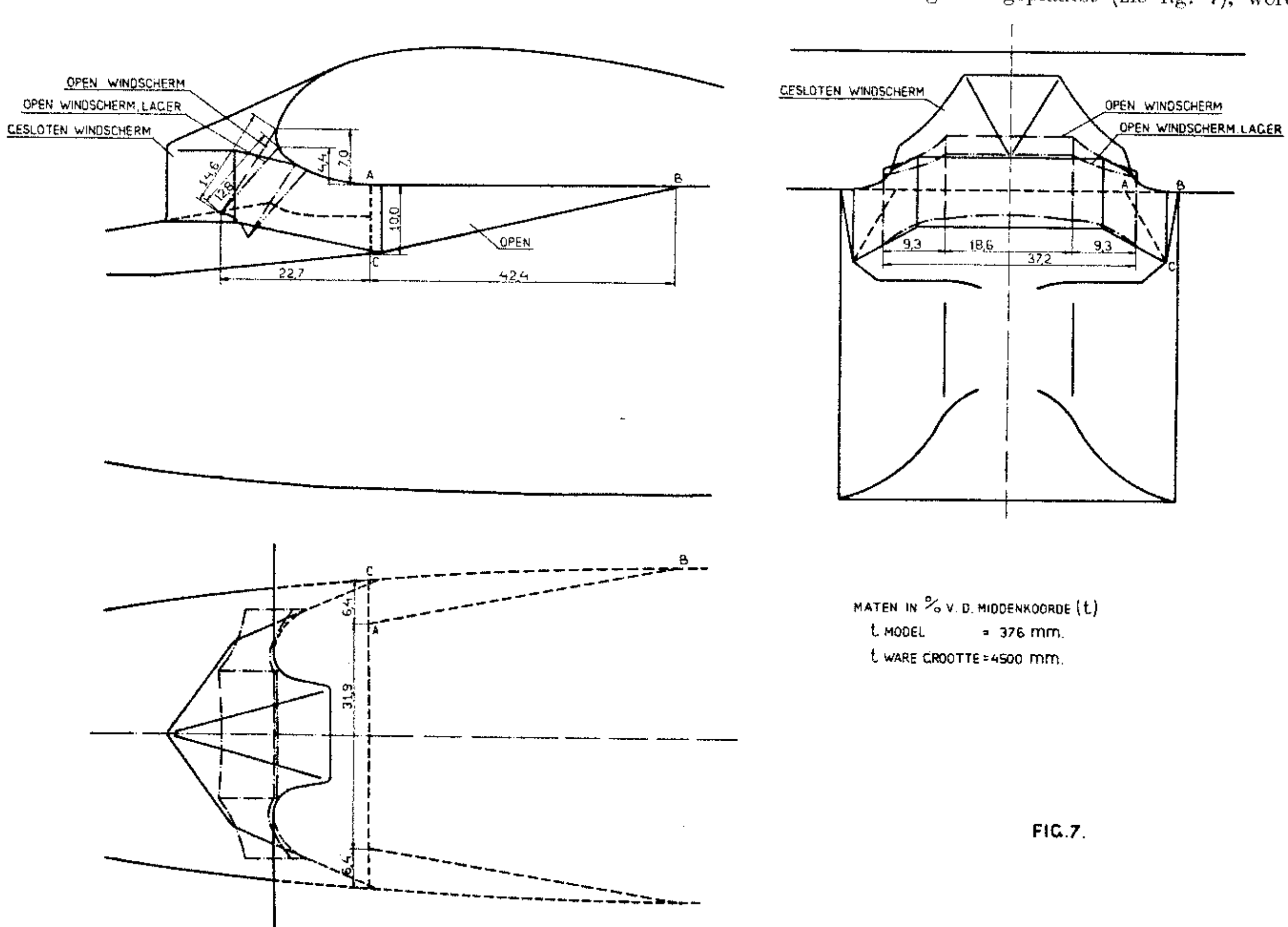


FIG. 7.

nog eenige metingen verricht na juiste plaatsing van het windscherm (zie Tabel 5 en 9).

Als aanvullende meting is met het gesloten windscherm een proef uitgevoerd, waarbij de zijwand van den romp dicht achter het scherm werd gelaten als in de bestaande uitvoering (*zie fig. 7,*) vlak ABC). Daardoor blijft dan bestaan een hoek met vrij uitzicht naar achteren.

Ter vermijding van tocht in het stuurhuis zou in het verticale vlak AC een ruit moeten komen.

Bij de metingen bleek, dat de inspringende hoek geen merkbare weerstandsvermeerdering gaf (zie tabel 4).

Het gesloten windscherm werd aangebracht in de werkplaats der K.L.M. aan het F. VIII-vliegtuig PH-AED.

Bij de vliegproeven stuurde de heer Beekman van de K.L.M.; waargenomen werd door Dr. ir. H. J. v. d. Maas en ir. S. Wynia van den R.S.L. (Rapport V. 445).

Bepaald werd in zweefvlucht de snelheid, waarbij het begin van doorzakken optrad. Deze was een keer 105 à 108 km/h, een andere keer 95 à 98 km/h. Daarbij behooren de liftcoëfficiënten c_a = 1,28 à 1,21 resp. 1,55 à 1,46. De laatste waarden komen overeen met die gevonden bij de modelproeven (c_a = 1,55).

Bij motorvluchten was vroeger met het oude windscherm een maximale liftcoëfficiënt van 1,5 à 1,6 gevonden.

De snelheidsmetingen met het gesloten windscherm leverden geen verschil in maximale snelheid op met oudere metingen; de verschillen waren althans zoo gering, dat hieraan geen beslissende waarde kan worden toegekend.

Wel werd de indruk verkregen, dat de strooming bij de staartvlakken rustiger was dan met het open windscherm.

In het algemeen hebben de proeven wel getoond, dat er goede overeenstemming is tusschen model en ware-grootte, hoewel de aërodynamische schaalwaarde slechts 1/20 à 1/30 bedroeg.

LITERATUUROPGAVEN.

(1) Rapport A. 29 R.S.L. Deel II, 1923, p. 13.

(2) Rapport A. 76 R.S.L. Deel III, 1925, p. 121.

(3) Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, I. Lieferung, p. 42. (WIT RAND

Tabel 1.

VLIEGTUIGMODEL ZONDER WINDSCHERM.

α	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
25,3	1,554	0,524	0,345	3,0
22,8	1,559	0,461	0,314	3,4
20,0	1,465	0,382	0,253	3,8
17,0	1,319	0,307	0,192	4,3
14,0	1,181	0,241	0,144	4,9
8,1	0,900	0,146	0,055	6,2
1,9	0,548	0,085	0,004	6,5
— 4,3	0,197	0,076	—0,037	2,6

V = 17,1 m/sec.

Tabel 2.

VLIEGTUIGMODEL MET OPEN WINDSCHERM.

α	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
25,4	1,595	0,536	0,350	3,0
22,9	1,590	0,468	0,315	3,4
22,9	1,577	0,464	0,305	3,4
20,0	1,482	0,385	0,254	3,8
17,0	1,317	0,304	0,194	4,3
14,1	1,192	0,243	0,153	4,9
8,1	0,909	0,146	0,059	6,2
1,9	0,547	0,084	0,009	6,5
— 4,4	0,171	0,067	—0,027	2,6

V = 17,0 m/sec.

Tabel 3.

VLIEGTUIGMODEL MET GESLOTEN WINDSCHERM.

α	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
25,3	1,551	0,540	0,379	2,9
22,7	1,528	0,477	0,353	3,2
19,9	1,424	0,395	0,286	3,6
17,1	1,339	0,319	0,232	4,2
14,0	1,187	0,243	0,152	4,9
8,1	0,904	0,147	0,054	6,1
1,9	0,548	0,084	0,007	6,5
— 4,4	0,163	0,063	—0,031	2,6

V = 16,9 m/sec.

Tabel 4.

VLIEGTUIGMODEL MET GESLOTEN WINDSCHERM, DOCH MET SCHUINEN KANT IN ROMP OPEN.

α	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
1,9	0,549	0,084	0,007	6,5

V = 17,0 m/sec.

Tabel 5.

VLIEGTUIGMODEL MET OPEN WINDSCHERM, DOCH WINDSCHERM LAGER.

α	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
25,4	1,573	0,530	0,342	3,0
22,8	1,570	0,462	0,306	3,4
20,0	1,473	0,384	0,253	3,8
17,0	1,327	0,312	0,194	4.3
14,1	1,199	0,247	0,154	4,9
8,1	0,908	0,148	0,059	6,1
1,8	0,541	0,084	0,008	6,4
— 4,4	0,172	0,068	—0,026	2,5

V = 17,1 m/sec.

Tabel 6.

VLIEGTUIGMODEL ZONDER WINDSCHERM.

α	β	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
2,0	+ 5	0,584	0,089	0,070	6,6
1,9	0	0,564	0,088	0,006	6,4
1,8	— 5	0,541	0,086	—0,050	6,3
23,0	+ 5	1,615	0,486	0,369	3,3
22,9	0	1,591	0,474	0,317	3,4
22,8	— 5	1,567	0,460	0,257	3,4

V = 17,1 m/sec.

Tabel 7.

VLIEGTUIGMODEL MET OPEN WINDSCHERM.

α	β	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
2,0	+ 5	0,584	0,088	0,074	6,6
1,9	0	0,561	0,087	0,012	6,4
1,8	— 5	0,538	0,086	—0,047	6,3
23,1	+ 5	1,632	0,490	0,363	3,3
22,9	0	1,601	0,474	0,310	3,4
22,9	— 5	1,583	0,464	0,246	3,4

V = 17,0 m/sec.

Tabel 8.

VLIEGTUIGMODEL MET GESLOTEN WINDSCHERM.

α	β	c_a	c_w	c_m	c_a/c_m
2,0	+ 5	0,577	0,086	0,067	6,7
1,9	0	0,522	0,084	0,005	6,6
1.8	— 5	0,534	0,083	—0,048	6,4
22.8	+ 5	1,544	0,494	0,395	3,1 [1])
22,8	+ 5	1.558	0,496	0,407	3,1
22,7	0	1.539	0,483	0,349	3,2
22,7	— 5	1.519	0,471	0.283	3,2
22,9	+ 6	1,586	0,511	0,420	3,1 [2])
22,9	+ 6	1,581	0,510	0,415	3.1
22.9	+ 5	1,584	0,509	0,414	3,1
22.8	+ 5	1.572	0,507	0,404	3,1
22,9	+ 4	1,581	0,505	0,405	3,1
22,9	+ 4	1.589	0,506	0,412	3,1
22,8	+ 2	1.564	0,492	0.387	3.2
22,8	+ 2	1,571	0,493	0,394	3,2
22,8	0	1,559	0,487	0,358	3.2

V = 17,0 m/sec.

1) 1e meting. 2) 2e meting.

Tabel 9.

VLIEGTUIGMODEL MET OPEN WINDSCHERM, DOCH WINDSCHERM LAGER.

α	β	c_a	c_w	c_m	c_a/c_w
2,0	+ 5	0,581	0,088	0,075	6,6
1,9	0	0,557	0,086	0,010	6,5
1,8	— 5	0,539	0,086	—0,047	6,3
23,0	+ 5	1,617	0,478	0,357	3,4
22,9	0	1,578	0,463	0,308	3,4
22,9	— 5	1,578	0,462	0,249	3,4

V = 17,1 m/sec.

Rapport A. 340.

Metingen betreffende storingen in den luchtstroom bij de staartvlakken, verricht aan een vliegtuig en aan het model daarvan

door

ir. A. G. VON BAUMHAUER.

Rapport A. 340: Essais d'air dans le voisinage des plans arrières d'un aéroplane.

Report A. 340: Tests on the disturbances of the flow in the vincinity of the tailplanes of an aeroplane.

Bericht A. 340: Messungen der Störungen im Luftstrom in der Nähe des Leitwerks eines Flugzeuges.

RAPPORT A. 340.

Metingen betreffende storingen in den luchtstroom bij de staartvlakken, verricht aan een vliegtuig en aan het model daarvan.

Overzicht.

In dit voorloopige rapport worden proeven beschreven, waarbij op één bepaalde lijn bij de staartvlakken wordt onderzocht de storing van den luchtstroom aan het Fokker-vliegtuig type F. II, zoowel op ware grootte (in zweefvlucht) als aan het model zonder schroef.

Er blijkt een goede overeenkomst te bestaan.

Dit wettigt het maken van model-onderzoek voor die gevallen, waarvoor men wenscht te kennen de werking van staartvlakken en de aërodynamische belastingen, welke daarop werken onder verschillende omstandigheden.

REPORT A. 340.

Tests on the disturbances of the flow in the vincinity of the tailplanes of an aeroplane.

Summary.

In this preliminary report tests are described on the disturbances of the flow near to the tail planes of the Fokker aeroplane type F. II. These have been studied on full scale and on a model in the windtunnel of this Institute. Good agreement has been found.

This result justifies modeltests when one desires to know the functioning of the tailplanes and the aerodynamic loads which act on these planes under different conditions.

RAPPORT A. 340.

Essais d'air dans le voisinage des plans arrières d'un aéroplane.

Résumé.

Dans ce bulletin provisoire on a décrit des essais exécutés pour étudier les perturbations du courant d'air sur une droite déterminée auprès des plans stabilisateurs de l'avion Fokker type F II, essais faits en vol (plané) et au modèle réduit dans la soufflerie de cet Institut.

La concordance des résultats est satisfaisante.

Ceci justifie les essais dans le tunnel aérodynamique dans les cas où l'on désire connaître le fonctionnement des plans arrières et les charges aérodynamiques qui y agissent sous différentes conditions.

BERICHT A. 340.

Messungen der Störungen im Luftstrom in der Nähe des Leitwerks eines Flugzeuges.

Zusammenfassung.

In diesem vorläufigen Bericht werden Versuche beschrieben bei welchen über eine Linie beim Leitwerk die Störung der Luftströmung gemessen wurde am Fokker-Flugzeugtyp F. II, sowohl im Fluge (Gleitflug) als am Modell im Windkanal dieser Versuchsanstalt. Es wurde gute Übereinstimmung gefunden. Dies rechtfertigt Modellversuche in den Fällen wo man die Wirkung der Ruder und die aerodynamischen Belastungen des Leitwerks kennen lernen will.

Metingen betreffende storingen in den luchtstroom bij de staartvlakken, verricht aan een vliegtuig en aan het model daarvan

door

ir. A. G. VON BAUMHAUER.

Rapport A. 340. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

1. Inleiding.

Het onderzoek heeft ten doel na te gaan in hoeverre modelmetingen in den windtunnel van den R.S.L. voldoende nauwkeurig met de ware grootte overeenkomt om te wettigen aan een vliegtuigmodel te onderzoeken of de storing van den luchtstroom gevaar oplevert voor de goede werking en voor de sterkte van staartvlakken.

2. Methode van onderzoek.

Dit vliegtuig is onderzocht met een klap, welke bij den achterligger vlak op den bovenkant van den vleugel kon liggen of gedurende de vlucht rechtop kon worden gezet.

Aan het vliegtuig is aan één zijde vóór het stabilisatie-vlak een stroomlijn-buis loodrecht op de koorde aangebracht, welke voorzien is van 6 aan den voorkant daarvan uitstekende stuwbuizen. (Zie fig. 1 en de teekening van het vliegtuig in Deel I, Versl. en Verh. van den R.S.L., bladz. 91.) Deze openingen zijn aangesloten aan een meervoudigen vloeistof-manometer, welke op het instrumentenbord in de kajuit van het vliegtuig is opgesteld. Dit bord draagt een groot aantal instrumenten, welke den vliegtoestand bepalen. Daartoe behooren meters voor druk en temperatuur van de lucht, toerental van den motor, vliegsnelheid (stuwdruk), langshelling en dwarshelling van het vliegtuig.

Op de foto (fig. 2) ziet men verder links een klok en een seconden horloge, bovendien rechts onderaan met uurwerk-wijzerplaten aanwijzers van den stand der 3 roeren, en van den stand (op of neer) van de verstoringsklap op den vleugel. Met behulp van den kinematograaf wordt de stand der instrumenten gelijktijdig vastgelegd. Een voorbeeld van een dergelijk beeld is weergegeven in fig. 2 [1].

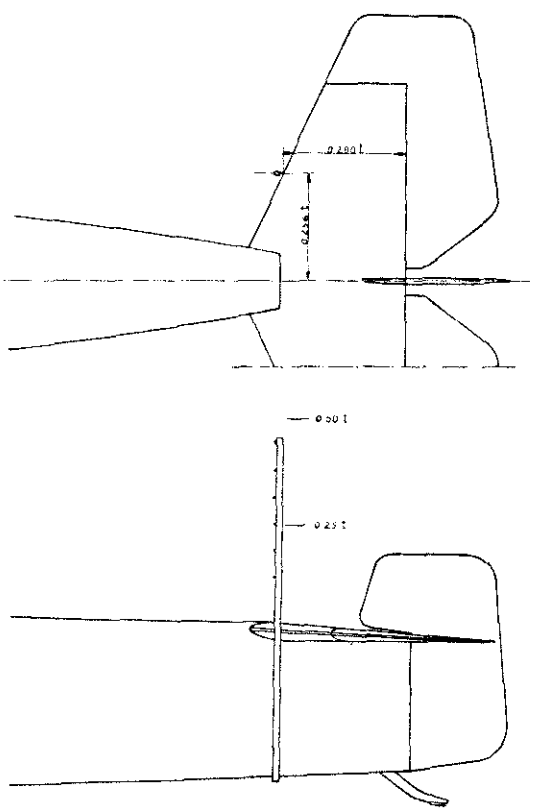


Fig. 1.

Opstelling van de meervoudige stuwbuis.

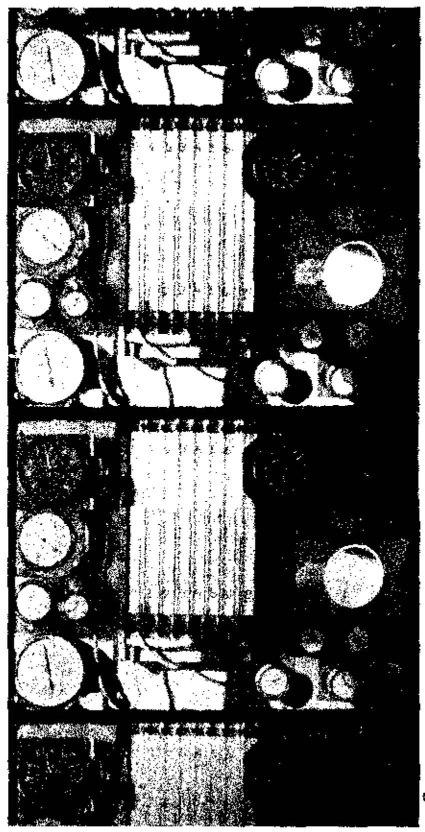


Fig. 2.

Kino-beelden van het instrumentenbord.

Bij het model is met een stuwbuis in punten van de overeenkomstige lijn de energie-druk bepaald, waarbij een vloeistof-manometer met hellende buis werd gebruikt. Het model is

[1]) Deze methode is reeds vroeger in Duitschland toegepast (Flugzeugmeisterei).

gemaakt op 1/20 van de ware grootte, de luchtsnelheid is ongeveer 27 m/sec. De metingen in de vlucht vonden plaats bij snelheden tusschen 25 en 40 m/sec. De stuwbuizen zijn gericht evenwijdig aan de langs-as van het vliegtuig(-model). Wanneer de energie-druk kleiner is dan de stuwdruk in de ongestoorde strooming, wordt gezegd, dat er verstoring is. De storing als verschil tusschen die drukken wordt uitgedrukt in den stuwdruk (q). De stuwdruk wordt gemeten op de gebruikelijke wijze met behulp van een vrij onder den vleugel opgestelde richtende stuwbuis en de statische buis, welke ver onder het vliegtuig hangt [1]). Het groote vat van den meervoudigen manometer is eveneens aan deze statische buis aangesloten.

De energie-druk wordt zoodoende gemeten als verschil in totalen druk (stuwbuis in het storingsgebied) en de statische druk in de ongestoorde strooming (ver onder het vliegtuig).

3. Uitkomsten.

In hoofdzaak werd er goede overeenstemming gevonden wat betreft plaats en grootte van de storing. Als voorbeeld wordt verwezen naar de figuren, waarop is weergegeven de storing in den stuwdruk uitgezet op de hoogte boven het stabilo, uitgedrukt in de vleugel-middenkoorde (t) in fig. 3

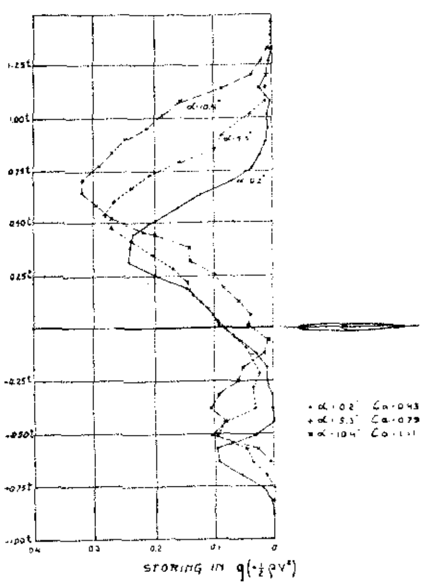


Fig. 3.

Verstoringen, gemeten aan het model, bij verschillende invalshoeken van den vleugel.

voor verschillende invalshoeken met de klap op en in fig. 4 en 5 voor vlieg- en modelproeven met ongeveer gelijke liftcoëfficiënten.

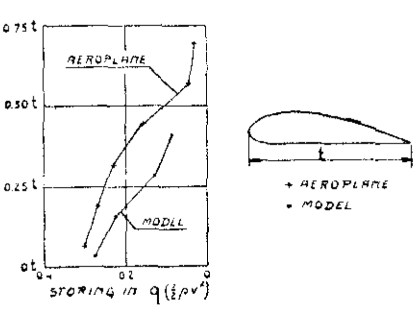


Fig. 4.

Hoewel de proeven merkbare spreiding vertoonen, hebben de lijnen toch in hoofdzaak hetzelfde verloop.

[1]) Zie VAN DER MAAS, Versl. & Verh. van den R.S.L. Deel V, bladz. 60.

De spreiding blijkt een gevolg te zijn van reeds zeer kleine afwijkingen in koers, d. w. z. van licht slippen.

De overeenkomst blijkt nog duidelijker uit fig. 5, waarin de storingen zijn vergeleken voor het geval dat op den achterligger een storingsplaat loodrecht op den vleugelbovenkant staat (afmetingen hoog 0,032 t, breedte 0,42 t, rompbreedte 0,42 t).

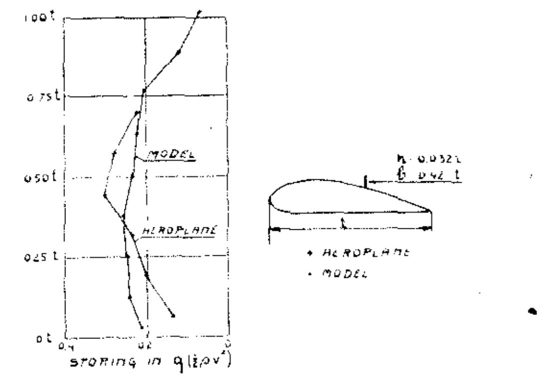


Fig. 5.

Vergelijking der storingen, model en ware grootte zonder klap (4) en met een klap op den achterligger (5).

De storingen aan het model en op ware grootte hebben hetzelfde karakter en een overeenkomstig verschil met het geval zonder klap.

Deze klap was na uitvoerige tunnelproeven gekozen, ten einde daarmede na te bootsen een storing, zooals die door een op den vleugel aangebrachten romp wordt veroorzaakt (diepdekker), en bovendien van matige sterkte, zoodat geen gevaar voor het vliegen daarmede kon worden verwacht. Bij dit onderzoek werd ook (eerst aan het model) de invloed nagegaan van de verstoringsklap op de werking van het hoogteroer. De werking bleef goed; de verandering in stand, welke noodig is om het duikmoment, dat de klap veroorzaakt, te compenseeren om met dezelfde liftcoëfficiënt te kunnen vliegen, bleek dezelfde te zijn als die, welke uit de modelproeven volgt (ul. 2°). Dit positieve duikmoment wordt wellicht verklaard door de werking van de liftvermindering die de klap veroorzaakt in een gebied, dat even breed is als de romp. De betreffende „hoefijzerwervel" levert nl. een strooming met een opwaartsche snelheids-component bij de staartvlakken (stabiliseerend effect).

Bij dezen hoogdekker ligt het storingsgebied bij grooteren invalshoek boven de staartvlakken. Met toenemenden invalshoek wordt de verstoring sterker, waarbij de toename steeds hooger boven het stabilo van dit vliegtuig-type komt te liggen. Het lijkt aannemelijk, dat bij diepdekkers de staartvlakken bij grooten invalshoek in dat storingsgebied komen.

De aard van de storing (grootte, richting en frequentie der snelheidsvariaties) werd niet onderzocht.

Bij deze proeven werd bij rechtuitvliegen alleen onrust van de staartvlakken opgemerkt bij een groote snelheid, waarbij de liggende vlakken kunnen komen in de matige verstoring, afkomstig van den vleugel.

Indien met het vliegtuig geslipt werd, werden er wel bij matige vliegsnelheid stooten in het hoogteroer gevoeld. Het ligt voor de hand om aan te nemen dat bij slippen de luchtstroom over de betrekkelijk scherpe randen van den romp slaat, waarbij geregeld wervels loslaten, die stootend werken.

De gevonden overeenkomst tusschen de uitkomsten van ware grootte- en model-proeven wettigt het doen van modelonderzoek ook aangaande de vraag in hoeverre de staartvlakken kans loopen om in een storingsgebied te komen. Hoewel de aard van de storing niet nader is onderzocht, lijkt het aannemelijk, dat de staartvlakken daarin minder werkzaam kunnen worden en zelfs op ongewenschte wijze daarin sterk stootend kunnen worden belast.

Het lijkt nuttig het onderzoek in die richting voort te zetten.

Bij deze proeven werd het vliegtuig bestuurd door Lt. W. van Gemeren.

Rapport A. 351.

Onderzoek van een wijziging aan een model van een motorgondel

door

ir. A. BOELEN.

Rapport A. 351: Expériences sur une modification d'un modèle de nacelle.

Report A. 351: Experiments on a modification of a model of a nacelle.

Bericht A. 351: Untersuchung einer Änderung an einem Modell einer Motorgondel.

RAPPORT A. 351.

Onderzoek van een wijziging aan een model van een motorgondel.

Uittreksel.

Het onderzoek geeft een vergelijking tusschen een motorgondel van den gebruikelijken vorm en een van gewijzigden vorm. De aangebrachte wijziging is in fig. 1 met zwaardere lijn aangegeven.

Trek, weerstand (zonder schroef) en moment werden gemeten voor verschillende waarden van V en V/nD. De uitkomsten zijn in tabel II t/m V en in fig. 2 t/m 5 gegeven.

Door de wijziging werd de weerstand van den gondel zonder schroef belangrijk verminderd (gemiddeld 31 %); trek, moment en nuttig effect over het algemeen een weinig vergroot. Voor een nadere bespreking van deze uitkomsten kan verwezen worden naar punt 4 van het rapport.

RAPPORT A. 351.

Expériences sur une modification d'un modèle de nacelle.

Résumé.

a. Portée de l'expérience (point 1).

Le rapport donne une comparaison entre la forme ordinaire d'une nacelle et une forme modifiée.

La modification de la nacelle est indiquée dans la fig. 1 par des lignes plus grosses. En ce cas l'air pouvait traverser la nacelle.

Pour les deux nacelles la traction, la résistance (sans hélice) et le moment étaient mesurés pour divers valeurs de V et V/nD.

Le tableau donne un aperçu des expériences (63: originale; 62: modifiée).

b. Modèle, méthode de mesure et élaboration des résultats (point 2, 3).

Comme hélice le modèle n°. 11 fut employé (Rapport A. 180, point 3, tableau II).

Le modèle du moteur, la méthode de mesure et l'élaboration des résultats sont décrits dans le Rapport A. 180 (voir note 2).

c. Résultats (point 4, 5).

Les tableaux II—V et les figures 2—5 donnent les valeurs, qui sont trouvées pour les coëfficients de traction, de moment et de résistance (c_T, c_M, c_W) et le rendement (η).

La résistance de la nacelle modifiée est bien inférieure à celle de la nacelle originale (en moyenne 31 %).

La traction, le moment et le rendement de la nacelle modifiée sont en général un peu plus grands que ceux de la nacelle originale.

La modification de la nacelle étant un agrandissement de son diamètre, on pouvait compter sur des différences entre les résultats pour les deux nacelles, qui ont le même caractère que celles dues à un petit changement du pas de l'hélice.

REPORT A. 351.

Experiments on a modification of a model of a nacelle.

Summary.

a. Scope of the investigation (point 1).

The tests give a comparison between a nacelle of the usual form and a modified one.

The modification is indicated in fig. 2 by a heavier line. In this case air could flow through the nacelle.

Thrust, torque and resistance (without propeller) have been measured for different values of V and V/nD.

Table I gives a survey of the tests (63: original, 62: modified).

b. Model, method of measurement and the elaboration of the results (point 2, 3).

The model of propeller used was model n°. 11 (Report A. 180, point 3, table II).

For the model of the motor, the method of measurement and the elaboration of the results may be referred to Report A. 180 (see note 2).

c. Results (point 4, 5).

Table II—V and the figures 2—5 give the values for thrust-, torque- and resistance coefficients (c_T, c_M, c_W) together with the efficiency (η) for both nacelles.

The resistance of the modified nacelle is much smaller than that of the original one (mean value 31 %).

Thrust, torque and efficiency for the modified model are in general somewhat higher.

The modification of the nacelle implies an increase of its diameter, so that differences of the same character as in the case of a small increase in pitch of the propeller, were to be expected.

BERICHT A. 351.

Untersuchung einer Änderung an einem Modell einer Motorgondel.

Zusammenfassung.

a. Umfang der Untersuchung (Punkt 1).

Die Untersuchung gibt einen Vergleich zwischen einer Motorgondel der üblichen Form und einer geänderten Form.

Die geänderte Form ist in Fig. 1 stark ausgezogen. In diesem Falle konnte die Luft durch die Gondel hindurch strömen.

Für beide Modelle wurden Schub, Moment und Widerstand (ohne Schraube) für verschiedene Werte von V und V/nD gemessen.

Tafel I gibt eine Übersicht über die Versuche (63: ungeänderte, 62: geänderte Form der Gondel).

b. Modell, Messmethode und Bearbeitung der Resultate (Punkt 2, 3).

Das Schraubenmodell war Modell N°. 11 (Bericht A. 180, Punkt 3, Tafel II).

Für die Modelle vom Motor, das Messverfahren und die Bearbeitung der Resultate sehe man Bericht A. 180 (Fusznote 2).

c. Resultate (Punkt 4, 5).

Tafel II—V und die Figuren 2—5 geben die Werte für Schub-, Moment- und Widerstandkoeffizienten $(c_T, c_M$ und $c_W)$ und den Wirkungsgrad (η) für beide Modelle.

Der Widerstand der geänderten Gondel ist bedeutend kleiner als der der ursprünglichen Gondel (im Durchschnitt 31 %).

Schub, Moment und Wirkungsgrad sind im allgemeinen für die geänderte Gondel etwas gröszer als für die ursprüngliche.

Da die Änderung eine Vergrösserung des Durchmessers der Gondel bedeutet, hatte man Unterschiede zu erwarten, die denjenigen, die bei einer kleinen Änderung der Schraubensteigung auftreten, ähnlich sind.

Onderzoek van een wijziging aan een model van een motorgondel [1])

door

ir. A. BOELEN.

Rapport A. 351. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

In het onderstaande rapport werden de uitkomsten besproken van metingen aan een model van een motorgondel, waarvan de vorm van de gebruikelijke afwijkt.

1. Aanleiding tot en omvang van het onderzoek.

Door de K.L.M. werd een nieuwe motorgondel voor het Fokker F. VIII-vliegtuig ontworpen. Het verschil met de bestaande uitvoering bestond hierin, dat het achter den *motor aangebrachte deel* dikker, min of meer stroomlijnvormig en aan voor- en achtereinde open was, zoodat lucht door de gondel kon stroomen. In verband met fabrikatiemoeilijkheden zou dit lichaam opgebouwd moeten worden uit kegelvormige stukken.

Daar een motorgondel van den bedoelden vorm niet op *de gebruikelijke wijze onderzocht* kon worden, werd de vorm zoodanig gewijzigd, dat dit wel mogelijk was, terwijl toch de typische eigenschappen van de gondel behouden bleven.

Met deze gondel werden metingen uitgevoerd met aangedreven schroef bij verschillende waarden van V/nD, terwijl bovendien de weerstand zonder schroef bij verschillende *snelheden gemeten werd*. Voor vergelijking werden dezelfde metingen ook uitgevoerd met een gondelmodel, dat overeenkwam met de in de F. VIII thans gebruikelijke uitvoering.

Een overzicht van de uitgevoerde metingen is in tabel I gegeven.

2. Beschrijving van de gebruikte modellen.

Als schroef werd gebruikt schroefmodel n°. 11, dat beschreven is in Rapport A. 180 (punt 3, tabel II) [2]).

Als motorgondel werden gebruikt model n°. 62 en 63. Gondel n°. 63 kwam, behoudens een kleine verlenging van het cylindrische deel, overeen met de in Rapport A. 180 (punt 3, fig. 1a) beschreven gondel n°. 1.

Model n°. 62 ontstond uit n°. 63 door:

1°. het aanbrengen van een bus van den in fig. 1 aangegeven vorm om de motorgondel;

2°. het weglaten van de houten punt aan de achterzijde.

Het weglaten van de houten punt was noodig om voldoende doorlaat te verkrijgen tusschen het huis en de bus. Hierdoor eindigde het huis in een scherpen rand en stak het telwerk er buiten uit.

Beide modellen waren voorzien van het in rapport A. 180 (punt 3) beschreven model (schaal 1 : 12) van een Jupitermotor.

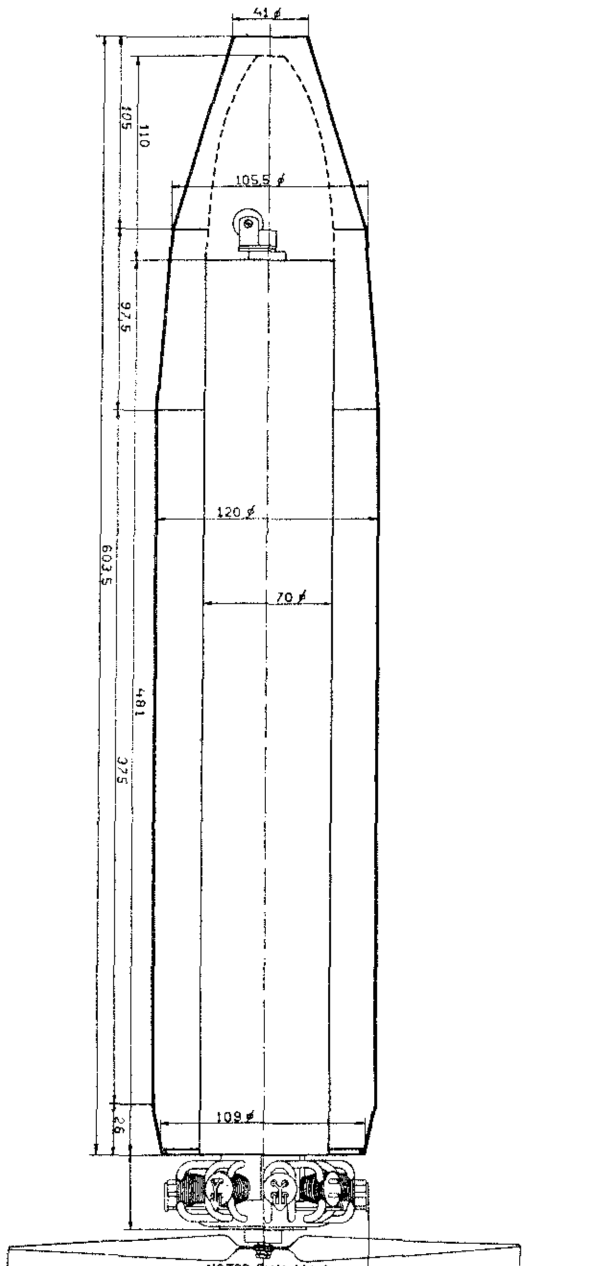


Fig. 1 (gondel modellen).

De dunne lijnen geven het oorspronkelijke model aan. Het gewijzigde model ontstaat uit het oorspronkelijke door aanbrengen van de bus (in dikke lijnen) en weglaten van de punt (in stippellijnen).

1) Daar dit onderzoek uitgevoerd werd voor de K.L.M. past hier een woord van dank voor haar welwillende toestemming voor het publiceeren van de verkregen uitkomsten.

2) Koning, C. Onderzoek van twee schroefmodellen met er achter geplaatste lichamen. Rapport A. 180, R.S.L. De Ingenieur 1929, N°. 40 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 5.

3. Beschrijving van de wijze van onderzoek en uitwerking van de verkregen gegevens.

Voor de ophanging en de meetmethode kan verwezen worden naar rapport A. 180 (punt 4, fig. 2).

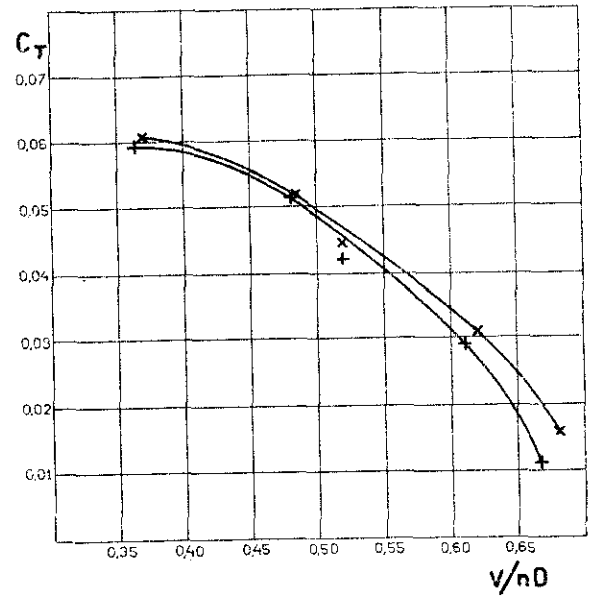


Fig. 2 { + —— + Motorgondel n°. 63 (oorspronkelijke vorm). × —— × Motorgondel n°. 62 (gewijzigde vorm met bus).

De hier gegeven trek is de netto trek, zoals deze in punt 5a van bedoeld rapport gedefinieerd is; het nuttig effect is dus ook het netto-nuttig-effect.

Op de bij de meting bepaalde waarden van den trek en den weerstand werd een door berekening verkregen correctie voor den weerstand van de ophangdraden aangebracht. De gevonden waarden voor weerstand, trek en moment zijn omgerekend in dimensielooze coëfficiënten met behulp van de in rapport A. 180 gegeven formules (1) t/m (4). Hierbij werd $D = 0,275$ m, $O = 0,01201$ m^2 (= oppervlak omschreven cirkel motormodel) aangenomen.

4. Resultaten van de metingen.

De tabellen II t/m V en fig. 2 t/m 5 geven de waarden die voor c_T, c_M, η en c_W voor beide gondels gevonden zijn.

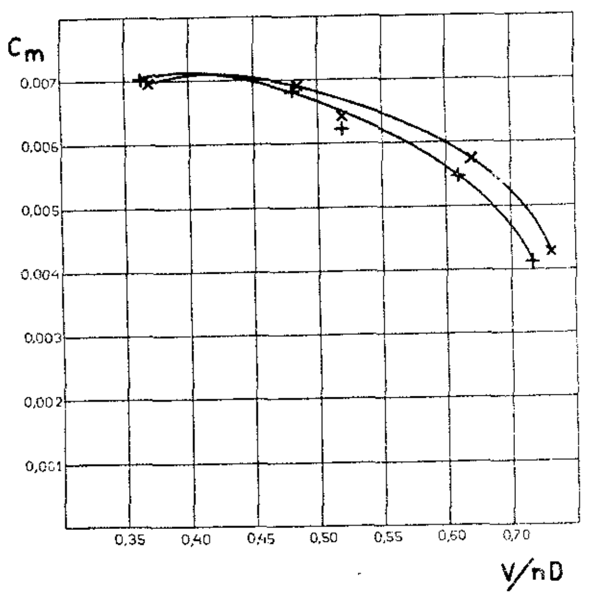


Fig. 3 { + —— + Motorgondel n°. 63 (oorspronkelijke vorm). × —— × Motorgondel n°. 62 (gewijzigde vorm met bus).

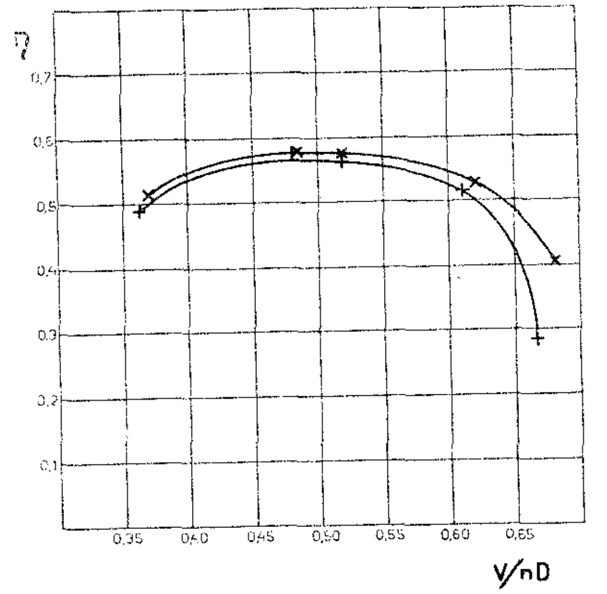


Fig. 4 { + —— + Motorgondel n°. 63 (oorspronkelijke vorm). × —— × Motorgondel n°. 62 (gewijzigde vorm met bus).

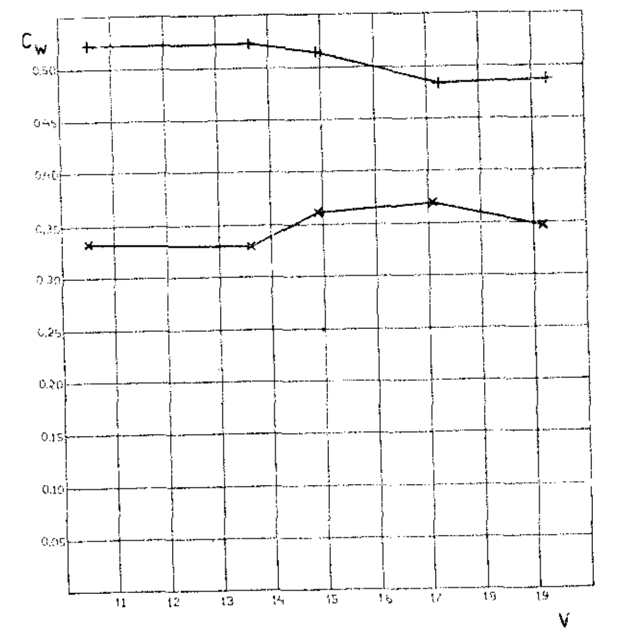


Fig. 5 { + —— + Motorgondel n°. 63 (oorspronkelijke vorm). × —— × Motorgondel n°. 62 (gewijzigde vorm met bus).

Uit deze resultaten blijkt, dat de verandering van motorgondel n°. 63 in n°. 62, hoofdzakelijk bestaande uit het aanbrengen van de bus tengevolge heeft, dat:

1°. de weerstand bij alle snelheden verminderd wordt. Deze verandering in weerstand is in Tabel V aangegeven, uitgedrukt in die van het oorspronkelijke model, dus als $\frac{\Delta c_W}{c_{W63}} = \frac{c_{W63} - c_{W62}}{c_{W63}}$, waarbij de indices 62 en 63 verwijzen naar de motorgondel in gewijzigden, respectievelijk ongewijzigden toestand. Zij bedraagt gemiddeld 0,31;

2°. de trek-coëfficiënt bij alle waarden voor V/nD, die onderzocht zijn, vermeerderd wordt. Het verschil tusschen de waarden c_T voor de twee gondels neemt eerst af daarna toe met toenemende waarde van V/nD. Het relatieve verschil $\frac{c_{T62} - c_{T63}}{c_{T63}}$ bedraagt bij $V/nD = 0,35$ en 0,65 resp. 0,03 en 0,37;

3°. de momenten-coëfficiënt in het onderzochte gebied grooter wordt. Het verschil neemt hier ook toe met V/nD en is relatief, dus uitgedrukt in $\frac{c_{M62} - c_{M63}}{c_{M62}}$, 0 bij $V/nD = 0{,}40$ en 0,13 bij $V/nD = 0{,}65$;

4°. het nuttig effect in het onderzochte gebied grooter wordt. Het maximum nuttig effect treedt op bij dezelfde waarde van V/nD n.l. voor $V/nD = 0{,}51$. De relatieve vermeerdering van het max.-nuttig-effect, dus $\frac{\eta_{max\,62} - \eta_{max\,63}}{\eta_{max\,62}}$ is 0,017.

De bij de metingen met aangedreven schroef gevonden verschillen tusschen beide gondels kunnen als volgt kwalitatief verklaard worden. De bij de metingen zonder schroef gevonden vermindering van den weerstand door het aanbrengen van de bus, zal, voor zoover dit effect niet bedorven wordt door de stroomingsonregelmatigheden in den schroefstraal, een vermeerdering van den netto trek tengevolge hebben, terwijl zij het moment niet beïnvloedt. Als gevolg van de aanwezigheid van de bus, die een verdikking van de gondel beteekent, kan verwacht worden, dat het gebied van verminderde snelheid, dat voor de gondel bestaat, hier grooter zal zijn. Hierdoor zal voor een grooter deel van de schroef de toestroomsnelheid kleiner zijn en dus bij gegeven V/nD de invalshoek van de bladen grooter zijn dan in een vrije strooming. De invloed hiervan op de eigenschappen van de schroef zal een soortgelijke zijn als die van een kleine vergrooting van den spoed. De verschillen gevonden bij overgang van gondel n°. 63 op n°. 62 vertoonen dan ook in groote trekken herzelfde karakter als die bij een kleine vergrooting van den spoed.

5. Conclusies.

a. De overgang van den oorspronkelijken gondelvorm (n°. 63) op de gewijzigde (n°. 62) geeft zonder schroef voor alle onderzochte waarden van V een belangrijke weerstandsvermindering (gemiddeld 31 %).

b. De onder *a* genoemde overgang geeft met aangedreven schroef in het onderzochte gebied over het algemeen een geringe vergrooting van c_T, c_M en η. Het maximum-nuttig-effect treedt bij dezelfde waarde van V/nD op en is ongeveer 1,5 % grooter.

c. De gevonden verschillen vertoonen in algemeene trekken hetzelfde karakter als die bij een kleine vergrooting van den spoed, voor de kwalitatieve verklaring kan verwezen worden naar de laatste alinea van punt 4.

(Afgesloten October 1931).

Tabel I.

OVERZICHT METINGEN.

Schroef n°.	Motorgondel n°.	Motorgondel bus	n/sec.	V	V/nD	Tabel	Fig.
11	63	zonder	104	—	0,36—0,67	II	2, 3, 4
—	63	zonder	—	10,5—19,3	—	III	5
11	62	met	104	—	0,37—0,68	IV	2, 3, 4
—	62	met	—	10,5—19,2	—	V	5

Tabel II.

SCHROEF n°. 11, MOTORGONDEL n°. 63.

Oorspronkelijke vorm (zonder bus).

V/nD	c_T	c_M	η
0,363	0,0594	0,00703	0,488
0,481	0,0514	0,00682	0,577
0,519	0,0424	0,00623	0,562
0,610	0,0292	0,00549	0,516
0,667	0,0111	0,00413	0,285

Tabel III.

MOTORGONDEL n°. 63.

Oorspronkelijke vorm (zonder bus).

V	c_W
10,5	0,522
13,6	0,523
14,9	0,514
17,2	0,484
19,3	0,487

Tabel IV.

SCHROEF n°. 11, MOTORGONDEL n°. 62.

Gewijzigde vorm (met bus).

V/nD	c_T	c_M	η
0,369	0,0609	0,00696	0,514
0,485	0,0518	0,00691	0,579
0,519	0,0448	0,00642	0,576
0,620	0,0308	0,00575	0,529
0,681	0,0160	0,00427	0,406

Tabel V.

MOTORGONDEL n°. 62.

Gewijzigde vorm (met bus).

V	c_W	$\frac{c_{W62} - c_{W63}}{c_{W63}}$
10,5	0,333	— 0,36
13,6	0,330	— 0,37
14,9	0,362	— 0,30
17,1	0,370	— 0,24
19,2	0,348	— 0,29

Rapport A. 363.

De invloed van de overige deelen van het vliegtuig op de werking van de staartvlakken

door

ir. C. KONING en ir. A. BOELEN.

Rapport A. 363: L'influence de l'avion sur le fonctionnement de l'empennage.

Report A. 363: The influence of the aeroplane on the action of the tail plane.

Bericht A. 363: Der Einflusz des Flugzeuges auf die Wirkungsweise des Leitwerkes.

RAPPORT A. 363.

De invloed van de overige deelen van het vliegtuig op de werking van de staartvlakken.

Uittreksel.

a. Inleiding (punt 1, 2).

Als hulpmiddel bij de bestudeering van de werking van de staartvlakken aan een vliegtuig wordt het begrip „schijnbare strooming ter plaatse van den staart" ingevoerd. De grootte en richting van de snelheid van deze schijnbare strooming, die constant zijn, moeten zoodanig bepaald worden, dat de werking van de staartvlakken dezelfde is als in de werkelijk bestaande strooming.

b. Notaties (punt 3).

Voor de beteekenis van de in de formules voorkomende grootheden kan verwezen worden naar punt 3 van het rapport en naar fig. 1.

c. Berekeningsmethode (punt 4).

Bij de berekening van $(V/V_0)^2$ en δ, die de grootte en richting van de schijnbare snelheid geven, wordt uitgegaan van (3). Iedere waarde van den roerhoek β levert één dergelijke vergelijking. Nadat voorloopige waarden voor de onbekenden geschat of met behulp van een berekening als in punt 4*b* is aangegeven bepaald zijn, kunnen zij berekend worden volgens een vereffeningsmethode (punt 4*c*).

d. Voorbeeld (punt 5, 6).

De methode werd toegepast op metingen met een model van het BE2-vliegtuig met verschillende staartvlakken (zie noot 1). De uitkomsten, die in tabel I en fig. 2 gegeven zijn, toonen aan, dat zij zeer bruikbaar is voor het in punt *a* genoemde doel.

REPORT A. 363.

The influence of the aeroplane on the action of the tail plane.

Summary.

a. Introduction (point 1, 2).

To investigate the interference effect mentioned above the notion „apparent flow" may be used. This apparent flow is the uniform one, in which the action of the tail plane would be the same as in the aeroplane. A method is given to calculate its velocity and direction from the results of measurements with a model.

b. Notations (point 3).

The meaning of the symbols used for the velocity and the angles is indicated in fig. 1. It should be noted, that V and δ are related to the apparent flow, V_0 and α to the undisturbed one. The pitching moments to be used in the calculations are given by:

M_1 (α, β) = moment of the complete aeroplane,
M_2 (α) = moment of the aeroplane without tail plane,
M_3 (γ, β) = moment of the tail plane in undisturbed flow,
M_4 (α, β) = moment of the tail plane in the flow behind the aeroplane.

c. Method of calculation (point 4).

The method is based on the equation (3). Each value of β gives one equation of this kind. First of all preliminary values of $(V/V_0)^2$ and δ are to determined, which may be done by means of a method given in point 4*b*. Starting from these values the final ones are calculated in the way indicated in point 4*c*.

d. Example (point 5, 6).

The method was applied to the results of measurements with a model of the BE2 aeroplane with three different tail planes (see note 1). The results, which are given in table I and fig. 2 and discussed in points 5*d* and 6, show that the application of the method described here will give useful information.

RAPPORT A. 363.

L'influence de l'avion sur le fonctionnement de l'empennage.

Résumé.

a. Introduction (article 1, 2).

Pour étudier le fonctionnement de l'empennage on peut se servir de la notion „courant apparent". Ce courant apparent est un courant uniforme dans lequel le fonctionnement de l'empennage serait le même que dans le courant existant en réalité. Dans le rapport une méthode est décrite pour déterminer sa vitesse et sa direction, les résultats d'expériences avec un modèle de l'avion étant donnés.

b. Symboles (article 3).

Les symboles pour indiquer les angles et les vitesses sont donnés dans la figure 1. Il faut remarquer que V et δ se rapportent au courant apparent, V_0 et α au courant à l'infini.
Les moments sont indiqués de la manière suivante:

M_1 (α, β) = moment de l'avion complet,
M_2 (α) = moment de l'avion sans empennage,
M_3 (γ, β) = moment de l'empennage isolé,
M_4 (α, β) = moment de l'empennage monté dans l'avion.

c. Méthode de calcul (article 4).

A la base de la méthode on a l'équation (3). Chaque valeur de β fournit une équation semblable. Pour commencer il faut déterminer des valeurs provisoires pour $(V/V_0)^2$ et δ par la méthode indiquée dans l'article 4*b*. Ensuite les valeurs définitives sont calculées selon la méthode d'approximation, donnée dans l'article 4*c*.

d. Exemple (article 5, 6).

On a appliqué la méthode aux résultats d'expériences avec un modèle de l'avion BE2 avec trois empennages différents (voir note 1). Les résultats, qui sont donnés dans le tableau I et la figure 2 et discutés dans les articles 5*d* et 6, indiquent que la méthode décrite peut être un instrument utile.

BERICHT A. 363.

Der Einflusz des Flugzeuges auf die Wirkungsweise des Leitwerkes.

Zusammenfassung.

a. Einführung (Punkt 1, 2).

Als Hilfsmittel bei der Untersuchung des obengenannten Einflusses wird der Begriff „scheinbare Strömung" eingeführt. Diese scheinbare Strömung ist diejenige gleichmässige Strömung, in der die Wirkung des Leitwerkes dieselbe sein würde wie am Flugzeug.

b. Formelzeichen (Punkt 3).

Die Bedeutung der Zeichen für die Geschwindigkeiten und Winkel ist in Fig. 1 angegeben. Dabei ist zu beachten, dasz V und δ zu der scheinbaren Strömung gehören, dagegen V_0 und α von der ungestörten Strömung vor dem Flugzeug bestimmt sind.

Die Momente, die in der Berechnung benutzt werden, werden folgenderweise angegeben:

M_1 (α, β) = Moment des Flugzeuges mit Leitwerk,
M_2 (α) = Moment des Flugzeuges ohne Leitwerk,
M_3 (γ, β) = Moment des Leitwerkes in einer ungestörten Strömung,
M_4 (α, β) = Moment des Leitwerkes am Flugzeug.

c. Verfahren zur Berechnung von V und δ (Punkt 4).

Das Verfahren beruht auf dem in (3) gegebenen Ansatz. Jeder Wert von β gibt eine derartige Gleichung. Zuerst werden vorläufige Werte für $(V/V_0)^2$ und δ bestimmt, was nach einem in Punkt 4*b* angegebenen Verfahren vor sich gehen kann. Ausgehend von diesen werden dann die endgültigen Werte nach dem in Punkt 4c beschriebenen Ausgleichungsverfahren berechnet.

d. Beispiel (Punkt 5, 6).

Das angegebene Verfahren wurde auf die Ergebnisse von Messungen an einem Modell des BE2-Flugzeuges mit drei verschiedenen Leitwerken angewandt (siehe Fusznote 1). Die Resultate, die in Tafel I und Fig. 2 gegeben sind und in Punkt 5*d* und 6 besprochen werden, zeigen den Nutzen der Methode.

De invloed van de overige deelen van het vliegtuig op de werking van de staartvlakken

door

ir. C. KONING en ir. A. BOELEN.

Rapport A. 363. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Een methode wordt aangegeven om metingsuitkomsten over bovengenoemden invloed zoodanig uit te werken, dat deze uitgedrukt wordt in twee grootheden. De beteekenis van deze grootheden wordt besproken en aan de hand van een getallenvoorbeeld nader toegelicht.

1. Inleiding.

De staartvlakken van een vliegtuig bevinden zich in een gebied, waar de strooming over het algemeen belangrijk beïnvloed wordt door de aanwezigheid van de overige deelen van het vliegtuig. Een theoretische berekening van dezen invloed levert slechts onvolledige resultaten op, zoodat men voor nadere bestudeering aangewezen is op de uitkomsten van experimenteel onderzoek. Een voor de hand liggende methode hierbij is het bepalen van de werking van het staartvlak aan een vliegtuigmodel door metingen met het model met en zonder staartvlak en vergelijking van deze uitkomsten met die voor hetzelfde staartvlak in een ongestoorde strooming. Daar een dergelijk onderzoek uit den aard der zaak met een model van een bepaald vliegtuig uitgevoerd moet worden en er voorloopig weinig reden bestaat om a priori aan te nemen, dat verschillende vliegtuigtypen in dit opzicht een meer dan globale overeenstemming zullen vertoonen, hebben de uitkomsten slechts incidenteele waarde. Meer algemeene beteekenis kunnen zij slechts dan krijgen, indien bij de vergelijking van uitkomsten voor verschillende typen hieruit algemeene conclusies getrokken kunnen worden. Voor een dergelijke vergelijking is het echter gewenscht, den door de overige deelen van het vliegtuig op het staartvlak uitgeoefenden invloed uit te drukken in een zoo klein mogelijk aantal grootheden. Met het oog op practische toepassing verdient het bovendien aanbeveling deze zoo te kiezen, dat zij een eenvoudige en aanschouwelijke beteekenis hebben.

In het onderstaande wordt een methode van uitwerking besproken, die in deze richting gaat. Hierbij wordt alleen het horizontale staartvlak behandeld, het lijkt echter in beginsel wel mogelijk haar ook voor het verticale staartvlak toe te passen.

2. De grondgedachte van de methode.

Het stroomingsveld, waarin zich het staartvlak bevindt, zal over het algemeen een zeer gecompliceerd karakter hebben. Grootte en richting van de snelheid zijn van punt tot punt verschillend en zullen bovendien met den tijd min of meer belangrijke schommelingen vertoonen. De vraag dringt zich echter op of het niet mogelijk is deze strooming in gedachten te vervangen door een andere met constante richting en grootte van de snelheid, zoodanig, dat de werking van het staartvlak dezelfde is en welke practische beteekenis aan deze „schijnbare strooming ter plaatse van den staart" toegekend mag worden.

Deze schijnbare strooming zal in de eerste plaats afhankelijk zijn van vorm en invalshoek van het vliegtuig. Zij is bepaald door twee grootheden, namelijk de grootte en de richting van haar snelheid, die verder als „schijnbare snelheid", resp. „schijnbare stroomingsrichting", aangeduid zullen worden. Deze kunnen, zooals in punt 4 nader besproken wordt, berekend worden, zoodra voor een invalshoek de momenten bij twee verschillende hoogteroerstanden, benevens de benoodigde gegevens voor *het staartvlak in een ongestoorde* strooming bekend zijn. Hiermede is dus het eerste deel van de boven gestelde vraag bevestigend beantwoord. Wat het tweede deel van deze vraag betreft, hierop kan slechts de ervaring een antwoord leveren. Het is nu alleen mogelijk eenige aanwijzingen te geven, in welke richting dit gezocht moet worden.

Het schijnt gewenscht, er hier nog eens met nadruk op te wijzen, dat uit de bovengegeven definitie volgt, dat de „schijnbare snelheid" en „schijnbare stroomingsrichting" niet identiek zijn met de gemiddelde snelheid en richting in de in werkelijkheid bestaande strooming. Immers beide eersten omvatten mede alle andere factoren, die invloed hebben op de werking van het staartvlak. Van deze dient in het bijzonder de onregelmatigheid van de strooming met den tijd („turbulentie") genoemd te worden, over den invloed waarvan nog zeer weinig bekend is, doch die wel van beteekenis zou kunnen blijken te zijn. Verwacht mag echter worden, dat in normale gevallen tusschen „werkelijke" en „schijnbare" strooming een nauwe verwantschap zal bestaan, een nadere bestudeering van deze moet als een belangrijk punt van verder onderzoek beschouwd worden.

Zooals boven reeds besproken werd, is het voldoende voor het bepalen van de schijnbare strooming bij een gegeven invalshoek, wanneer bij dezen de momenten bekend zijn voor twee hoogteroerstanden. Zijn er echter meerdere beschikbaar, dan kan zij voor iedere combinatie van twee van dezen afzonderlijk bepaald worden. Het is echter gewenscht, dat de op deze wijze verkregen uitkomsten onderling niet te veel verschillen, zoodat als eindresultaat gemiddelde waarden gegeven kunnen worden. Immers zal, indien blijkt, dat de „schijnbare strooming" afhankelijk is van den roerstand, dit begrip hierdoor aan *aanschouwelijkheid en daarmede* aan practische bruikbaarheid verliezen. Hetzelfde geldt ook voor gevallen, waarin metingsresultaten met verschillende staartvlakken beschikbaar zijn, tenzij de afwijkingen verklaard kunnen worden als gevolg van verschillen in opstelling, vorm of afmetingen van deze vlakken.

3. De in de berekeningen voorkomende grootheden.

Fig. 1.

De in de berekening voorkomende hoeken:

α = invalshoek van den vleugel; β = roerhoek; γ = invalshoek van het staartvlak; γ_0 = hoek tusschen staartvlak en vleugel; δ = neerstroomhoek.

De verschillende hoeken zijn in fig. 1 aangegeven in den zin, waarin zij als positief beschouwd worden. Zij zijn de volgende:

α = invalshoek van den vleugel = hoek tusschen vleugelkoorde en ongestoorde stroomingsrichting;

β = roerhoek = uitslag van het roer ten opzichte van dien stand, welke als nulstand is aangenomen;

γ = invalshoek van het staartvlak = hoek tusschen koorde, symmetrielijn of andere vaste lijn van het staartvlak en de richting van de schijnbare strooming ter plaatse van den staart;

γ_0 = hoek tusschen de bij γ bedoelde lijn van het staartvlak en de vleugelkoorde;

δ = schijnbare stroomingsrichting ter plaatse van den staart = hoek tusschen de richting van de ongestoorde strooming en die van de schijnbare strooming ter plaatse van den staart.

Tusschen deze hoeken bestaat de betrekking:

$$\alpha + \gamma_0 = \gamma + \delta \tag{1}$$

De snelheden zullen worden aangeduid door:

V_0 = snelheid van de ongestoorde strooming;

V = schijnbare snelheid ter plaatse van den staart.

De grootheden α, β, γ_0 en V_0 zijn bekend, γ, δ en V daarentegen zullen als resultaat van de berekening gevonden worden.

Als uitgangspunt voor de berekening dienen de momenten:

$M_1(\alpha, \beta)$ = moment van het volledige vliegtuig, bepaald door invalshoek van den vleugel α en roerhoek β;

$M_2(\alpha)$ = moment van het vliegtuig zonder staartvlak, bepaald door invalshoek van den vleugel α;

$M_3(\gamma, \beta)$ = moment van het staartvlak bij afwezigheid van de overige deelen van het vliegtuig, bepaald door invalshoek van het staartvlak γ en roerhoek β;

$M_4(\alpha, \beta)$ = moment van het staartvlak aan het vliegtuig, bepaald door invalshoek van den vleugel α en roerhoek β.

Alle momenten zijn die van de op het beschouwde deel van het vliegtuig werkende luchtkrachten om éénzelfde momentenpunt en bij een ongestoorde snelheid V_0. Desgewenscht kan hier ook met momenten-coëfficiënten in plaats van met momenten gewerkt worden, mits deze op hetzelfde oppervlak betrokken zijn.

De grootheden M_1, M_2 en M_3 moeten uit metingen bekend zijn, e.q. voor zoover de laatste betreft uit voor het afzonderlijke staartvlak gemeten gegevens berekend worden. Voor M_4 volgt uit haar definitie:

$$M_4(\alpha, \beta) = M_1(\alpha, \beta) - M_2(\alpha) \tag{2}$$

4. Uitwerking van de berekening.

a. Formuleering van de methode.

Volgens het in punt 2 besprokene moeten de schijnbare snelheid V en de schijnbare stroomingsrichting δ zoo bepaald worden, dat het met behulp van deze grootheden uit de gegevens voor den vrijen staart berekende moment gelijk is aan het in werkelijkheid optredende.

Dit „berekende moment" is, indien gelet wordt op de in (1) gegeven betrekking tusschen de hoeken, voor een roerhoek β_1:

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 M_3(\gamma, \beta_1) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_1),$$

het „gemeten moment" voor denzelfden roerhoek:

$$M_4(\alpha, \beta_1)$$

Uit het bovenstaande volgt:

$$M_4(\alpha, \beta_1) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_1) \tag{3}$$

waarmede dus één betrekking tusschen $(V/V_0)^2$ en δ verkregen is. Zijn bij den beschouwenden invalshoek metingen met n verschillende roerhoeken beschikbaar, dan kunnen op deze wijze n vergelijkingen opgesteld worden, waaraan de beide gevraagde grootheden moeten voldoen. Wanneer, zooals over het algemeen het geval zal zijn, n grooter dan twee is, is het aantal der vergelijkingen grooter dan dat van de onbekenden. Het ligt dan voor de hand hier de methoden der vereffeningsrekening toe te passen. Waren de vergelijkingen (3) lineair in de onbekenden, dan zou dit zonder meer mogelijk zijn en onmiddellijk tot het gewenschte eindresultaat voeren. Dit is echter niet het geval, zoodat eerst langs een anderen weg benaderingswaarden voor de onbekenden bepaald moeten worden om te dienen als uitgangspunt voor de vereffening. Deze zal dan om dezelfde reden in beginsel stapsgewijze met opvolgende benaderingen uitgevoerd moeten worden.

b. Het bepalen van voorloopige benaderingswaarden.

Is het niet mogelijk deze waarden zonder verdere berekening met voldoende nauwkeurigheid te schatten, dan moeten zij op een of andere wijze berekend worden. Een methode hiervoor, die practisch bruikbaar bleek en die ook toegepast kan worden, wanneer slechts metingen met twee roerhoeken uitgevoerd zijn, berust op het volgende.

Aangenomen zij, dat de momenten gemeten zijn voor twee roerhoeken β_1 en β_2. De op te lossen vergelijkingen zijn dan:

$$M_4(\alpha, \beta_1) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_1) \tag{4a}$$

$$M_4(\alpha, \beta_2) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_2) \tag{4b}$$

Hun verschil kan geschreven worden:

$$\triangle M_4(\alpha, \beta_1, \beta_2) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \triangle M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_1, \beta_2) \tag{4c}$$

waarin:

$$\triangle M_4(\alpha, \beta_1, \beta_2) = M_4(\alpha, \beta_1) - M_4(\alpha, \beta_2)$$

$$\triangle M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_1, \beta_2) = M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_1) - M_3(\alpha + \gamma_0 - \delta, \beta_2)$$

Voor δ wordt een waarde δ_1 aangenomen (b.v. $\delta_1 = 0$) en in (4c) ingevoerd. Daar door deze aanname $\triangle M_3$ vastgelegd is, volgt uit deze vergelijking een waarde $(V/V_0)_1^2$ voor $(V/V_0)^2$. Uit (4a) kan vervolgens bij deze waarde van $(V/V_0)^2$ M_3 berekend en uit de metingsgegevens de bijbehoorende waarde van $\delta = \delta_2$ bepaald worden. Uitgaande van δ_2 wordt nu de berekening herhaald en dit proces zoolang voortgezet, totdat voldoend nauwkeurige waarden voor $(V/V_0)^2$ en δ verkregen zijn. Meestal verloopt dit zeer snel, doordat $\triangle M_3$ slechts weinig veranderlijk is met γ en dus met δ.

Het bij deze berekening herhaalde malen noodige bepalen van M_3 bij gegeven waarde van $\gamma = \alpha + \gamma_0 - \delta$ en omgekeerd geschiedt het eenvoudigste met behulp van een grafiek, die op voldoend groote schaal M_3 geeft als functie van γ voor constante waarden van β en die ook bij het volgende deel van de berekening te pas komt.

Zijn metingen met meer dan twee roerhoeken β beschikbaar, dan kan het voordeelen bieden, meerdere van deze voor de berekening te gebruiken, hen op geschikte wijze twee aan twee te combineeren, voor ieder stel afzonderlijke waarden voor $(V/V_0)^2$ en δ te berekenen en hieruit ten slotte gemiddelde waarden te bepalen.

c. De vereffeningsmethode.

Wordt een willekeurig stel waarden voor $(V/V_0)^2$ en δ aangenomen en in de vergelijkingen (3) ingevoerd, dan vindt men, dat er tusschen eerste en tweede lid van deze vergelijkingen verschillen ε bestaan, bijv. voor den roerhoek β_1:

$$\varepsilon_1 = M_4(a, \beta_1) - \left(\frac{V}{V_o}\right)^2 M_3(a + \gamma_o - \delta, \beta_1) \qquad (5)$$

Het bepalen van zoodanige waarden voor de onbekenden, dat voor alle vergelijkingen deze verschillen ε nul worden, zal in het algemeen niet mogelijk blijken, zoodra het aantal der vergelijkingen grooter is dan dat der onbekenden. De grondgedachte, waarvan de vereffeningsrekening in dergelijke gevallen uitgaat, is nu, dat de meest waarschijnlijke waarden voor de onbekenden die zijn, waarbij de over alle vergelijkingen genomen som van de kwadraten van deze verschillen een minimum is. Dit wordt dan geschreven als:

$$[\varepsilon^2] = \text{minimum} \qquad (6)$$

waarbij, evenals in het volgende, de rechte haken op de gebruikelijke wijze de som van de binnen dezen aangegeven grootheid voor alle vergelijkingen beteekenen.

Tot een practisch bruikbare rekenmethode leidt dit echter hier, waar de vergelijkingen niet lineair zijn in de onbekenden, alleen dan, wanneer uitgegaan wordt van voorloopige waarden $(V/V_o)^2{}_o$ en δ_o voor deze, die niet te ver van de werkelijke waarden van de onbekenden afliggen en voor de laatsten ingevoerd wordt:

$$\left(\frac{V}{V_o}\right)^2 = \left(\frac{V}{V_o}\right)^2_o + \triangle_a \qquad (7a)$$

$$\delta = \delta_o + \triangle_b \qquad (7b)$$

De grootheden $\triangle_a$ en $\triangle_b$ zijn dan de zoogenaamde „verbeteringen" voor de beide onbekenden.

De door (5) gedefinieerde verschillen worden nu vervangen door

$$\varepsilon = M_4(a, \beta) - \left(\frac{V}{V_o}\right)^2_o M_3(a + \gamma_o - \delta_o, \beta) - M_3(a + \gamma_o -$$
$$- \delta_o, \beta)\,\triangle_a + \left(\frac{V}{V_o}\right)^2_o \left\{\frac{\partial\, M_3(\beta)}{\partial \gamma}\right\}_{\gamma = a + \gamma_o - \delta_o} \triangle_b \qquad (8)$$

of

$$\varepsilon = C - A\,\triangle_a - B\,\triangle_b$$

met

$$A = M_3(a + \gamma_o - \delta_o, \beta)$$

$$B = -\left(\frac{V}{V_o}\right)^2_o \left\{\frac{\partial M_3(\beta)}{\partial \gamma}\right\}_{\gamma = a + \gamma_o - \delta_o}$$

$$C = M_4(a, \beta) - \left(\frac{V}{V_o}\right)^2_o M_3(a + \gamma_o - \delta_o, \beta)$$

Invoering van deze waarden voor ε in de minimum-voorwaarde (6) geeft:

$$\left[\left\{ C - A\,\triangle_a - B\,\triangle_b \right\}^2\right] = F(\triangle_a, \triangle_b) = \text{minimum} \qquad (9)$$

Men heeft hier dus te maken met een functie van de beide grootheden $\triangle_a$ en $\triangle_b$, terwijl die waarden van deze bepaald moeten worden, waarbij de beschouwde functie een minimum heeft. Analytisch beteekent deze voorwaarde, dat voldaan moet worden aan

$$\frac{\partial F(\triangle_a, \triangle_b)}{\partial \triangle_a} = 0 \qquad \frac{\partial F(\triangle_a, \triangle_b)}{\partial \triangle_b} = 0$$

De voorwaarde (9) levert dus de beide vergelijkingen:

$$\left[A^2\right]\triangle_a + \left[A\,B\right]\triangle_b = \left[A\,C\right] \qquad (10a)$$

$$\left[A\,B\right]\triangle_a + \left[B^2\right]\triangle_b = \left[B\,C\right] \qquad (10b)$$

De uit deze vergelijkingen berekende waarden $\triangle_{a1}$ en $\triangle_{b1}$ voor de verbeteringen geven, ingevoerd in (7), benaderingswaarden voor de onbekenden, die met $(V/V_o)^2{}_1$ en δ_1 aangegeven zullen worden. Dat hier niet de exacte waarden gevonden worden, is het gevolg van het feit, dat in (9) met de benaderingswaarde (8) voor ε in plaats van met de exacte (5) gewerkt moest worden. Vervanging van $(V/V_o)^2{}_o$ en δ_o door $(V/V_o)^2{}_1$ en δ_1 en herhaling van de berekening geeft een volgend stel verbeteringen. Op deze wijze moet voortgegaan worden totdat voldoend nauwkeurige waarden voor $(V/V_o)^2$ en δ gevonden zijn, hetgeen blijkt uit het verschijnsel, dat de volgende verbeteringen binnen de voor de onbekenden gestelde nauwkeurigheidsgrenzen vallen.

d. De beteekenis van de verschillen ε.

De verschillen ε, berekend voor de als einduitkomst verkregen waarden van $(V/V_o)^2$ en δ, zijn van beteekenis voor de beoordeeling van deze uitkomsten. Zij zullen als betrouwbaarder beschouwd mogen worden, naarmate de verschillen kleiner zijn. Als maatstaf kan hierbij de som $[\varepsilon^2]$ aangenomen worden. Het zou natuurlijk mogelijk zijn om hieruit middelbare fouten voor de uitkomsten te berekenen, waarop hier echter niet nader ingegaan kan worden.

Van belang kan ook een eventueele regelmaat in het verloop van de verschillen zijn. Immers wanneer zij vrij groot zijn, doch geen regelmatig verloop met β vertoonen, zullen zij in de eerste plaats toegeschreven moeten worden aan normale metingsonregelmatigheden, al zal ook de onregelmatigheid van de strooming hierbij een rol spelen. Een regelmatig verloop daarentegen zal de reeds in punt 2 besproken vraag op den voorgrond brengen, of het wel toelaatbaar is voor alle roerstanden éénzelfde gemiddelde strooming aan te nemen. Onder „regelmatig verloop" van de verschillen moet ook het verschijnsel ondergebracht worden, dat zij voor kleine roerhoeken klein, voor groote daarentegen grooter zijn, ook al zijn zij in dit laatste geval onregelmatig.

Nadere bijzonderheden hierover zullen in punt 5*d* bij de behandeling van een uitgewerkt geval ter sprake komen.

5. Bespreking van een uitgewerkt voorbeeld.

a. Algemeen.

Om een indruk te krijgen of de boven beschreven methode practisch bruikbare resultaten opleverde, werd zij toegepast op de uitkomsten van een door Bramwell en Stedman uitgevoerd onderzoek met een model van het BE2-vliegtuig [1]). Deze keuze geschiedde natuurlijk niet op grond van een speciale belangstelling voor dit verouderde vliegtuigtype, doch omdat dit onderzoek een zeer uitvoerig en bovendien betrouwbaar lijkend materiaal leverde.

b. Bijzonderheden over het beschikbare materiaal.

Het model was een tweedekker met gelijken boven- en ondervleugel met normalen afstand tusschen beide en een slanken op den ondervleugel liggenden romp. Afgezien van de ontbrekende schroef was het vrij volledig.

Er werden drie verschillende horizontale staartvlakken met bijbehoorende hoogteroeren gebruikt, die aangegeven werden als T.P. 1, T.P. 2 en T.P. 3. T.P. 1 was ongeveer halfcirkelvormig, T.P. 2 en T.P. 3 waren gelijk van omtreksvorm, nagenoeg rechthoekig met breedteverhouding 4 (met inbegrip van hoogteroer). Bij alle drie was het hoogteroer in het midden uitgesneden om de beweging van het richtingsroer mogelijk te maken. T.P. 1 en T.P. 2 hadden een draagvlakachtig asymmetrisch profiel en waren op het bovenvlak van den romp bevestigd. T.P. 3 daarentegen had een symmetrisch profiel en was zijdelings aan den romp, ongeveer op de halve hoogte van dezen aangebracht.

De duikmomenten werden gemeten voor het model met en zonder staartvlakken bij invalshoeken a van $-20°$ tot $+20°$, symmetrischen stand van het model (gierhoek $0°$) en voor zoover het model met T.P. 2 en T.P. 3 betreft, met roerhoeken β van $-45°$ tot $+45°$. De metingen met het model met T.P. 1 werden alleen met roerhoek $\beta = 0°$ uitgevoerd.

Voor de afzonderlijke staartvlakken werden de luchtkrachten gemeten voor dezelfde gebieden van invals- en roerhoeken en hieruit de momenten van den vrijen staart berekend om hetzelfde momentenpunt, waarop de uitkomsten voor de vliegtuigmodellen betrokken waren.

Naast deze metingen werd ook nog een onderzoek uitgevoerd van de strooming ter plaatse van het staartvlak. Hierbij werd een vlakke plaat van gelijken vorm en afmetingen als het halve staartvlak T.P. 2 (of T.P. 3) gebruikt. Deze plaat werd bij het model zonder staartvlak ter plaatse hiervan en te halver hoogte van den romp opgesteld en die stand bepaald, waarbij haar lift nul was, terwijl bovendien voor dezen stand de weerstand gemeten werd. Uit den stand

[1]) BRAMWELL, F. H. and STEDMAN, E. W. Experiments on models of complete aeroplanes. R. & M. 111 (Part I—III). Technical Report. Advisory Committee for Aeronautics 1913—14, p. 129—176.

van de plaat volgde dan de gemiddelde richting van de strooming, uit haar weerstand de gemiddelde snelheid. Deze wijze om de laatste te bepalen, is uit den aard der zaak zeer onnauwkeurig. Tusschen de op deze wijze gemeten „gemiddelden" en de volgens onze methode berekende bestaat natuurlijk een zekere overeenkomst. Beide wegen behoeven echter niet tot hetzelfde resultaat te leiden, daar in het eene geval met een vlakke plaat met lift nul, in het andere daarentegen met een meestal, ten gevolge van de roerverstelling, geknikt profiel en vaak vrij hooge lift gewerkt werd. Het is zeer wel mogelijk, dat in deze twee gevallen de onregelmatigheid van de strooming een verschillenden invloed zal hebben.

Voor verdere bijzonderheden over model en uitvoering van de metingen kan verwezen worden naar de in noot 1 genoemde publicatie.

c. Bijzonderheden over de uitwerking.

De resultaten van de metingen met T.P. 2 en T.P. 3 werden op de in punt 4 besproken wijze uitgewerkt. Hierbij werd alleen rekening gehouden met die voor roerhoeken van — 15° tot en met + 15°, omdat vermoed werd, dat voor groote waarden van dezen hoek de uitkomsten minder regelmatig zouden zijn. Daar voor het model met T.P. 1 slechts metingen met één roerhoek uitgevoerd waren, kon deze methode hier niet toegepast worden. Om echter toch dit geval met de beide andere te kunnen vergelijken, werd op grond van het feit, dat de opstelling van het staartvlak dezelfde was als voor T.P. 2, aangenomen, dat ook de waarde van $(V/V_0)^2$ hier dezelfde was en nu met behulp van (4) de bijbehoorende waarde van δ bepaald.

Op alle uitkomsten werd een correctie aangebracht voor den invloed van de tunnelwanden. Deze correctie, die berekend werd volgens de door Glauert aangegeven methode [2]), bleek zeer klein te zijn. Zij bedroeg ten hoogste 0,1°.

De neerstrooming achter een vleugelcel hangt ten nauwste samen met de lift van deze. Voor het gebied, waarin de strooming om de vleugels niet loslaat, is het bij gegeven circulatieverdeeling mogelijk haar te berekenen. De circulatieverdeeling was echter niet bekend, bovendien zou een dergelijke berekening hier geen zin hebben, omdat de aanwezigheid van den romp een storenden invloed van onbekende grootte beteekent. Om nu toch een indruk te kunnen krijgen hoe de in werkelijkheid optredende schijnbare strooming ter plaatse van den staart zich verhoudt tot de theoretisch berekende werd de neerstrooming bepaald voor een hoefijzerwervel, waarvan de dragende lijn zich bevond op de halve hoogte van de tweedekkercel en op 1/4 van de koorddiepte van voren. De lift van de dragende lijn was hierbij gelijk aan die van het model zonder staartvlak, haar breedte gelijk aan de vleugelbreedte. Rekening werd gehouden met het feit, dat bij verandering van den invalshoek de plaats van het staartvlak ten opzichte van de cel een andere wordt, de beschouwde neerstrooming dus niet zuiver lineair met de lift verloopt.

d. Bespreking van de uitkomsten.

Tabel I geeft de uitkomsten van de berekeningen voor het model met de drie verschillende staartvlakken, bovendien de voor den hoefijzerwervel berekende waarden van δ („berekend") en de volgens de in punt 5b beschreven methode gemeten waarden van $(V/V_0)^2$ en δ („gemeten"). Het bleek, dat in het gebied, waarin de uitkomsten het regelmatigste verloopen, namelijk dat van $\alpha = -8°$ tot en met $\alpha = +8°$, de waarden van δ voor de verschillende staartvlakken en de gemeten waarden van deze grootheid met voldoende benadering gegeven kunnen worden door:

$$\text{T.P. 1:}\ \delta = -0{,}3 + 1{,}21\ \delta_h \tag{11a}$$

$$\text{T.P. 2:}\ \delta = -0{,}2 + 1{,}22\ \delta_h \tag{11b}$$

$$\text{T.P. 3:}\ \delta = +0{,}1 + 1{,}12\ \delta_h \tag{11c}$$

$$\text{gemeten:}\ \delta = +0{,}1 + 1{,}17\ \delta_h \tag{11d}$$

Hierin is δ_h de voor den hoefijzerwervel berekende waarde.

---

[2]) GLAUERT, H. The elements of aerofoil and airscrew theory (Cambridge 1926), p. 196.

De in tabel I gegeven waarden zijn, met uitzondering van de „berekende", in fig. 2 op den invalshoek uitgezet. In deze figuur is tevens de liftcoëfficiënt c_a voor het model

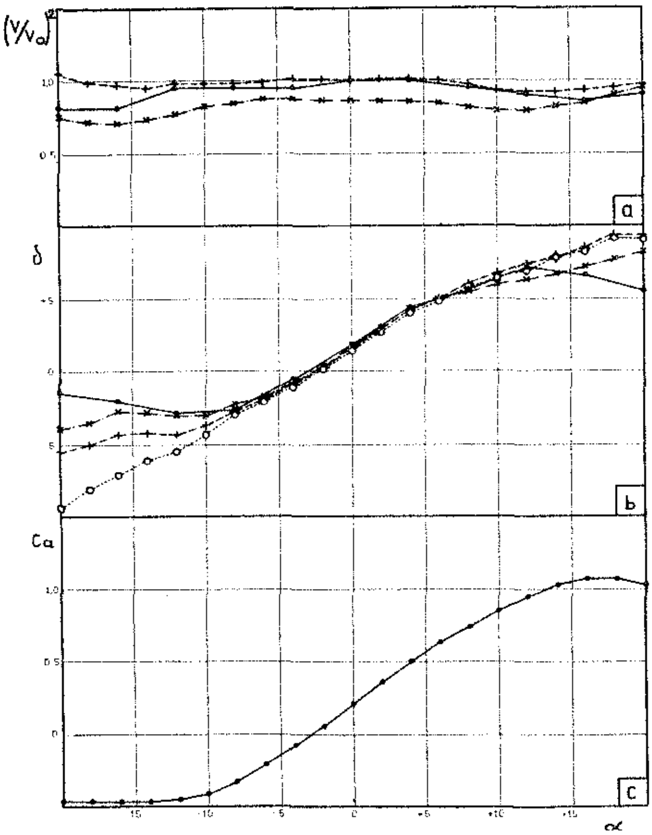


Fig. 2.

De uitkomsten van de berekening voor het BE2-model. α = invalshoek; V_0 = snelheid van de ongestoorde strooming; V = snelheid van de schijnbare strooming ter plaatse van den staart; δ = richting van de schijnbare strooming ter plaatse van den staart (zie fig. 1); c_a = liftcoëfficiënt.

○ · · · ○: berekend voor T.P. 1.
+ — — +: „ „ T.P. 2.
× —·— ×: „ „ T.P. 3.
● · · · ●: gemeten gemiddelde waarden.

zonder staartvlakken opgenomen. Er blijkt namelijk een zeer nauw verband te bestaan tusschen het verloop van deze grootheid en den neerstroomhoek δ. Zooals uit fig. 2b te zien is, verloopen de waarden van δ vanaf $\alpha = -8°$ tot aan $\alpha = +12°$ over het algemeen regelmatig, terwijl de afwijkingen tusschen de verschillende krommen vrij gering zijn. Voor de buiten dit gebied gelegen invalshoeken wordt de onregelmatigheid grooter, terwijl, vooral bij de negatieve hoeken, de krommen sterk uiteenloopen. Genoemde grenzen blijken nu ongeveer samen te vallen met de punten, waar de liftkromme belangrijk begint af te buigen en dus waarschijnlijk loslaten van de strooming over een grooter gebied van de vleugels optreedt. Het gebied, waarin de uitkomsten regelmatig zijn, valt dus samen met dat, wat het gebied van normale invalshoeken genoemd zou kunnen worden. Ook in de uitkomsten voor $(V/V_0)^2$ is hetzelfde verschijnsel merkbaar, hoewel het hier minder uitgesproken is. Een nadere vergelijking van het verloop van de waarden voor δ en c_a toont, dat ook kleinere knikken in de c_a-lijn (b.v. bij $\alpha = +4$) in de δ-lijnen teruggevonden kunnen worden.

Een onderlinge vergelijking van de waarden van δ voor de verschillende staartvlakken in het gebied van normale invalshoeken kan, daar de verschillen hier klein zijn, het beste geschieden aan de hand van de boven gegeven uitkomsten (11). Hieruit blijkt, dat zoowel voor T.P. 1 en T.P. 2 (11a, b) als voor T.P. 3 en de gemeten waarden (11c, d) δ practisch dezelfde waarde heeft. Nu bestaat er ook inderdaad verschil tusschen deze beide groepen: T.P. 1 en T.P. 2 waren op het bovenvlak van den romp bevestigd, terwijl daarentegen T.P. 3 zijdelings aan dezen en lager aangebracht was en ook de metingen, waaruit de „gemeten" waarden van δ afgeleid werden, ongeveer op dezelfde plaats uitgevoerd werden. Voor de buiten het normale gebied gelegen waarden van den invalshoek daarentegen loopen de uitkomsten voor de verschillende staartvlakken verder uiteen, hier moet gedacht worden aan verschillen veroorzaakt door de onregelmatigheid van de strooming, die samengaat met het loslaten van deze aan de vleugels.

De uitkomsten $(V/V_0)^2$ voor T.P. 2 en T.P. 3 vertoonen een belangrijk verschil, dat in het gebied van normale invalshoeken vrij constant is. Dit verschil schijnt toegeschreven te moeten worden aan den invloed van de plaats van het staartvlak ten opzichte van den romp, hoewel het verwonderlijk is, dat deze invloed zoo groot is. De gemeten waarden stemmen hier beter overeen met de uitkomsten voor T.P. 2 dan met die voor T.P. 3, terwijl de metingen ongeveer op de plaats van laatstgenoemd staartvlak uitgevoerd werden. Dit kan veroorzaakt zijn door het feit, dat het staartvlak aan den romp aansloot, terwijl daarentegen bij de meting de plaat op eenigen afstand van den romp gehouden moest worden. Bovendien was de meting van de snelheid, zooals reeds in punt *5b* opgemerkt werd, onnauwkeurig.

In punt *4d* werd besproken, dat de verschillen ε tusschen het bij een bepaalden invals- en roerhoek gemeten moment van het staartvlak en de met behulp van $(V/V_0)^2$ en δ hiervoor berekende waarde van belang zijn voor de beoordeeling van de uitkomsten. In tabel II zijn deze daarom voor T.P. 2 voor een aantal invalshoeken gegeven, voor de overige hoeken vertoont ε dezelfde hier te bespreken eigenaardigheden. Ook voor T.P. 3 is dit het geval, alleen is hierbij $[\varepsilon^2]$ in het gebied van normale invalshoeken over het algemeen grooter en meer constant.

Hoewel $(V/V_0)^2$ en δ berekend zijn voor de bij de roerhoeken van $-15°$ tot en met $+15°$ behoorende waarden van de momenten, werden toch ook voor de overige roerhoeken de waarden van ε bepaald om een indruk te kunnen krijgen, in hoeverre de schijnbare strooming ook hier nog geldig is. Het vroeger uitgesproken vermoeden, dat voor groote roerhoeken de uitkomsten onregelmatiger zouden zijn, wordt hier bevestigd. Terwijl in het gebied, waarvan de waarden voor de berekening gebruikt werden, de afwijkingen binnen redelijke grenzen blijven, komen er buiten belangrijk grootere ε's voor. Weliswaar zouden deze, wanneer de groote roerhoeken ook in de berekening opgenomen waren, over het algemeen kleiner zijn, voor het meerendeel echter toch nog buiten de normale spreiding vallen.

Een ander verschijnsel, dat reeds bij oppervlakkige beschouwing van de in de tabel II gegeven waarden opvalt, is het overwegen van vrij groote positieve afwijkingen voor sommige roerhoeken en van soortgelijke negatieve voor andere. Dit vertoont geen regelmatig verloop met den roerhoek, het ligt daarom voor de hand te vermoeden, dat het veroorzaakt is door onnauwkeurigheden in het stellen van dezen hoek. Dit wijst op het belang van het zoo nauwkeurig mogelijk stellen van den roerhoek bij dergelijke proeven.

Het verloop van $[\varepsilon^2]$, welke som genomen is over de roerhoeken van $-15°$ tot $+15°$, is vrij regelmatig. De kleinste waarden komen voor in de omgeving van $\alpha = -8°$, terwijl zij van hier uit naar beide zijden tamelijk regelmatig toenemen.

Uit een en ander kan de conclusie getrokken worden, dat voor het hier beschouwde model voor het gebied van normale invalshoeken $(-8° \leq \alpha \leq +12°)$ gesproken mag worden van een schijnbare strooming ter plaatse van den staart, die practisch onafhankelijk is van den aard van het staartvlak en van den roerhoek, voor zoover deze tenminste niet grooter is dan 15°. Wel is zij daarentegen afhankelijk van de plaats van het staartvlak aan den romp en vermoedelijk ook, hetgeen hier niet onderzocht werd, van de afmetingen van dit vlak. De schijnbare strooming vertoont hier een groote overeenkomst met de rechtstreeks gemeten gemiddelde strooming. Voor buiten genoemd gebied gelegen invalshoeken blijft wel de onafhankelijkheid van den roerhoek bestaan, daarentegen leveren de verschillende staartvlakken min of meer verschillende uitkomsten. Daar de grenzen van bedoeld gebied ongeveer samenvallen met die, waarbinnen de strooming niet of weinig van de vleugels zal loslaten en zij dus weinig onregelmatig zal zijn, ligt het voor de hand hierin een verband tusschen de beide verschijnselen te veronderstellen en te zeggen, dat zoolang de strooming niet te onregelmatig is, de schijnbare strooming onafhankelijk is van den aard van de staartvlakken, doch dat het optreden van grootere onregelmatigheden hieraan een einde maakt. De bij grootere roerhoeken waargenomen afwijkingen kunnen beschouwd worden als veroorzaakt door de toch aanwezige geringere onregelmatigheid van de strooming, waarvoor het in deze gevallen sterk geknikte profiel gevoeliger kan zijn. Voorloopig gelden deze uitspraken alleen voor het hier beschouwde geval.

6. Conclusies.

Uit het bovenstaande kan de algemeene conclusie getrokken worden:

a. De beschreven methode levert een bruikbaar hulpmiddel bij de bestudeering van de werking van staartvlakken aan een vliegtuig.

Voor het in punt 5 besproken speciale geval (model van een BE2-vliegtuig zonder schroef) gelden voorts nog de volgende conclusies, waaraan echter geen algemeene waarde toegekend mag worden, voordat zij door een nader onderzoek voor andere vliegtuigtypen bevestigd zijn:

b. Voor normale invalshoeken $(-8° \leq \alpha \leq +12°)$ en niet te groote roerhoeken $(-15° \leq \beta \leq +15°)$ is de „schijnbare strooming ter plaatse van den staart", zooals deze in punt 2 en *4a* gedefinieerd is, onafhankelijk van den roerhoek en van den aard van het staartvlak, daarentegen wel afhankelijk van den invalshoek van het vliegtuig, van de plaats van het staartvlak ten opzichte van den romp en waarschijnlijk ook van de afmetingen van dit vlak.

c. Voor buiten genoemd gebied gelegen invalshoeken blijft de onafhankelijkheid van de schijnbare strooming van den roerhoek bestaan, doch geven verschillende staartvlakken min of meer verschillende uitkomsten.

d. In het onder *b* aangegeven gebied vertoont de volgens de hier beschreven methode berekende schijnbare strooming een zeer groote overeenkomst met de rechtstreeks gemeten gemiddelde strooming.

e. Er bestaat een nauw verband tusschen den aard van de schijnbare strooming en het verloop van de liftcoëfficiënt. Het onder *b* aangegeven gebied valt samen met dat, waarin de strooming waarschijnlijk niet of weinig van de vleugels loslaat en dus weinig onregelmatig is. Het verschijnsel, dat buiten dit gebied de schijnbare strooming afhankelijk is van den aard van het staartvlak, kan toegeschreven worden aan den invloed van de grootere onregelmatigheid van de strooming.

f. De plaats van het staartvlak ten opzichte van den romp heeft een belangrijken invloed op de grootte van de schijnbare snelheid, daarentegen slechts een zeer geringen op de schijnbare stroomingsrichting.

g. Het is van belang bij proeven als de hier beschouwde de roerhoeken zoo nauwkeurig mogelijk te stellen.

(Afgesloten November 1931.)

Tabel I.

UITKOMSTEN VOOR HET BE2-MODEL MET VERSCHILLENDE STAARTVLAKKEN.

Staartvlak		T.P. 1	T.P. 2		T.P. 3		Berekend	Gemeten	
Methode		1	2		2		3	4	
α	c_a	δ	$(V/V_o)^2$	δ	$(V/V_o)^2$	δ	δ	$(V/V_o)^2$	δ
— 20	— 0,462	— 9,4	1,05	— 5,5	0,75	— 3,9	— 3,1	0,81	— 1,4
— 18	— 0,462	— 8,1	0,99	— 5,0	0,72	— 3,5	— 3,1	—	—
— 16	— 0,464	— 7,1	0,97	— 4,3	0,71	— 2,7	— 3,2	0,81	— 2,0
— 14	— 0,463	— 6,1	0,95	— 4,2	0,73	— 2,8	— 3,2	—	—
— 12	— 0,448	— 5,5	0,98	— 4,3	0,77	— 3,0	— 3,1	0,95	— 2,8
— 10	— 0,410	— 4,3	0,98	— 3,7	0,82	— 3,0	— 2,9	—	—
— 8	— 0,326	— 3,0	0,98	— 2,8	0,84	— 2,2	— 2,3	0,95	— 2,6
— 6	— 0,205	— 2,1	0,99	— 2,0	0,87	— 1,7	— 1,5	—	—
— 4	— 0,069	— 1,1	1,01	— 0,9	0,87	— 0,7	— 0,5	0,95	— 0,5
— 2	+ 0,061	+ 0,1	1,01	+ 0,2	0,86	+ 0,3	+ 0,4	—	—
0	+ 0,217	+ 1,4	1,00	+ 1,7	0,86	+ 1,8	+ 1,5	1,00	+ 1,8
+ 2	+ 0,365	+ 2,7	1,01	+ 2,9	0,86	+ 3,0	+ 2,5	—	—
+ 4	+ 0,502	+ 4,0	1,01	+ 4,2	0,85	+ 4,3	+ 3,5	1,00	+ 4,4
+ 6	+ 0,630	+ 4,8	1,00	+ 5,0	0,84	+ 4,9	+ 4,3	—	—
+ 8	+ 0,739	+ 5,8	0,97	+ 6,0	0,81	+ 5,5	+ 5,0	0,95	+ 5,8
+ 10	+ 0,852	+ 6,4	0,93	+ 6,7	0,79	+ 6,0	+ 5,7	—	—
+ 12	+ 0,949	+ 6,9	0,92	+ 7,4	0,79	+ 6,3	+ 6,2	0,90	+ 7,1
+ 14	+ 1,029	+ 7,8	0,92	+ 7,8	0,82	+ 6,7	+ 6,6	—	—
+ 16	+ 1,075	+ 8,2	0,93	+ 8,5	0,84	+ 7,2	+ 6,7	0,86	+ 6,6
+ 18	+ 1,077	+ 9,1	0,95	+ 9,3	0,90	+ 7,7	+ 6,6	—	—
+ 20	+ 1,028	+ 9,0	0,97	+ 9,3	0,95	+ 8,2	+ 6,1	0,90	+ 5,5

Methode 1: berekend met behulp van de waarden van $(V/V_o)^2$ voor T.P. 2.
„ 2: berekend volgens de in punt 4 beschreven methode.
„ 3: berekend uit strooming om hoefijzerwervel.
„ 4: gemeten gemiddelde waarden.

Tabel II.

DE VERSCHILLEN ε VOOR HET BE2-MODEL MET STAARTVLAK T.P. 2.

α	ε voor β =											$[\varepsilon^2]$
	— 45	— 30	— 15	— 10	— 5	0	+ 5	+ 10	+ 15	+ 30	+ 45	
— 20	+ 0,014	+ 0,005	— 0,003	0	+ 0,001	+ 0,001	+ 0,005	+ 0,002	— 0,004	+ 0,012	— 0,018	56×10^{-6}
— 16	+ 0,006	0	— 0,003	+ 0,002	+ 0,003	— 0,002	+ 0,003	— 0,001	— 0,002	+ 0,005	—	40
— 12	+ 0,017	+ 0,006	0	+ 0,002	— 0,003	— 0,001	— 0,001	— 0,005	+ 0,004	+ 0,001	— 0,023	56
— 8	— 0,013	0	— 0,001	+ 0,002	+ 0,002	— 0,003	0	+ 0,001	+ 0,002	— 0,009	— 0,026	23
— 6	+ 0,015	— 0,004	— 0,004	+ 0,001	+ 0,002	— 0,003	0	0	— 0,003	— 0,011	— 0,023	39
— 4	+ 0,011	— 0,011	— 0,005	+ 0,003	+ 0,004	— 0,004	+ 0,004	0	— 0,003	— 0,010	— 0,021	91
— 2	+ 0,005	— 0,016	— 0,004	+ 0,002	+ 0,005	— 0,005	+ 0,003	— 0,001	0	— 0,010	— 0,019	80
0	— 0,001	— 0,018	— 0,004	+ 0,001	+ 0,005	— 0,004	+ 0,004	+ 0,001	— 0,002	— 0,007	— 0,016	79
+ 2	+ 0,002	— 0,018	— 0,003	+ 0,001	+ 0,006	— 0,005	+ 0,005	— 0,001	0	— 0,006	— 0,015	97
+ 4	0	— 0,018	— 0,003	+ 0,001	+ 0,006	— 0,002	+ 0,004	— 0,002	— 0,001	— 0,007	— 0,014	71
+ 6	— 0,001	— 0,020	— 0,006	+ 0,002	+ 0,006	— 0,004	+ 0,003	— 0,001	— 0,003	— 0,005	— 0,013	111
+ 8	0	— 0,023	— 0,005	+ 0,003	+ 0,006	— 0,004	+ 0,003	— 0,001	— 0,001	— 0,006	— 0,012	97
+ 12	+ 0,007	— 0,011	— 0,003	+ 0,004	+ 0,003	— 0,007	— 0,001	— 0,001	+ 0,006	+ 0,011	+ 0,001	121
+ 16	+ 0,029	— 0,005	— 0,001	+ 0,002	+ 0,001	— 0,005	— 0,002	— 0,001	+ 0,002	+ 0,016	+ 0,006	40
+ 20	+ 0,031	+ 0,001	+ 0,002	+ 0,003	+ 0,001	— 0,006	— 0,002	— 0,002	+ 0,007	+ 0,020	+ 0,016	107

Rapport V. 358.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. I.

door

ir. C. KONING.

Rapport V. 358: L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. I.

Report V. 358: The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. I.

Bericht V. 358: Der Einflusz der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. I.

RAPPORT V. 358.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. I.

Uittreksel.

a. Omvang van het hier behandelde deel.

Als voortzetting van het vroeger gepubliceerde onderzoek naar den invloed van het ribverband op de sterkte en stijfheid van vliegtuigvleugels wordt hier de afleiding besproken van de vergelijkingen voor een vleugel met weerstandbiedende bekleeding. Een methode om deze vergelijkingen op te lossen wordt kort aangegeven.

b. Overzicht van de methode.

In punt 2 van het rapport wordt een overzicht van de hier gevolgde methode gegeven.

c. Aannamen, notaties.

De aannamen, waarvan uitgegaan wordt, en de beteekenis van de belangrijkste notaties worden in punt 3, resp. 4 van het rapport besproken. Bovendien is aan het einde van het rapport een overzicht van de notaties gegeven.

d. Uitkomsten.

De verkregen differentiaalvergelijkingen en de randvoorwaarden, waaraan de oplossingen moeten voldoen, zijn in punt 11 van het rapport verzameld.

RAPPORT V. 358.

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. I.

Résumé.

a. Etendue de la partie traitée ici (article 1).

Les équations différentielles pour une aile avec revêtement résistant sont déduites comme extension des recherches sur l'aile sans revêtement publiées déjà dans des rapports précédents (*voir littérature* 1, 2, 3).

b. Aperçu de la méthode (article 2).

Une méthode analogue à celle décrite dans le rapport V. 284 (voir littérature 3) pour les ailes sans revêtement est employée pour la déduction des équations pour les longerons.

L'aile est traitée comme se composant de trois parties (fig. 1). Les parties du revêtement situées en dehors des longerons sont inclus dans celles-ci. La partie située entre les longerons doit être traitée séparément.

c. Suppositions (article 3).

Des suppositions introduites, les suivantes sont les plus importantes:

les nervures sont distribuées d'une façon continue, tandis que leur nombre est infini;

la rigidité des nervures contre flexion dans le plan yz (voir fig. 2) est infinement grande, contre flexion dans le plan xz et contre torsion elle est zéro;

la partie du revêtement située entre les longerons a une forme de façon telle que son intersection avec un plan perpendiculaire aux longerons est une ligne droite.

d. Les équations différentielles pour les longerons (article 7, 8, 9).

Pour obtenir ces équations il faut considérer l'équilibre de la partie de l'aile située hors d'un plan perpendiculaire aux longerons (fig. 5: ,,doorsnede x''). Quand on substitue les déformations au lieu des efforts (voir aussi *e*), les conditions d'équilibre autour des axes z_1 et x_1 donnent les équations (10) et (14).

e. Le revêtement (article 5, 6).

Les déformations du revêtement sont données par les déplacements ξ et ζ parallèles aux axes x et z. ξ est divisée *en deux parties* $\bar{\xi}$ *et* $\bar{\bar{\xi}}$ *(3), dont* la première peut être donnée en fonction des déformations des longerons, tandis que ζ est déterminée entièrement par celles-ci (4) (voir aussi fig. 4).

Les efforts dans le revêtement sont donnés par (6) et (7). Par la condition d'équilibre des tensions parallèles à l'axe x on obtient les équations différentielles (8) pour les déplacements $\bar{\bar{\xi}}$.

f. Les conditions marginales (article 10).

Les conditions marginales pour les longerons sont données par (15), (16) et (18). Pour la détermination de la dernière il faut considérer la torsion de la nervure marginale (voir aussi fig. 8).

Les conditions marginales pour les déplacements $\bar{\bar{\xi}}$ sont données par (19). Les quatres premières (19*a* jusqu'à 19*d*) sont fixées par la définition (3) de $\bar{\bar{\xi}}$, tandis que les autres sont d'un caractère arbitraire.

g. Aperçu des résultats (article 11).

Les équations différentielles pour les déformations des longerons, celles pour les déplacements $\bar{\bar{\xi}}$ du revêtement et les conditions marginales, auxquelles doivent satisfaire les solutions, sont données sous une forme plus claire par (20) *jusqu'à (23).*

h. Remarque sur la méthode de solution (article 12).

On peut obtenir une solution des équations par une méthode d'approximation en tenant compte du fait, que les parties, indiquées par F_1 et F_2 dans les équations (20), ne sont que d'une importance secondaire. On peut ici employer les méthodes décrites antérieurement pour les équations pour l'aile sans revêtement (voir littérature 1, 2, 4, 5).

Les solutions des équations (21) peuvent être données sous la forme (24).

i. Symboles.

A, B, C	=	quantités, dont la signification est donnée dans l'article 11;
D	=	effort tranchant dans un longeron;
E	=	,,coefficient d'élasticité de traction à contraction empêchée'';
G	=	coefficient d'élasticité de glissement;
M	=	moment fléchissant;
S_b	=	coefficient de résistance contre flexion;
S_t	=	coefficient de résistance contre torsion;
W	=	moment de torsion;
b	=	distance des longerons (voir fig. 2, 3);
h	=	(sans indice ou avec indice r): distance d'un point du revêtement jusqu'au plan neutre de l'aile;
h	=	(avec indice 1 ou 2): hauteur d'un longeron (voir fig. 3);
l	=	longueur des longerons (voir fig. 2);
m	=	moment fléchissant continu;
q	=	charge extérieure continue;
w	=	moment de torsion continu;
x, y, z	=	coordonnées (voir fig. 2);
y	=	(avec indice) ordonnée de la courbe élastique d'un longeron;
β	=	angle entre le revêtement et le plan neutre (voir fig. 4);
δ	=	épaisseur du revêtement;
φ	=	déplacement angulaire d'une section de l'aile (voir fig. 2, 4);
ξ	=	(sans indice) variable d'intégration;
ξ	=	(avec indice) déplacement d'un point du revêtement parallèle à l'axe x;
ζ	=	déplacement d'un point du revêtement parallèle à l'axe z;
σ_x	=	tension dans un plan perpendiculaire à l'axe x;
τ	=	effort de glissement dans un plan perpendiculaire à l'axe x;
ϑ	=	déplacement angulaire d'une section de la nervure marginale (voir fig. 8).

Indices.

1, 2	=	concernant le longeron avant, respectivement arrière;
b, o	=	concernant la face dorsale, respectivement inférieure;
u	=	causé par les charges extérieures;
e	=	causé par les efforts élastiques;
r	=	concernant la nervure marginale.

REPORT V. 358.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. I.

Summary.

a. Extent of the part treated here (point 1).

The problem of the wing, in which the influence of the covering is not to be neglected, is treated here as an extension of that of the wing without covering published previously (see literature 1, 2, 3).

b. Survey of the method (point 2).

The method used here is the same as given in report V. 284 (see literature 3) for the wing without covering.

The wing is divided into three parts (fig. 1). Whereas the parts of the covering laying outside the spars are included in these, the middle part is to be treated separately.

c. Suppositions (point 3).

The most important of the suppositions introduced here are the following:

the ribs are distributed continuously, their number being infinite;

the rigidity of the ribs against bending in the yz-plane (see fig. 2) is infinite, against bending in the xz-plane and against torsion it is zero;

the part of the covering between the spars has such a form, that its intersection with a plane perpendicular to the spars is a straight line.

d. The differential equations for the spars (point 7, 8, 9).

The equilibrium of the part of the wing outside a plane perpendicular to the spars (fig. 5: „doorsnede x") is considered. The equations (10) and (14) are obtained by introducing the strain instead of the stresses (see also point e) in the conditions of equilibrium about the axes of z_1 and x_1.

e. The wing covering (point 5, 6).

The strain of the covering is given by the displacements ξ and ζ in the direction of the axes of x and z. ξ is divided into two parts, $\bar{\xi}$ and $\bar{\bar{\xi}}$, the first of which is given as a function of the deflexions of the spars (3), whereas ζ is entirely determined by these deflexions (4) (see also fig. 4).

The stresses in the covering are given by (6) and (7). The condition of equilibrium of the stresses leads to the differential equations (8) for the displacements $\bar{\bar{\xi}}$.

f. The boundary conditions (point 10).

The boundary conditions for the spars are given by (15), (16) and (18). To obtain the latter the torsion of the end rib had to be considered (see also fig. 8).

The boundary conditions for the displacements $\bar{\bar{\xi}}$ are given by (19). Four of them (19a till d) are fixed by the definition (3) of $\bar{\bar{\xi}}$, while the other ones are somewhat arbitrary.

g. Synopsis of the results (point 11).

The differential equations for the deflexions of the spars, those for the displacements $\bar{\bar{\xi}}$ and the boundary conditions, which are to be satisfied, are summarized in (20) till (23).

h. Some remarks on the method of solution (point 12).

It is possible to solve the equations by means of a method of approximation, if account is taken of the fact, that the expressions, indicated by F_1 and F_2 in the equations (20), are only of secondary importance. In this way the methods, developed in previous reports (see literature 1, 2, 4, 5) may be used here.

The solution of the equations (21) may be given in the form (24).

i. Notations.

A, B, C	= quantities, defined in point 11;
D	= shearing force in a spar;
$\bar{\bar{E}}$	= „modulus of elasticity, contraction being prevented" (see point 6);
G	= rigidity;
M	= bending moment;
S_b	= coefficient of rigidity against bending;
S_t	= coefficient of rigidity against torsion;
W	= torsional moment;
b	= distance of the spars (see fig. 2);
h	= (without index or with index r) distance from a point of the covering to the central plane of the wing;
h	= (with index 1 or 2) height of a spar (see fig. 3);
l	= lenght of the spars (see fig. 2);
m	= bending moment applied continuously;
q	= continuous external load;
w	= torsional moment applied continuously;
x, y, z	= coordinates (see fig. 2);
y	= (with index) deflexion of a spar;
β	= angle between the covering and the central plane of the wing (see fig. 4);
δ	= thickness of the covering;
φ	= angular displacement of a section of the wing (see fig. 2, 4);
ξ	= (without index) variable of integration;
ξ	= (with index) displacement of a point of the covering parallel to the axis of x;
ζ	= displacement of a point of the covering parallel to the axis of z;
σ_x	= tension in a plane perpendicular to the spars;
τ	= shearing stress in a plane perpendicular to the spars;
ϑ	= angular displacement of a section of the end rib (see fig. 8).

Indices.

1, 2	= related to front, respectively rear spar;
b, o	= related to upper, respectively lower surface;
u	= calculated from external loads;
e	= calculated from stresses;
r	= related to end rib.

BERICHT V. 358.

Der Einflusz der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. I.

Zusammenfassung.

a. Umfang des hier behandelten Teiles (Punkt 1).

Als Fortsetzung der früheren Arbeiten über Rippenverbundwirkung (siehe Schrifttum („Literatuur") 1, 2, 3) werden hier die Gleichungen für einen beplankten Flügel abgeleitet.

b. Übersicht des Verfahrens (Punkt 2).

Zur Ableitung der Gleichungen wird ein Verfahren benutzt, das dem in Bericht V. 284 (Schrifttum 3) für den Flügel ohne Beplankung Gegebenen ähnlich ist.

Der Flügel wird dabei in drei Teile zerlegt (Fig. 1). Die vorderen und hinteren Teile der Beplankung werden zu den Holmen gerechnet, der Teil zwischen den Holmen dagegen soll gesondert in der Rechnung eingeführt werden.

c. Annahmen (Punkt 3).

Von den Annahmen sollen als Wichtigste genannt werden:

die Rippen sind stetig verteilt, während ihre Anzahl unendlich grosz ist;

die Rippen sind starr gegen Biegung in der yz-Ebene, ihre Steifigkeit gegen Biegung in der xz-Ebene und gegen Torsion ist verschwindend klein;

der Teil der Beplankung zwischen den Holmen wird von einer Ebene senkrecht zu den Holmen nach einer Geraden geschnitten.

d. Die Differentialgleichungen für die Holme (Punkt 7, 8, 9).

Das Gleichgewicht eines Flügelteiles auszerhalb einer zu den Holmen senkrechten Ebene (Fig. 5: „doorsnede x") wird betrachtet. Nachdem statt der Spannungen die Formände-

rungen eingeführt sind, geben die Gleichgewichtsbedingungen gegen Drehung um die z_1- und x_1-Achse die Gleichungen (10) und (14).

e. Die Beplankung (Punkt 5, 6).

Die Formänderungen der Beplankung werden von den Verschiebungen ξ und ζ in die Richtungen der x- und z-Achsen gegeben. ξ wird in zwei Teile, $\bar{\xi}$ und $\bar{\bar{\xi}}$, zerlegt (3), von denen der Erste von den Formänderungen der Holme bestimmt ist. ζ kann als Funktion dieser Formänderungen gegeben werden (4) (siehe auch Fig. 4). Die Spannungen in der Beplankung sind von (6) und (7) gegeben. Die Gleichgewichtsbedingung für diese Spannungen in der Richtung der x-Achse gibt die Differentialgleichungen (8) für die Verschiebungen $\bar{\bar{\xi}}$.

f. Die Randbedingungen (Punkt 10).

Die Randbedingungen für die Holme sind von (15), (16) und (18) gegeben. Zur Ableitung der Bedingung (18) wird die Torsion der Endrippe betrachtet (siehe auch Fig. 8).

Die Randbedingungen für die Verschiebungen $\bar{\bar{\xi}}$ sind von (19) gegeben. Die vier Ersten (19*a* bis *d*) sind von der Definition (3) vorgeschrieben, die Weiteren dagegen sind ziemlich willkürlich.

g. Übersicht der Ergebnisse (Punkt 11).

Die Differentialgleichungen für die Formänderungen der Holme, die für die Verschiebungen $\bar{\bar{\xi}}$ der Beplankung und die Randbedingungen, denen die Lösungen genügen sollen, sind in (20) bis (23) zusammengefaszt.

h. Bemerkungen über das Lösungsverfahren (Punkt 12).

Die Lösung der Gleichungen kann nach einem Iterationsverfahren vor sich gehen, wenn man beachtet, dasz der Einflusz der Glieder, die in den Gleichungen (20) zu F_1 und F_2 zusammengezogen sind, beschränkt ist. Dabei können die schon zur Lösung der Gleichungen für den Flügel ohne Beplankung angegebene Verfahren (Schrifttum 1, 2, 4, 5) benutzt werden.

Die Lösung der Gleichungen (21) kann in der Form (24) angesetzt werden.

i. Formelzeichen.

A, B, C	=	Koeffizienten, deren Bedeutung in Punkt 11 angegeben ist;
D	=	Querkraft in einem Holme;
$\bar{E}$	=	„Elastizitätsmodul bei Verhinderung der Kontraktion" (siehe Punkt 6);
G	=	Gleitmodul;
M	=	Biegungsmoment;
S_b	=	Steifigkeit gegen Biegung;
S_t	=	Steifigkeit gegen Torsion;
W	=	Torsionsmoment;
b	=	Holmabstand (siehe Fig. 2);
h	=	(ohne Zeiger oder mit Zeiger r): Abstand von einem Punkte der Beplankung zur Mittelebene des Flügels;
h	=	(mit Zeiger 1 oder 2): Holmhöhe (siehe Fig. 3);
l	=	Holmlänge (siehe Fig. 2);
m	=	stetig verteilter Biegungsmoment;
q	=	stetig verteilte äuszere Belastung;
w	=	stetig verteilter Torsionsmoment;
x, y, z	=	Koordinaten (siehe Fig. 2);
y	=	(mit Zeiger) Ordinate der elastischen Linie eines Holmes;
β	=	Winkel zwischen Beplankung und Mittelebene des Flügels (siehe Fig. 4);
δ	=	Stärke der Beplankung;
φ	=	Verdrehungswinkel eines Flügelquerschnittes (siehe Fig. 2, 4);
ξ	=	(ohne Zeiger): Integrationsvariable;
ξ	=	(mit Zeiger): Verschiebung eines Punktes der Beplankung in der Richtung der x-Achse;
ζ	=	Verschiebung eines Punktes der Beplankung in der Richtung der z-Achse;
σ_x	=	Normalspannung in einer zur x-Achse senkrechten Ebene;
τ	=	Schubspannung in einer zur x-Achse senkrechten Ebene;
ϑ	=	Verdrehungswinkel eines Querschnittes der Endrippe (siehe Fig. 8).

Zeiger.

1, 2	=	zu dem Vorderholm, bezw. dem Hinterholm gehörend;
b, o	=	zu dem oberen, bezw. unteren Teil der Beplankung gehörend;
u	=	von den äuszeren Lasten herrührend;
e	=	von den inneren Spannungen herrührend;
r	=	zu der Endrippe gehörend.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. I. [1]

door

ir. C. KONING.

Rapport V. 358. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

In het onderstaande wordt, als voortzetting van het vroeger behandelde vraagstuk van den vleugel zonder huid, een afleiding gegeven van de differentiaal-vergelijkingen voor een vleugel met weerstandbiedende bekleeding. Een oplossingsmethode voor deze vergelijkingen wordt kort besproken.

1. Inleiding.

In vroegere publicaties (*lit.* 1, 2) [2] over den invloed van het ribverband werd er reeds op gewezen, dat, indien de vleugel bedekt is met een weerstandbiedende bekleeding of „huid", deze een belangrijken invloed kan hebben op zijn *sterkte en stijfheid*. Om echter niet van den aanvang af het vraagstuk te ingewikkeld te maken, werd deze invloed voorloopig buiten beschouwing gelaten en alleen die van het ribverband behandeld. Voortbouwend op de daarbij verkregen ervaring worden hier nu de grondslagen ontwikkeld van een berekeningsmethode voor vleugels, waarbij zoowel het geraamte als de huid belangrijke bijdragen tot de sterkte en stijfheid leveren. Hierbij is gedacht aan vleugels, bestaande uit een geraamte van twee door ribben verbonden liggers en een bekleeding, die trek- en schuifspanningen kan opnemen, dus vleugels van een constructiewijze, zooals die bijv. in de Fokker-verkeersvliegtuigen wordt toegepast. In het volgende zal blijken, dat deze methode het reeds vroeger behandelde geval (*lit.* 1, 2, 3, 4), waarbij de invloed van de huid te verwaarloozen is, mede omvat. Voor vleugels, waarvan de constructie belangrijk van de hier beschouwde afwijkt (één-ligger-vleugels met dragende huid; Junkers-constructie) zullen daarentegen andere berekeningsmethoden toegepast moeten worden.

2. Overzicht van de methode.

Aanvankelijk werd bij de behandeling van den vleugel met huid een methode gebruikt, die ongeveer analoog was met die, welke in rapport V. 175 (*lit.* 2) voor den vleugel zonder huid besproken is. Daar het echter bleek, dat de later in rapport V. 284 (*lit.* 3) gepubliceerde methode ook hier overzichtelijker was, zal in het onderstaande de laatste weg gevolgd worden.

Beschouwd wordt dus het evenwicht van het deel van den vleugel, dat ligt buiten een vlak loodrecht op de liggers („doorsnede x") (zie fig. 5). Op dit deel werken eenerzijds uitwendige belastingen, anderzijds de in de doorsnede x optredende spanningen. Deze laatsten kunnen uitgedrukt worden in de vormveranderingen van den vleugel, zoodat de evenwichtsvoorwaarden dus betrekkingen leveren tusschen deze vormveranderingen en de uitwendige belastingen (punt 7, 8, 9).

Het is bij de behandeling gewenscht, den vleugel, als in fig. 1 is aangegeven, gesplitst te denken in de volgende drie deelen:

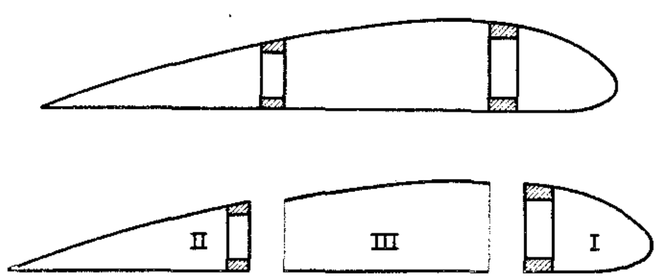


Fig. 1.

Splitsing van den vleugel in drie deelen.

I = samengestelde voorligger; II = samengestelde achterligger; III = ribverband.

- de voorligger met het deel van ribben en huid, dat zich vóór dezen bevindt;
- de achterligger met het er achter gelegen deel van ribben en huid;
- het overblijvende deel, dus bestaande uit die deelen van *ribben en huid*, die zich tusschen de beide liggers bevinden.

Beide eerstgenoemde deelen gedragen zich bij buiging en torsie als gewone liggers. Zij zullen dan ook verder als „voor-", resp. „achterligger" aangeduid worden, waar noodig ter onderscheiding van de „eigenlijke liggers" voorzien van de toevoeging „samengestelde".

Het derde deel heeft een soortgelijke werking als de ribben in een vleugel zonder huid en zal daarom in het volgende den naam „ribverband" dragen.

De in de doorsnede x werkende spanningen kunnen, voor zoover zij optreden in de deelen, die tot de samengestelde liggers gerekend worden, samengevat worden tot in deze werkende dwarskrachten, buigende en wringende koppels. Dit vlak doorsnijdt echter ook het zich tusschen de liggers bevindende, dus tot het ribverband behoorende, deel van de huid. De hierin voorkomende spanningen, die uitgedrukt kunnen worden in de vormveranderingen van de huid, moeten afzonderlijk in rekening gebracht worden. Deze vormveranderingen zijn weliswaar bepaald door de doorbuigingen van de liggers, doch slechts een deel van hen kan er op eenvoudige wijze expliciet in uitgedrukt worden, terwijl het andere deel uit evenwichtsvoorwaarden voor de huid gevonden moet worden (punt 5, 6).

Door een en ander gaan nu de evenwichtsvoorwaarden voor het beschouwde deel van den vleugel over in twee differentiaalvergelijkingen voor de doorbuigingen van de liggers, die echter naast de uitwendige belastingen nog termen in de vervormingen van de huid bevatten, zoodat ook de differentiaalvergelijking voor laatstgenoemde vervormingen noodig is (punt 11).

---

[1] Een korte mededeeling over dit onderwerp werd reeds gedaan in een op het Vme Congrès International de la Navigation Aérienne (1930) gehouden voordracht (*lit.* 6).

[2] De aanwijzingen *lit.* verwijzen naar de literatuuropgave aan het einde van het rapport.

Daar de beide eerstgenoemde vergelijkingen en de randvoorwaarden, waaraan hun oplossingen moeten voldoen, een groote overeenkomst vertoonen met die voor den vleugel zonder huid en de termen, die de vervormingen van de huid expliciet bevatten, in practisch voorkomende gevallen slechts van vrij ondergeschikt belang blijken te zijn, is het mogelijk een benaderingsoplossing te verkrijgen met behulp van een iteratie-methode, waarbij gebruik gemaakt kan worden van de voor oplossing van de vergelijkingen voor den vleugel zonder huid ontwikkelde methoden (punt 12).

3. Aannamen.

Wat de eigenschappen van het uit liggers en ribben bestaande geraamte betreft, wordt hier uitgegaan van de in punt 2 van rapport V. 175 (*lit.* 2) besproken aannamen. Hierbij dient opgemerkt te worden, dat eigenschappen, die daarbij aan de liggers toegekend werden, hier gelden voor de samengestelde liggers in bovenomschreven zin. Zoo liggen de zwaartepunten van alle doorsneden van de samengestelde liggers in onbelasten toestand in één vlak, het „vleugelvlak" (xz-vlak, zie fig. 2). De vervorming ten gevolge van de door de dwarskrachten veroorzaakte afschuiving van liggers en ribben wordt ook hier ter wille van de vereenvoudiging buiten beschouwing gelaten. Dit deel van de vervorming zal echter over het algemeen voor houten vleugels niet onbelangrijk zijn. Het is de bedoeling voorloopig aan dit bezwaar te gemoet te komen door bij practische toepassingen hiervoor geschatte of langs experimenteelen weg bepaalde correcties aan te brengen.

Van de aannamen, die betrekking hebben op de eigenschappen van de ribben, dient hier herinnerd te worden aan de vervanging van het in werkelijkheid aanwezige eindige aantal ribben door een continu verdeeld oneindig aantal en aan het feit, dat de ribben verondersteld worden geen torsiestijfheid om haar as (//z-as) te hebben. Voorts wordt hier dan nog aangenomen, dat de ribben geen weerstand bieden tegen buiging in het vleugelvlak (xz-vlak), daarentegen oneindig groote stijfheid hebben tegen buiging in het hier loodrecht op staande yz-vlak.

De onderlinge afstand van de eigenlijke liggers is constant, terwijl aangenomen wordt, dat de torsiepunten van de samengestelde liggers samenvallen met de middelpunten van de doorsneden van de eigenlijke liggers en dat deze midden tusschen de bevestigingslijnen van de bekleeding van boven- en ondervlak liggen. De uitwendige belastingen worden als aangrijpend aan de eigenlijke liggers en continu langs deze verdeeld gedacht.

De vleugelbekleeding wordt als dun beschouwd in dien zin, dat met over de dikte gemiddelde spanningen en vervormingen gewerkt mag worden. Het materiaal, waaruit de huid bestaat, voldoet aan de wet van Hooke (evenredigheid van vervormingen met spanningen). Dit behoeft niet noodzakelijk gevallen, waarin het materiaal plooit, uit te sluiten. De ervaring leert namelijk, dat ook voor dergelijke gevallen vaak met voldoende nauwkeurigheid genoemde wet als geldig aangenomen mag worden, zij het dan ook met fictieve *elasticiteitsconstanten, die verschillen van die voor het* ongeplooide materiaal. Isotropie (onafhankelijkheid van de elastische eigenschappen van de richting) is geen vereischte. De bevestiging van de bekleeding aan ribben en liggers is zoodanig, dat de verplaatsingen van beide deelen in de bevestigingslijn gelijk zijn.

Voor het deel van de huid tusschen de liggers wordt aangenomen, dat de elastische eigenschappen en de dikte voor boven- en ondervlak verschillend kunnen zijn, doch in ieder van beide constante waarden hebben. Dit deel van de huid wordt verder aan boven- en ondervlak vervangen door een bekleeding met dezelfde eigenschappen, doch van zoodanigen vorm, dat zij door een vlak loodrecht op de liggers volgens een rechte gesneden wordt. De verplaatsing van de neutrale lijn van de liggers, ten gevolge van de door dit deel van de bekleeding uitgeoefende krachten, wordt verwaarloosd.

Bij de behandeling van de vormveranderingen (punt 5) worden nog eenige verdere aannamen van minder principieele beteekenis ingevoerd.

Zooals bij een nadere kennismaking met het volgende zal blijken, zijn sommige der hier besproken aannamen noodzakelijk om de gegeven methode te kunnen toepassen. Voor andere is dit niet het geval, deze werden ingevoerd met de vooropgezette bedoeling haar hier zoo overzichtelijk mogelijk uiteen te zetten. Voor gevallen, waarin de een of andere van laatstbedoelde aannamen niet toelaatbaar is, zal een uitbreiding van de methode in deze richting geen andere bezwaren dan omvangrijker formules en meer rekenwerk medebrengen.

Als typische voorbeelden van aannamen, die tot de eerste groep gerekend moeten worden, kunnen genoemd worden: de continu verdeelde ribben, de aannamen over de elastische eigenschappen van deze, *het dun-zijn van de bekleeding*. Tot de tweede groep behooren o. m. het samenvallen van het torsiepunt van de samengestelde liggers met het middelpunt van de eigenlijke liggers, het constant zijn van dikte en elastische eigenschappen van de huid over het middendeel van den vleugel, de continu verdeelde uitwendige belastingen.

4. Notaties.

Aan het einde van het rapport is een overzicht van de gebezigde notaties gegeven. Hoewel deze over het algemeen overeenstemmen met de vroeger gebruikte, heeft toch de beteekenis van eenige symbolen een wijziging ondergaan in verband met de uitbreiding van het vraagstuk.

Het coördinaten-stelsel wordt, als in fig. 2 aangegeven is, zoo aangenomen, dat de oorsprong samenvalt met het inklem-

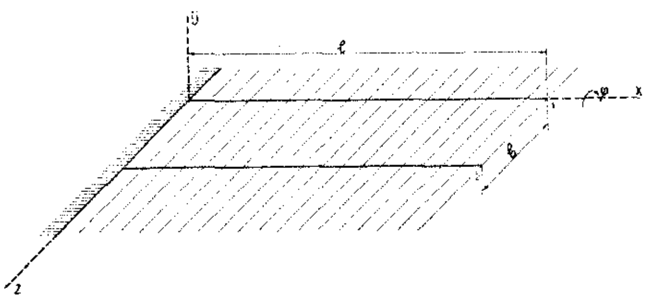


Fig. 2.

Geraamte van den vleugel met coördinatenstelsel.

punt van den eigenlijken voorligger, de z-as gaat door dat van den achterligger, en het xz-vlak samenvalt met het vleugelvlak. De positieve y-as komt hierbij aan de bovenzijde van den vleugel.

Overeenkomstig het vroeger gevolgde gebruik beteekenen de indices 1 en 2, dat de beschouwde grootheid betrekking heeft op den voor-, *resp. achterligger. Bovendien wordt de* index 1 op enkele plaatsen, waar verwarring buitengesloten schijnt, gebruikt voor aanduiding van een coördinaat van een speciaal punt of voor een stelsel van hulpassen. De indices b en o, waar noodig gecombineerd met de voorgaande, geven grootheden, behoorende bij het boven-, resp. ondervlak van den vleugel, aan.

S_b en S_t beteekenen hier niet meer de stijfheidsfactoren tegen buiging en wringing van de eigenlijke liggers, doch die van de samengestelde liggers. De afstand en de lengte van de liggers worden als vroeger met b en l aangegeven, terwijl h, voorzien van de index 1 of 2, de afstand beteekent tusschen de lijnen, waar de bekleeding van boven- en ondervlak aan een *ligger bevestigd is, gemeten loodrecht op het* vleugelvlak en tot op het midden van de huid (zie fig. 3). Daarentegen geeft h zonder index de hoogte van een punt van de bekleeding boven het vleugelvlak.

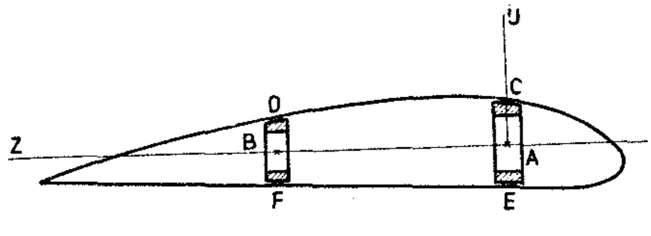


Fig. 3.

Afmetingen van een vleugeldoorsnede.

A, B = middelpunt van eigenlijke voor-, resp. achterligger; $AB = b$; $AC = AE = \frac{1}{2}\,h_1$; $BD = BF = \frac{1}{2}\,h_2$.

De ordinaten van de elastische lijnen van de liggers zijn y_1 en y_2, de verdraaiing van een doorsnede is dus:

$$\varphi = \frac{y_2 - y_1}{b} \tag{1}$$

De vormverandering van het deel van de huid tusschen de liggers wordt gegeven door de verplaatsingen ξ en ζ in de richting van de x- en z-as, naast deze grootheden, die steeds met een index voorkomen, wordt ξ als integratie-variabele gebruikt in plaats van x.

Gewone differentiaalquotiënten naar x zullen met accenten aangegeven, partiëele differentiaalquotiënten daarentegen volledig uitgeschreven worden.

5. De vormveranderingen van den vleugel.

De vervorming van het geraamte wordt, afgezien van de torsie van de ribben en haar buiging in het xz-vlak, die beide hier van geen belang zijn, volledig vastgelegd door de ordinaten y_1 en y_2 van de elastische lijnen der liggers. Zijn deze bekend, dan volgt hieruit met behulp van (1) de verdraaiingshoek φ en zijn zoodoende ook de vormveranderingen en spanningen bepaald, die optreden in die deelen van de huid, welke tot de samengestelde liggers gerekend worden. Daar zij volgens bekende methoden berekend kunnen worden [3]) en hier van geen direct belang zijn, kan een verdere beschouwing er over achterwege blijven.

Op grond van de in punt 3 besproken aannamen over de eigenschappen van de ribben en van de bevestiging van de bekleeding aan het geraamte kunnen ook de verplaatsingen ζ voor het deel van de huid tusschen de liggers onmiddellijk uitgedrukt worden in de vervormingen van dezen. Voor de verplaatsingen ξ is dit alleen het geval in de lijnen, waar de huid aan de liggers bevestigd is, dus in $z = o$ en $z = b$, overigens blijven zij voorloopig onbepaald. Uit den aard der zaak moeten de verplaatsingen voor boven- en ondervlak afzonderlijk beschouwd worden.

Is voor een doorsnede van den voorligger de kromming gegeven door y_1'', dan is de rek van de bekleeding van het bovenvlak daar ter plaatse:

$$\varepsilon_{xb} = \frac{\partial \xi_b}{\partial x} = -\tfrac{1}{2} h_1 y_1''$$

en de verplaatsing in de x-richting:

$$(\xi_b)_{z=0} = -\tfrac{1}{2} \int_o^x h_1 y_1''\, dx \tag{2a}$$

Op dezelfde wijze kan voor de andere bevestigingslijnen bepaald worden:

$$(\xi_o)_{z=0} = +\tfrac{1}{2} \int_o^x h_1 y_1''\, dx = -(\xi_b)_{z=o} \tag{2b}$$

$$(\xi_b)_{z=b} = -\tfrac{1}{2} \int_o^x h_2 y_2''\, dx \tag{2c}$$

$$(\xi_o)_{z=b} = +\tfrac{1}{2} \int_o^x h_2 y_2''\, dx = -(\xi_b)_{z=b} \tag{2d}$$

Voor de verdere behandeling biedt het voordeelen ξ te splitsen in twee deelen. Het eerste deel $\bar{\xi}$ verloopt lineair met z, zoodanig dat het voor $z = o$ en $z = b$ de door (2) gegeven waarden aanneemt, terwijl het tweede deel $\bar{\bar{\xi}}$ een voorloopig onbekende functie is, die echter aan beide genoemde lijnen de waarde nul zal moeten hebben. Dit levert dan:

$$\xi_b = \bar{\xi}_b + \bar{\bar{\xi}}_b \tag{3a}$$

$$\xi_o = \bar{\xi}_o + \bar{\bar{\xi}}_o \tag{3b}$$

met

$$\bar{\xi}_b = +(\xi_b)_{z=o} + \left\{(\xi_b)_{z=b} - (\xi_b)_{z=o}\right\}\frac{z}{b} \tag{3c}$$

$$\bar{\xi}_o = -(\xi_b)_{z=o} - \left\{(\xi_b)_{z=b} - (\xi_b)_{z=o}\right\}\frac{z}{b} \tag{3d}$$

[3]) Zie o.m. *lit.* 7.

en als randvoorwaarden voor $\bar{\bar{\xi}}$:

$$z = o, \qquad z = b: \qquad \bar{\bar{\xi}}_b = 0 \tag{3e}$$

$$z = o, \qquad z = b: \qquad \bar{\bar{\xi}}_o = 0 \tag{3f}$$

Voor de berekening van de verplaatsingen ζ wordt aangenomen, dat bij de vervorming van den vleugel een loodrecht op de x-as staande doorsnede draait om een in het vleugelvlak gelegen punt P (zie fig. 4). Dit punt, waarvoor $z = z_o$ is,

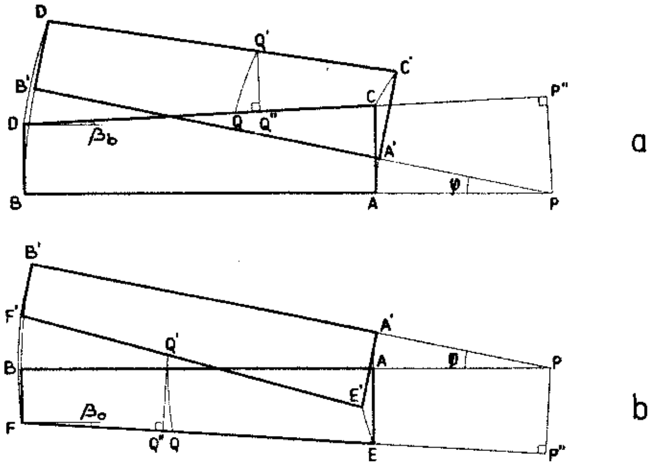


Fig. 4.

Bepaling van de verplaatsingen ζ bij draaiing van een doorsnede om het punt P.

a: bovenvlak; b: ondervlak.

De letters in de figuur zijn dezelfde als die in fig. 3.

ligt in de figuur vóór den voorligger, zoodat z_o hier een negatieve waarde heeft.

De verplaatsing ζ_b van het in het bovenvlak gelegen punt Q ($z = z_1$) wordt nu als volgt bepaald (fig. 4a):

$$\zeta_b = -QQ'' \cos \beta_b,$$

waarbij β_b de hoek tusschen dit vlak en het vleugelvlak beteekent. QQ'' wordt beschouwd als het verschil van de projecties van de gebroken lijnen $PACQ$ en $PA'C'Q'$ op $P''D$, zoodat:

$$QQ'' = P''Q - P''Q''$$

$$P''Q = -z_o \cos \beta_b - \tfrac{1}{2} h_1 \sin \beta_b + \frac{z_1}{\cos \beta_b}$$

$$P''Q'' = -z_o \cos(\varphi + \beta_b) - \tfrac{1}{2} h_1 \sin(\varphi + \beta_b) + \frac{z_1}{\cos \beta_b} \cos \varphi$$

dus voor kleine waarden van φ:

$$QQ'' = \varphi\,(-z_o \sin \beta_b + \tfrac{1}{2} h_1 \cos \beta_b)$$

$$\zeta_b = \varphi\,(z_o \sin \beta_b - \tfrac{1}{2} h_1 \cos \beta_b) \cos \beta_b$$

φ en z_o kunnen in y_1 en y_2 uitgedrukt worden:

$$\varphi = \frac{y_2 - y_1}{b}\,; \qquad z_o = b\,\frac{y_1}{y_1 - y_2}$$

Wordt tevens ingevoerd

$$\sin \beta_b = \frac{h_1 - h_2}{2b}, \qquad \cos \beta_b = +1,$$

hetgeen toelaatbaar is, wanneer β_b een kleine hoek is, dan wordt als uitkomst verkregen:

$$\zeta_b = +\frac{1}{2b}(h_2 y_1 - h_1 y_2) \tag{4a}$$

Op dezelfde wijze kan aan de hand van fig. 4b voor het ondervlak bepaald worden:

$$\zeta_o = -\frac{1}{2b}(h_2 y_1 - h_1 y_2) \tag{4b}$$

6. De spanningen in de huid.

Daar het vlak van de huid slechts een kleinen hoek maakt met het vleugelvlak mogen de boven besproken verplaatsingen ξ en ζ beschouwd worden als verplaatsingen in eerstgenoemd vlak. De rekken ε_x en ε_z en de schuifhoeken γ_{xz} kunnen dan bepaald worden met behulp van de bekende formules:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

hetgeen bij gebruikmaking van de in (2), (3) en (4) gegeven uitkomsten oplevert:

$$\varepsilon_{xb} = -\tfrac{1}{2} h_1 y_1'' - \tfrac{1}{2}(h_2 y_2'' - h_1 y_1'')\frac{z}{b} + \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xo} = +\tfrac{1}{2} h_1 y_1'' + \tfrac{1}{2}(h_2 y_2'' - h_1 y_1'')\frac{z}{b} + \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{zb} = 0$$

$$\varepsilon_{zo} = 0$$

$$\gamma_{xzb} = +\frac{1}{2b}(h_2 y_1 - h_1 y_2)' + \frac{1}{b}\left\{(\xi_b)_{z=b} - (\xi_b)_{z=o}\right\} + \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}$$

$$\gamma_{xzo} = -\frac{1}{2b}(h_2 y_1 - h_1 y_2)' - \frac{1}{b}\left\{(\xi_b)_{z=b} - (\xi_b)_{z=o}\right\} + \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}$$

Ten einde de voor de verdere berekening benoodigde spanningen σ_x en τ_{xz}, welke laatste verder kortheidshalve als τ aangegeven zal worden, op eenvoudige wijze te kunnen berekenen, wordt aangenomen, dat tusschen de vormveranderingen en de spanningen de betrekkingen:

$$\sigma_x = \bar{E}\,\varepsilon_x, \qquad \tau = \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz} \qquad (5a,\ b)$$

bestaan.

Terwijl G de gebruikelijke glijdingsmodulus is, heeft $\bar{E}$ daarentegen een speciale beteekenis. Zij geeft namelijk de verhouding tusschen de spanning en den rek in een bepaalde richting voor het geval, dat de contractie in de hierop loodrecht staande richting verhinderd wordt. Zij zou dus de „elasticiteitsmodulus bij verhinderde contractie" genoemd kunnen worden. Voor isotroop materiaal is $\bar{E}$ gegeven door

$$\bar{E} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1}$$

waarin: E = elasticiteitsmodulus in den gewonen zin,
m = contractie-coëfficiënt.

Voor anisotroop materiaal dient het verband tusschen $\bar{E}$ en de gebruikelijke elasticiteitsconstanten nog nader bestudeerd te worden.

De spanningen zijn dus:

$$\sigma_{xb} = -\tfrac{1}{2}\bar{E}_b\left\{h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'')\frac{z}{b}\right\} + \bar{E}_b\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} \qquad (6a)$$

$$\sigma_{xo} = +\tfrac{1}{2}\bar{E}_o\left\{h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'')\frac{z}{b}\right\} + \bar{E}_o\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x} \qquad (6b)$$

$$\tau_b = +\frac{1}{2b}G_b(h_2 y_1 - h_1 y_2)' + \frac{1}{b}G_b\left\{(\xi_b)_{z=b} - (\xi_b)_{z=o}\right\} + G_b\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z} \qquad (7a)$$

$$\tau_o = -\frac{1}{2b}G_o(h_2 y_1 - h_1 y_2)' - \frac{1}{b}G_o\left\{(\xi_b)_{z=b} - (\xi_b)_{z=o}\right\} + G_o\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z} \qquad (7b)$$

Daar de ribben volgens aanname in de x-richting geen krachten opnemen, moeten de in deze richting in de huid werkende krachten voor ieder deel op zichzelf in evenwicht zijn. Dit zal alleen het geval zijn, indien voldaan wordt aan

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

Worden hierin de in (6a) en (7a) gegeven waarden voor de spanningen ingevoerd, dan blijkt, daar $\bar{E}$ en G onafhankelijk zijn van x en z, $\bar{\bar{\xi}}_b$ te moeten voldoen aan de differentiaalvergelijking:

$$\bar{E}_b\frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x^2} + G_b\frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z^2} = +\tfrac{1}{2}\bar{E}_b\left\{h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'')\frac{z}{b}\right\}' \qquad (8a)$$

Voor $\bar{\bar{\xi}}_o$ geldt de op dezelfde wijze af te leiden differentiaalvergelijking:

$$\bar{E}_o\frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x^2} + G_o\frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z^2} = -\tfrac{1}{2}\bar{E}_o\left\{h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'')\frac{z}{b}\right\}' \qquad (8b)$$

7. Het evenwicht van een deel van den vleugel (algemeen).

Zooals in punt 2 reeds kort werd aangegeven, zal het evenwicht beschouwd worden van het deel van den vleugel, dat buiten de „doorsnede x" ligt (fig. 5). Deze doorsnede

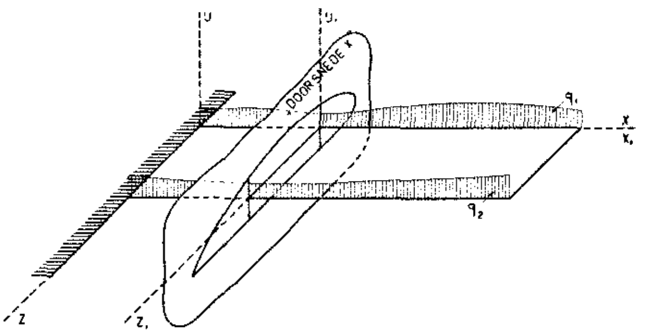


Fig. 5.

De „doorsnede x" en het hulpcoördinatenstelsel $x_1 y_1 z_1$.

wordt gevormd door een vlak, dat loodrecht staat op de liggers. Om het evenwicht van dit deel te verzekeren, zal voldaan moeten worden aan zes voorwaarden, die gegeven kunnen worden als de voorwaarden voor het evenwicht van de componenten van de krachten in de richting van drie onderling loodrechte assen en van de momenten om deze assen. Worden hierbij de assen x_1, y_1 en z_1 aangenomen als *in fig. 5 aangegeven is, waarbij dus de x_1-as samenvalt met* de x-as en de in de „doorsnede x" gelegen y_1- en z_1-as evenwijdig zijn aan de y- en z-as, dan blijkt slechts een deel van deze voorwaarden hier van belang te zijn. In drie van hen, namelijk in die, welke betrekking hebben op het krachtenevenwicht in de richting van de x_1- en de z_1-as en op het momentenevenwicht om de y_1-as zullen geen uitwendige belastingen voorkomen, zoodat zij slechts betrekkingen tusschen de in de doorsnede x optredende spanningen geven. Denkt men zich nu den vleugel voor een oogenblik alleen bestaande uit de samengestelde liggers en de ribben, dus de huid in het middendeel van den vleugel weggelaten, dan is gemakkelijk in te zien, dat, waar de samengestelde liggers zich als gewone liggers gedragen en er geen rechtstreeksche verbinding tusschen de ribben bestaat, zonder meer aan deze voorwaarden voldaan zal worden. Voor het hier weggelaten deel van de huid zal dit alleen exact het geval zijn, indien de dikte en elastische eigenschappen van deze in boven- en ondervlak gelijk zijn. In gevallen, waarin dit niet zoo is, zullen de hierdoor veroorzaakte verschillen echter in het algemeen zoo gering zijn, dat zij hier buiten beschouwing gelaten kunnen worden.

Als evenwichtsvoorwaarden, waaraan voldaan moet worden, blijven dus de voorwaarden over, die betrekking hebben op:

1°. het krachtenevenwicht in de richting van de y_1-as („evenwicht van dwarskrachten");

2°. het momentenevenwicht om de z_1-as („evenwicht van buigende koppels");

3°. het momentenevenwicht om de x_1-as („evenwicht van wringende koppels").

Bij een nadere beschouwing blijkt echter, dat de twee eerste niet onafhankelijk zijn. Evenals dit voor den vleugel zonder huid het geval was (zie punt 8, rapport V. 284, *lit.* 3), gaat de tweede door differentieeren naar x in de eerste over. De voorwaarde voor het evenwicht van dwarskrachten heeft dus alleen waarde als een hulpmiddel voor contrôle, doch kan hier, als verder overbodig, onbesproken blijven.

8. Het evenwicht van de buigende koppels.

Het moment M_u van de uitwendige belastingen, die op den vleugel werken, om de z_1-as moet evenwicht maken met het door de in de doorsnede x optredende spanningen geleverde koppel M_e, dus

$$M_u = M_e = M_{e_1} + M_{e_2} + M_{eb} + M_{eo} \tag{9a}$$

Dit laatste bestaat, zooals in (9a) reeds is aangegeven, uit vier deelen: de buigende koppels M_{e_1} en M_{e_2} in de beide samengestelde liggers en de koppels M_{eb} en M_{eo} geleverd door de in de bekleeding van boven- en ondervlak optredende spanningen. Tusschen de beide eerste en de vervormingen van de liggers bestaat de bekende betrekking

$$M_{e_1} + M_{e_2} = S_{b_1}\, y_1'' + S_{b_2}\, y_2'' \tag{9b}$$

Aangenomen werd, dat de afstand van de bekleeding tot aan het vleugelvlak lineair verloopt met z en dus gegeven is als

$$h = \tfrac{1}{2} \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} \tag{9c}$$

Een in de doorsnede x gelegen element dz van de bekleeding van het bovenvlak (zie fig. 6a) levert in het koppel M_{eb} een bijdrage

$$d\,M_{eb} = -\,\delta_b\,\sigma_{xb}\,h\,dz = -\tfrac{1}{2}\,\delta_b\,\sigma_{xb} \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} dz$$

waarbij de dikte van het bekleedingsmateriaal met δ_b aangegeven is. Wordt hierin de in (6a) gegeven waarde voor σ_{xb} ingevoerd en over de breedte van de bekleeding geïntegreerd, dan blijkt M_{eb} te zijn:

$$\begin{aligned} M_{eb} = & +\tfrac{1}{2}\,\bar{E}_b\,\delta_b \int_o^b \left[\tfrac{1}{2} \left\{ h_1\,y_1'' + (h_2\,y_2'' - h_1\,y_1'') \frac{z}{b} \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} \right] \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} dz = \\ = & + \frac{1}{24}\,\bar{\bar{E}}_b\,\delta_b\,b \left\{ h_1\,(2h_1 + h_2)\,y_1'' + h_2\,(h_1 + 2h_2)\,y_2'' \right\} - \\ & - \tfrac{1}{2}\,\bar{E}_b\,\delta_b \int_o^b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} dz \end{aligned} \tag{9d}$$

Op dezelfde wijze kan voor het ondervlak gevonden worden:

$$\begin{aligned} M_{eo} = & + \frac{1}{24}\,\bar{E}_o\,\delta_o\,b \left\{ h_1\,(2\,h_1 + h_2)\,y_1'' + h_2\,(h_1 + 2\,h_2)\,y_2'' \right\} + \\ & + \tfrac{1}{2}\,\bar{E}_o\,\delta_o \int_o^b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x} \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} dz \end{aligned} \tag{9e}$$

Het moment van de uitwendige belastingen om de z_1-as is:

$$M_u = \int_x^l (q_1 + q_2)\;(\xi - x)\,d\,\xi \tag{9f}$$

Invoering van de in (9b, d, e, f) gegeven uitkomsten in (9a) levert nu de voorwaarde voor het evenwicht van de buigende koppels in den vorm:

$$\begin{aligned} & \left\{ S_{b_1} + \frac{1}{24}\,(\bar{\bar{E}}_b\,\delta_b + \bar{\bar{E}}_o\,\delta_o)\,b\,h_1\,(2\,h_1 + h_2) \right\} y_1'' + \left\{ S_{b_2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{24}\,(\bar{\bar{E}}_b\,\delta_b + \bar{\bar{E}}_o\,\delta_o)\,b\,h_2\,(h_1 + 2\,h_2) \right\} y_2'' - \tfrac{1}{2} \int_o^b \left(\bar{E}_b\,\delta_b\,\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \bar{E}_o\,\delta_o\,\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x} \right) \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} dz = \int_x^l (q_1 + q_2)\,(\xi - x)\,d\,\xi \end{aligned} \tag{10}$$

9. Het evenwicht van de wringende koppels.

a. *Algemeene vorm van de evenwichtsvoorwaarde.*

Het moment W_u van de uitwendige belastingen, die op het beschouwde deel van den vleugel werken, om de x_1-as, moet gelijk zijn aan W_e, dat van de spanningen, die in de doorsnede x optreden. De evenwichtsvoorwaarde is hier dus:

$$W_u = W_e = W_{e_1} + W_{e_2} + W_{eD} + W_{eb} + W_{eo} \tag{11a}$$

Het „elastische wringende koppel" W_e bestaat uit vijf deelen, waarvan de eerste drie door de samengestelde liggers, de beide laatste door de huid geleverd worden. Daar de x_1-as samenvalt met den voorligger en dus bij de berekening van W_e het punt A (zie fig. 6) als momenten-punt genomen

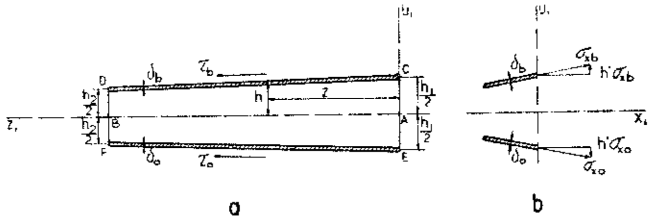


Fig. 6.

De bijdragen van de huid in de buigende en wringende koppels.

moet worden, moet naast de wringende koppels W_{e_1} en W_{e_2} van de samengestelde liggers, die samenhangen met de verdraaiing φ van deze, ook nog het moment W_{eD} van de dwarskracht D_2 in den achterligger in rekening gebracht worden.

b. *Het moment van de spanningen in de samengestelde liggers.*

Tusschen de wringende koppels in de samengestelde liggers en hun verdraaiing, die met behulp van (1) in de liggerdoorbuigingen uitgedrukt kan worden, bestaat de betrekking:

$$W_{e_1} + W_{e_2} = (S_{t_1} + S_{t_2})\,\varphi' = -\,\frac{S_{t_1} + S_{t_2}}{b}\,(y_1 - y_2)' \tag{11b}$$

Het moment van de dwarskracht in den achterligger is:

$$W_{eD} = +\,D_2\,b \tag{11c}$$

De dwarskracht D_2 moet nu uitgedrukt worden in de elastische vervormingen, waarbij zich het bijzondere geval voordoet, dat de gebruikelijke betrekking tusschen buigend moment en dwarskracht hier niet geldig is. De oorzaak hiervan ligt in het feit, dat op den ligger ook continu verdeelde buigende momenten werken, die veroorzaakt worden door de in de huid optredende schuifspanningen. De meer algemeene betrekking, die hier gebruikt moet worden, kan afgeleid worden uit de voorwaarde voor momentenevenwicht voor een element van den ligger. Deze is, zooals onmiddellijk uit fig. 7a afgelezen kan worden:

$$D = -\,\frac{dM}{dx} - m \tag{12a}$$

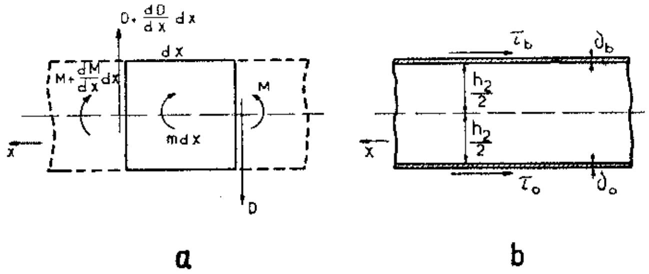


Fig. 7.

De belasting van den ligger door continu verdeelde buigende momenten.

waarin m het continu verdeelde buigende moment per lengte-eenheid beteekent. Daar het buigend moment ook hier in de elastische vervorming van den ligger uitgedrukt wordt door

$$M = S_b\, y''$$

wordt deze betrekking:

$$D = -(S_b\, y'')' - m \tag{12b}$$

Het moment m wordt, zooals boven reeds gezegd is, geleverd door de schuifspanningen in de huid. Uit fig. 7b, die een zijaanzicht van den achterligger geeft en waarin de spanningen τ aangegeven zijn in den zin, waarin zij, positief zijnde, op dezen ligger werken, is te zien, dat het gelijk is aan:

$$m = +\frac{h_2}{2}(\tau_b\,\delta_b - \tau_o\,\delta_o)$$

Wordt hiermede rekening gehouden, dan is het moment van de dwarskracht in den achterligger om het punt A:

$$W_{eD} = -b\,(S_{b_2}\, y_2'')' - \frac{b\,h_2}{2}(\tau_b\,\delta_b - \tau_o\,\delta_o)$$

hetgeen na invoering van de in (7a, b) gegeven waarden voor de schuifspanningen overgaat in:

$$W_{eD} = -b\,(S_{b_2}\, y_2'')' - \frac{h_2}{4}(G_b\,\delta_b + G_o\,\delta_o)\Big\{(h_2 y_1 - h_1 y_2)' +$$

$$+ 2(\xi_b)_{z=b} - 2(\xi_b)_{z=o}\Big\} - \frac{b\,h_2}{2}\Big\{G_b\,\delta_b\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=b} -$$

$$- G_o\,\delta_o\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=b}\Big\} \tag{11d}$$

c. Het moment van de in de bekleeding werkende spanningen.

De door de huid geleverde bijdrage in het elastische koppel is in de eerste plaats afkomstig van de in de doorsnede x werkende schuifspanningen τ. Echter moeten ook de trekspanningen σ_x in rekening gebracht worden, daar de bekleeding niet evenwijdig is aan het vleugelvlak en deze spanningen dus, als in overdreven mate in fig. 6b is aangegeven, een component in de richting van de y_1-as hebben. Een element dz van het bovenvlak levert in totaal een moment

$$d\,W_{eb} = \delta_b\left(-\tau_b\,\frac{h_1}{2} + \sigma_{xb}\,h' z\right)dz$$

Worden hierin voor de spanningen de in (6a, 7a) gegeven waarden en voor h die uit (9c) ingevoerd en de verkregen uitdrukking over de geheele breedte van de bekleeding geïntegreerd, dan geeft dit als uitkomst voor de bijdrage van de bekleeding van het bovenvlak in het elastische wringende moment:

$$W_{eb} = \delta_b \int_o^b \left(-\tau_b\,\frac{h_1}{2} + \sigma_{xb}\,h' z\right)dz =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\,G_b\,\delta_b\,h_1\Big\{(h_2 y_1 - h_1 y_2)' + 2(\xi_b)_{z=b} - 2(\xi_b)_{z=o}\Big\} -$$

$$- \frac{1}{48}\,\bar{E}_b\,\delta_b\,b^2\Big\{h_1(h_1' + h_2')\,y_1'' + h_2(h_1' + 3h_2')\,y_2''\Big\} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\bar{E}_b\,\delta_b \int_o^b z\Big\{h_1' + (h_2' - h_1')\,\frac{z}{b}\Big\}\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x}\,dz \tag{11c}$$

Bij bovenbedoelde integratie moet er rekening mede gehouden worden, dat, dank zij de in (3) gegeven randvoorwaarden voor $\bar{\bar{\xi}}_b$,

$$\int_o^b \frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\,dz = o$$

is.

Voor de bekleeding van het ondervlak wordt op dezelfde wijze gevonden:

$$W_{eo} = -\tfrac{1}{4}\,G_o\,\delta_o\,h_1\Big\{(h_2 y_1 - h_1 y_2)' + 2(\xi_b)_{z=b} - 2(\xi_b)_{z=o}\Big\} -$$

$$- \frac{1}{48}\,\bar{E}_o\,\delta_o\,b^2\Big\{h_1(h_1' + h_2')\,y_1'' + h_2(h_1' + 3h_2')\,y_2''\Big\} -$$

$$- \tfrac{1}{2}\,\bar{E}_o\,\delta_o \int_o^b z\Big\{h_1' + (h_2' - h_1')\,\frac{z}{b}\Big\}\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x}\,dz \tag{11f}$$

d. Het totale moment van de in de doorsnede x werkende spanningen.

Samenvatting van de in (11b, d, e, f) gegeven uitkomsten geeft het totale elastische wringende moment:

$$W_e = -b\,(S_{b_2}\, y_2'')' - \frac{S_{t_1} + S_{t_2}}{b}(y_1 - y_2)' - \tfrac{1}{4}(G_b\,\delta_b +$$

$$+ G_o\,\delta_o)(h_1 + h_2)\Big\{(h_2 y_1 - h_1 y_2)' + 2(\xi_b)_{z=b} - 2(\xi_b)_{z=o}\Big\} -$$

$$- \frac{1}{48}(\bar{E}_b\,\delta_b + \bar{E}_o\,\delta_o)\,b^2\Big\{h_1(h_1' + h_2')\,y_1'' + h_2(h_1' + 3h_2')\,y_2''\Big\} -$$

$$- \tfrac{1}{2}\,b\,h_2\Big\{G_b\,\delta_b\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=b} - G_o\,\delta_o\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=b}\Big\} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_o^b z\Big\{h_1' + (h_2' - h_1')\,\frac{z}{b}\Big\}\left(\bar{E}_b\,\delta_b\,\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \bar{E}_o\,\delta_o\,\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x}\right)dz$$

Wanneer dit resultaat in (11a) ingevoerd zou worden, zou de hierdoor verkregen vergelijking weinig overzichtelijk zijn. Om haar een zoodanigen vorm te geven, dat zij zoo goed mogelijk aansluit bij de in punt 8 afgeleide vergelijking (10) en bovendien de overeenstemming met de vergelijkingen voor den vleugel zonder huid beter te doen uitkomen, zijn nog eenige omvormingen noodig. Het is overbodig deze hier in haar geheel weer te geven, daarom zal volstaan worden met het aanduiden van eenige hulpformules, die hierbij gebruikt werden.

In de eerste plaats is, op grond van de vergelijking (8a) voor de verplaatsingen $\bar{\bar{\xi}}_b$:

$$\int_o^b \left(1 - 3\,\frac{z}{b}\right)\frac{\partial^2\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x^2}\,dz = -\frac{G_b}{E_b}\int_o^b \left(1 - 3\,\frac{z}{b}\right)\frac{\partial^2\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z^2}\,dz +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int_o^b \left(1 - 3\,\frac{z}{b}\right)\Big\{(h_1 y_1'')' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'')'\,\frac{z}{b}\Big\}\,dz =$$

$$= +2\,\frac{G_b}{E_b}\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=b} + \frac{G_b}{E_b}\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=o} - \frac{b}{4}\,(h_2 y_2'')', \tag{13a}$$

terwijl voor $\bar{\bar{\xi}}_o$ evenzoo geldt:

$$\int_o^b \left(1 - 3\,\frac{z}{b}\right)\frac{\partial^2\bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x^2}\,dz = +2\,\frac{G_o}{E_o}\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=b} + \frac{G_o}{E_o}\left(\frac{\partial\bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=o} +$$

$$+ \frac{b}{4}\,(h_2 y_2'')'. \tag{13b}$$

Voorts volgt uit de in (2a) gegeven definitie voor $(\xi_b)_{z=o}$ door particeele integratie:

$$(\xi_b)_{z=o} = -\tfrac{1}{2}\int_o^x h_1\,y_1''\,dx = -\tfrac{1}{2}\Big[h_1\,y_1'\Big]_o^x + \tfrac{1}{2}\int_o^x h_1'\,y_1'\,dx$$

en dus, gezien de in punt 10a te bespreken randvoorwaarde (16a) in het punt $x = o$:

$$(\xi_b)_{z=o} = -\tfrac{1}{2}\,h_1\,y_1' + \tfrac{1}{2}\int_o^x h_1'\,y_1'\,dx \tag{13c}$$

Op dezelfde wijze wordt verkregen:

$$(\xi_b)_{z=b} = -\tfrac{1}{2} h_2 y_2' + \tfrac{1}{2} \int_o^x h_2' y_2' \, dx \qquad (13d)$$

De gang van zaken is nu de volgende. De term $(S_{b2} y_2'')'$ wordt vervangen door een andere, die in overeenstemming met de overeenkomstige in (10) ook een deel bevat, dat afkomstig is van het tot het ribverband behoorende deel van de huid. De hierbij optredende term in y_2''' wordt daarna verdreven met behulp van (13a, b) en de in (13c, d) gegeven waarden ingevoerd. Het eindresultaat wordt nu:

$$\begin{aligned}
W_e = &-b\left[\left\{S_{b_2} + \frac{1}{24}(\bar{\bar{E}}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b\, h_2 (h_1 + 2 h_2)\right\} y_2''\right]' - \\
&-\left\{\frac{1}{b}(S_{t_1} + S_{t_2}) + \tfrac{1}{4}(G_b \delta_b + G_o \delta_o)(h_1 + h_2)^2\right\}(y_1 - y_2)' - \\
&-\tfrac{1}{4}(G_b \delta_b + G_o \delta_o)(h_1 + h_2)\Big(h_2' y_1 - h_1' y_2 - \int_o^x h_1' y_1' \, dx + \\
&+ \int_o^x h_2' y_2' \, dx\Big) - \frac{1}{48}(\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b^2 (h_1' + h_2')(h_1 y_1'' - h_2 y_2'') + \\
&+ \frac{1}{6} G_b \delta_b b \left\{(2 h_1 + h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=b} + (h_1 + 2 h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=o}\right\} - \\
&- \frac{1}{6} G_o \delta_o b \left\{(2 h_1 + h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=b} + (h_1 + 2 h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=o}\right\} - \\
&- \frac{1}{6} b (h_1 + 2 h_2) \int_o^b \left(1 - 3\frac{z}{b}\right)\left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x^2} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x^2}\right) dz + \\
&+ \tfrac{1}{2} \int_o^b z \left\{h_1' + (h_2' - h_1')\frac{z}{b}\right\}\left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x}\right) dz
\end{aligned} \qquad (11g)$$

e. De evenwichtsvoorwaarde voor de wringende koppels.

Het moment van de uitwendige belastingen om de x_1-as is:

$$W_u = b \int_x^l q_2 \, d\xi \qquad (11h)$$

Invoering van de in (11g) en (11h) gegeven waarden voor W_e en W_u in (11a) levert na deeling door b de vergelijking:

$$\begin{aligned}
&\left[\left\{S_{b_2} + \frac{1}{24}(\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b\, h_2 (h_1 + 2 h_2)\right\} y_2''\right]' + \\
&+ \left\{\frac{1}{b^2}(S_{t_1} + S_{t_2}) + \frac{1}{4b}(G_b \delta_b + G_o \delta_o)(h_1 + h_2)^2\right\}(y_1 - y_2)' + \\
&+ \frac{1}{4b}(G_b \delta_b + G_o \delta_o)(h_1 + h_2)\Big(h_2' y_1 - h_1' y_2 - \int_o^x h_1' y_1' \, dx + \\
&+ \int_o^x h_2' y_2' \, dx\Big) + \frac{1}{48}(\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b (h_1' + h_2')(h_1 y_1'' - h_2 y_2'') - \\
&- \frac{1}{6} G_b \delta_b \left\{(2h_1 + h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=b} + (h_1 + 2h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z}\right)_{z=o}\right\} + \\
&+ \frac{1}{6} G_o \delta_o \left\{(2h_1 + h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=b} + (h_1 + 2h_2)\left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z}\right)_{z=o}\right\} + \\
&+ \frac{1}{6}(h_1 + 2h_2) \int_o^b \left(1 - 3\frac{z}{b}\right)\left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x^2} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x^2}\right) dz - \\
&- \frac{1}{2b} \int_o^b z \left\{h_1' + (h_2' - h_1')\frac{z}{b}\right\}\left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x}\right) dz \\
&= - \int_x^l q_2 \, d\xi
\end{aligned} \qquad (14)$$

10. De randvoorwaarden.

a. De randvoorwaarden voor de liggers.

In de punten, waar de liggers ingeklemd zijn, moeten hun verplaatsingen in de richting van de y-as en hun hellingen nul zijn. Dit wordt uitgedrukt in de randvoorwaarden:

$$x = o: \qquad y_1 = o, \qquad y_2 = o \qquad (15a, b)$$

$$x = o: \qquad y_1' = o, \qquad y_2' = o \qquad (16a, b)$$

Om de randvoorwaarde voor de uiteinden van de liggers op te kunnen stellen, is het noodig de wringing van de eindrib te beschouwen. Daarbij zal aangenomen worden, dat deze eindrib of eindlijst in een vlak loodrecht op de x-as ligt en denzelfden vorm heeft als de overige ribben. Zij zal echter over het algemeen van zwaardere uitvoering zijn en dus weerstand bieden tegen torsie. Ter vereenvoudiging zij hier aangenomen, dat haar torsiestijfheid over haar geheele lengte constant is. Een hiervan afwijkende aanname zal overigens weinig verdere moeilijkheden opleveren. De invloed van een verandering van de eigenschappen van de eindrib zal echter over het algemeen van plaatselijken aard zijn. Vooral bij vleugels, waarvan de stijfheid naar buiten toe sterk afneemt, zal hun beteekenis voor den vleugel als geheel slechts van ondergeschikt belang zijn.

Op de eindrib nu werken, zooals in fig. 8 is aangegeven, aan de uiteinden de wringende koppels $-M_1$ en $-M_2$ en

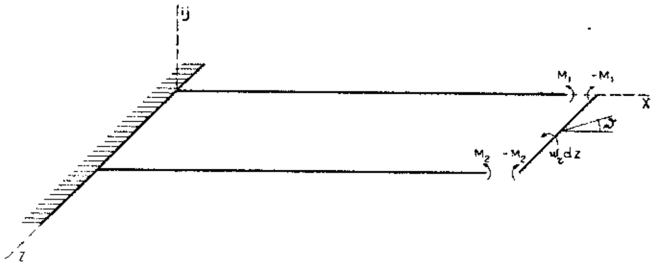


Fig. 8.

De op de eindrib werkende koppels.

continu verdeeld over haar lengte de koppels w_r. De laatste worden veroorzaakt door de spanningen in de huid in boven- en ondervlak. Zij zijn

$$w_r = h_r \left\{ (\sigma_{xb})_{x=l}\, \delta_b - (\sigma_{xo})_{x=l}\, \delta_o \right\} \qquad (17a)$$

met

$$h_r = \tfrac{1}{2}\left\{ h_1 + (h_2 - h_1)\frac{z}{b} \right\}_{x=l}$$

Het wringende koppel in een doorsnede z_1 van de eindrib is:

$$W_r = -M_2 + \int_{z_1}^b w_r \, dz,$$

het verschil in verdraaiingshoek ϑ (fig. 8) tusschen de uiteinden, indien aan den stijfheidsfactor tegen wringing de constante waarde S_{tr} toegekend wordt, dus

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \int_o^b \frac{W_r}{S_{tr}} \, dz = -\frac{M_2 b}{S_{tr}} + \frac{1}{S_{tr}} \int_o^b dz_1 \int_{z_1}^b w_r \, dz \qquad (17b)$$

Dit hoekverschil is gelijk aan het verschil in helling van de beide liggers aan het vleugeleinde:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -(y_1 - y_2)'_{x=l},$$

het koppel M_2 aan het buigende koppel in het uiteinde van den achterligger:

$$M_2 = (S_{b_2} y_2'')_{x=l}$$

Worden deze waarden, benevens die voor w_r uit (17a) in (17b) ingevoerd en rekening gehouden met de door (6a, b) gegeven waarden voor de spanningen, dan wordt ten slotte de gevraagde randvoorwaarde gevonden als:

$$x=l: S_{b_2} y_2'' + \frac{1}{48} (\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b \left\{ h_1 (h_1 + h_2)\, y_1'' + \right.$$

$$\left. + h_2 (h_1 + 3 h_2)\, y_2'' \right\} - \frac{S_{tr}}{b} (y_1 - y_2)' = + \frac{1}{2b} \int_o^b \int_z^b \left\{ h_1 + \right.$$

$$\left. + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} \left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x} \right) dz\, dz_1 \qquad (18)$$

b. De randvoorwaarden voor de verplaatsingen $\bar{\bar{\xi}}$ van de huid.

Bij de invoering van de grootheden $\bar{\bar{\xi}}$ in punt 5 werd reeds besproken, dat zij op de plaatsen, waar de huid aan de liggers bevestigd is, nul moeten zijn, dus:

$$z = o: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (19a, b)$$

$$z = b: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (19c, d)$$

Het ligt nu voor de hand ook voor de beide andere randen, $x = o$ en $x = l$, deze voorwaarde over te nemen, dus

$$x = o: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (19e, f)$$

$$x = l: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (19g, h).$$

Deze aanname biedt voordeelen met het oog op oplossing van de vergelijkingen (8) voor $\bar{\bar{\xi}}$. Voor $x = o$ beteekent zij, te zamen met (2) en (3) dat in het vlak door de inklempunten de verplaatsingen van de huid nul zullen zijn. Dit lijkt, gezien het feit, dat dit vlak meestal zal samenvallen met het symmetrievlak van den geheelen vleugel en belastingen, die symmetrisch zijn over dezen, zullen overheerschen, alleszins toelaatbaar. Voor $x = l$ volgt er uit, dat de verplaatsingen van de huid in x-richting hier alleen bepaald zijn door $\bar{\xi}$ en dus tusschen voor- en achterligger lineair verloopen met z. Hieraan zal, streng genomen, alleen voldaan worden, wanneer de stijfheidsfactor tegen torsie van de eindrib op speciale wijze verloopt. Na hetgeen in punt 10a reeds besproken is over de beteekenis van dit verloop, mag de hier ingevoerde randvoorwaarde echter ook in andere gevallen voldoende nauwkeurig geacht worden.

11. Samenvatting van de uitkomsten.

De differentiaal-vergelijkingen (10) en (14) voor de doorbuigingen van de liggers, waarvan de afleiding in punt 8 en 9 besproken werd, kunnen geschreven worden in den vorm

$$A_1 y_1'' + A_2 y_2'' = \int_x^l (q_1 + q_2)(\xi - x)\, d\xi + F_1 (\bar{\bar{\xi}}_b, \bar{\bar{\xi}}_o) \qquad (20a)$$

$$(A_2 y_2'')' + B (y_1 - y_2)' = - \int_x^l q_2\, d\xi + F_2 (y_1, y_2, \bar{\bar{\xi}}_b, \bar{\bar{\xi}}_o) \qquad (20b)$$

terwijl die voor de verplaatsingen $\bar{\bar{\xi}}$ van de huid zijn (zie (8) punt 6):

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x^2} + \frac{G_b}{\bar{E}_b} \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z^2} = + F_3 (y_1, y_2) \qquad (21a)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x^2} + \frac{G_o}{\bar{E}_o} \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z^2} = - F_3 (y_1, y_2) \qquad (21b)$$

In het bovenstaande beteekent:

$$A_1 = S_{b_1} + \frac{1}{24} (\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b\, h_1 (2 h_1 + h_2)$$

$$A_2 = S_{b_2} + \frac{1}{24} (\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b\, h_2 (h_1 + 2 h_2)$$

$$B = \frac{1}{b^2} (S_{t_1} + S_{t_2}) + \frac{1}{4b} (G_b \delta_b + G_o \delta_o)\, (h_1 + h_2)^2$$

$$F_1 (\bar{\bar{\xi}}_b, \bar{\bar{\xi}}_o) = + \tfrac{1}{2} \int_o^b \left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x} \right) \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} dz$$

$$F_2 (y_1, y_2, \bar{\bar{\xi}}_b, \bar{\bar{\xi}}_o) = - \frac{1}{4b} (G_b \delta_b + G_o \delta_o)(h_1 + h_2) (h_2' y_1 - h_1' y_2 -$$

$$- \int_o^x h_1' y_1'\, dx + \int_o^x h_2' y_2'\, dx) -$$

$$- \frac{1}{48} (\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b\, (h_1' + h_2') (h_1 y_1'' - h_2 y_2'') +$$

$$+ \frac{1}{6} G_b \delta_b \left\{ (2 h_1 + h_2) \left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z} \right)_{z=b} + (h_1 + 2 h_2) \left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial z} \right)_{z=o} \right\} -$$

$$- \frac{1}{6} G_o \delta_o \left\{ (2 h_1 + h_2) \left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z} \right)_{z=b} + (h_1 + 2 h_2) \left(\frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial z} \right)_{z=o} \right\} -$$

$$- \frac{1}{6} (h_1 + 2 h_2) \int_o^b (1 - 3 \frac{z}{b}) \left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x^2} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial^2 \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x^2} \right) dz +$$

$$+ \frac{1}{2b} \int_o^b z \left\{ h_1' + (h_2' - h_1') \frac{z}{b} \right\} \left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x} \right) dz$$

$$F_3 (y_1, y_2) = + \tfrac{1}{2} \left\{ h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'') \frac{z}{b} \right\}'.$$

De oplossingen moeten voldoen aan de randvoorwaarden, die in punt 10 besproken werden.

Deze zijn voor de doorbuigingen van de liggers (zie (15), (16) en (18)):

$$x = o: \quad y_1 = o, \quad y_2 = o \qquad (22a, b)$$

$$x = o: \quad y_1' = o, \quad y_2' = o \qquad (22c, d)$$

$$x = l: \quad C_1 y_1'' + C_2 y_2'' - \frac{S_{tr}}{b} (y_1 - y_2)' = F_4 (\bar{\bar{\xi}}_b, \bar{\bar{\xi}}_o) \qquad (22e)$$

waarin:

$$C_1 = \frac{1}{48} (\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b\, h_1 (h_1 + h_2)$$

$$C_2 = S_{b_2} + \frac{1}{48} (\bar{E}_b \delta_b + \bar{E}_o \delta_o)\, b\, h_2 (h_1 + 3 h_2)$$

$$F_4 (\bar{\bar{\xi}}_b, \bar{\bar{\xi}}_o) = + \frac{1}{2b} \int_o^b \int_{z_1}^b \left\{ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right\} \left(\bar{E}_b \delta_b \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_b}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \bar{E}_o \delta_o \frac{\partial \bar{\bar{\xi}}_o}{\partial x} \right) dz\, dz_1.$$

Voor de verplaatsingen $\bar{\bar{\xi}}$ zijn zij (zie punt 10b):

$$x = o: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o, \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (23a, b)$$

$$x = l: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o, \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (23c, d)$$

$$z = o: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o, \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (23e, f)$$

$$z = b: \quad \bar{\bar{\xi}}_b = o, \quad \bar{\bar{\xi}}_o = o \qquad (23g, h)$$

12. Eenige opmerkingen over de oplossingsmethode.

Laat men in de in het vorige punt gegeven differentiaalvergelijkingen voor de doorbuigingen van de liggers (20) de functies F_1 en F_2 weg, dan zijn zij analoog met die voor den vleugel zonder huid, zooals bijv. bij vergelijking met (IV) en (V 1) in rapport V. 285 (*lit.* 4) blijkt.

Het ligt nu voor de hand van deze overeenkomst gebruik te maken en voor de oplossing van de vergelijkingen de volgende iteratie-methode toe te passen. Eerste benaderingswaarden voor y_1 en y_2 worden verkregen door F_1, F_2 en de in de randvoorwaarde (22*e*) voorkomende functie F_4 weg te laten en de vergelijkingen met behulp van een der vroeger aangegeven methoden (*lit.* 2, 4, 5) op te lossen. Invoering van de uitkomsten in (21) en oplossing van deze vergelijkingen levert nu de bijbehoorende waarden voor $\bar{\bar{\xi}}_b$ en $\bar{\bar{\xi}}_o$. De op deze wijze verkregen eerste benaderingswaarden voor y_1, y_2, $\bar{\bar{\xi}}_b$ en $\bar{\bar{\xi}}_o$ worden in F_1, F_2 en F_4 ingevoerd, waarna de berekening herhaald wordt. Dit moet voortgezet worden totdat de benadering voldoende nauwkeurig is, hetgeen moet blijken uit het feit, dat de verschillen tusschen opvolgende waarden voor de functies F practisch onbeteekenend worden. De convergentie van dit proces zal des te beter zijn, naarmate de functies F_1 en F_2, vergeleken bij die, afkomstig van de uitwendige belastingen, van minder beteekenis zijn. Bij een voorloopige berekening bleken de uitkomsten zich in dit opzicht zeer behoorlijk te gedragen.

Over de oplossing van de vergelijkingen (21) voor de verplaatsingen $\bar{\bar{\xi}}$ kan opgemerkt worden, dat hierbij met gunstig resultaat gebruik gemaakt kan worden van oplossingen van den vorm:

$$\bar{\bar{\xi}} = \sum_{1}^{M} \sum_{1}^{N} C_{mn} \sin m \frac{\pi}{l} x \sin n \frac{\pi}{b} z. \qquad (24).$$

Na invoering van deze uitdrukking in (21) en ontwikkeling van F_3 in een soortgelijke reeks kunnen de coëfficiënten C_{mn} op eenvoudige wijze bepaald worden. Zooals gemakkelijk te zien is, voldoet deze oplossing aan de randvoorwaarden (23).

(Afgesloten November 1931.)

NOTATIES.

A, B, C = grootheden, waarvan de beteekenis in punt 11 gegeven is;

D = dwarskracht in een samengestelden ligger;

$\bar{E}$ = „elasticiteitsmodulus bij verhinderde contractie" (zie punt 6);

G = glijdingsmodulus;

M = buigend moment;

S_b = stijfheidsfactor tegen buiging van een samengestelden ligger;

S_t = stijfheidsfactor tegen torsie van een samengestelden ligger;

W = wringend moment;

b = afstand van de liggers (zie fig. 2, 3);

h = (zonder index of met index r): afstand van een punt van de bekleeding tot aan het vleugelvlak;

h = (met index 1 of 2): liggerhoogte (zie fig. 3);

l = liggerlengte (zie fig. 2);

m = continu verdeeld buigend moment;

q = continu verdeelde uitwendige belasting;

w = continu verdeeld wringend moment;

x, y, z = coördinaten (zie fig. 2);

y = (met index) ordinaat van de elastische lijn van een ligger;

β = hoek tusschen bekleeding en vleugelvlak (zie fig. 4);

δ = dikte van de bekleeding;

φ = verdraaiing van een vleugeldoorsnede (zie fig. 2, 4);

ξ = (zonder index) integratievariabele;

ξ = (met index) verplaatsing van een punt van de bekleeding in de richting van de x-as;

ζ = verplaatsing van een punt van de bekleeding in de richting van de z-as;

σ_x = trekspanning in een vlak loodrecht op de x-as;

τ = schuifspanning in een vlak loodrecht op de x-as;

ϑ = verdraaiing van een doorsnede van de eindrib.

INDICES.

1, 2 = behoorend bij voor-, resp. achterligger;

b, o = behoorend bij boven-, resp. ondervlak;

u = afkomstig van uitwendige belastingen;

e = afkomstig van inwendige spanningen;

r = behoorend bij eindrib.

Voor de beteekenis van de strepen boven de letter ξ kan verwezen worden naar punt 5.

LITERATUUR.

1. BIEZENO, C. B., KOCH, J. J. u. KONING, C. Ueber die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.* Bd. 6, April 1926, S. 97—105.

2. BIEZENO, C. B., KOCH, J. J. en KONING, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R.S.L. Rapport V. 175. *De Ingenieur*, 13 November 1926 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel IV, blz. 101—137.

3. KONING, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II. R.S.L. Rapport V. 284. *De Ingenieur*, 12 Januari 1929 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 1—4.

4. KONING, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III. R.S.L. Rapport V. 285. *De Ingenieur*, 10 Januari 1930 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 25—31.

5. KONING, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels IV. R.S.L. Rapport V. 357. *De Ingenieur*, 16 Januari 1931 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 37—64.

6. KONING, C. The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. Cinquième Congrès International de la Navigation Aérienne. La Haye 1930. Tome I, p. 644—649.

7. VAN DER NEUT, A. Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers. R.S.L. Rapport S. 48. *De Ingenieur*, 11 December 1931 = Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 69—83.

Rapport V. 491.

Beschrijving van een baanhellingmeter

door

dr. ir. H. J. VAN DER MAAS en ir. S. WYNIA.

Rapport V. 491: Description d'un instrument pour mesurer l'inclinaison de la trajectoire.

Report V. 491: Description of an instrument measuring the inclination of the flight path.

Bericht V. 491: Beschreibung eines Bahnneigungmessers.

RAPPORT V. 491.

Beschrijving van een baanhellingmeter.

Uittreksel.

De meting van de baanhelling uit voorwaartsche en verticale snelheid is omslachtig en houdt geen rekening met verticale luchtstroomen. Aan den R.S.L. werd een instrument gebouwd, dat directe aflezing van de baanhelling mogelijk maakt (fig. 1). Dit wordt daartoe aan een kabel buiten het vliegtuig in ongestoorde lucht opgehangen en stelt zich door zijn vorm in de baanrichting. De meting van de baanhelling geschiedt electrisch volgens een methode van Dr. Schoute te De Bildt en berust in beginsel op weerstandsverandering van een dunnen platina draad, loopende in het ééne been van een U-buis, die ten deele met kwik gevuld is en die bij hoekverdraaiing den draad min of meer in het kwik dompelt. De aanwijzer bevindt zich in het vliegtuig. De fout bedraagt bij zéér rustige ijking 0,2—0,4 graad (fig. 5). Eenige trilling, zooals die bij een ware-grootte-proef voorkomt, doet den fout nagenoeg verdwijnen. Enkele toepassingen worden besproken. Een resultaat van een meting wordt vermeld (fig. 4). Verbeteringen, te verwerken in een nieuw ontwerp, worden medegedeeld.

REPORT V. 491.

Description of an instrument measuring the inclination of the flight path.

Summary.

The measurement of the inclination of the flight path by flying speed and vertical velocity is laborious and does not take any account of vertical currents in the atmosphere. At the National Institute for Aeronautical Research an instrument has been constructed indicating the momentary inclination at a distance (fig. 1). It is suspended from a cable, hangs a certain distance below the aeroplane in undisturbed air and, by its form, directs itself along the flight path. The measurement of the inclination is performed by an electrical method contrived by Dr. Schoute at „De Bildt" and is based on the principle of the change in resistance of a thin platinum wire which goes through a U-shaped tube, partially filled with mercury. When the position of the U-tube is changed, this wire is more or less immersed (fig. 2). The indicator is placed in the aeroplane. The error, when testing very smoothly, amounts to 0,2—0,4 degree (fig. 5). Only some vibration, as takes place with the instrument during a full scale experiment, reduces the error nearly to zero. Some applications are discussed and a result is given (fig. 4). Possible improvements for a new design are communicated.

RAPPORT V. 491.

Description d'un instrument pour mesurer l'inclinaison de la trajectoire.

Résumé.

La méthode pour mesurer l'inclinaison de la trajectoire par la vitesse de l'avion et la vitesse verticale est compliquée et ne tient pas compte des courants d'air verticaux. À l'Institut Aérotechnique de l'État fut construit un appareil qui permettait de mesurer directement l'inclinaison (fig. 1). A cet effet, l'appareil est suspendu à un câble hors de l'aéroplane dans l'air non influencé par l'avion et il se dirige à cause de sa forme dans la direction de la trajectoire. Le mesurage de l'inclinaison se fait électriquement d'après une méthode du Dr. Schoute à „De Bildt" et est fondé par principe sur le changement d'un fil mince de platine, se trouvant dans une jambe d'un tube en U, qui est remplie partiellement de mercure et qui touche le fil plus ou moins, quand on tourne le tube (fig. 2). L'indicateur se trouve dans l'avion. La faute s'élève à 0,2—0,4° quand on la vérifie d'une manière très calme (fig. 5). Quelque vibration, comme elle s'en présente pendant un essai à vraie grandeur, fait disparaître la faute presque tout à fait. Quelques applications sont discutées. Un résultat d'un essai est mentionné (fig. 4). Des perfections à apporter dans un nouveau projet sont communiquées.

BERICHT V. 491.

Beschreibung eines Bahnneigungmessers.

Zusammenfassung.

Die Messung der Bahnneigung aus Flug- und vertikaler Geschwindigkeit ist kompliziert und trägt den vertikalen Luftströmungen keine Rechnung. An der Reichsversuchsanstalt für Luftfahrt wurde ein Instrument hergestellt, das direkte Ablesung der Bahnneigung ermöglicht (Fig. 1). Zu diesem Zweck wird dieses Instrument unter einem Flugzeug an einem Kabel in der ungestörten Strömung aufgehängt und stellt sich infolge seiner Form in die Bahnrichtung. Die Messung der Bahnneigung geschieht elektrisch nach einem Verfahren des Herrn Dr. Schoute in „De Bildt" und ist prinzipiell eine Widerstandsmessung eines dünnen, in den Schaft eines U-Rohres gespannten Platindrahtes, welches Rohr zum Teil mit Quecksilber gefüllt ist. Bei Drehung wird das Stück, das vom Quecksilber berührt ist, länger oder kürzer. Der Anzeiger befindet sich im Flugzeug. Der Fehler beträgt bei einer sehr ruhigen Eichung 0,2—0,4 Grad (Fig. 5). Einige Vibration, wie bei einem Groszversuch doch immer gefunden wird, reduziert den Fehler fast auf Null. Einige Anwendungen werden besprochen. Ein Resultat einer Messung wird gezeigt (Fig. 4). Verbesserungen, in einem neuen Entwurf einzuführen, werden mitgeteilt.

Beschrijving van een baanhellingmeter

door

dr. ir. H. J. VAN DER MAAS en ir. S. WYNIA.

Rapport V. 491. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

1. Inleiding.

De bepaling van de baanhelling van vliegtuigen in uiteenloopende vliegtoestanden geschiedt als regel nog door meting van de voorwaartsche en de verticale snelheid. De bepaling der *verticale snelheid is omslachtig en minder doeltreffend*. Omslachtig, omdat haar waarde gevonden wordt als quotiënt van te meten en naar temperatuur te corrigeeren hoogteverschillen en de daarbij behoorende tijdsintervallen; minder doeltreffend, omdat verticale luchtstroomen aan haar resultaat als kenmerk voor een bepaalden vliegtoestand afbreuk doen. Afgezien nl. van eventueele correcties kan de waarde voor de stijgsnelheid, welke in rustige lucht zou worden gemeten, slechts verkregen worden door haar ten opzichte van de eventueel in beweging zijnde lucht te bepalen.

Op deze wijze wordt *ook de voorwaartsche snelheid bepaald*.

De baanhelling zou zoo bepaald kunnen worden door den stand van een windvaan ten opzichte van de verticaal, ware het niet dat de strooming ter plaatse, waar zij opgesteld zou moeten worden, sterk gestoord zou zijn door de nabijheid van het vliegtuig.

Bij den R.S.L. werd nu deze moeilijkheid ontgaan door een instrument te bouwen, dat zich aan een kabel onder het vliegtuig in de ongestoorde lucht volgens de baanrichting instelt.

Men zou nu de helling door het instrument onder het vliegtuig hangende, kunnen laten registreeren. Echter wordt bij den R.S.L. veel waarde gehecht aan directe aflezing, reden waarom de voorkeur gegeven werd aan een methode, waarbij de helling van het instrument *in het vliegtuig kan* worden afgelezen. Een dergelijke methode was door Dr. Schoute, Adj.-Directeur van het Kon. Ned. Met. Instituut te *De Bildt, reeds gevonden en toegepast*, o. a. ter meting van de doorbuiging van hooge schoorsteenen onder den invloed van windkrachten. Op voorstel van ir. von Baumhauer werd, in samenwerking met Dr. Schoute hetzelfde beginsel toegepast in den baanhellingmeter.

Achtereenvolgens zullen nu van dezen meter de verschillende eigenschappen behandeld worden.

2. Algemeene vorm en opstelling.

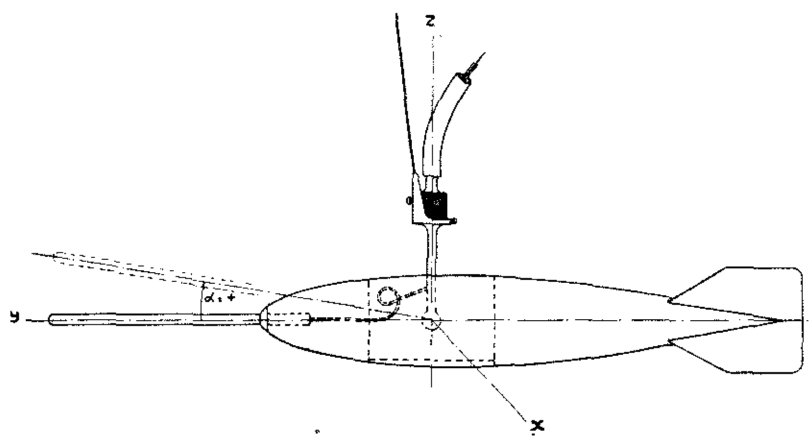


Fig. 1.

Algemeene vorm en opstelling van den baanhellingmeter.

De romp van den baanhellingmeter is een stroomlijnvormig omwentelingslichaam. Achter op zijn romp zijn 4 staartvlakken aangebracht. Door zijn vorm heeft het een zeer geringen luchtweerstand, door zijn staartvlakken stelt het zich zeer gemakkelijk en nauwkeurig in de windrichting. De voorzijde is verlengd met een statische buis, die gelijktijdige meting van den statischen druk mogelijk maakt. (De stuwdruk verminderd met den statischen druk geeft den dynamischen druk, uit welken de snelheid bepaald kan worden.) Het geheel is opgehangen in het zwaartepunt. De korte buis, welke in tappen den meter draagt, hangt zelf weer aan 2 onafhankelijk van elkaar uitvierbare kabels, waarvan de eerste dienst doet als reserve kabel. De stand van den eigenlijken hellingmeter, die in den romp is ingebouwd, wordt door 4 draden electrisch overgebracht op een milli-ampèremeter, welke *in de kajuit van het* vliegtuig is aangebracht. De statische druk plant zich voort door een rubberslang, waarin tevens de 4 electrische draden en een kabel gelegen zijn.

3. Beginsel van den hellingmeter.

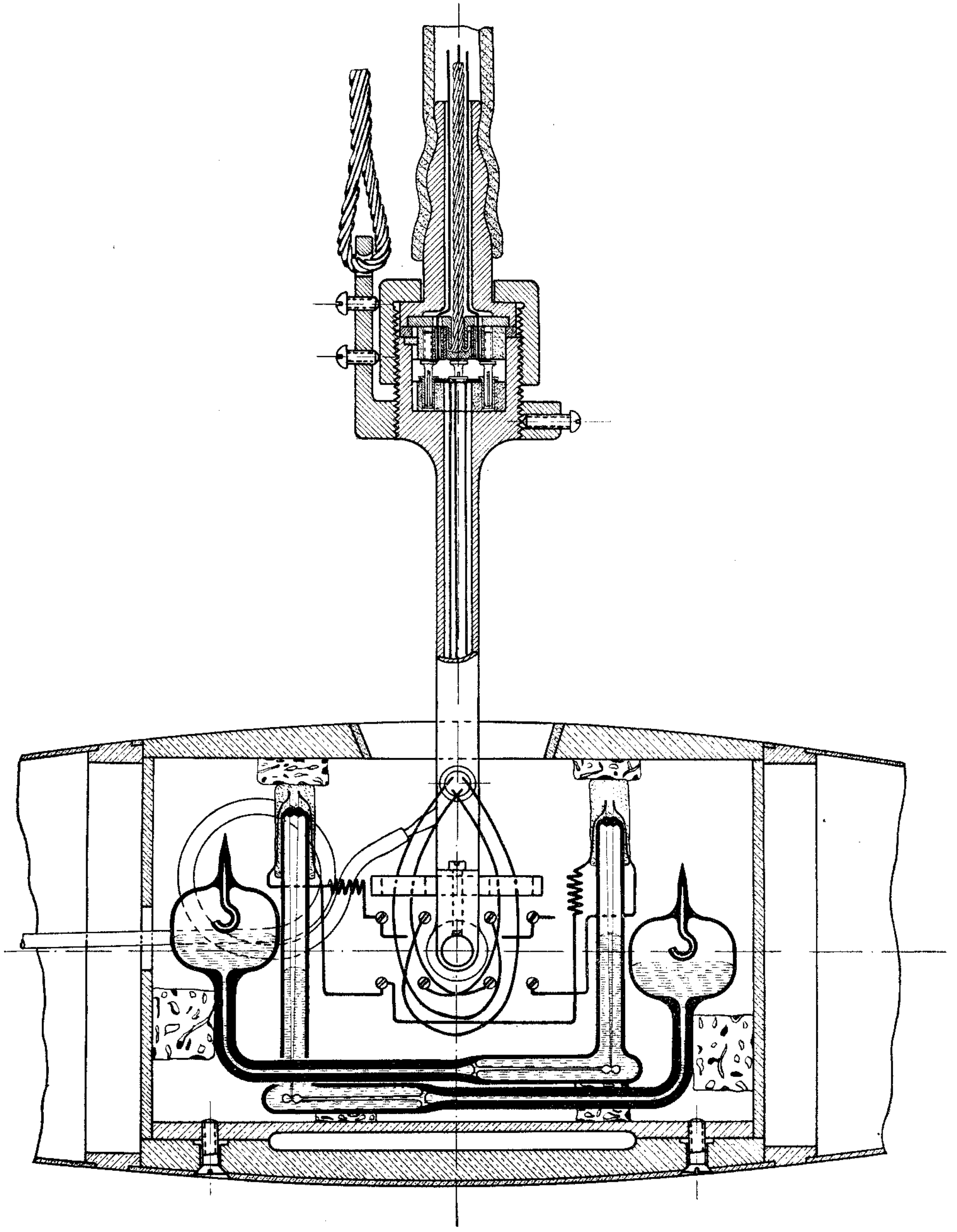


Fig. 2.

Langsdoorsnede over den hellingmeter en hare verbinding met den kabel.

De hellingmeter bestaat in beginsel uit een U-buis, ten deele met kwik gevuld en in welks eene been een dunne weerstandsdraad loopt. Al naar gelang van de helling der U-buis zal een grooter of kleiner deel van den weerstandsdraad met het kwik in aanraking komen en de weerstand van den draad resp. kleiner of grooter zijn. *Ten einde een goede en een zoo groot mogelijke werking te verkrijgen*, werd:

1°. de ruimte boven de beide beenen luchtledig gemaakt, zoodat in de gesloten U-buis het kwik elken stand, al naar gelang van de helling, kan aannemen;

2°. het eene been ten opzichte van het andere, waarin de weerstandsdraad loopt, zeer wijd genomen. De *verplaatsing van het kwik vindt daardoor* hoofdzakelijk en des te meer plaats in het nauwe been;

3°. de weerstandsdraad van zeer dunne platina-iridium draad genomen (0,08 mm). De weerstand hiervan is groot en de draad wordt door het kwik niet aangetast;

4°. deze draad in het eene been dubbel geslagen, waardoor de weerstand verdubbelde;

5°. niet één, doch vier van deze buisjes genomen, welke werden opgesteld als 4 weerstanden in een Wheatstonesche brug (zie fig. 3). Vóór elk der buisjes zijn nog onderling gelijke weerstandjes geschakeld, daar anders de stroomsterkte te hoog zou *kunnen worden. Twee buisjes in* tegenover elkaar gelegen takken van de brug vertoonen bij hoekverdraaiing een zelfde weerstandsverandering, de in de brug op elkaar volgende een tegengestelde.

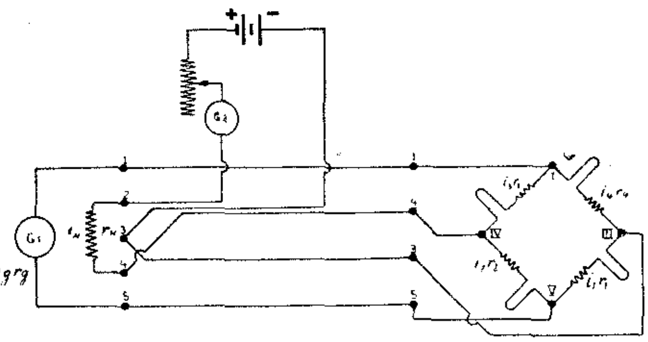


Fig. 3.

Schakelschema.

De spanning der batterij staat op twee tegenover elkaar staande hoekpunten van de brug. Wanneer nu de hellingmeter een zekere hoekverdraaiing ondergaat, ontstaat als gevolg van de nu ongelijke weerstanden tusschen de twee andere hoekpunten een spanningsverschil, dat functie is van de spanning der batterij en van de hoekverdraaiing. Dit spanningsverschil veroorzaakt een stroom, die op een milli-ampèremeter wordt afgelezen.

Zij nu:

i_g - - - - *stroomsterkte in den milli-ampèremeter*,

i_H - - - - stroomsterkte door de batterij,

E - - - - spanning der batterij,

r - - - - *weerstand in elk der takken in horizontalen stand*,

α - - - - hoekverdraaiing,

a - - - - specifieke weerstandsverandering,

r_g - - - - weerstand in de galvanometerketen,

r_H - - - - weerstand in de keten der batterij,

dan wordt het verband tusschen deze grootheden onderling aangegeven door:

$$i_g = i_H \cdot \frac{r \alpha a}{r + r_g} \tag{I}$$

$$i_g = E \cdot \frac{r \alpha a}{(r + r_g)(r + r_H)} \tag{II}$$

$$E = i_H (r + r_H) \tag{III}$$

Noodig zijn dus voor elke α: de aflezing van de veranderlijke i_g en i_H of E.

Bij temperatuurverandering zullen de weerstanden zich wijzigen. In formule (I) komen de weerstanden zoowel in teller als noemer lineair voor. Een verandering van i_g ten gevolge van temperatuurswisseling bij constant gehouden i_H zal dus minimaal zijn. Het verdient daarom de voorkeur een meter aan te brengen, die de waarde van i_H aangeeft, boven één, die de spanning der batterij meet.

4. Toepassingen.

De baanhellingmeter maakt metingen mogelijk, die op andere wijze moeilijk te verkrijgen zijn of wier resultaat als gevolg van verticale luchtstroomingen afwijkend is van die in rustige lucht; te vermelden valt o. a.:

1. het bepalen van den invalshoek bij verschillende vliegtoestanden;

2. het bepalen der verticale snelheid;

3. *het bepalen van de snelheid van verticale luchtstroomen.*

1. De invalshoek is gelijk aan de baanhelling, vermeerderd met den hoek, die de vleugelkoorde maakt met den horizon. *Deze laatste is bekend en verschilt* gedurende de proef steeds een constant aantal graden van de aanwijzing van den langshellingmeter. De mogelijkheid dezen invalshoek eenvoudig te kunnen bepalen is van groote beteekenis voor de vergelijking van de resultaten van ware-grootte-proeven met de onderzoekingen gedaan aan modellen in den windtunnel, daar men ook deze, zoo mogelijk, op den invalshoek betrekt.

In het niet gepubliceerde Rapport V. 400 van den R.S.L. zijn resultaten van metingen met den baanhellingmeter neergelegd. Hieruit overgenomen is fig. 4, voorstellende het verband tusschen de snelheid V_s en de baanhelling φ bij verschillende standen van de gasmanette.

(Zie fig. 4 op pag. 7.)

2. Zooals wij aan het begin van dit verslag zagen, geschiedt de meting van de verticale snelheid indirect en is zij aan fouten onderhevig ten gevolge van de toch altijd in de atmosfeer aanwezige verticale luchtstroomen. Het is zonder meer duidelijk dat, waar voorwaartsche snelheid en baanhelling bekend zijn en beide gemeten worden ten opzichte van de omringende lucht, de verticale snelheid hieruit bepaald, ook geldt ten opzichte van de omringende lucht en dus niet meer afhangt van de genoemde verticale luchtstroomingen.

3. Het bepalen van de verticale snelheid van luchtstroomen is slechts een kleine variatie van het aangegevene onder 2°. Wordt namelijk horizontaal gevlogen, zoodanig dus, dat de hoogtemeter een zelfden stand blijft innemen (dit is eventueel ook mogelijk met een variometer of statoscoop), dan zal de baanhellingmeter weer den hoek aanwijzen, waaronder de lucht doorvlogen wordt. Uit voorwaartsche snelheid en baanhelling kan nu de verticale snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht bepaald worden. De waarde geeft, voorzien van het tegengestelde teeken, de grootte van de verticale snelheid der lucht.

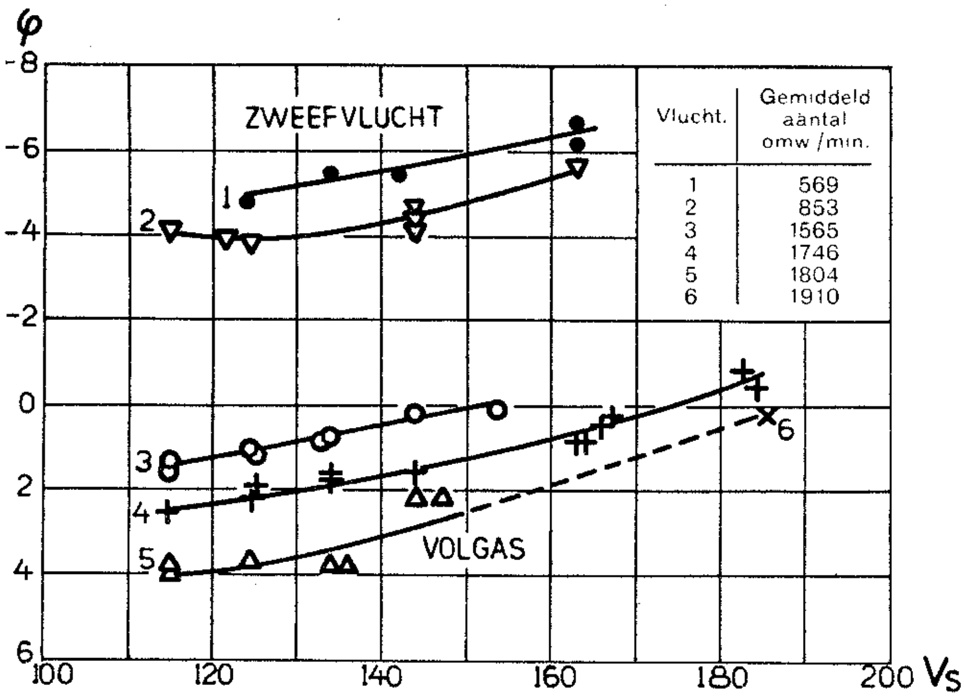


Fig. 4.

Verband tusschen de snelheid V_s en de baanhelling φ bij verschillende constante standen van de gasmanette.

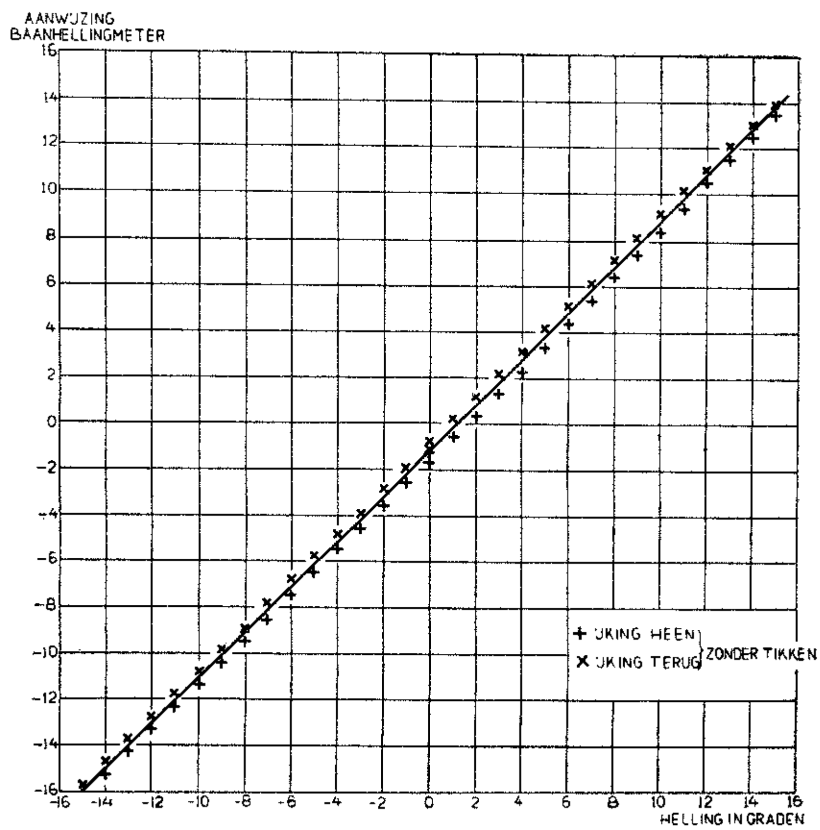


Fig. 5.

IJking van de baanhellingmeter.[1])

[1]) Met tikken verkrijgt men punten die nagenoeg precies op de getrokken lijn liggen.

5. IJkingen van het instrument.

(Zie fig. 5 op pag. 7.)

In fig. 5 is een ijking van het instrument tegen een precisie hellingmeter weergegeven. De instelling der ijkstanden geschiedde uiterst langzaam en steeds in die richting, waarin de verstelling plaats vond, noodig om van een vorigen ijkstand tot den nieuwen te komen. Hierdoor is de hysteresis maximaal en van een grootte van 0,4 ÷ 0,8 graad bij één stand van den ampèremeter. Deze hysteresis moet in hoofdzaak worden toegeschreven aan de adhaesie van het kwik tegen den glazen wand en de weerstandsdraad. Zij wordt door tikken zoodanig gereduceerd, dat geen verschil met de getrokken lijn meer waarneembaar is. In de practijk zal de grootte der fout, welke maximaal dus ± 0,2 ÷ 0,4 graad kan zijn (halve hysteresis), kleiner zijn, doordat het instrument niet volkomen rustig in de lucht hangt en altijd eenige trilling van het vliegtuig zal worden overgebracht. De gegevens van ware-grootte-proeven wijzen er op, dat de werkelijke fout inderdaad geringer is dan de genoemde maximale. Een nieuw ontwerp is in voorbereiding, welke de genoemde mogelijke fout bedoelt te beperken.

6. Metingen aan het instrument.

In den windtunnel werden de aërodynamische coëfficiënten van den baanhellingmeter bepaald. Gemeten werden lift, drift en duikmoment voor hoeken van + 10°, + 5°, + 2°, + 0,5°, 0°, − 0,5°, − 2°, − 5° en + 10° bij windsnelheden van ongeveer 21 en 27 m/sec. De invalshoek werd gemeten op de bovenzijde van de statische buis, terwijl de hoek positief werd genomen in de richting, als in fig. 1 is aangegeven. De resultaten werden uitgedrukt in coëfficiënten, berekend met behulp van de formules:

$$R_a = K_a q$$
$$R_w = K_w q$$
$$M = K_m q$$

Hierin is:

R_a de lift, R_w de drift en M_w het duikmoment, K_a liftcoëfficiënt, K_w driftcoëfficiënt en K_m momenten coëfficiënt.
De uitkomsten zijn in de figuren 6, 7 en 8 uitgezet. Voor beide snelheden komen de resultaten practisch overeen. Het duikmoment ten gevolge van de verplaatsing van het kwik in de buisjes bleek verwaarloosd te kunnen worden.

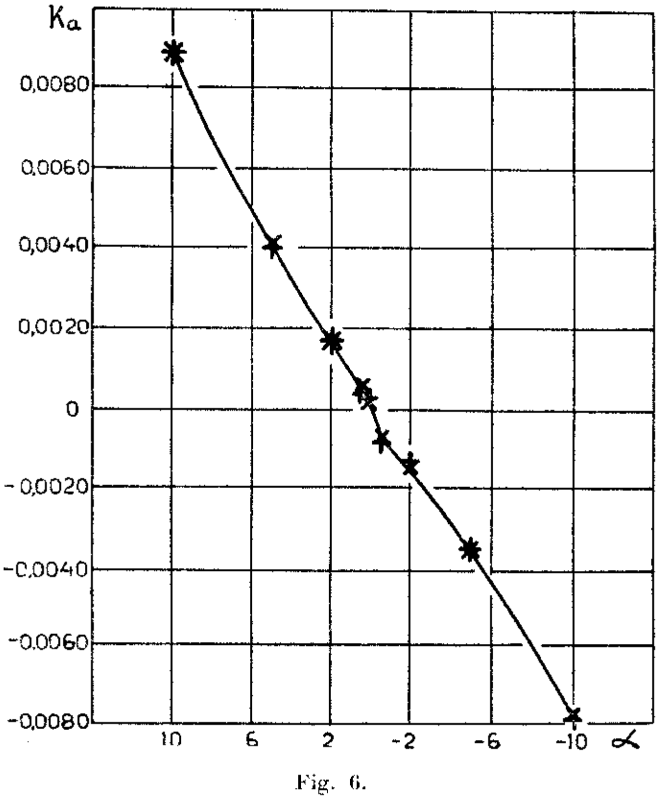


Fig. 6.

Verband tusschen een liftcoëfficiënt K_a en invalshoek γ.

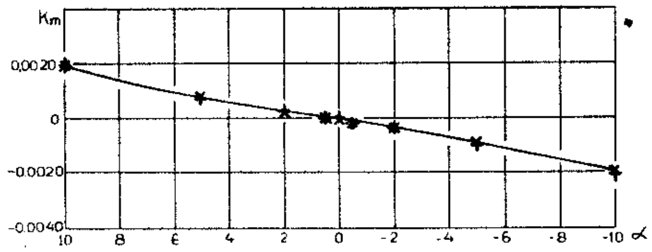


Fig. 7.

Verband tusschen een momentencoëfficiënt K_m en invalshoek γ.

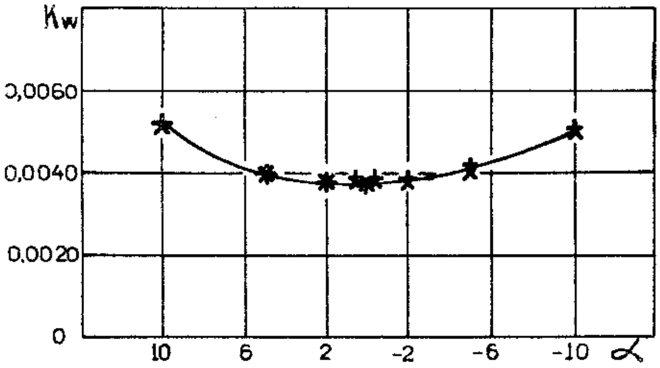


Fig. 8.

Verband tusschen een weerstandscoëfficiënt K_w en invalshoek γ.

Het onderzoek naar de stabiliteit van een enkele statische buis, welke onder het vliegtuig wordt uitgelaten, was aanleiding de traagheidsmomenten te bepalen.

Gevonden werd:

$I_x = 122,4$ gr cm sec².
$I_y = 6,07$ „ „ „ .
$I_z = 124,0$ „ „ „ .

Bij de proeven bleek, dat het instrument onder het vliegtuig hangende, slingeringen uitvoerde. Deze konden door lengteverandering van den reserve-kabel in het meetgebied tot stilstand worden gebracht.

7. Mogelijke verbetering.

Een nieuw verbeterd ontwerp is thans in voorbereiding. De voornaamste verbeteringen zullen zijn:

a. dat de hysteresis aanmerkelijk verkleind wordt. Dit kan alsvolgt bereikt worden. In plaats van de Pt-Ir draad in het éene been dubbel te slaan, wordt de draad door de U-buis heengeleid. De hysteresis, die aan de eene zijde positief is, zal nu aan den anderen kant negatief zijn. De wederzijdsche fouten heffen elkaar op, terwijl nochtans een weerstandsverandering bestaan blijft door het snellere verloopen van het kwik in de eene buis. Een nadeel is, dat de weerstandsverandering nu ruim 2 maal kleiner wordt. Door invoering van de constructiewijziging, onder *b* te noemen, blijkt dit nadeel niet groot te zijn;

b. dat in plaats van een milli-ampèremeter met permanenten magneet nu een kruispoel galvanometer gebruikt zal worden. Het voordeel hiervan is, dat de aanwijzing thans onafhankelijk wordt van de spanning der batterij en de veldsterkte der permanente magneet, daar het beginsel van dezen meter niet berust op veldsterkte-, doch slechts op veldrichtingswijziging. Het is duidelijk, dat de weerstandsverandering ten gevolge van temperatuurverschillen geen invloed op de aanwijzing zullen hebben.

Rapport M. 500.

Proeven ter bepaling van den toelaatbaren vlaktedruk in boutgaten

door

ir. L. J. G. VAN EWIJK.

Rapport M. 500: Détermination des pressions qui peuvent être admises dans les trous des attaches.

Report M. 500: Experiments for the determination of the bearing-stress to be tolerated in bolt-holes.

Bericht M. 500: Messungen zur Bestimmung des zulässigen Lochleibungsdruckes in Beschlaglöchern.

RAPPORT M. 500.

Proeven ter bepaling van den toelaatbaren vlaktedruk in boutgaten.

Uittreksel.

Bij de in dit rapport beschreven proeven werd nagegaan bij welke belasting de blijvende vervorming der boutgaten van beslaglippen begint op te treden en op welke wijze deze vervorming (ovalisatie) als functie van den vlaktedruk toeneemt. In totaal werden aan 40 boutgaten metingen verricht. Daarbij werden zes verschillende plaatmonsters onderzocht.

Bij een gedeelte der proefstukken werden de lippen door het oplasschen van schijven van hetzelfde materiaal versterkt.

Door deze metingen werd aangetoond, dat blijvende deformatie begint op te treden bij een vlaktedruk, welke eenigszins lager ligt dan de bij de trekproeven gevonden strekgrens, en dat deze ovalisatie in belangrijke mate afhankelijk is van den aard van het materiaal en van den toestand, waarin dit zich bevindt.

Voor het trekken van algemeene conclusies betreffende de vlaktedrukken, welke met het oog op de in het bedrijf der vliegtuigen optredende slijtage en vervorming toelaatbaar te achten zouden zijn, zullen meer uitvoerige proeven genomen dienen te worden, waarbij de verschillende factoren, welke daarop van invloed zijn, nader worden bestudeerd. Het ligt in de bedoeling deze proeven voort te zetten.

REPORT M. 500.

Experiments for the determination of the bearing-stress to be tolerated in bolt-holes.

Summary.

Tests were made in order to determine the bearing-stress at which a permanent deformation in the bolt-holes starts and in which way this deformation develops when the load is increased. In total measurements on about 40 test-pieces made from 6 different steel-sheets, have been done.

For a number of these pieces the bearing surface was increased by welding on of discs of the same material. It could be shown that permanent ovalisation starts at a bearing-stress somewhat below the yield point (0,2 %) as determined by the tensile tests and further that the deformation of the holes depends on the properties of the steel and the condition in which it was submitted to the tests.

More extensive investigations will be necessary in order to conclude which stresses can be tolerated in praxis without fear for wear and deformation. There are several factors not investigated till now that can influence the results and must be taken in view.

These experiments will be continued and further results will be published later on.

RAPPORT M. 500.

Détermination des pressions qui peuvent être admises dans les trous des attaches.

Résumé.

On a mesuré pour quelles charges une déformation permanente se manifeste et de quelle manière cette déformation augmente en fonction des charges appliquées.

Les expérimentations ont été faites sur 40 éprouvettes et six qualités de tôle différente.

Pour un nombre de pièces la surface soumise à la pression a été agrandie à moyen de rondelles fixées par soudure autogène.

Les essais ont montré qu'une déformation permanente se manifeste pour une charge spécifique inférieure à la limite élastique du matériel (limite 0,2) comme déterminée par l'essai de traction et que cette déformation dépend de la nature et de l'état du métal employé.

Pour juger quelles charges peuvent être admises dans la pratique au point de vue de déformation et usage, des essais plus détaillés seront nécessaires.

On a l'intention de publier plus tard les résultats des essais complémentaires.

BERICHT M. 500.

Messungen zur Bestimmung des zulässigen Lochleibungsdruckes in Beschlaglöchern.

Auszug.

Es wurde bestimmt bei welchen Drücken eine bleibende Ovalisierung der Löcher aufzutreten beginnt und in welcher Weise die Ovalisierung als Funktion der Belastung zunimmt. Im ganzen wurden Messungen an 40 Löchern durchgeführt und 6 verschiedenen Blechmuster wurden dabei untersucht.

Bei einer Anzahl der Probestücke wurden die tragende Flächen durch Aufschweissen von Verstärkungsscheiben vergrössert.

Es zeigte sich bei diesen Messungen dasz eine bleibende Formänderung entsteht bei einem Druck welcher etwas niedriger ist als die bei Zerreiszversuchen gemessene 0,2-Streckgrenze des Materials und dasz die Ovalisierung in erheblichem Masze von der Materialart und vom Behandlungszustand abhängig ist.

Zur Beantwortung der Frage welche Drücke in der Praxis zugelassen werden können ohne dasz ungewünschte Verschleisse oder Deformierungen dabei auftreten, sind weitere Versuche durchzuführen. Dabei wären die verschiedenen Faktoren welche von Einflusz sein können zu beachten.

Über die bei diesen weiteren Versuchen erreichten Ergebnisse wird in einer folgenden Veröffentlichung berichtet werden.

Proeven ter bepaling van den toelaatbaren vlaktedruk in boutgaten

door

ir. L. J. G. VAN EWIJK.

Rapport M. 500. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

1. Inleiding.

Er zijn in de moderne technische literatuur slechts weinig gegevens te vinden omtrent de vlaktedrukken, welke bij de verbinding door middel van pennen of bouten toegelaten mogen worden.

Weliswaar komen in de handboeken algemeene aanwijzingen daarover voor, doch deze aanwijzingen zijn te vaag, dan dat men zich in een bepaald geval een duidelijk beeld omtrent de toelaatbaarheid der optredende drukken kan vormen, indien de afmetingen met gebruikmaking hiervan vastgesteld zouden worden.

Uiteraard zal men zich bij de beoordeeling moeten afvragen, welke nadeelen door te hooge drukken veroorzaakt kunnen worden. Dienen de bouten voor de bevestiging van onderdeelen, welke geen beweging ten opzichte van elkaar behoeven uit te voeren, dan kan door te hoogen vlaktedruk vervorming of zelfs breuk worden veroorzaakt. Bij onderdeelen, welke ten opzichte van elkaar bewegen en waarbij de bout de functie van scharnierpen vervult, kan ook een te groote wrijving en de daarmede gepaard gaande slijtage nadeelig zijn. Daartusschen bevinden zich nog grensgevallen, waarbij geen bepaalde scharnierbeweging verlangd wordt, doch waarbij de onderdeelen een kleine beweeglijkheid moeten bezitten en waarbij een te hooge druk eveneens tot ongewenschte slijtage aanleiding geven kan.

Ook de aard van de belasting zal op de toelaatbaarheid van den vlaktedruk een belangrijken invloed kunnen uitoefenen. Zoo is het algemeen bekend, dat boutgaten, die aan stooten onderhevig zijn, veel sneller zullen uitslaan of ovaliseeren dan andere, waarbij de belasting rustend is; ja zelfs is het gevaar voor breuk — dat bij statische belasting klein te achten is, omdat de vervorming van het gat meestal een tijdige waarschuwing zal zijn — bij de herhaaldelijk optredende dynamische belasting niet uitgesloten, aangezien deze in dit geval zonder waarneembare vormverandering plaats vinden kan.

In vele gevallen zal het ontbreken van betrouwbare gegevens omtrent den toelaatbaren vlaktedruk niet als een bezwaar worden ondervonden. Meestal heeft men immers door de ervaring geleerd, hoe de afmetingen ter plaatse van de verbindingen moeten zijn om breuk of vervorming van de gaten te voorkomen of de slijtage op afdoende wijze te beperken. Men kan ook zeggen: meestal wordt zoo zwaar geconstrueerd, dat deze bezwaren van geen beteekenis zijn.

Er zijn echter ook gevallen, waarin een zoo licht mogelijke constructie op prijs wordt gesteld en hiervan levert het vliegtuig wel het meest typische voorbeeld. Aangezien echter voor het vliegtuig de veiligheid een allereerste eisch is, spreekt het wel vanzelf, dat naarmate bij de verdere ontwikkeling van den vliegtuigbouw meer aandacht aan gewichtsbesparing bij de détails wordt geschonken, ook meer belangstelling gekomen is voor de vraag: welke vlaktedrukken in boutgaten toegelaten kunnen worden, zonder dat hierdoor overmatige slijtage, ovaliseeren der gaten of breuk van de te verbinden onderdeelen kan worden teweeggebracht.

Ten einde over dit vraagstuk gegevens te verzamelen, werden bij den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart proeven genomen, welke in deze publicatie worden beschreven.

Deze proeven hebben slechts een inleidend karakter. Zooals gebleken is, is het aantal factoren, waardoor het resultaat wordt beïnvloed, zeer groot, zoodat een meer uitgebreid onderzoek noodig zal zijn voor een eenigszins volledige behandeling van dit vraagstuk.

Nagegaan werd voor eenige plaatsoorten en eenige boutdiameters welk verband er bestaat tusschen de vlaktedruk en de blijvende deformatie (ovalisatie) van het gat. Daarbij is tevens bestudeerd, in hoeverre door het oplasschen van versterkingsringen (waardoor het dragende oppervlak wordt vergroot) verhooging van den toelaatbaren vlaktedruk kan worden verkregen.

2. Materiaal, dat voor de proeven werd gebruikt.

De voor dit onderzoek benoodigde proefstukken werden uit zes verschillende plaatmonsters vervaardigd.

Drie dezer monsters hadden een dikte van 3 mm, de drie andere een dikte van 4 mm. Deze platen bestonden uit koolstofstaal van goede laschbaarheid voor autogene lassching. De mechanische eigenschappen der monsters zijn in de genoemde tabellen vermeld. De trekvastheid en de strekgrens werd bepaald van het materiaal in zijn oorspronkelijken toestand, alsook van proefstukken, welke met behulp van de laschvlam waren uitgegloeid.

3. Vorm en afmetingen der proefstukken.

Twee verschillende proefstukken werden gebruikt, nl. stukken volgens fig. 2 zonder versterkingsringen en stukken volgens fig. 3, waarbij het dragende oppervlak door het oplasschen van versterkingsringen werd vergroot. Op dezelfde wijze worden ook in den vliegtuigbouw de lippen der beugels en beslagen versterkt. Fig. 1 geeft een schematische

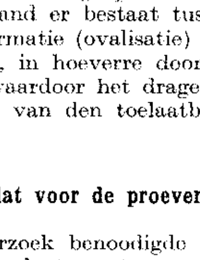


Fig. 1.
Bevestigingsbeugel.

voorstelling van een dergelijke verbinding. In de practijk worden deze ringen, zooals de figuur doet zien, slechts aan één zijde opgelascht, terwijl ter verkrijging van een meer symmetrische belasting de proefstukken aan weerszijden van een ring werden voorzien. Bij toepassing van het model volgens fig. 2 bevindt het materiaal zich in den toestand,

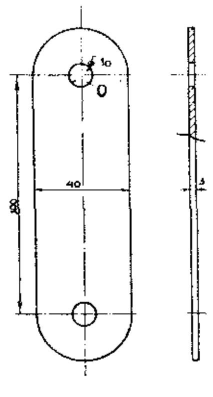


Fig. 2.

Proefstuk met twee oogen.

O = opening, waarvan de ovalisatie werd gemeten.

waarin het door den plaatfabrikant werd geleverd. Bij het model fig. 3 ondergaat het materiaal den invloed van de verhitting tijdens de lassching. Van belang is daarbij de vraag in hoeverre de versterking, welke door het vergrooten van het dragende oppervlak kan worden verkregen, door deze lassching wordt beïnvloed. De versterkingsringen werden, evenals in de practijk, op de proefstukken bevestigd, door schijfjes van hetzelfde plaatmateriaal langs den rand hierop vast te lasschen. Na het boren van de gaten werden deze op de boorbank met cylindrische ruimers nabewerkt, waardoor een goede passing tusschen bout en gat werd verkregen. Bij alle bleef de speling beneden 0,05 mm.

3. Wijze van beproeving.

De proefstukken werden zoodanig in de trekbank opgehangen, dat eene nabootsing van de boutverbinding uit de practijk werd verkregen. De stukken met twee oogen (fig. 2) werden aan beide uiteinden van een dubbelscharnierstuk voorzien, ten einde het optreden van buigingen tegen te gaan. De stukken met één oog (fig. 3) werden aan de bovenzijde in een dergelijk cardanstuk opgehangen en aan de onderzijde op de gebruikelijke wijze tusschen klemwiggen vastgezet

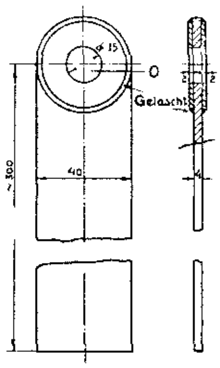


Fig. 3.

Proefstuk met één oog met opgelaschte plaatjes.

O = opening, waarvan de ovalisatie werd gemeten.

(zie fig. 4). Op deze dubbelscharnierstukken werden meetklokken (1 schaaldeel = 0,01 mm) bevestigd op zoodanige wijze, dat de vormverandering van het oog tijdens de belasting kon worden afgelezen. De opstelling van deze meetklokken toont fig. 5. De proefstukken werden op regelmatige wijze belast. De belasting werd geleidelijk tot een bepaalde waarde opgevoerd, dan gedurende 15 seconden constant gehouden en vervolgens weder tot een (steeds gelijke) beginwaarde verminderd. Ook deze begintoestand duurde steeds 15 seconden. De tusschenpoozen van 15 seconden waren voldoende voor de aflezing van de meetklokken.

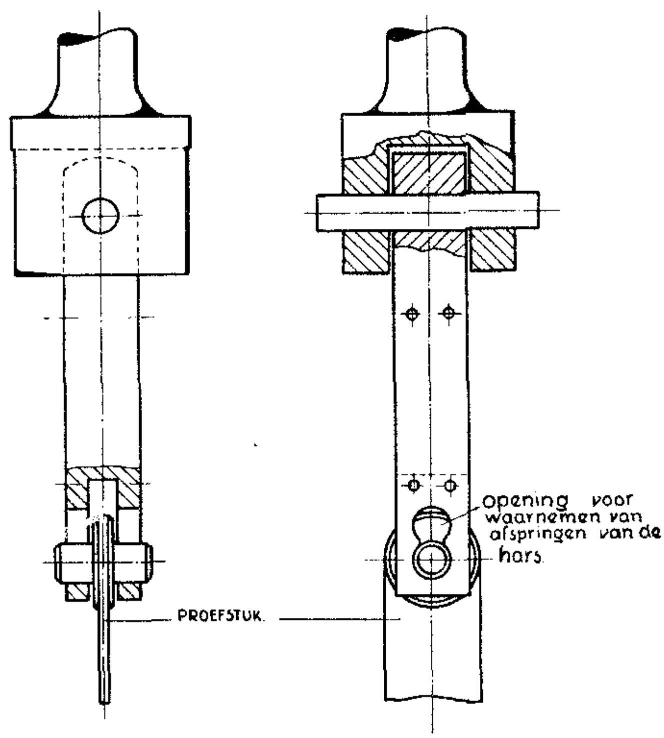


Fig. 4.

„Wijze van beproeving".

Bevestiging van de proefstukken in de trekbank.

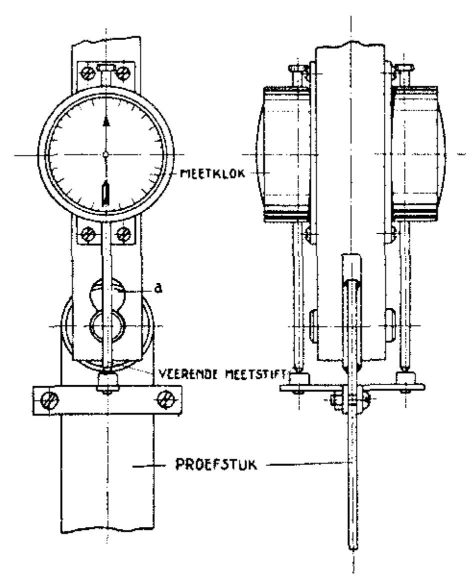


Fig. 5.

„Wijze van beproeving".

Meting van de ovalisatie met behulp van meetklokken.

Op iedere ontlasting volgde steeds een hoogere belasting en de door deze regelmatig trapsgewijze opklimmende belasting veroorzaakte ovalisatie der gaten, werd tijdens de proef in diagram gebracht. Hierdoor was het mogelijk de wijze, waarop de blijvende deformatie van de belasting afhankelijk was, tijdens de proef te bestudeeren. De proef werd meestal voortgezet, tot een blijvende ovalisatie van ongeveer 0,4 mm opgetreden was.

In enkele twijfelgevallen werd met behulp van Okhuizenrekmeters (1 schaaldeel = 0,001 mm) gecontroleerd of het proefstuk buiten de opgelaschte schijven blijvende vormverandering onderging.

Bij één der onderzochte plaatmonsters vond inderdaad strekgrensoverschrijving plaats op eenige centimeters afstand van de laschnaad. Het gelukte de strekgrens van dit gedeelte zoodanig te verhoogen, dat de proef op de normale wijze verloopen kon, d. w. z. dat de ovalisatie van het oog kon worden verkregen, zonder dat in het overige deel van het proefstuk blijvende vormverandering optrad. Deze plaatselijke verhooging van de strekgrens werd bereikt door het proefstuk met het oogeinde in water op te stellen, het uitstekende gedeelte met de laschvlam tot helderrood te verhitten en het daarna in water af te schrikken, door het in de bak te laten vallen.

Na de proefnemingen werden de door de meetklokken aangegeven ovalisaties door microscopische metingen gecontroleerd. Het bleek daarbij, dat de aanwijzingen der klokken betrouwbaar te achten waren.

In het beginstadium van dit onderzoek werd nagegaan of het mogelijk was, de grens van blijvende vormverandering met voldoende nauwkeurigheid aan te geven, door de proefstukken met een harslaag te bedekken en vast te stellen bij welke belasting de harslaag begint af te springen. Het bleek, dat deze methode, welke zoowel op proefstukken voor trekproeven als voor ovalisatieproeven werd toegepast, geen regelmatige uitkomsten geeft. Zoo wisselde bijv. de ovalisatie, bij welke het afspringen een aanvang nam, van 0,02 tot 0,09 mm. Bij de verdere proeven is derhalve van deze methode geen gebruik meer gemaakt. De methode der meetklokken heeft tegenover de harsmethode het groote voordeel, dat van de wijze, waarop de ovalisatie toeneemt bij verhooging van de belasting, een duidelijk beeld wordt verkregen. In fig. 5 is de opening in de ophangstukken aangegeven (bij *a*), waardoor het afspringen van de harslaag kon worden waargenomen.

Wat de genomen proeven betreft, zij nog opgemerkt, dat voor de plaatmonsters van 3 mm de ovalisatie slechts gemeten werd op proefstukken zonder versterkingsringen en voor een boutdiameter van 10 mm, terwijl uit de plaatmonsters van 4 mm zoowel proefstukken met — alsook zonder — opgelaschte versterkingen werden onderzocht. De diameter van de bouten bedroeg bij deze laatste steeds 15 mm. De bouten waren van materiaal van hooge vastheid vervaardigd, zoodat blijvende vervorming van deze bouten niet optrad.

4. Bespreking der resultaten.

De bij deze metingen gevonden waarden zijn in de tabellen nos. 1 en 2 vermeld. De resultaten der trekproeven zijn daarbij weergegeven. De voor de strekgrens opgegeven waarden konden, doordat de diagrammen een duidelijke knik vertoonden, met voldoende nauwkeurigheid uit deze diagrammen worden berekend. Slechts in één geval (proef n°. 2 van tabel 1) moest voor de strekgrensbepaling (0,2 grens) een Okhuizenrekmeter worden gebruikt. Van de ovalisatiemetingen zijn alleen de uiterste waarden der bijbehoorenden vlaktedruk in deze tabellen opgenomen. In het geheel werd de vervorming van ongeveer 40 gaten gemeten.

De opgegeven vlaktedruk werd op de gebruikelijke wijze berekend volgens:

$$\sigma = \frac{P}{\phi\, d}$$

waarin:

P = de belasting in kg,

ϕ = de diameter van de bout, en

d = de dikte van het proefstuk ter plaatse van het boutgat.

Vergelijken wij de tabellen nos. 1 en 2 met elkaar, dan valt het op, dat er geen vast verband kan worden aangegeven tusschen de strekgrens, zooals deze bij de trekproef werd gevonden, en de materiaalspanning, waarbij een blijvende ovalisatie van 0,1 mm in het oog optrad.

Bij de platen van 4 mm loopt dit verschil sterk uiteen. Eveneens is er in tabel 2 voor de drie plaatmonsters een belangrijk onderscheid waar te nemen in de verandering, welke door het oplasschen der ringen is teweeggebracht. Zoo is voor het monster, gemerkt A, de wijze waarop de ovalisatie met de verhooging van den druk toeneemt, practisch gelijk gebleven, terwijl voor monster B de gelaschte proefstukken veel gemakkelijker, d. w. z. bij een veel lageren druk ovaliseeren. Monster C bevindt zich, wat dit punt betreft, tusschen de beide andere in.

Wat beteekent dit verschil voor de practijk?

Dat de versterking, welke met het oplasschen der ringen wordt beoogd, bij de plaat, gemerkt A, wel bereikt wordt, immers de druk in kg per mm² blijft gelijk, terwijl het dragende oppervlak twee maal zoo groot geworden is. De toelaatbare belasting kan dus ook ongeveer verdubbeld worden.

Bij plaat B daarentegen wordt de versterking, welke door de verdubbeling van het dragende oppervlak wordt nagestreefd, weer met, ruw benaderd, 30 % verminderd, zoodat de toelaatbare belasting hoogstens met 40 % verhoogd zou mogen worden.

Deze resultaten toonen reeds voldoende aan, dat men zich bij de beoordeeling van de toelaatbaarheid der optredende belastingen behoorlijk rekenschap zal moeten geven van den invloed, welke door den aard van het materiaal en den toestand, waarin het zich bevindt, uitgeoefend worden kan.

Het spreekt wel vanzelf, dat op grond van de weinige tot nu toe genomen proeven geen algemeene conclusies betreffende de in boutgaten toe te laten vlaktedrukken kunnen worden getrokken.

Niet alleen is daarvoor het aantal der genomen proeven veel te klein, doch bovendien zijn er nog verschillende factoren aan te geven, welke als zeer belangrijk kunnen worden genoemd en waaraan tot nu toe geen aandacht kon worden geschonken.

Als zoodanig kunnen wij bijv. noemen:

1. De afmetingen der proefstukken rondom de boutgaten, de verhouding tusschen boutdiameter en plaatdikte, tusschen plaatdikte en dikte der versterkingsringen.

Het zou wellicht mogelijk zijn langs theoretischen weg af te leiden, welke vorm der lippen het gunstigste is.

In ieder geval zou als grondslag voor het vaststellen van den toelaatbaren vlaktedruk die belasting moeten kunnen dienen, waarbij blijvende deformatie (ovalisatie) begint op te treden. Voor de practijk zou het zeer aangenaam zijn, indien het mogelijk ware een eenvoudig verband te leggen tusschen de strekgrens (0,2 grens), zooals deze bij de trekproef wordt gevonden, en de ovalisatiegrens. Het is echter de vraag of een dergelijk verband aanwezig is. Bij de tot nu toe genomen proeven kon dit niet worden uitgemaakt. Tot op zekere hoogte is de ovalisatiegrens van 0,1 mm, welke in de tabellen als het beginpunt der blijvende deformatie wordt genoemd, natuurlijk willekeurig gekozen. Dat het begin van ovalisatie reeds bij een spanning optreedt, welke veel lager is dan de in de tabel voor de 0,1 ovalisatie genoemde waarden, toont fig. 6 aan, welke een typisch voorbeeld is van de diagrammen, zooals deze bij de metingen werden opgeteekend. Doch alhoewel het karakter van de lijn tusschen

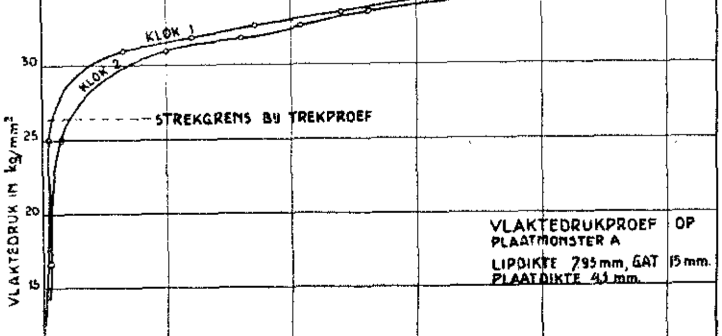


Fig. 6.

Voorbeeld van een ovalisatiediagram.

0 en 0,1 ovalisatie wel steeds hetzelfde was, werd tusschen dit gedeelte der diagrammen voor de verschillende monsters vrij veel spreiding geconstateerd, zoodat hieruit geen conclusie te trekken valt.

Wel staat het vast, dat het begin van ovalisatie optreedt bij een belasting per eenheid van oppervlak, welke lager ligt dan de strekgrens, zooals deze bij de trekproeven werd gevonden.

Dat de trekvastheid als basis voor de beoordeeling van de toelaatbaarheid der optredenden vlaktedruk zou kunnen dienen, is niet waarschijnlijk, aangezien de trekvastheid in het algemeen geen aanwijzing geven zal voor de belasting, waarbij de deformatie een aanvang neemt. Om deze reden kunnen de gegevens, die bijv. in Hütte voorkomen (dl. III, bladz. 1005, 1928), niet betrouwbaar worden geacht voor de onderzochte boutverbinding.

2. De warmtebehandeling van de lippen na het oplasschen der versterkingsringen.

Bij de toepassing van speciaalstaal voor de beugels, welke met behulp van bouten aan elkaar worden bevestigd, werd een warmtebehandeling na de lassching in Amerika en Engeland reeds toegepast. Of ook bij gebruik van koolstofstaal deze methode reeds werd gevolgd, is ons niet bekend.

3. De versterking aan één zijde of aan twee zijden aangebracht.

Ter wille van de symmetrie werd bij de proefstukken de dubbele versterking toegepast, terwijl, zooals reeds werd opgemerkt, bij de vliegtuigen meestal de enkele versterking wordt gebruikt.

Het zal aanbeveling verdienen bij de voortzetting van dit onderzoek ook proefstukken met twee lippen te vervaardigen, zoodat de proef zooveel mogelijk in overeenstemming met de practijk kan worden gebracht.

4. De wijze van belasting.

Tot nu toe werd slechts met geleidelijk opklimmende belasting (en korte tusschenpoozen) gewerkt. In de practijk staan de beugels der vliegtuigen aan wisselende belastingen (trillingen tijdens het vliegen) bloot, maar bovendien treden tijdens de landingen, niet te verwaarloozen, stootsgewijze belastingen op. Hierbij zij nog opgemerkt, dat bij de vliegtuigen de verbindingen zoowel beweeglijk als onbeweeglijk kunnen zijn. Zoowel scharnierende beugels als ook dezulke, welke geen of een geringe beweeglijkheid bezitten, komen voor. Het zal aanbeveling verdienen deze beweeglijkheid bij de verdere proeven na te bootsen en daarbij na te gaan in hoeverre de ovalisatie en slijtage van de wijze van belasting afhankelijk is.

Zoo zien wij, dat de in dit rapport beschreven proeven verre van volledig zijn. De indruk is evenwel ontstaan, dat bij toepassing van de tot heden gebruikte formules de afmetingen van beslaglippen enz. niet groot genoeg worden om blijvende vervorming in het bedrijf te voorkomen. Derhalve wordt het de moeite waard geacht deze onderzoekingen voort te zetten en daarbij de hierboven besproken factoren nader te onderzoeken. Over deze verdere proeven zal in een volgende publicatie nader worden bericht.

Tabel 1.

OVERZICHT VAN DE PROEVEN, GENOMEN OP 3 mm PLAAT. BOUT-DIAMETER 10 mm.

MONSTER.		TREKPROEF.		OVALISATIEPROEF.			
Merk.	Richting.	Trekvastheid in kg/mm².	Strekgrens in kg/mm² (0,2 grens).	Vlaktedruk in kg/mm² bij een ovalisatie van: 0,1 mm.	0,2 mm.	0,3 mm.	0,4 mm.
A	langs	40	23,9	37—41	44—47	46—49	48—49
	dwars	37,2	22,6	33—37	39—44	41—47	42—48
B	langs	38,8	25,1	41—42	45—46	48—49	49—50
	dwars	40,9	26,2	32—44	41—48	46—50	48—51
C	langs	44,7	35,8	44—53	53—57	58	—
	dwars	45,2	36,4	41—53	52	—	—

Tabel 2.

OVERZICHT VAN DE PROEVEN, GENOMEN OP 4 mm PLAAT. BOUT-DIAMETER 15 mm.

MONSTER.			TREKPROEF.		OVALISATIEPROEF.				Opmerking.
Merk.	Toestand van beproeving.	Wals-richting.	Trek-vastheid in kg/mm².	Strekgrens in kg/mm² (0,2 grens).	Vlaktedruk in kg/mm² bij een ovalisatie van: 0,1 mm.	0,2 mm.	0,3 mm.	0,4 mm.	
A	ongegloeid	langs	35,6	24,5	28	—	—	—	zonder ringen
	gegloeid	„	40,5	26,4	30—32	32—33	33—34	36	met „
	ongegloeid	dwars	42,8	30	27—30	30—32	32—34	34—35	zonder „
	gegloeid	„	40,8	24,5	29—33	31—34	31—35	33—37	met „
B	ongegloeid	langs	40,5	26,4	42—43	45—48	50—51	51—52	zonder ringen
	gegloeid	„	39	26,2	23—30	28—31	29—32	32—33	met „
	ongegloeid	dwars	44	29,7	41—43	46—47	48—49	50	zonder „
	gegloeid	„	41,3	26,4	28—29	29—31	31—33	32—34	met „
C	ongegloeid	langs	43	27,6	34—40	40—42	42—43	44—45	zonder ringen
	gegloeid	„	42,4	26,4	33	34—35	35—36	36—37	met „
	ongegloeid	dwars	43	27,5	37—39	42	44	45	zonder „
	gegloeid	„	42,7	28,1	29—30	32—33	34	36	met „