

**VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN
VAN DEN
RIJKS-STUDIEDIENST
VOOR DE LUCHTVAART
AMSTERDAM**

DEEL VII — 1934

A. Boelen

**VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN
VAN DEN
RIJKS-STUDIEDIENST
VOOR DE LUCHTVAART
AMSTERDAM**

DEEL VII — 1934

INHOUD.

Bladz.

Bladz.

INLEIDING.

RAPPORT A. 390.

Aerodynamische Eigenschaften der Quasi-Trapezflügel mit verschiedener Breite des prismatischen Teiles

1 -

Circulatieverdeeling voor tapsche vleugels bij verschillende breedte van het rechte middenstuk.

RAPPORT A. 322.

De aanwijzing van thermometers in bewegende lucht

5 -

L'indication des thermomètres dans un courant d'air.

The indication of thermometers in moving air.

Die Anzeige von Thermometern in strömender Luft.

RAPPORT A. 372.

De luchtweerstand van een vliegtuigwiel met en zonder kap

11 -

La résistance aérodynamique d'une roue d'avion avec et sans carenage.

The resistance of an aeroplane wheel with and without spat.

Der Widerstand eines Flugzeugrades mit und ohne Haube.

RAPPORT S. 83.

Stoszartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich bei beiderseits gelenkiger Lagerung

17 -

RAPPORT A. 258.

Onderzoek van molen-modellen

27

Essais de modèles de moulins à vent.

Test of models of a windmill.

Messungen an Windmühlenmodellen.

RAPPORT A. 269.

Proefnemingen met modellen van windmolens

35

Experiments with three models of windmill sails.

Expériences sur trois modèles de moulins à vent.

Untersuchung von Windrädern.

RAPPORT A. 426.

Het loslaten van de strooming bij groote invalshoeken van een vleugel

47 -

Le décollement des filets fluides sur l'extrados d'une aile.

Separation of the flow at large angles of incidence.

Die Ablösung an einem Flügel bei grossen Anstellwinkeln.

RAPPORT S. 67.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. II

55 -

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. II.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. II.

Der Einfluss der Rippenverbandwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. II.

RAPPORT S. 68.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. III

67 -

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. III.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. III.

Der Einfluss der Rippenverbandwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. III.

RAPPORT S. 70.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. IV

99 -

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. IV.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. IV.

Der Einfluss der Rippenverbandwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. IV.

RAPPORT A. 367.

De kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan een kabel gesleept wordt

123 -

La vitesse critique d'un corps remorqué par un avion.

The critical velocity of a body towed by an aeroplane.

Die kritische Geschwindigkeit eines Körpers, der vom Flugzeug geschleppt wird.

RAPPORT A. 529.

Opstelling van een snelheidsmeter bij een vliegtuigvleugel

139

Placing a Pitot-static head near a wing.

L'endroit propre au montage d'une antenne aérodynamique près d'une aile.

Aufstellung eines Staugerätes bei einer Flugzeugtragfläche.

RAPPORT A. 511.

De aerodynamische eigenschappen van schroeven bij verandering van bladbreedte en (of) aantal bladen...

151 -

Les caractéristiques aérodynamiques d'hélices, la largeur et éou) le nombre des pales étant changés.

The aerodynamical properties of airscrews, the blade width and (or) number of blades being changed.

Die aerodynamischen Eigenschaften von Schraubenpropellern bei Aenderung der Breite und (oder) Zahl der Flügel.

RAPPORT B. 80.

Bestudeering van het geluid in vliegtuigen en de mid-delen om dit te verminderen

167

Mise à l'étude de l'intensité du son dans les aéroplanes et les moyens pour la réduire.

A study on the noise in aeroplanes and the means to diminish it.

Bestudierung und Mittel den Lärm in Flugzeugen zu verringern.

INLEIDING.

Van de door den R.S.L. in de laatste drie jaren opgestelde rapporten kon slechts een klein gedeelte voor publicatie gereed gemaakt worden. Het personeel van den R.S.L. onderging weliswaar in deze periode eenige uitbreiding, doch de werkzaamheden namen in sterke mate toe.

In de jaren 1932 t/m 1934 werden door den R.S.L. de hierna genoemde aantallen rapporten opgesteld en voor zoover zij gereed kwamen aan de belanghebbenden gezonden.

<i>Vliegtuigenafdeeling A.</i>	
Studie en contrôle van vliegeigenschappen . . .	247
<i>Vliegtuigenafdeeling B.</i>	
Studie en contrôle van sterkteberekening . . .	23
<i>Aerodynamische Afdeeling</i>	163
<i>Materialen Afdeeling</i>	100
<i>Motoren Afdeeling</i>	17

Dit deel bevat de navolgende rapporten:

A. 258, A. 269, A. 322, A. 367, A. 372, A. 390, A. 426, A. 511, A. 529, S. 67, S. 68, S. 70, S. 83, B. 80.

De rapporten A. 258, A. 269, A. 322, A. 372, A. 426 en B. 80 werden eerst opgenomen in „De Ingenieur”, het rapport A. 390 in „Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt” en het rapport S. 83 in „Luftfahrtforschung”.

Voor deze welwillende medewerking betuig ik de Redacties van deze bladen mijn dank.

Dr. ir. E. B. WOLFF,
Directeur.

Amsterdam, December 1934.

RAPPORT A. 390.

**Aerodynamische Eigenschaften der Quasi-Trapezeflügel mit verschiedener
Breite des prismatischen Teiles**

Von

C. KONING und A. BOELEN, Amsterdam.

Aerodynamische Eigenschaften der Quasi-Trapezflügel mit verschiedener Breite des prismatischen Teiles.*)

Von C. Koning und A. Roelen, Amsterdam.

(Bericht A. 390. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.)

1. Einleitung.

Um den Einfluß des prismatischen Mittelteiles trapezförmiger Flügel auf die aerodynamischen Eigenschaften, soweit diese mit Hilfe der Tragflügeltheorie bestimmt werden können, kennen zu lernen, wurde die Zirkulationsverteilung einiger Flügelformen berechnet.

Aus dieser wurden bestimmt:

- a) Wirksamer Anstellwinkel.
- b) Verteilung des Auftriebes und des induzierten Widerstandes.
- c) Gesamtauftrieb und induzierter Widerstand.

Näheres über die untersuchten Flügelformen ist in Punkt 3, über das Rechnungsverfahren in Punkt 4 gegeben.

2. Formelzeichen.

Die benutzten Formelzeichen sind denen von Lotz¹⁾ angepaßt worden.

Es bedeutet:

- ρ = Dichte der Luft;
- V = Anströmgeschwindigkeit;
- x, ξ = Koordinate den Flügel entlang;
- $\Gamma, \Gamma(x), \Gamma(\xi)$ = Zirkulation an der Stelle x, ξ ;
- $t, t(x)$ = Flügeltiefe an der Stelle x ;
- t_0 = Flügeltiefe an der Stelle $x = 0$;
- $\bar{t}$ = Mittlere Flügeltiefe;
- F = Flügelfläche;
- $\alpha, \alpha(x)$ = Wirksamer Anstellwinkel an der Stelle x ;
- $\alpha_0, \alpha_0(x)$ = Geometrischer Anstellwinkel an der Stelle x ;
- b = Flügelbreite;
- δ = $\arccos\left(\frac{2x}{b}\right)$;
- h = Verhältnis zwischen Breite des prismatischen Mittelteiles und Flügelbreite (s. Abb. 1);
- l = Verhältnis zwischen Flügeltiefe am Flügelende und in der Mitte (s. Abb. 1);
- m = Verhältnis zwischen Breite des Flügelendes ohne Querruder und Flügelbreite (s. Abb. 1);
- c_a = Auftriebsbeiwert;
- A = Gesamtauftrieb;
- c_{w_i} = Beiwert des induzierten Widerstandes;
- W_i = Gesamter induzierter Widerstand;
- c_l = $\frac{1}{2} \left(\frac{d c_a}{d \alpha} \right)$ für unendlich langen Flügel;
- n, r = ganze, positive Zahlen;
- $\alpha_{r,n}$ = Koeffizienten der Reihenentwicklung für Zirkulation;
- $\alpha_{g,n}$ = Koeffizienten der Reihenentwicklung für geometrischen Anstellwinkel;
- $\gamma_{2,r}$ = Koeffizienten der Reihenentwicklung für die Funktion der Flügeltiefe;
- $\alpha_{e,n}^*$ = $\frac{\alpha_{e,n}}{\alpha_0}$.

Die Anstellwinkel α und α_0 wurden gemessen von dem Anstellwinkel für Auftrieb = Null ab.

3. Umfang der Untersuchung und allgemeine Zahlenwerte.

Die Rechnungen wurden durchgeführt für Flügel mit:

$$l = 0,65; \quad k = 0, \quad 0,1, \quad 0,2, \quad 0,4, \quad 1,0;$$

$$l = 0,35; \quad k = 0, \quad 0,1, \quad 0,2, \quad 0,4, \quad 1,0;$$

(s. Abb. 1), also für zwei verschiedene Tiefen am Flügelende und mehrere Breiten des Mittelteiles. Äußerste Formen waren dabei der reine Trapezflügel ($k = 0$) einerseits, der Rechteckflügel ($k = 1,0$) andererseits. Die Flügel hatten

konstanten geometrischen Anstellwinkel und konstante Profilform. In allen Fällen war das Verhältnis b/t_0 zwischen Flügelbreite und Flügeltiefe in der Mitte 5,7, während der Koeffizient c_l den von dem theoretischen abweichenden Wert 2,622 hatte. Der erste Wert wurde einem praktisch ausgeführten Flügel, letztere Windkanalmessungen mit diesem entnommen. Nebenbei sei bemerkt, daß die Zirkulationsverteilung ungeändert bleibt, wenn nur $\frac{b}{c_l t_0}$ denselben Wert hat.

Wie schon oben angedeutet ist, wurden für diese Flügel neben der Zirkulations- (Auftriebs-) Verteilung auch wirksame Anstellwinkel, Verteilung des induzierten Widerstandes und Gesamtwert des Auftriebes und des induzierten Widerstandes berechnet. Für einen Fall ($l = 0,65$, $k = 0,2$) wurde der Einfluß symmetrischer Querruder-Verstellung auf Auftriebsverteilung und wirksamen Anstellwinkel untersucht. Dabei war $m = 0,6$, also Querruderbreite gleich $0,2 b$ angenommen, während die Wirkung der Verstellung demjenigen eine Änderung des geometrischen Anstellwinkels um $1/5 \alpha_0$ gleich war.

4. Berechnungsverfahren.

a) Kurze Übersicht der Methode von Lotz zur Berechnung der Zirkulationsverteilung²⁾.

Die Zirkulationsverteilung ist gegeben durch die Prandtl'sche Integralgleichung³⁾.

$$\frac{1}{4\pi V} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma(\xi) d\xi}{\xi - x} + \frac{\Gamma(x)}{c_l V t(x)} = \alpha_0(x) \quad (1a)$$

Mittels der Ansätze:

$$\Gamma = V t_0 c_l \sum \alpha_{e,n} \sin n \delta \quad (1b)$$

$$\alpha_0(x) \sin \delta = \sum \alpha_{g,n} \sin n \delta \quad \text{und} \quad (1c)$$

$$\frac{t_0}{t(x)} \sin \delta = \sum \gamma_{2,r} \cos 2r \delta \quad (1d)$$

zerfällt diese in ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Für praktische Zwecke genügt es aber durchaus nur die ersten zehn Unbekannten und damit auch die ersten zehn Gleichungen zu betrachten.

Diese werden dann gelöst mittels eines Iterationsverfahrens, das sehr bequem ist und rasch konvergiert.

b) Berechnung verschiedener Größen aus der Auftriebsverteilung.

Aus der Zirkulationsverteilung:

$$\Gamma = V t_0 c_l \sum \alpha_{e,n}^* \sin n \delta = V t_0 c_l \sum \alpha_{e,n}^* \sin n \delta = V t_0 c_l f(\delta) \quad (2)$$

mit $f(\delta) = \sum \alpha_{e,n}^* \sin n \delta$

können nun weitere Größen berechnet werden.

Die Auftriebsverteilung ist:

$$\frac{dA}{dx} = \rho V^2 t_0 c_l \alpha_0 f(\delta) = \left(\frac{dA}{dx} \right)_\infty f(\delta) \quad (3)$$

der wirksame Anstellwinkel:

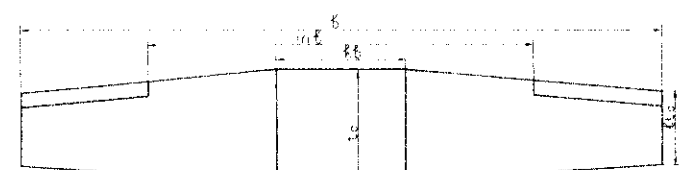


Abb. 1. Flügelmaße.

*) Sonderdruck aus »ZFM« 1933, Heft 2.

¹⁾ Lotz, L., Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. ZFM 1931, S. 189.

²⁾ Siehe Fußnote 1.

³⁾ Prandtl, L., Tragflügeltheorie I. Nachr. v. d. Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse 1918, S. 471.

$$\alpha = \frac{\Gamma}{c_1 V t} = \frac{t_0}{t} \alpha_0 f(\delta) \dots \dots \dots (4)$$

und die Verteilung des induzierten Widerstandes:

$$\frac{dW_i}{dx} = \frac{dA}{dx} (\alpha_0 - \alpha) = \rho V^2 t_0 c_1 \alpha_0^2 f(\delta) \left\{ 1 - \frac{t_0}{t} f(\delta) \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Auftrieb und induzierten Widerstand des ganzen Flügels werden nun durch Integration bestimmt.

$$A = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{dA}{dx} dx = \frac{\pi}{4} \rho V^2 b t_0 c_1 \alpha_0^2 \dots \dots \dots (6)$$

$$W_i = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{dW_i}{dx} dx = \frac{\pi}{8} \rho V^2 t_0^2 c_1^2 \alpha_0^2 \sum n \alpha_n^{*2} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{\rho V^2} \frac{A^2}{b^2} \frac{\sum n \alpha_n^{*2}}{\alpha_1^{*2}} \dots \dots \dots (7)$$

Für den elliptischen Flügel gilt aber:

$$W_{iell} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{\rho V^2} \frac{A^2}{b^2}$$

so daß man schreiben kann:

$$W_i = \frac{\sum n \alpha_n^{*2}}{\alpha_1^{*2}} W_{iell} = C \cdot W_{iell} \dots \dots \dots (8)$$

Führt man statt A und W_i die zugehörigen Beiwerte c_a und c_{wi} ein, dann bekommt man:

$$c_a = \frac{A}{\frac{1}{2} \rho V^2 F} = c_1 \alpha_0 \frac{\pi}{2} \frac{t_0}{t} \alpha_1^* \dots \dots \dots (9)$$

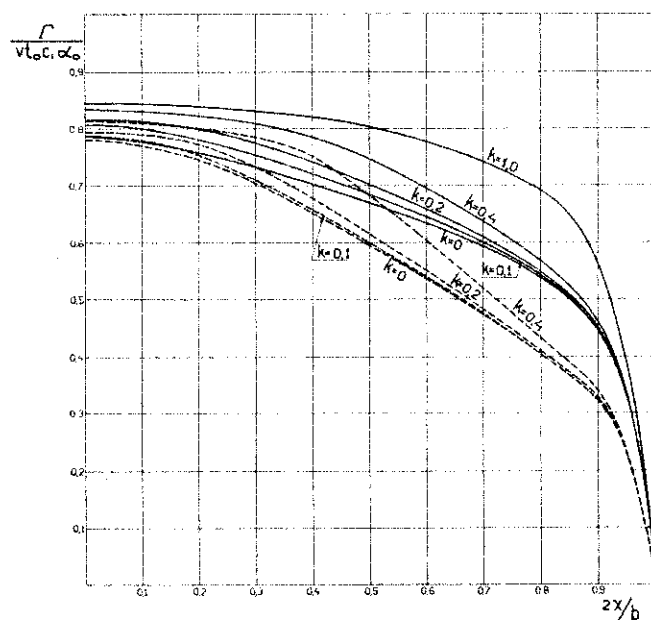


Abb. 2. Zirkulationsverteilung — $l=0,65$ ---- $l=0,35$.

Zahlentafel I. Zirkulationsverteilung $f(\delta) = \frac{\Gamma}{V t_0 c_1 a_0}$.

δ	$\frac{2x}{b}$	$l=0,65$					$l=0,35$			
		$k=1$	$k=0,4$	$k=0,2$	$k=0,1$	$k=0$	$k=0,4$	$k=0,2$	$k=0,1$	$k=0$
90	0	0,8448	0,8342	0,8154	0,8068	0,7867	0,8135	0,7933	0,7872	0,7786
95	0,087	0,8438	0,8319	0,8137	0,8013	0,7796	0,8103	0,7907	0,7807	0,7720
100	0,174	0,8407	0,8256	0,8054	0,7868	0,7620	0,8032	0,7787	0,7608	0,7525
110	0,342	0,8272	0,8009	0,7607	0,7377	0,7185	0,7739	0,7115	0,6884	0,6836
115	0,423	0,8167	0,7767	0,7320	0,7115	0,6950	0,7369	0,6646	0,6450	0,6406
120	0,500	0,8027	0,7437	0,7024	0,6845	0,6700	0,6832	0,6156	0,6004	0,5953
125	0,574	0,7847	0,7069	0,6715	0,6564	0,6444	0,6229	0,5665	0,5556	0,5499
135	0,707	0,7346	0,6335	0,6068	0,5975	0,5895	0,5110	0,4757	0,4696	0,4655
145	0,819	0,6612	0,5524	0,5331	0,5278	0,5227	0,4158	0,3955	0,3896	0,3896
155	0,906	0,5445	0,4522	0,4400	0,4368	0,4335	0,3305	0,3197	0,3158	0,3163
180	1,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0

und

$$c_{wi} = \frac{W_i}{\frac{1}{2} \rho V^2 F} = \frac{\pi}{4} \frac{t_0^2}{b t} c_1^2 \alpha_0^2 \sum n \alpha_n^{*2} = \frac{1}{\pi} \frac{F}{b^2} c_a^2 \frac{\sum n \alpha_n^{*2}}{\alpha_1^{*2}} = C \cdot c_{wiell} \dots \dots \dots (10)$$

weil $c_{wiell} = \frac{1}{\pi} \frac{F}{b^2} c_a^2$.

c) Fourierreihenentwicklung der Flügeltiefe.

Die Entwicklung der Funktion $\frac{t_0}{t} \sin \delta$ (s. Formel 1d) führt, wenn man den exakten Wert von $t(x)$ beibehält, auf Integrale, deren Auswertung ziemlich viel Rechenarbeit fordert, da man sie nicht sofort für allgemeine Werte von v angeben kann.

Diese Schwierigkeit kann man umgehen, indem man statt der exakten Werte von $t(x)$ für den trapezförmigen Teil des Flügels folgende Näherungen einführt:

$$t(x) = \frac{t_0 l (k-1)}{k-l+(l-1) \frac{2x}{b}} \text{ für } l=0,65,$$

$$t(x) = \frac{t_0 l (k^2-1)}{k^2-l+(l-1) \frac{4x^2}{b^2}} \text{ für } l=0,35.$$

In dieser Weise bekommt man Integrale, deren Werte ohne Schwierigkeit für allgemeine Werte von v angegeben werden können, während die angenäherten Werte der Flügeltiefe sich nur unwesentlich von den exakten unterscheiden. Am schlimmsten sind die Abweichungen in den Fällen $l=0,35$, $k=0,4$ und $k=0$, wo sie höchstens 10% bzw. 6% sind. In den anderen Fällen sind sie (beträchtlich) weniger.

d) Genauigkeit der Methode.

Zur Kontrolle der Resultate kann man am einfachsten die berechneten Werte der Zirkulation in Gleichung (1a) einführen und in dieser Weise entweder auf Flügeltiefe oder auf geometrischen Anstellwinkel zurückrechnen. Es stellte sich heraus, daß die Unterschiede gegen die Ausgangswerte kleiner als 1% waren, nur am Flügelse und in der Nähe der Diskontinuitäten kamen etwas größere Abweichungen vor.

5. Resultate.

a) Zirkulation.

Die Werte der Zirkulation sind in Abb. 2 und Tafel I gegeben. Die Auftriebsverteilung für den rechteckigen Flügel stimmt gut mit den von Betz und Trefftz⁴⁾ gefundenen Resultate überein.

b) Wirksamer Anstellwinkel.

Die wirksamen Anstellwinkel sind in Abb. 3 und Tafel II gegeben. Die Kurven zeigen ein Maximum in der Flügelmitte und, mit Ausnahme des Rechteckflügels, ein zweites im Außenteil des Flügels (inneres bzw. äußeres Maximum).

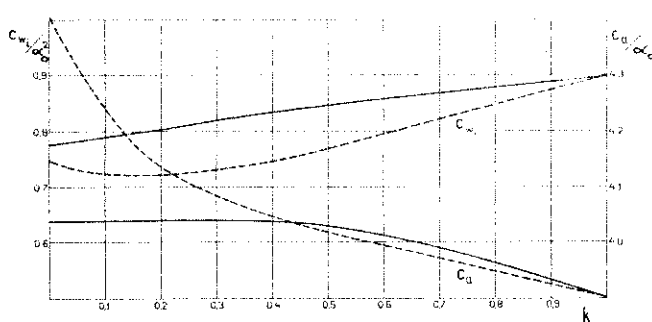
Für $l=0,35$ ist das äußere Maximum größer als das innere, während der Wert nahezu unabhängig von k ist.

⁴⁾ Betz: Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt 1920, Heft 2.

Trefftz: ZAMM 1921, S. 214.

Zahlentafel VI. Querrudereinfluß $k = 0,2$ $l = 0,65$.

δ	2π b	Zirkulationsverteilung Γ $V t_0 c_l \beta_0$				Wirksamer Anstellwinkel α' α_0			
		Flügel allein	Querruder allein $\beta/\alpha_0 = 1/5$	Flügel u. Querruder $\beta/\alpha_0 = +1/5$	Flügel u. Querruder $\beta/\alpha_0 = -1/5$	Flügel allein	Querruder allein $\beta/\alpha_0 = 1/5$	Flügel u. Querruder $\beta/\alpha_0 = +1/5$	Flügel u. Querruder $\beta/\alpha_0 = -1/5$
90	0	0,8154	0,0109	0,7782	0,8576	0,8154	0,0109	0,7782	0,8576
95	0,087	0,8137	0,0095	0,7752	0,8573	0,8137	0,0095	0,7752	0,8573
100	0,174	0,8054	0,0091	0,7670	0,8488	0,8054	0,0091	0,7670	0,8488
110	0,342	0,7607	0,0157	0,7312	0,7942	0,8335	0,0172	0,8011	0,8701
115	0,423	0,7320	0,0163	0,7046	0,7630	0,8417	0,0187	0,8102	0,8773
120	0,500	0,7024	0,0244	0,6854	0,7227	0,8442	0,0294	0,8226	0,8686
125	0,574	0,6715	0,0472	0,6767	0,6655	0,8403	0,0590	0,8469	0,8329
135	0,707	0,6068	0,0892	0,6553	0,5518	0,8139	0,1196	0,8790	0,7401
145	0,819	0,5331	0,0857	0,5828	0,4769	0,7553	0,1215	0,8256	0,6757
155	0,906	0,4400	0,0757	0,4856	0,3883	0,6491	0,1117	0,7165	0,5729
180	1,000	0	0	0	0	0	0	0	0

Abb. 5. Gesamtauftrieb und induzierter Widerstand
— $l = 0,65$ --- $l = 0,35$.

Zahlentafel IV. Gesamtauftrieb und induzierter Widerstand.

k	c_l/α_0		c_d/α_0^2	
	$l = 0,65$	$l = 0,35$	$l = 0,65$	$l = 0,35$
1	3,901	3,901	0,898	0,898
0,4	4,036	4,047	0,832	0,747
0,2	4,038	4,138	0,803	0,722
0,1	4,037	4,240	0,790	0,726
0	4,036	4,407	0,777	0,748

Zahlentafel V. Induzierter Widerstandsfaktor.

$$C = \frac{\sum n \alpha_{e_n}^2}{\alpha_0^2} = \frac{\pi W l^{1/2} q V^2 b^2}{A^2}$$

k	$l = 0,65$	$l = 0,35$
1	1,0564	1,0564
0,4	1,0223	1,0141
0,2	1,0257	1,0207
0,1	1,0295	1,0222
0	1,0346	1,0213

größer. Eine Verbesserung mit Hinsicht auf unerwünschte Ablösungserscheinungen durch symmetrische Querruder-Verstellung ist also hier nicht möglich.

6. Schlußfolgerungen.

1. Das von Lotz angegebene Verfahren zur Lösung des Problems der Auftriebsverteilung ist einfach und gibt in den betrachteten Fällen ohne viel Rechenarbeit sehr genaue Lösungen. Die Resultate für den Rechteckflügel stimmen mit den von Betz und Trefftz gefundenen überein.

2. Bei trapezförmigen Flügel mit einem prismatischen Mittelteil können am Außenteil des Flügels größere wirksame Anstellwinkel vorkommen als im Mittelteil. Für Flügel mit größerer Tiefe am Flügelende ($l = 0,65$), ist dieses nur der Fall, wenn der prismatische Mittelteil kleiner ist als 0,4 Flügelbreite, für Flügel mit kleiner Tiefe am Flügelende ($l = 0,35$) aber auch für größere Breite des Mittelteiles.

3. Der induzierte Widerstand ist für trapezförmige Flügel kleiner als für rechteckige Flügel, der Unterschied beträgt maximal $3\frac{1}{2}\%$ für Flügel mit großer Endtiefe ($l = 0,65$), und maximal $4\frac{1}{2}\%$ für Flügel mit kleiner Endtiefe ($l = 0,35$).

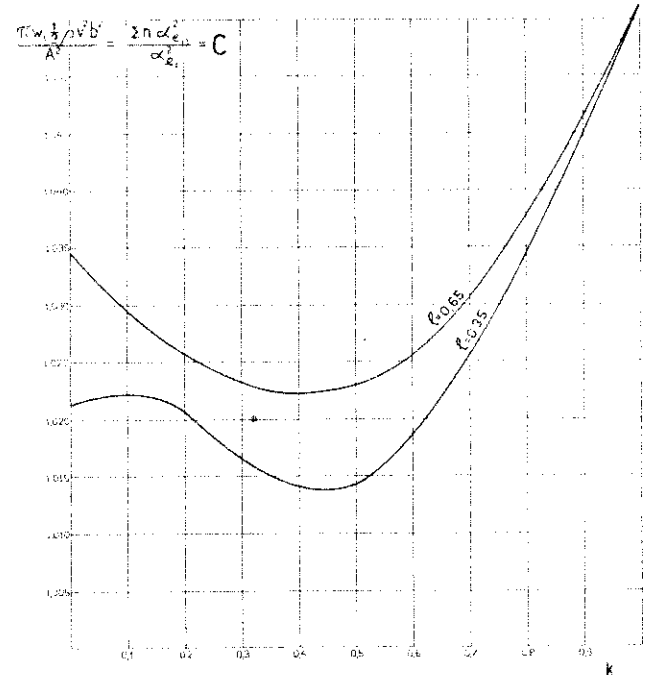


Abb. 6. Induzierter Widerstandsfaktor.

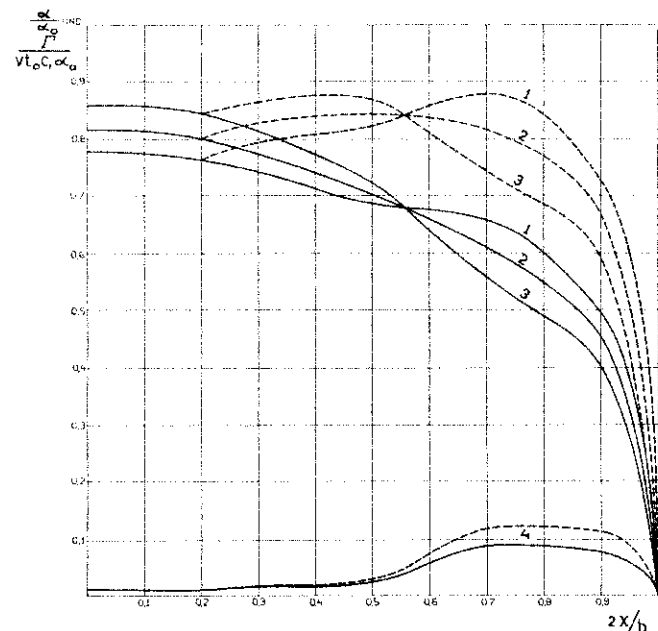


Abb. 7. Querrudereinfluß

— Zirkulationsverteilung --- Wirksamer Anstellwinkel.
1 Flügel und Querruder hoch, 2 Flügel und Querruder Null,
3 Flügel und Querruder niedrig, 4 Querruder allein.

Das Minimum des induzierten Widerstandes ist für $l = 0,65$ 2,2% größer, und für $l = 0,35$ 1,4% größer als für den elliptischen Flügel.
(Eingegangen 1. 8. 1932.)

Rapport A. 322.

De aanwijzing van thermometers in bewegende lucht

door

ir. C. KONING.

Rapport A. 322: L'indication des thermomètres dans un courant d'air.

Report A. 322: The indication of thermometers in moving air.

Bericht A. 322: Die Anzeige von Thermometern in strömender Luft.

RAPPORT A. 322.

De aanwijzing van thermometers in bewegende lucht.

Uittreksel.

a. Doel van het onderzoek (punt 1, 2).

Bij een thermometer, die zich beweegt ten opzichte van de omringende lucht, zal, tengevolge van de samendrukbaarheid en de wrijving, de temperatuur aan het oppervlak verschillen van die van de ongestoorde lucht. Om na te gaan of de hierdoor veroorzaakte miswijzing van praktische betekenis is, werden eenige proeven in den windtunnel uitgevoerd.

b. Wijze van uitvoering der proeven, onderzochte instrumenten (punt 3a, b).

De aanwijzingen van den thermometer werden bij verschillende windsnelheden tot 27 m/sec vergeleken met de werkelijke luchttemperatuur. Deze laatste werd gemeten met een stuwpuntthermometer (fig. 1: a). Onderzocht werden een laboratorium-thermometer (fig. 1: b) en een stijlthermometer (fig. 1: c, d).

c. Uitwerking van de resultaten (punt 3c, d).

Voor deze kan verwezen worden naar punt 3c van het rapport, voor de berekening van de correctie voor den stuwpuntthermometer naar punt 3d.

d. Resultaten (punt 4).

De gevonden waarden van c_0 en c_1 , waarin volgens (4) de correctie uitgedrukt werd, zijn in tabel II gegeven.

e. Conclusies (punt 5).

Hiervoor kan verwezen worden naar punt 5 van het rapport.

RAPPORT A. 322.

L'indication des thermomètres dans un courant d'air.

Résumé.

a. But des expériences (point 1, 2).

Si un thermomètre est en mouvement relativement à l'air environnant, la température à sa surface peut être différente de celle de l'air non perturbé. Cet effet est causé par la compressibilité et la viscosité de l'air. Quelques expériences furent faites dans le tunnel aérodynamique pour étudier l'indication fautive, qui en résulte.

b. Méthode d'essai, instruments essayés (point 3a, b).

Les indications du thermomètre furent comparées à la température réelle de l'air à des vitesses différentes jusqu'à 27 m/sec. La température de l'air fut déterminée à l'aide d'un thermomètre dit à point de refoulement (fig. 1: a). Les expériences furent faites avec un thermomètre de laboratoire („laboratoriumthermometer”; fig. 1: b) et un thermomètre d'avion („stijlthermometer”; fig. 1: c et d).

c. Méthode de calcul des résultats (point 3c, d).

A l'aide des formules (1) et (2) la température réelle t_0 est calculée de l'indication t_1 du thermomètre à point de refoulement. C_1 est une correction calculée par théorie (point 3d). La différence entre la température réelle t_0 et l'indication t_2 du thermomètre essayé donne une correction C_2 (formule (3)). Dans la région des expériences cette correction peut être indiquée approximativement par formule (4), dont q est la pression dynamique.

d. Résultats (point 4).

Les valeurs obtenues pour les coefficients c_0 et c_1 sont données dans le tableau II. Celles pour c_0 sont en accord avec les différences observées dans un liquide en repos.

e. Conclusion (point 5).

Les résultats indiquent la possibilité d'indications fausses de 5°C à des vitesses de 300 km/h. Il est donc désirable de faire des expériences à des vitesses supérieures. Ces expériences seront faites en avion.

REPORT A. 322.

The indication of thermometers in moving air.

Summary.

a. Reason for the experiments (point 1, 2).

If a thermometer moves relative to the surrounding air

the temperature at its surface will in general differ from that of the undisturbed air. To get an impression, whether this effect, which is caused by the compressibility and the viscosity of the air, is of practical importance, some experiments were made in the windtunnel.

b. Methode of experiment, instruments tested (point 3a, b).

At different velocities ranging to 27 m/sec the indication of the instrument was compared with the real temperature of the air. The latter was determined by means of a stagnation point thermometer (fig. 1: a). The instruments tested were a laboratory thermometer („laboratorium-thermometer”; fig. 1: b) and an aeroplane thermometer („stijlthermometer”; fig. 1: c and d).

c. Method of calculation of the results (point 3c, d).

The real temperature t_0 of the air is calculated from the indication t_1 of the stagnation point thermometer by means of (1) and (2). C_1 is a correction, which may be determined theoretically (point 3d). The difference between the temperature t_0 and the indication t_2 of the instrument tested gives a correction C_2 (3), which may be approximated by (4), in which q is the dynamic pressure.

d. Results (point 4).

The values obtained for c_0 and c_1 are given in Table II. Those for c_0 are in good agreement with the differences in indication observed in a medium at rest.

e. Conclusion (point 5).

The results indicate that errors in indication of 5°C may occur at velocities of 300 km/h. It is desirable to extend the experiments to higher velocities. These experiments will be made in an aeroplane.

BERICHT A. 322.

Die Anzeige von Thermometern in strömender Luft.

Zusammenfassung.

a. Zweck der Untersuchung (Punkt 1, 2).

Wenn ein Thermometer sich relativ zur umgebenden Luft bewegt, so wird es, infolge der Zusammendrückbarkeit und Reibung der Luft, einen Temperaturunterschied geben zwischen seiner Oberfläche und der ungestörten Luft. Zur Beantwortung der Frage, ob der Anzeigefehler, der von diesem Effekt verursacht wird, praktische Bedeutung hat, wurden einige Versuche im Windkanal gemacht.

b. Versuchsverfahren, untersuchte Instrumente (Punkt 3a, b).

Bei verschiedenen Geschwindigkeiten bis zu 27 m/sec wurden die Anzeigen des zu untersuchenden Instrumentes und die wirkliche Temperatur der Luft bestimmt. Letztere wurde mittels eines Staupunkt-Thermometers (Fig. 1: a) gemessen. Die Versuche wurden ausgeführt mit einem Laboratorium-Thermometer („laboratoriumthermometer”; Fig. 1: b) und einem Flugzeug-Thermometer („stijlthermometer”; Fig. 1: c, d).

c. Berechnung von Koeffizienten (Punkt 3c, d).

Aus der Anzeige t_1 des Staupunkt-Thermometers wurde mittels (1) und (2) die wirkliche Lufttemperatur t_0 berechnet. C_1 ist eine auf theoretischem Wege bestimmte Korrektur (Punkt 3d). Der Unterschied zwischen Lufttemperatur t_0 und Anzeige t_2 des zu untersuchenden Instrumentes gibt die Korrektur C_2 (3), die in dem betrachteten Gebiet durch (4) angenähert werden kann. q ist dabei der Staudruck.

d. Resultate (Punkt 4).

Die Werte von c_0 und c_1 sind in Tafel II gegeben. c_0 stimmt ziemlich gut überein mit den Unterschieden, die in einer ruhenden Flüssigkeit beobachtet wurden.

e. Schlussfolgerung (Punkt 5).

Die Resultate deuten darauf hin, dass bei Geschwindigkeiten von 300 km/h Anzeigefehler von 5°C vorkommen können. Versuche bei höheren Geschwindigkeiten sind daher erwünscht, sie sollen im Flugzeug ausgeführt werden.

De aanwijzing van thermometers in bewegende lucht

door

ir. C. KONING.

Rapport A. 322. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Eenige proeven over den invloed van de beweging van een thermometer ten opzichte van de omringende lucht op zijn aanwijzing worden beschreven. De hierbij gevonden afwijkingen zijn van een zoodanige grootte, dat zij zoowel bij vliegproeven als bij technische proeven op ander gebied van beteekenis kunnen zijn. De oorzaken van deze miswijzing worden kort besproken.

1. Inleiding.

Een thermometer, die ten opzichte van de omringende lucht in beweging is, kan tengevolge van deze relatieve beweging een onjuiste aanwijzing geven. Een dergelijk effect, waarvan verwacht kan worden, dat het met de snelheid toe zal nemen, zal in de eerste plaats van belang zijn bij vliegproeven, waarbij de temperatuur van de lucht bepaald wordt met behulp van een aan het vliegtuig bevestigden en daarbij aan een krachtigen windstroom blootgestelden thermometer. Echter ook bij andere technische metingen, b.v. het bepalen van de temperatuur van een met groote snelheid door een buisleiding stroomend gas, kan het van beteekenis zijn.

In de bestaande literatuur (*lit 1 t/m 3*)¹⁾ wordt op de mogelijkheid van het hier bedoelde verschijnsel gewezen en de oorzaken ervan besproken. In het algemeen is het niet mogelijk de grootte van de optredende miswijzing langs theoretischen weg te bepalen. Daar resultaten van proeven met thermometers van gebruikelijken vorm niet bekend zijn, werden in den windtunnel eenige proeven uitgevoerd.

2. Theoretische beschouwingen.

a. De oorzaken van de miswijzing.

Het boven aangeduide effect is het gevolg van twee verschillende oorzaken, waarvan de eene samenhangt met de samendrukbaarheid van de lucht, de andere met de inwendige wrijving van deze.

b. De invloed van de samendrukbaarheid.

In een stroomend gas zullen, zoodra de snelheid en dus ook de druk niet in alle punten gelijk zijn, tengevolge van de samendrukbaarheid ook de dichtheid en de temperatuur van punt tot punt verschillen. Dit brengt mee, dat, ook al was vóór het inbrengen van den thermometer de temperatuur van het gas in alle punten dezelfde, het niet mogelijk is deze rechtstreeks te meten. De thermometer toch zal een plaatselijke verstoring van de strooming en dus ook van het temperatuurveld veroorzaken, waardoor de temperatuur aan zijn oppervlak verschilt van die in de ongestoorde strooming. Het feit, dat eerstgenoemde bovendien in het algemeen van punt tot punt verschillend zal zijn en de thermometer een zeker gemiddelde hiervan zal aanwijzen, maakt, dat, nog afgezien van den in punt 2c te bespreken invloed van de wrijving, het niet dan in uitzonderingsgevallen mogelijk is langs theoretischen weg te bepalen, welke correctie op de aanwijzing van den ther-

momometer aangebracht moet worden om tot de werkelijke gastemperatuur te komen.

c. De invloed van de inwendige wrijving.

Ook in een middenstof met zeer geringe viscositeit zal in de onmiddellijke nabijheid van het oppervlak van een lichaam steeds een gebied, de „grenslaag”, bestaan, waar, tengevolge van sterk verlopende snelheid, belangrijke wrijvingskrachten optreden. In deze grenslaag heeft daardoor een energieomzetting plaats, waarbij warmte ontwikkeld wordt. Een gevolg hiervan is, dat in den evenwichtstoestand de temperatuur aan het oppervlak van het lichaam een andere is dan die van het gas buiten de grenslaag. Is het lichaam een thermometer, dan schuilt dus ook hierin een oorzaak van onjuiste aanwijzing. Dit verschijnsel werd het eerste onderzocht door POHLHAUSEN (*lit 2*, zie ook *lit 3*). Hij toonde hierbij aan, dat voor een geïdealiseerden thermometer, gevormd door een in de richting van de strooming liggende, oneindig dunne plaat, de invloed van de wrijving een te hooge aanwijzing tengevolge heeft en dat de miswijzing van dezelfde orde van grootte is als de temperatuursverschillen, die bij dezelfde snelheid tengevolge van de samendrukbaarheid van het gas kunnen optreden.

d. Het meten van de temperatuur van een stroomend gas.

Daar het in het algemeen niet mogelijk is de door beide bovenbesproken invloeden veroorzaakte miswijzing van een thermometer langs theoretischen weg te berekenen, moet zij dus door proeven bepaald worden. Hierbij moet echter de werkelijke temperatuur van het stroomende gas bekend zijn en doet zich dus de vraag voor, hoe deze gemeten moet worden. Het wegnemen van de beide oorzaken van de miswijzing is niet mogelijk, doch wel kan de thermometer zoodanig opgesteld worden, dat de wrijvingsinvloed uitgeschakeld wordt, terwijl voor den invloed van de samendrukbaarheid op eenvoudige wijze een correctie berekend kan worden. Zooals bekend is, bestaat op het oppervlak van de voorzijde van een lichaam, dat zich in stroomende lucht bevindt, een punt, het „stuwpunt”, waar de snelheid van de lucht ten opzichte van het lichaam nul is. Het verschil in temperatuur tusschen de lucht in dit punt en die in de ongestoorde strooming kan berekend worden. Dit verschil is echter tevens de miswijzing van een in het stuwpunt opgestelden thermometer, daar deze zich in lucht met relatieve snelheid nul bevindt, aan zijn oppervlak dus geen warmte door wrijving ontwikkeld wordt, terwijl bovendien deze lucht nog niet langs het lichaam gestroomd is en dus ook hierdoor haar temperatuur niet beïnvloed kan zijn. Bij den idealen

¹⁾ De aanwijzingen *lit* verwijzen naar de literaturopgave aan het einde van het rapport.

„stuwpuntthermometer” zou het temperatuurmeterende deel een met het stuwpunt samenvallend punt moeten zijn, voor praktische toepassing kan echter deze toestand voldoende benaderd worden door een geschikte keuze van de afmetingsverhoudingen. Een bruikbare vorm van stuwpuntthermometer wordt in punt 3a beschreven.

In de praktijk zal de temperatuurmetering natuurlijk ook kunnen geschieden met behulp van een thermometer, waarvan het gedrag in de strooming door voorafgaande vergelijking met een stuwpuntthermometer bekend is.

e. Opmerking over het meten van de temperatuur van een stroomende vloeistof.

Tot nu toe werd steeds gesproken over een thermometer, die zich beweegt ten opzichte van de omringende lucht of een ander gas. Is de middenstof een vloeistof, dan vervalt de invloed van de samendrukbaarheid, die van de wrijving blijft echter bestaan. Daar bij de hier uitgevoerde proeven niet uitgemaakt kan worden, welk deel van de miswijzing voor rekening van ieder der beide oorzaken afzonderlijk komt, bestaat dus de mogelijkheid, dat ook in een vloeistof een soortgelijke miswijzing op zal treden.

3. Beschrijving van de proeven en van de uitwerking van de resultaten.

a. Beschrijving van de gebruikte instrumenten.

Voor het bepalen van de werkelijke luchttemperatuur werd de in fig. 1a afgebeelde stuwpuntthermometer gebruikt, die bestond uit een cirkelvormige houten schijf, in de hartlijn waarvan een laboratoriumthermometer van gebruikelijken vorm aangebracht was en wel zoo, dat alleen het kwikreservoir van dezen voor de schijf uitstak. De middellijn van de schijf was 250 mm, terwijl de lengte en middellijn van het kwikreservoir van den thermometer ongeveer 27 mm, respectievelijk 6 mm waren.

De invloed van de strooming op de aanwijzing werd onderzocht voor twee thermometers. De eerste (fig. 1b) was een laboratoriumthermometer, die in vorm en afmetingen ongeveer overeenkwam met dien, welke in den stuwpuntthermometer gebruikt werd. De tweede (fig. 1c en d) was een stijlthermometer van het bij vliegproeven gebruikelijke type. Het vloeistofreservoir van dezen bestaat uit een in een vlak evenwijdig aan de schaal liggende spiraalvormige buis, waaromheen voor bescherming een doos aangebracht is, waarvan de beide verticale zijwanden ontbreken.

In het volgende zullen de besproken instrumenten als „stuwpuntthermometer”, „laboratoriumthermometer” en „stijlthermometer” aangeduid worden.

De schalen van de drie instrumenten waren, in de aangegeven volgorde, verdeeld in $0,2^\circ$, $0,1^\circ$ en 1° . De aanwijzing werd in tiende deelen hiervan geschat.

b. Wijze van uitvoering van de proeven.

Bij de proeven, die in den windtunnel uitgevoerd werden, werd de aanwijzing van het te onderzoeken instrument bij verschillende windsnelheden bepaald, terwijl tegelijkertijd de temperatuur van de lucht met een anderen thermometer gemeten werd. Hierbij werd de windsnelheid constant gehouden en de beide thermometers afgelezen, zoodra hun aanwijzing niet meer veranderde. Voor het bepalen van de luchttemperatuur werd, naar gelang van de omstandigheden, de stuwpuntthermometer of een ander instrument, waarvoor uit voorafgaande proeven de correctie bekend was, gebruikt.

Bij de in den tunnel bereikbare snelheden is de miswijzing klein, de bij de grootste snelheden voorkomende waarden waren ongeveer $0,5^\circ \text{C}$. Het is dus van veel belang, de opstelling der instrumenten zoo te kiezen, dat de lucht, waardoor beide omstroemd worden, aanvankelijk dezelfde temperatuur heeft. Worden de instrumenten zoo geplaatst, dat hun zijdelingsche afstand, d.w.z. hun afstand gemeten loodrecht op de stroomingsrichting, van eenige betekenis is, dan bestaat geen zekerheid, dat aan deze voorwaarde

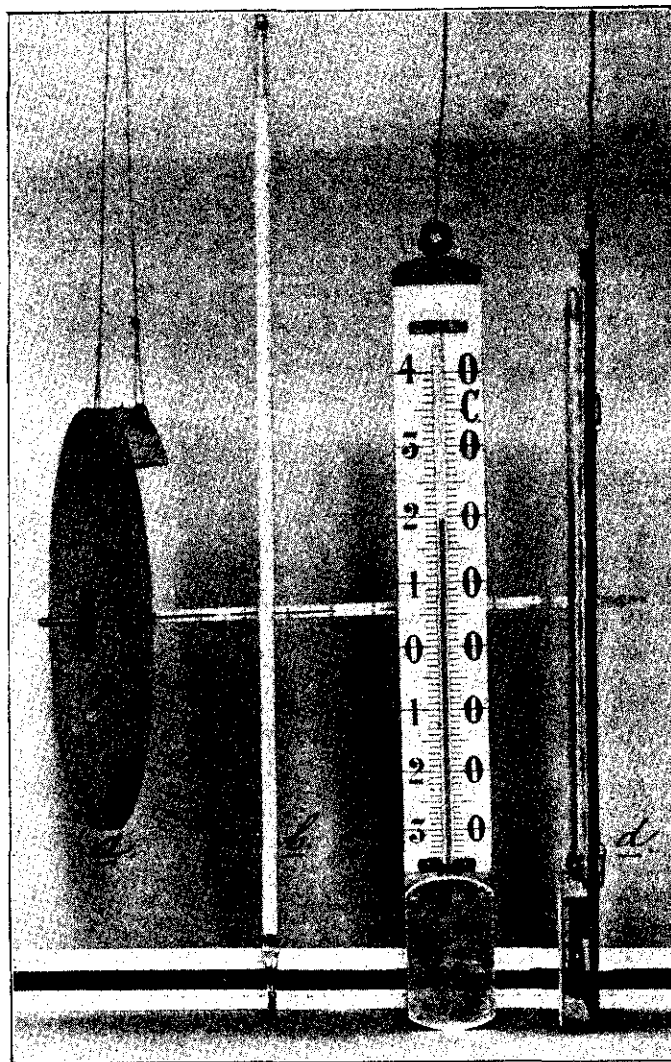


Fig. 1. De bij het onderzoek gebruikte thermometers. a. stuwpuntthermometer; b. laboratoriumthermometer; c, d. stijlthermometer.

voldaan wordt. Immers kan in dit geval de lucht uit geheel verschillende deelen van de tunnelhal afkomstig zijn en dus ook verschillende aanvangstemperatuur hebben. Eenige voorloopige proeven, waarbij de instrumenten naast elkaar opgesteld waren, vertoonden onregelmatige uitkomsten, welke onregelmatigheid vermoedelijk voor een belangrijk deel aan de hier bedoelde ongelijke luchttemperatuur toegeschreven moet worden.

Een tweede omstandigheid, waarop gelet moet worden, is de onderlinge beïnvloeding van de beide instrumenten. Deze kan op twee wijzen plaats hebben, namelijk „aerodynamisch”, doordat de aanwezigheid van het instrument a de strooming ter plaatse van het instrument b wijzigt en „thermisch”, doordat de lucht, die b treft, reeds verwarmd is door de strooming langs a.

Het bezwaar van ongelijke aanvangstemperatuur van de lucht kan ontgaan worden door de instrumenten in de stroomingsrichting recht achter elkaar te plaatsen, zoodat zij door dezelfde lucht omstroemd worden. De mogelijkheid van onderlinge beïnvloeding wordt hierdoor echter in het algemeen vergroot. Zoolang het voorste instrument klein en de onderlinge afstand voldoende groot is, zal de aerodynamische storing wel gering zijn, over de grootte van de thermische storing valt van te voren weinig te zeggen.

Bij de proeven werden nu op grond van bovenstaande overwegingen de beide thermometers of zoo geplaatst, dat hun vloeistofreservoirs recht achter elkaar stonden (stand a) of de voorste 5 cm in een richting loodrecht op de strooming uit dezen stand verschoven was (stand b). In beide gevallen was de afstand, gemeten in de stroomings-

richting, ongeveer 180 cm. Voor één instrument werd de meting voor beide standen uitgevoerd om na te gaan, of hierbij verschillen van betekenis in de uitkomsten gevonden werden. Het grootste van de beide instrumenten werd steeds achter geplaatst. Bij de opstelling werd er op gelet, de storing door statieven en andere ophangdeelen zoo gering mogelijk te houden. Voor den stuwpuntthermometer en den laboratoriumthermometer kan deze invloed als verwaarloosbaar beschouwd worden. Bij den stijlthermometer bleek het noodig dezen met de achterzijde van zijn schaal tegen een ronde staaf van ongeveer 15 mm middellijn te bevestigen.

c. Uitwerking van de uitkomsten.

Voor de proeven, waarbij de te onderzoeken thermometer vergeleken werd met den stuwpuntthermometer, werd de werkelijke luchttemperatuur t_0 bepaald door op de aanwijzing t_1 van laatstgenoemden een correctie C_1 aan te brengen:

$$t_0 = t_1 + C_1. \quad (1)$$

Deze correctie wordt, zooals in punt 3d berekend wordt, voor de omstandigheden, waaronder de proeven uitgevoerd werden, met voldoende nauwkeurigheid gegeven door:

$$C_1 = -7,96 \times 10^{-3} q \quad (2)$$

waarin $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ de op de gebruikelijke wijze uit massadichtheid van de lucht ρ en snelheid V berekende stuwdruk in kg/m^2 is.

Het verschil tusschen de werkelijke luchttemperatuur t_0 en de aanwijzing van het te onderzoeken instrument t_2 geeft nu voor dit laatste een correctie C_2 , die bepaald is door:

$$t_0 = t_2 + C_2 \quad (3)$$

Deze correctie is uit den aard der zaak afhankelijk van de snelheid. Het bleek, dat zij voor de hier gebezigde snelheden voor iedere afzonderlijke metingsserie zeer goed benaderd kan worden door:

$$C_2 = c_0 + c_1 q, \quad (4)$$

waarin c_0 en c_1 constanten zijn, die door numerisch strooken van de verkregen uitkomsten bepaald kunnen worden.

Voor de proeven, waarbij de thermometer vergeleken werd met een ander instrument, werd dezelfde weg gevolgd, alleen werd hierbij als correctie C_1 de uit de uitkomsten van een vroegere proef bepaalde correctie voor het vergelijkingsinstrument aangenomen.

Waar noodig, werd rekening gehouden met het feit, dat de stuwdruk op de plaats van de beide instrumenten niet volkomen gelijk was. Hiertoe werd, nadat het instrument weggenomen was, de stuwdruk op de plaats ervan met een Pitotbuis gemeten.

d. Berekening van de correctie voor den stuwpuntthermometer.

Neemt men aan, dat de strooming adiabatisch is, dan kan men, uitgaande van druk, temperatuur en snelheid op grooten afstand voor den stuwpuntthermometer, de in het stuwpunt optredende druk- en temperatuursverhooging berekenen. Deze berekening, die tamelijk ingewikkeld is, geeft voor de drukverhooging in het stuwpunt bij snelheden als de hier gebruikte waarden, die praktisch gelijk zijn aan den stuwdruk $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ voor de niet-samen-drukbare vloeistof. Volgens ZAHM en LOUDEN (lit 4) is het verschil tusschen beide drukken bij een snelheid van 30 m/sec 0,2% van den stuwdruk.

Het is daarom eenvoudiger en voldoende nauwkeurig aan te nemen, dat de drukverhooging in het stuwpunt gelijk is aan den stuwdruk q en de daarbij behorende temperatuursverhooging te berekenen. Zijn druk, soortelijk gewicht en absolute temperatuur op grooten afstand voor het instrument p_0 , γ_0 en T_0 , die in het stuwpunt $p_1 = p_0 + q$, γ_1 en T_1 en is k de verhouding tusschen de soortelijke warmten bij constanten druk en constant volume, dan bestaan tusschen deze grootheden de twee bekende betrekkingen:

$$\frac{p_0}{\gamma_0 T_0} = \frac{p_1}{\gamma_1 T_1} \text{ en } \frac{p_0}{\gamma_0^k} = \frac{p_1}{\gamma_1^k}$$

waaruit door eliminatie van γ volgt:

$$T_0 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} = T_1 \left(1 + \frac{q}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

De op de aanwijzing van den stuwpuntthermometer aan te brengen correctie C_1 is gelijk aan het verschil tusschen T_0 en T_1 . Daar q klein is vergeleken bij p_0 , kan C_1 in een meer handelbaren vorm gebracht worden door ontwikkeling in een machtreeks naar q :

$$C_1 = T_0 - T_1 = -T_1 \left\{ \frac{k-1}{k} \frac{q}{p_0} - \frac{(k-1)(2k-1)}{2k^2} \frac{q^2}{p_0^2} \dots \right\}$$

Wordt hierin ingevoerd: $T_1 = 288$, $p_0 = 10333$, $k = 1,40$, dan gaat deze uitkomst over in:

$$C_1 = -7,96 \times 10^{-3} q + 4,95 \times 10^{-7} q^2 \dots \dots \dots$$

Bij de proeven was q steeds kleiner dan 50, zoodat de term in q^2 onbelangrijk is en de correctie ten slotte verkregen wordt in den reeds in punt 3c aangegeven vorm:

$$C_1 = -7,96 \times 10^{-3} q \quad (5)$$

Bij de berekening werden voor T_1 en p_0 waarden aangenomen, die ongeveer gelijk zijn aan de bij de tunnelproeven voorkomende. Kleine verschillen hierin, zooals die in werkelijkheid zullen optreden, zullen slechts onbelangrijke wijzigingen van de correctie tengevolge hebben.

4. Bespreking van de metingsuitkomsten.

a. Overzicht van de uitgevoerde proeven.

Tabel I geeft een overzicht van de metingen, voor zoover de uitkomsten ervan in dit rapport besproken worden. Een aantal voorloopige metingen, die onregelmatige uitkomsten opleverden, welke onregelmatigheid aan ongelijke luchttemperatuur of aan onderlinge beïnvloeding van de beide instrumenten toegeschreven kon worden, zijn hier buiten beschouwing gelaten.

Iedere meting bestond uit de waarnemingen bij vijf verschillende snelheden van 12 tot 27 m/sec (zie Tabel III), druk en temperatuur van de lucht kwamen ongeveer overeen met die in de standaardatmosfeer op hoogte nul.

TABEL I.

Overzicht van de uitgevoerde proeven.

Meting	Vergelijkingsinstrument	Te onderzoeken instrument	Relatieve stand der instrumenten	Stand van het te onderzoeken instrument
1	stuwpunt-thermometer	laboratorium-thermometer	a	
2	idem	idem	a	
3	idem	idem	a	
4	idem	idem	a	
5	idem	idem	b	
6	laboratorium-thermometer	stijl-thermometer	b	schaal voor
7	idem	idem	b	schaal rechts
8	idem	idem	b	schaal achter
9	idem	idem	b	schaal links

Stand a: vloeistofreservoirs van beide thermometers op ongeveer 180 cm recht achter elkaar.

Stand b: als a, doch voorste thermometer 5 cm in een richting loodrecht op de strooming verschoven.

TABEL II.
Uitkomsten van de proeven.

Meting	Instrument	c_0	c_1
1	laboratoriumthermometer	+ 0,25	—0,0065
2	idem	+ 0,30	—0,0067
3	idem	+ 0,27	—0,0071
4	idem	+ 0,40	—0,0081
5	idem	+ 0,45	—0,0098
6	stijlthermometer	+ 0,3	—0,009
7	idem	+ 0,5	—0,014
8	idem	+ 0,5	—0,010
9	idem	+ 0,4	—0,010

$$C_2 = t_0 - t_2 = c_0 + c_1 q$$

t_0 = werkelijke luchttemperatuur in °C.

t_2 = aanwijzing instrument in °C.

q = stuwdruk in kg/m².

TABEL III.
Getallenwaarden voor meting 1.

V	q	t_1	t_2	t_0	C_2	$c_0 + c_1 q$	ϵ
12	9,4	20,52	20,28	20,45	+0,17	+0,19	—0,02
17	18,8	20,67	20,39	20,52	+0,13	+0,13	0
21	28,2	20,87	20,55	20,65	+0,10	+0,07	+0,03
24	37,6	21,11	20,79	20,81	+0,02	+0,01	+0,01
27	46,9	21,53	21,23	21,16	—0,07	—0,06	—0,01

V = snelheid in m/sec.

q = stuwdruk in kg/m².

t_1 = aanwijzing stuwpuntthermometer in °C.

t_2 = aanwijzing laboratoriumthermometer in °C.

t_0 = werkelijke luchttemperatuur in °C.

$C_2 = t_0 - t_2$ = correctie voor laboratoriumthermometer in °C. (uit waarnemingen).

$c_0 + c_1 q$ = idem (gestrookt)

$\epsilon = C_2 - (c_0 + c_1 q)$.

b. De uitkomsten voor den laboratoriumthermometer.

Bij het bepalen van de correctie voor den laboratoriumthermometer werd de stuwpuntthermometer als vergelijkingsinstrument gebruikt. De waarden van de coëfficiënten c_0 en c_1 , verkregen bij deze proeven, zijn in het eerste deel van Tabel II verzameld, terwijl Tabel III het meer volledige getallenmateriaal van een der metingen geeft. Bij de metingen 1 t/m 4 stonden de beide instrumenten recht achter elkaar, bij meting 5 was het voorste 5 cm verschoven. Hierbij moet opgemerkt worden, dat de metingen 1 t/m 3 onmiddellijk na elkaar uitgevoerd werden en de relatieve stand der instrumenten dus zeker dezelfde was. Meting 4 daarentegen werd eerst eenigen tijd later uitgevoerd, zoodat tusschen beide instellingen een klein verschil bestaan kan hebben. Hierin ligt een mogelijke verklaring van het feit, dat de uitkomsten van laatstgenoemde proef eenigszins van die van de vorige afwijken. Ook het opzettelijk verplaatsen van het voorste instrument gaf een verschil in de uitkomsten (meting 4 → 5). Een en ander doet vermoeden, dat bij de proeven het achterste instrument, zij het waarschijnlijk ook

in geringe mate, door het voorste beïnvloed werd. Aan de verkregen getallenwaarden mag dus geen al te groote beteekenis toegekend worden. Echter kan wel met vrij groote zekerheid aangenomen worden, dat de correctie voor het op geenerlei wijze beïnvloede instrument van dezelfde orde van grootte zal zijn als de hier gevonden uitkomsten.

De coëfficiënt c_0 beteekent een constant, d.w.z. van de snelheid onafhankelijk, verschil tusschen de beide instrumenten. Bij vergelijking van de aanwijzing van beide in water van kamertemperatuur bleek de stuwpuntthermometer ongeveer 0,35° hoger aan te wijzen, hetgeen behoorlijk in overeenstemming is met de gevonden waarden voor c_0 . Vergelikt men de verkregen waarden van c_1 met den coëfficiënt voor de temperatuursverhoging in het stuwpunt, welke in punt 3d berekend werd, dan blijken zij ongeveer gelijk aan deze te zijn.

c. De uitkomsten voor den stijlthermometer.

Bij het onderzoek van den stijlthermometer bleek het niet mogelijk deze rechtstreeks met den stuwpuntthermometer te vergelijken. Kleine veranderingen in den relatieven stand der instrumenten hadden hierbij niet onbelangrijke verschillen in de uitkomsten tengevolge. Dit moet toegeschreven worden aan de grootere afmetingen van het instrument, waardoor de onderlinge beïnvloeding van meer belang wordt. De stijlthermometer werd daarom vergeleken met den laboratoriumthermometer en bij uitwerking van de resultaten gebruik gemaakt van de uit de vorige proeven bekende correctie voor laatstgenoemd instrument. Als zoodanig werd de uitkomst van meting 5 gebruikt, omdat de relatieve stand van de beide instrumenten daarbij dezelfde was als de hier beschouwde proeven.

De thermometer werd in vier verschillende verticale standen onderzocht. Bij de in Tabel I aangegeven aanwijzingen omtrent den stand beteekent „schaal voor”, dat de schaalverdeling en dus ook het vloeistofreservoir zich bevond aan de door de strooming getroffen zijde. De uitkomsten voor de verschillende standen, die gegeven zijn in de tweede helft van Tabel II vertoonen onderlinge verschillen. Een conclusie over den invloed van den stand op de miswijzing kan hieruit echter niet met zekerheid afgeleid worden. Immers „schaal rechts” en „schaal links” zijn, afgezien van afwerkingson nauwkeurigheden van het instrument, twee gelijkwaardige standen en zouden dus dezelfde uitkomsten moeten opleveren. Dit blijkt niet het geval te zijn, de spreiding der uitkomsten tengevolge van onnauwkeurigheden is dus van dezelfde grootte als mogelijke door den stand van het instrument ten opzichte van de strooming veroorzaakte verschillen.

Evenals dit voor den laboratoriumthermometer het geval was, komt hier de waarde van c_0 vrij goed overeen met het verschil in aanwijzing in een nietstroomende middenstof voor de beide vergeleken instrumenten. Als gemiddelde waarde van c_1 kan —0,011 aangenomen worden, de miswijzing is dus ongeveer 1,4 maal de temperatuursverhoging in het stuwpunt.

De verkregen uitkomsten gelden uit den aard der zaak alleen onder die omstandigheden, waarbij de proeven uitgevoerd werden. Extrapolatie tot de veel grootere snelheden, welke bij vliegproeven voor kunnen komen, is, met het oog op mogelijk schaafeffect, op zijn minst genomen bedenkelijk. Stapt men echter voor een oogenblik over dit bezwaar heen om een indruk te krijgen van de orde van grootte van de miswijzing onder laatstgenoemde omstandigheden, dan blijkt deze niet onbelangrijk te zijn. Voor een stuwdruk van 400 kg/m², overeenkomende met een snelheid van 80 m/sec (= 288 km/h) op hoogte 0, wordt dan de miswijzing van den vrijstaanden thermometer ongeveer 45° C.

Het is dus gewenscht te trachten door verdere proeven nadere gegevens over het gedrag van thermometers bij grootere snelheid te verkrijgen. De aangewezen weg hiervoor is het in een vliegtuig vergelijken van den thermometer met een stuwpuntthermometer, of, indien dit praktisch niet uitvoerbaar is, met een ander instrument, dat

zoodanig opgesteld is, dat het zich bij benadering als een stuwpuntthermometer gedraagt. Bij de beoordeeling van de uitkomsten van dergelijke proeven zal gelet moeten worden op den invloed van de deelen van het vliegtuig, waaraan de thermometer bevestigd is of die hem op andere wijze kunnen beïnvloeden.

5. Conclusies.

a. Bij de proeven bleken zoowel de laboratoriumthermometer als de stijlthermometer tengevolge van de strooming te hoog aan te wijzen. Voor beide instrumenten was bij snelheden van 12 tot 27 m/sec en bij een temperatuur en druk, die ongeveer overeenkwamen met die op hoogte 0 in de standaardatmosfeer, deze miswijzing evenredig met den stuwdruk.

b. Voor den laboratoriumthermometer was de miswijzing ongeveer gelijk aan de temperatuursverhooging, die onder gelijke omstandigheden in het stuwpunt van een lichaam optreedt, voor den stijlthermometer had zij ongeveer 1,4 maal deze waarde.

c. De uitkomsten zijn alleen geldig onder de in a

omschreven omstandigheden. Wordt aangenomen, dat extrapolatie tot hogere snelheden toelaatbaar is om een indruk te verkrijgen van de orde van grootte der te verwachten miswijzing, dan wordt voor deze voor den vrijstaanden stijlthermometer bij een snelheid van 80 m/sec (= 288 km/h) een waarde van ongeveer 45° C. gevonden.

d. De verkregen uitkomsten wijzen op de wenschelijkheid het gedrag van thermometers bij grotere snelheden te onderzoeken, hiertoe zullen verdere proeven in een vliegtuig uitgevoerd worden.

(Afgesloten Maart 1932).

LITERATUUR.

1. BAUMHAUER, A. G. VON. Onderkoeling van den stoom in turbines. *De Ingenieur* 1920, n^o. 8, blz. 129.
2. POHLHAUSEN, E. Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. *Z.A.M.M.* 1921, S. 115.
3. SCHILLER, L. Handbuch der Experimentalphysik. Bnd 4, 1. Teil. (Leipzig, 1931) S. 285 u. 365.
4. ZAHM A. F. and LOUDEN F. A. Tables for pressure of air on coming to rest from various speeds. N.A.C.A. Report 316. *Fifteenth Annual Report of the N.A.C.A.* 1929, p. 247.

Rapport A. 372.

De luchtweerstand van een vliegtuigwiel met en zonder kap

door

ir. A. BOELEN.

Rapport A. 372: La résistance aérodynamique d'une roue d'avion avec et sans carénage.

Report A. 372: The resistance of an aeroplane wheel with and without spat.

Bericht A. 372: Der Widerstand eines Flugzeugrades mit und ohne Haube.

RAPPORT A. 372.

De luchtweerstand van een vliegtuigwiel met en zonder kap.

Uittreksel.

a. Omvang van het onderzoek (punt 1).

De weerstand van een wiel met kap en stijlen werd gemeten, waarbij verschillende wijzigingen aangebracht werden (zie b).

b. Model (punt 2).

Het model, dat in fig. 1 gegeven is, bestond uit een ware-grootte-wiel met bijbehorende onderdeelen. De wijzigingen bestonden uit: wegnemen van de kap, dichtmaken van de opening aan de onderzijde van deze, veranderen van den vorm van of wegnemen van de oliepoet, kleinere veranderingen aan het wiel zonder kap.

c. Meetmethode, coëfficiënten (punt 3).

Voor de meetmethoden en voor de wijze van berekening der coëfficiënten kan verwezen worden naar punt 3 van het rapport.

d. Resultaten (punt 4).

De verkregen uitkomsten voor twee snelheden zijn in Tabel I verzameld. Tabel II en fig. 2 geven bovendien de coëfficiënten voor twee modellen bij meerdere snelheden.

e. Conclusies (punt 5).

Voor de conclusies kan verwezen worden naar punt 5 van het rapport.

RAPPORT A. 372.

La résistance aérodynamique d'une roue d'avion avec et sans carénage.

Résumé.

a. Ampleur des expériences (point 1).

Des expériences furent faites sur la résistance d'une roue avec carénage et mâts. L'influence de modifications diverses fut déterminée (voir b).

b. Modèles (point 2).

L'objet d'essai complet est donné dans la figure 1. Il consistait en une roue à grandeur naturelle, le carénage, la fusée d'essieu, l'amortisseur à l'huile et deux mâts fuselés. Les modifications sont indiquées schématiquement dans le tableau I. Les modèles sont divisés en trois groupes: sans amortisseur (6a jusqu'à 6c, „geen oliepoet”), avec amortisseur fuselé (6d jusqu'à 6i, „stroomlijnvormige oliepoet”) et avec amortisseur rond (6j, 6k, „ronde oliepoet”). Chaque groupe contient le modèle sans carénage („geen kap”) et avec carénage. L'ouverture dans la partie inférieure du carénage était ouverte („open kap”) ou à peu près fermée („dichte kap”). En outre quelques modifications furent exécutées sur le modèle sans carénage.

c. Méthode d'essai, coefficients (point 3).

La méthode de mesure a été décrite dans le rapport A. 64¹⁾. Les résultats sont donnés sous la forme de coefficients c_w , calculés par la formule:

$$W = c_w O q$$

dont W est la résistance, q la pression dynamique et O le produit de diamètre et largeur du pneu.

d. Résultats (point 4).

Les coefficients sont, pour deux valeurs de la vitesse, donnés dans le tableau I, dans lequel sont incorporés

¹⁾ Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Tome II (1923) p. 51.

aussi ceux pour une roue isolée (5,7 jusqu'à 5,1), empruntés à des expériences antérieures²⁾. Le tableau II et la figure 2 donnent les coefficients pour deux roues à un nombre plus grand de vitesses.

e. Conclusions (point 5).

Le carénage peut donner une réduction considérable de la résistance (carénage ouvert: 6c → 6b: 24 %; carénage fermé: 6c → 6a: 40 %, 6g → 6d: 45 %). Une réduction assez importante peut être obtenue en fermant l'ouverture du carénage (6b → 6a: 16 %). L'amortisseur rond peut annuler complètement l'effet favorable du carénage (6j → 6h). Des modifications au modèle sans carénage ne donnaient que des réductions assez indifférentes (tout au plus 10 %).

REPORT A. 372.

The resistance of an aeroplane wheel with and without spat.

Summary.

a. Range of the investigation (point 1).

Experiments were made on the resistance of a wheel with spat and struts. Different modifications were tested (see b).

b. Model (point 2).

The complete model is given in fig. 1. It consisted of a full scale wheel, spat, axle, oleo shock absorber and two streamline struts. The different modifications are sketched in Table I. The models are divided into three groups: without oleo (6a till 6c, „geen oliepoet”), with streamlined oleo (6d till 6i, „stroomlijnvormige oliepoet”) and with round oleo (6j, 6k, „ronde oliepoet”). Each group contains the model without spat („geen kap”) and with spat. In the latter case the opening at the bottom of the spat was either open („open kap”) or nearly closed („dichte kap”). Moreover some modifications were made in the model without spat.

c. Method of measurement, coefficients (point 3).

The method of measurement has been described in report A 64³⁾. The results are given in coefficients c_w , defined by

$$W = c_w O q$$

in which W is the resistance, q the dynamic pressure and O the product of diameter and width of the tyre.

d. Results (point 4).

The coefficients are given in Table I for two values of the velocity, whereas some results from previous experiments⁴⁾ with a wheel without struts are inserted (5.7 till 5.1). Table II and fig. 2 give the coefficients for two models at different velocities.

e. Conclusions (point 5).

The spat may give an important reduction in resistance (spat open: 6c → 6b: 24 %; spat closed: 6c → 6a: 40 %, 6g → 6d: 45 %). Closing the spat effects an important reduction too (6b → 6a: 16 %). The round oleo nullifies the effect of the spat completely (6j → 6k). Modifications of the model without spat only gave rather unimportant reductions (up to 10 %).

²⁾ Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Tome IV (1927) p. 269.

³⁾ Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Volume II, (1923) p. 51.

⁴⁾ Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Volume IV, (1927) p. 269.

BERICHT A. 372.

Der Widerstand eines Flugzeugrades mit und ohne Haube.

Zusammenfassung.

a. Umfang der Untersuchung (Punkt 1).

Der Widerstand eines Rades mit Haube und Streben wurde gemessen. Der Einfluss einiger Abänderungen wurde untersucht.

b. Modell (Punkt 2).

Der vollständige Versuchskörper ist in Fig. 1 gegeben. Er war zusammengesetzt aus Flugzeugrad, Haube, Achsstummel, Ölstopfänger und zwei Profilstreben. Die Abänderungen sind schematisch in Tafel I angegeben. Die verschiedenen Modelle wurden dabei in drei Gruppen eingeteilt: ohne Ölstopfänger (6a bis 6c: „geen oliepoet“), mit profiliertem Ölstopfänger (6d bis 6i: „stroomlijnvormige oliepoet“) und mit rundem Ölstopfänger (6j, 6k: „ronde oliepoet“). Jede Gruppe enthält das Rad ohne Haube („geen kap“) und mit Haube. Die Öffnung an der Unterseite der Haube war dabei entweder offen („open kap“) oder nahezu geschlossen („dichte kap“). Es wurden weiter noch einige Abänderungen an dem Modell ohne Haube angebracht.

c. Meszverfahren, Koeffizienten (Punkt 3).

Das Meszverfahren ist in Bericht A. 64⁵⁾ beschrieben worden. Die Ergebnisse sind als Koeffizienten c_w gegeben, die berechnet wurden mittels

$$W = c_w O q$$

Dabei sind W Widerstand, q Staudruck und O Produkt aus Durchmesser und Breite des Reifens.

d. Resultate (Punkt 4).

Die Koeffizienten sind für zwei Geschwindigkeiten in Tafel I gegeben, in denen auch die Resultate einiger früheren Messungen⁶⁾ an einem Rad ohne Streben aufgenommen sind (5,7 bis 5,1). Tafel II und Fig. 2 geben die Resultate für zwei Modelle bei mehreren Geschwindigkeiten.

e. Schlussfolgerungen (Punkt 5).

Die Haube kann eine erhebliche Abnahme des Widerstandes geben (offene Haube: 6c $\rightarrow$ 6b: 24 %; geschlossene Haube: 6c $\rightarrow$ 6a: 40 %; 6g $\rightarrow$ 6d: 45 %). Schlieszen der Haubenöffnung hat einen wesentlichen Einfluss (6b $\rightarrow$ 6a: 16 %). Der runde Ölstopfänger hebt die Wirkung der Haube vollständig auf (6j $\rightarrow$ 6k). Abänderungen an dem Modell ohne Haube hatten nur ziemlich unwesentliche Verbesserungen zur Folge (höchstens 10 %).

⁵⁾ Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Bnd. II (1923), S. 51.

⁶⁾ Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Bnd. IV (1927), S. 269.

De luchtweerstand van een vliegtuigwiel met stijlen met en zonder kap¹⁾

door

ir. A. BOELEN.

Rapport A. 372. Rijksstudiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Bij deze proeven werden verschillende veranderingen aangebracht aan wiel, kap en stijlen, terwijl tevens voor enkele gevallen de invloed van invalshoek en snelheid op den weerstand nader onderzocht werd.

1. Omvang van het onderzoek.

In de windtunnel werd onderzocht in hoeverre een min of meer stroomlijnvormige kap om een vliegtuigwiel den weerstand hiervan vermindert.

Het model werd onderzocht in 11 verschillende toestanden, waarvan de omschrijving en schematische figuren gegeven zijn in Tabel I. In alle gevallen werd de weerstand gemeten bij windsnelheden van ongeveer 16 m/sec. en 26 m/sec., voor de modellen 6d en 6i bovendien nog bij drie tusschengelegene snelheden.

De modellen 6a en 6b werden gemeten bij de invalshoeken $\alpha = -2,5^\circ$, $-0,2^\circ$ en $+2,5^\circ$, model 6k bij $\alpha = 0^\circ$ en $\alpha = +2,5^\circ$.

Invalshoek $\alpha = 0^\circ$ wil zeggen, dat de onderrand van de kap evenwijdig is aan de windrichting.

Alle metingen zonder kap werden verricht bij dien stand van de stijlen, welke overeenkomt met $\alpha = 0^\circ$ voor het model met kap.

2. Beschrijving van de modellen.

Het model was vervaardigd door de firma Pander. Het bestond, zooals in fig. 1 is aangegeven, uit drie deelen:

¹⁾ Daar dit onderzoek uitgevoerd werd voor de firma H. Pander & Zonen, past hier een woord van dank voor haar welwillende toestemming voor het publiceeren van de verkregen uitkomsten.

een ware grootte wiel (wiel n°. 6), een bijbehorende kap (kap n°. 2) en een as met stijlen.

Het wiel bestond uit een naaf, velg met binnen het wiel gelegen remtrommel en remkabel, band (7'' $\times$ 19'') en een rubber afdekschijf aan de buitenzijde van het wiel. De rubberschijf is bij alle metingen, in verband met de ophanging, vervangen door een eveneens aan de velg aansluitende kartonnen schijf.

De kap was stroomlijnvormig, met gaten voor doorlating van wiel, as en stijlen. Zij was uit aluminium geslagen en bestond uit twee deelen, verbonden door een losneembaren naad.

De as met stijlen was uit hout vervaardigd. De twee onderste stijlen waren vast met de as verbonden en stroomlijnvormig (breedteverhouding 2). De bovenste stijl (oliepoet) was scharnierend aan de as verbonden en rond. Deze werd voor eenige metingen geheel weggenomen of vervangen door een stroomlijnvormigen stijl met breedteverhouding 2. Op de plaats, waar de twee vaste stijlen door de kap gingen, was een stroomlijnvormig aansluitstuk aangebracht. De oliepoet ging zonder meer door de kap. Bij de metingen zonder kap was de as gelijk met de wielnaaf afgezaagd, zoodat de as niet buiten de bovengenoemde kartonnen afdekschijf uitstak.

Dit model werd in verschillende vormen (model 6a t/m 6k) gebruikt. Onder de in Tabel I gebruikte aanduidingen wordt verstaan:

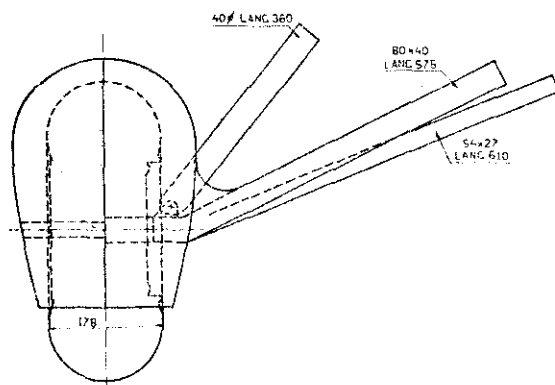


Fig. 1. Model n°. 6k (Open kap, Ronde oliepoet).

Kap dicht: Een kartonnen plaat sloot de opening tussen wiel en kap af. De spleet tussen wiel en karton was zeer klein. De overgang tussen kap en karton was vloeiend.

Remtrommel vlak: Tegen de binnenzijde van het wiel was, evenals aan de buitenzijde, een kartonnen vlakke schijf binnen de velg aangebracht.

Band vlak: Op den band was aan beide zijden een glad stuk papier geplakt op de plaats van de grootste bandbreedte.

Knooppunt gestroomlijnd: Bij de metingen zonder kap was om het knooppunt van de drie stijlen een stroomlijn-vormig lichaam aangebracht.

As gestroomlijnd: Achter het deel van de as tussen remtrommel en stijlenknooppunt was een klein stroomlijn-vormig aansluitstukje gemaakt.

Bij de metingen met kap was de remkabel in de kap geborgen en bij de metingen zonder kap was deze zoo goed mogelijk tegen de velg gedrukt.

3. Meetmethode en berekening van de coëfficiënten.

De wielen werden opgehangen zooals in rapport A. 64 ²⁾ is aangegeven, het wiel was nu echter verticaal opgesteld. De stijlen werden door draden met voorspangewichten op hun plaats gehouden.

De gevonden weerstanden werden uitgedrukt in coëfficiënten, met behulp van de formule:

$$W = c_w \cdot O \cdot q.$$

Hierin is:

q = stuwdruk van den wind.

O = „bandoppervlak” = bandbreedte $\times$ banddiameter = 0,086 m².

4. Resultaten.

De resultaten zijn gegeven in Tabel I en II en fig. 2.

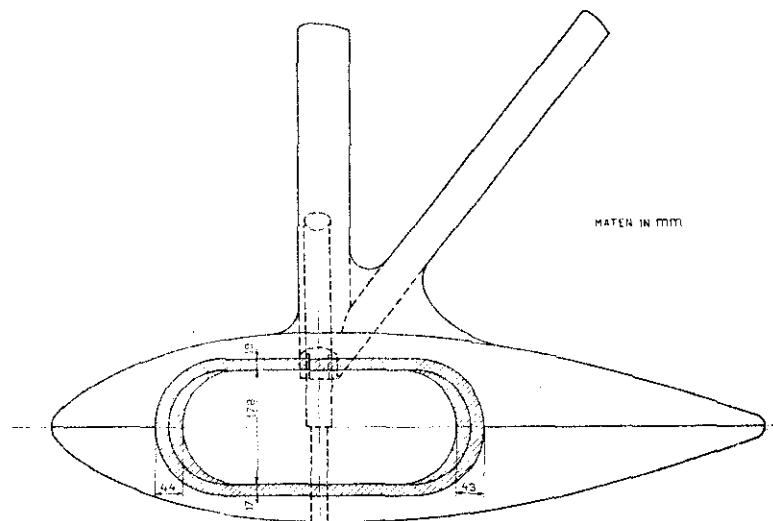
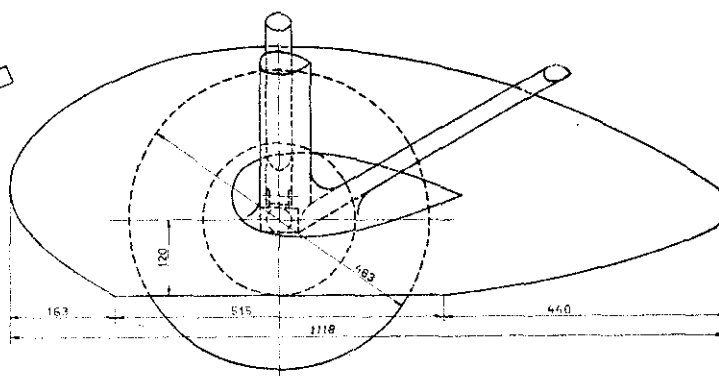
In de kolom Δc_w is de weerstandstoename gegeven van de verschillende modellen uit een groep ten opzichte van het model, dat als normaal voor die groep beschouwd werd en in procenten van den weerstand van dit model. De verschillende groepen zijn gescheiden door dubbele lijnen.

Ter vergelijking zijn in Tabel I tevens opgenomen de modellen 5,1 — 5,3 en 5,7 uit rapport A. 153 ³⁾. Dit wiel was niet van stijlen voorzien en bezat geen remtrommel met remkabel. De bandenmaat was 800 $\times$ 500 mm. Voor nadere beschrijving van deze modellen kan naar bovengenoemd rapport verwezen worden.

Indien twee waarden van c_w gegeven worden, werden, bij denzelfden toestand van het model, ook twee duidelijk verschillende waarden voor den weerstand gevonden.

²⁾ Rapport A. 64: De Ingenieur 27 October 1923, n°. 43; R.S.L. Verslagen en Verhandelingen. Deel II.

³⁾ Rapport A. 153: R.S.L. Verslagen en Verhandelingen. Deel IV.



Het bleek, dat de waarde van den weerstandscoefficiënt in alle gevallen vrij sterk afnam bij toenemende snelheid (zie ook fig. 2). Dit was bij vroegere metingen (Rapport A. 64 en A. 153, ziet noot 2 en 3) niet gebleken. Aangezien het thans onderzochte model echter van stijlen voorzien was en deze op zich zelf bij een schaalwaarde, die ongeveer overeenkomt met die bij de hier beschreven proeven, een snelle afname van den weerstandscoefficiënt vertoonden, is het te verklaren, dat ook voor de hier gebruikte modellen deze coëfficiënt afhankelijk is van de snelheid.

Bij verdere beschouwing van Tabel I blijkt, dat verbeteringen aan het wiel zonder kap wel eenige weerstandsvermindering geven (maximum 10% model 5e); deze zijn echter belangrijk kleiner dan die, veroorzaakt door de kap. De weerstandsvermindering door de dichte kap bedroeg 40% voor het model zonder oliepoet (6a) en 45% voor dat met stroomlijn-vormigen oliepoet (6d).

De open kap leverde een weerstandsvermindering van 24% voor het model zonder oliepoet (6b), terwijl deze gunstige werking bij het model met ronden oliepoet geheel verdwenen was (6k). Waarschijnlijk moet dit toegeschreven worden aan het feit, dat de ronde oliepoet, die een krachtige verstoring van de strooming veroorzaakt, zonder eenige poging om een geleidelijken overgang te verkrijgen, door het oppervlak van de kap heenstak en bovendien een vrij kleinen hoek met dit oppervlak maakte.

Het dicht maken van de kap geeft een extra weerstandsvermindering van 16% (model 6a en 6b).

Kleine veranderingen van den invalshoek hadden over het algemeen weinig invloed op den weerstand. Bij $\alpha = -2,5^\circ$ en $V \approx 26$ m/sec. werd deze echter plotseling groot. Daar deze metingen door gebrek aan tijd niet konden worden herhaald, moeten deze uitkomsten met eenige voorzichtigheid worden beoordeeld.

5. Conclusies.

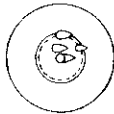
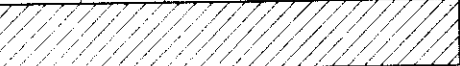
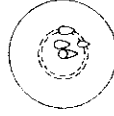
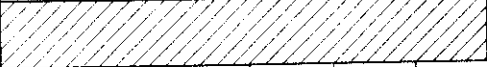
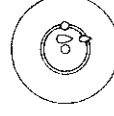
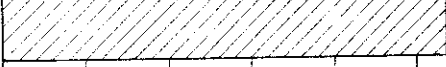
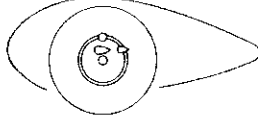
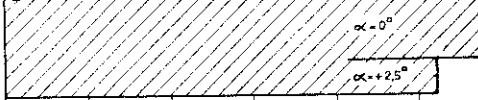
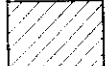
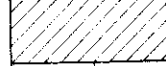
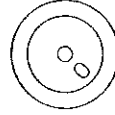
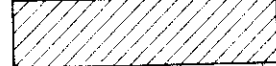
Uit het bovenstaande rapport kunnen de volgende algemeene conclusies getrokken worden.

1°. Het aanbrengen van een min of meer stroomlijn-

TABLE I

Model No.	Omschrijving.	α	c_w		Δc_w in %	Schema	c_w voor $V \approx 26$ m/sec.					
			$V \approx 16$ m/sec.	$V \approx 26$ m/sec.			0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
6a	Dichte kap. Geen oliepoet.	$-2,5^\circ$ $-0,2^\circ$ $+2,5^\circ$	0,327 0,345 0,334	0,312? 0,199 0,196	$-5?$ -40 -40							
6b	Open kap. Geen oliepoet.	$-2,5^\circ$ $-0,2^\circ$ $+2,5^\circ$	0,374 0,395 0,387	0,353? 0,251 0,249	$+7?$ -24 -24							
6c	Geen kap. Geen oliepoet.	0°	0,461	{ 0,329 0,404	0 $+23$							
6d	Dichte kap. Stroomlijnvormige oliepoet.	0°	0,526	0,303	-45							
6e	Geen kap. As gestroomlijnd. Stroomlijnvormige oliepoet.	0°	0,683	{ 0,495 0,519	-10 -6							
6f	Geen kap. Knooppunt gestroomlijnd. Stroomlijnvormige oliepoet.	0°	0,722	0,527	-4							
6g	Geen kap. Stroomlijnvormige oliepoet.	0°	0,688	0,550	0							

Vervolg TABEL I.

Model No.	Omschrijving.	α	c_w		Δc_w in %	Schema	c_w voor $V \approx 26$ m/sec.					
			$V \approx 16$ m/sec.	$V \approx 26$ m/sec.			0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6 c_w
6h	Geen kap. As gestroomlijnd. Remtrommel vlak. Stroomlijnvormige oliepoet.	0°	0,699	0,556	+1							
6i	Geen kap. As gestroomlijnd. Band vlak. Stroomlijnvormige oliepoet.	0°	0,713	0,587	+7							
6j	Geen kap. Ronde oliepoet.	0°	0,712	0,536	0							
6k	Open kap. Ronde oliepoet.	0° +2,5°	0,612 0,603	0,574 0,521	+7 -3							
5,7	Met kap. Band vlak.	0°	—	0,12	-61							
5,3	Zonder kap. Band vlak.	0°	—	0,19	-39							
5,1	Zonder kap.	0°	—	0,31	0							

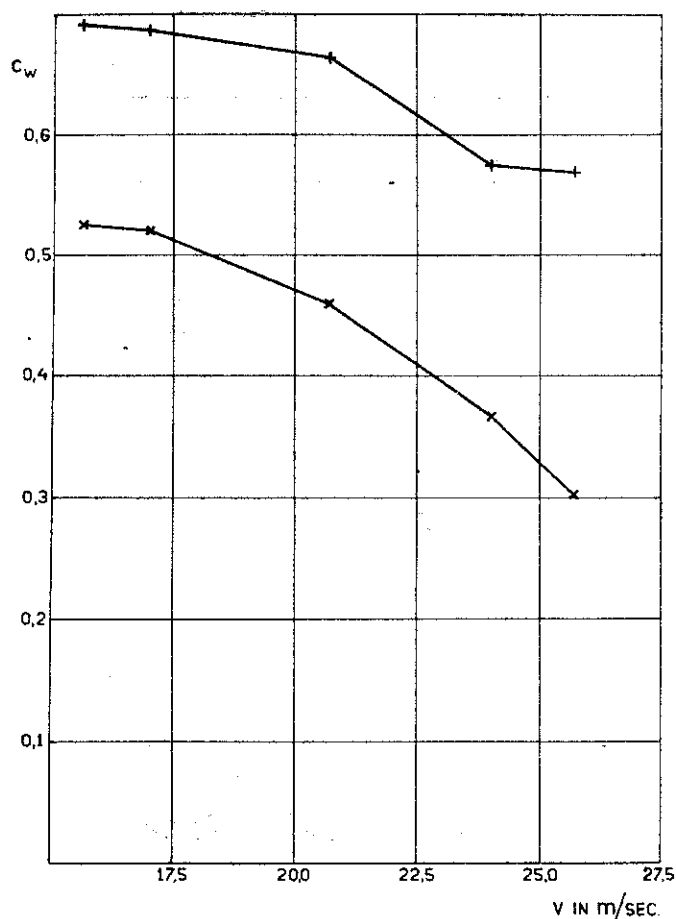


Fig. 2.

- + — + Model n°. 6i (Geen kap, As gestroomlijnd, Band vlak, Stroomlijnvormige oliepoet).
 × — × Model n°. 6d (Met dichte kap, Stroomlijnvormige oliepoet).

vormige kap om een vliegtuigwiel kan een belangrijke weerstandsvermindering geven.

2°. De stijlen van het landingsgestel kunnen deze gunstige werking volkomen te niet doen.

3°. Het dichtmaken van de opening tusschen wiel en kap kan een extra weerstandsvermindering geven.

Verder gelden voor het in dit rapport onderzochte wiel:

4°. De open kap beteekent een weerstandsvermindering van:

24% voor het model zonder oliepoet (6b);

— 7% voor het model met ronden oliepoet (6k);

voor de dichte kap worden deze getallen:

40% voor het model zonder oliepoet (6a);

45% voor het model met stroomlijnvormigen oliepoet (6d).

De gunstigste vorm van het wiel zonder kap (6e) gaf 10% minder weerstand dan het normale wiel zonder kap (6g).

5°. De weerstandscoefficiënt is weinig gevoelig voor kleine veranderingen van den invalshoek. Hij hangt echter sterk van de snelheid af, wat waarschijnlijk door de stroomlijnvormige stijlen wordt veroorzaakt.

6°. In sommige gevallen zijn er twee stroomingen om de stijlen mogelijk, die een verschillenden weerstand leveren.

Tabel II.

Model No.	6d	6i
V in m/sec.	c _w	
15,6	0,526	0,691
17,0	0,520	0,687
20,7	0,460	0,665
24,0	0,367	0,576
25,7	0,303	0,569

RAPPORT S. 83.

Stossartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich bei
beiderseits gelenkiger Lagerung

Von

CAREL KONING und JOSEF TAUB.

Stoßartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich bei beiderseits gelenkiger Lagerung.*)

Von Carel Koning und Josef Taub.

Gemeinsamer Bericht¹⁾ des Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam und der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

Die Abhandlung stellt den ersten Teil einer Gemeinschaftsarbeit der beiden Anstalten dar²⁾. In ihr wird das Problem der stoßartigen Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich behandelt. Zunächst wird die Differentialgleichung des Problems abgeleitet, sodann deren Lösung für den wichtigen Sonderfall des beiderseits gelenkig gelagerten Stabes angegeben.

Gliederung.

- I. Einleitung.
 - II. Formelzeichen.
 - III. Die Differentialgleichung des Problems.
 - IV. Lösung für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab.
 1. Die freien Längsschwingungen des Stabes.
 2. Die freien Querschwingungen des Stabes.
 3. Querschwingungen infolge einer konstanten Stoßkraft.
 - a) Die Grundschwingung.
 - α) Die Stoßkraft ist kleiner als die Euler-Last ($a < 1$).
 - β) Die Stoßkraft ist gleich der Euler-Last ($a = 1$).
 - γ) Die Stoßkraft ist größer als die Euler-Last ($a > 1$).
 - b) Die $(n-1)$ te Oberschwingung.
 - V. Zahlenmäßige Auswertung und Folgerungen.
 - VI. Abhängigkeit der Beanspruchung vom Stoßantrieb $\int P \cdot dt$.
 - VII. Zusammenfassung.
- Anhang: Einfluß einer kleinen Abänderung der Stabform auf die Ergebnisse.

I. Einleitung.

Die Untersuchung der statischen Knickbeanspruchung führt bekanntlich zu einem Stabilitätsproblem. Es wird bei ihr die Frage vorgelegt und beantwortet, bis zu welcher Grenze bei gegebenen Stababmessungen die Druckkraft gesteigert werden kann, ohne daß das Gebiet verlassen wird, in welchem ein eindeutig definierter Gleichgewichtszustand vorhanden ist. Nach Überschreitung dieser Stabilitätsgrenze sind mehrere Gleichgewichtslagen möglich. In der Nähe der Stabilitätsgrenze ist die Steigerung der Formänderungen so groß, daß der Stab meistens vor Erreichen des Gleichgewichtszustandes seine Tragfähigkeit verliert. Die Bestimmung der Stabilitätsgrenze ist daher von entscheidender Bedeutung.

Wird dagegen ein Stab stoßartig auf Knicken beansprucht, wobei unter Stoßartigkeit die Kurzzeitigkeit der Belastungsänderung und der Belastungsdauer verstanden werden soll, dann ist zwar die Stabilitätsgrenze — wie wir in dieser Arbeit sehen werden — auch von großer, doch nicht mehr von so entscheidender Bedeutung, wie im statischen Fall. Sie kann ohne Gefahr überschritten werden, wenn die Stoßdauer so kurz ist, daß der Stab keine Zeit hat, die Formänderungen auszuführen, die dem statischen Gleichgewichtszustand entsprechen würden.

Es folgt hieraus, daß es bei der Untersuchung der stoßartigen Knickbeanspruchung nicht auf die Bestimmung der Stabilitätsgrenze, sondern auf die Errechnung der Formänderungen und Beanspruchungen als Funktion der Zeit ankommt.

* Sonderdruck aus Luftfahrtforschung Bd. 10 (1933), Nr. 2.

¹⁾ Der grundsätzliche Rechnungsgang stammt von Koning von dem holländischen Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam, ihr Abschluß und ihre deutsche Bearbeitung von Taub von der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.

²⁾ Zweiter Teil: Taub, Stoßartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich s. Luftfahrtforschung Bd. 10 (1933), Nr. 2, S. 65/70.

II. Formelzeichen.

L	kg	Kraftkomponente parallel zur Stabachse ($\bar{x}$),
D	kg	Kraftkomponente senkrecht zur Stabachse ($\bar{y}$),
$X = -P$	kg	Kraftkomponente parallel zur x -Achse,
Y	kg	Kraftkomponente senkrecht zur x -Achse,
M	kg m	Biegemoment,
q_a	kg m ⁻¹	die auf das Stabelement senkrecht zur Stabachse wirkende äußere Kraft,
q_l	kg m ⁻¹	die auf das Stabelement parallel zur Stabachse wirkende äußere Kraft,
m	kg	Momentenbelastung des Stabelementes,
r	m	Krümmungshalbmesser der elastischen Linie,
α		Neigungswinkel der elastischen Linie,
η	m	Abweichung der Stabachse von der geraden Linie im unbelasteten Zustand,
ε	m	„Amplitude“ der Stabachse im unbelasteten Zustand,
η	m	Durchbiegung (vgl. Abb. 2),
ξ	m	Verschiebung in der x -Richtung,
$S = \int P dt$	kg s	Stoßantrieb (vgl. Fußnote 5),
E	kg m ⁻²	Elastizitätsmodul,
l	m	Stablänge,
i	m	Trägheitsradius des Stabquerschnittes,
F	m ²	Fläche des Stabquerschnittes,
J	m ⁴	Trägheitsmoment des Stabquerschnittes,
ρ	kg s ⁻² m ⁻³	Dichte,
σ_x	kg m ⁻²	Normalspannung in der x -Richtung,
ε_x		Dehnung in der x -Richtung,
t	s	Zeit,
T	s	Schwingungsdauer der freien Grundschwingung,
τ	s	Stoßdauer,
p	s ⁻¹	Schwingungsfrequenz,
v	m s ⁻¹	Schallgeschwindigkeit im Stabmaterial,
φ		Phasenverschiebung,
a		Verhältnis der Stoßkraft zur Euler-Last,
b		Verhältnis der Stoßdauer zur Schwingungsdauer der freien, transversalen Grundschwingung,
c		Verhältnis der absolut genommenen größten Momente im dynamischen und statischen Fall,
λ		Eigenwerte,
A, B, C, D, k_1, k_2		Konstanten.

Indices: $n = 1, 2, 3$ die natürlichen Zahlen, bezieht sich auf Größen, die bei der Längskraft 0 auftreten,

0 kennzeichnet die bei der Eulerschen Knicklast auftretenden Größen,

Ein, zwei usw. Punkte über einem Formelzeichen bedeuten dessen erste, zweite usw. Ableitung nach der Zeit.

Ein, zwei usw. Striche rechts über einem Formelzeichen bedeuten dessen erste, zweite usw. Ableitung nach einer Länge (x).

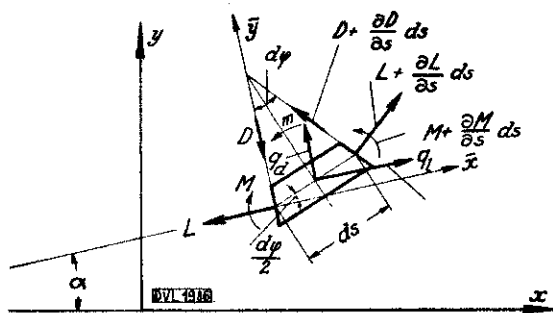


Abb. 1. Kräfte und Momente am Stabelement.

III. Die Differentialgleichungen des Problems.

Für ein Element des gebogenen Stabes von der Länge ds gelten im krummlinigen Koordinatensystem $\bar{x}\bar{y}$ folgende Gleichgewichtsbedingungen (Abb. 1):

$$\left(L + \frac{\partial L}{\partial s} ds\right) \cos d\varphi - \left(D + \frac{\partial D}{\partial s} ds\right) \sin d\varphi - L + q_l ds = 0 \quad (1)$$

$$\left(L + \frac{\partial L}{\partial s} ds\right) \sin d\varphi + \left(D + \frac{\partial D}{\partial s} ds\right) \cos d\varphi - D + q_d ds = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\left(M + \frac{\partial M}{\partial s} ds\right) + \left(L + \frac{\partial L}{\partial s} ds\right) ds \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + \\ &+ \left(D + \frac{\partial D}{\partial s} ds\right) ds \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} - M - \frac{1}{2} q_l ds^2 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} q_d ds^2 \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + m ds = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung $r d\varphi = ds$, wo r den Krümmungsradius bedeutet, gehen diese Gleichungen beim Grenzübergang $d\varphi \rightarrow 0$ durch Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen 2. und 3. Ordnung und mit

$$\begin{aligned} \sin d\varphi &\sim d\varphi, \\ \cos d\varphi &\sim 1 \end{aligned}$$

in folgende über:

$$\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{1}{r} D + q_l = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{1}{r} L + \frac{\partial D}{\partial s} + q_d = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} + D + m = 0 \quad (3a)$$

Wir setzen voraus, daß die Abweichungen der Stabachse von der Geraden im spannungslosen Zustand, sowie die Durchbiegungen bei den hier zu untersuchenden Vorgängen klein sind gegenüber der Stablänge und wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem xy derart, daß die x -Achse in erster Näherung mit der Stabachse im unbelasteten Zustand zusammenfällt. Zwischen den Kraftkomponenten im krummlinigen Koordinatensystem $\bar{x}\bar{y}$ und den Kraftkomponenten im rechtwinkligen Koordinatensystem x, y gelten dann folgende Beziehungen:

$$L = X \cos \alpha + Y \sin \alpha$$

$$D = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

oder, da man setzen darf: $\alpha = \sin \alpha = \tan \alpha = y'$,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{r} = y''$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha = 1$$

$$L = X + Y y'$$

$$D = -X y' + Y.$$

Damit werden:

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x} y' + Y y''$$

$$\frac{\partial D}{\partial s} = -\frac{\partial X}{\partial x} y' + \frac{\partial Y}{\partial x} - X y''$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Wir führen diese Ausdrücke in die Gleichungen (1a) bis (3a) ein und erhalten mit Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung die Gleichgewichtsbedingungen für den »schwach« gebogenen Stab:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x} y' + q_l = 0 \quad (1b)$$

$$-\frac{\partial X}{\partial x} y' + \frac{\partial Y}{\partial x} + q_d = 0 \quad (2b)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - X y' + Y + m = 0 \quad (3b)$$

Durch Elimination von Y gehen diese Gleichungen über in:

$$\frac{\partial X}{\partial x} - q_d y' + q_l = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - X y'' - q_d + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Nimmt man an, daß am Stabelement keine äußeren Kräfte angreifen, d. h., daß q_l und q_d Massenkkräfte des Stabelementes sind und m das Massenmoment des Stabelementes ist, dann ist $q_d \cdot y'$ gegenüber q_l vernachlässigbar, und zwar 1. da bei hinreichend schlanken Stäben die Schwingungsfrequenz und damit die Massenbeschleunigung in der Querrichtung klein ist gegen die entsprechenden Größen in der Längsrichtung, 2. da y' voraussetzungsgemäß eine kleine Größe ist. Die Differentialgleichungen lauten also:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + q_l = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - X y'' - q_d + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \quad (5a)$$

Wir bezeichnen nun mit η die Abweichung der Stabachse von der geraden Form im unbelasteten Zustand und mit ξ die Durchbiegung. Statt y muß dann in (5a) geschrieben werden $\eta + \xi$ (Abb. 2).

Wir drücken X und M als Funktion der Formänderung aus:

$$X = \sigma_x F = E F \epsilon_x = E F \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$M = E J \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Für die Massenkkräfte q_l und q_d und für das Massenmoment m gelten die Ausdrücke:

$$q_l = -\rho F \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$q_d = -\rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

$$m = -\rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right).$$

Mit diesen Ausdrücken gehen (4a) und (5a) über in:

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (4b)$$

$$E J \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - X \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \rho J \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (5b)$$

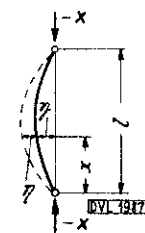
In (4b) und (5b) haben wir die Differentialgleichung des Problems der stoßartigen Knickbeanspruchung für einen Stab mit konstanten Querschnittsabmessungen.

IV. Lösung für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab.

1. Die freien Längsschwingungen des Stabes.

Es seien zunächst die bekannten Ansätze für die freien Längsschwingungen eines geraden Stabes wiederholt. Man erhält sie durch die Lösung der Gleichung (4b). Diese wird durch den allgemeinen Ansatz

$\xi = (A \sin \lambda x + B \cos \lambda x) (k_1 \sin p_0 t + k_2 \cos p_0 t)$ befriedigt.

Abb. 2. Der beiderseits gelenkig gelagerte, ursprünglich nicht ganz gerade Stab bei Belastung durch die Längskraft X .

Wir nehmen an, daß der Stab an dem einen Ende fest, am anderen Ende längsbeweglich gelagert ist. Dann gelten die Randbedingungen:

$$\xi = 0 \quad \text{für } x = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{X}{EF} = 0 \quad \text{« } x = l.$$

Wegen der ersten Randbedingung ist $B = 0$. Der Lösungsansatz vereinfacht sich also zu:

$$\xi = \sin \lambda x (k_1 \sin p_0 t + k_2 \cos p_0 t).$$

Zweimaliges Differenzieren nach x und t ergibt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\lambda^2 \xi$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -p^2 \xi.$$

Diese Werte in (4b) eingesetzt, erhält man

$$-\lambda^2 E + p_0^2 \varrho = 0 \quad p_0 = \lambda \sqrt{\frac{E}{\varrho}} = v \lambda,$$

wo $v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ die Schallgeschwindigkeit im Stabmaterial bedeutet.

Es gilt ferner wegen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lambda \cos \lambda x (k_1 \sin p t + k_2 \cos p t)$$

und wegen der zweiten Randbedingung

$$\lambda_n = \frac{\pi}{2l}, \frac{3\pi}{2l}, \dots, \frac{2n-1}{2l} \pi.$$

Man hat also die Frequenzen

$$p_{0n} = \frac{\pi}{2l} v, \frac{3\pi}{2l} v, \dots, \frac{2n-1}{2l} \pi v$$

und die Schwingungsdauer

$$T_{0n} = \frac{2\pi}{p} = \frac{4}{v}, \frac{4}{3v}, \dots, \frac{4}{2n-1} \frac{l}{v}.$$

2. Die freien Querschwingungen des Stabes.

Für den Fall $X = 0$ geht die Gleichung (5b), wenn man, wie üblich, die rotatorische Trägheit vernachlässigt, in

$$EJ \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \varrho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

über. Diese Gleichung hat die allgemeine Lösung:

$$\eta = \sum_n \sin(p_{0n} t + \varphi_n) \cdot (A_n \sin \lambda_n x + B_n \cos \lambda_n x + C_n \operatorname{sh} \lambda_n x + D_n \operatorname{ch} \lambda_n x).$$

Die Einführung von

$$\frac{\partial^4 \eta_n}{\partial x^4} = \lambda_n^4 \eta_n \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \eta_n}{\partial t^2} = -p_{0n}^2 \cdot \eta_n$$

in (6) ergibt

$$p_{0n} = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\varrho F}} \quad (7)$$

Für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab gelten die Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Damit geht die Lösung von (6) über in:

$$\eta = \sum_n \eta_n = \sum_n A_n \cdot \sin(p_n t + \varphi_n) \cdot \sin \lambda_n x, \quad (7a)$$

wobei

$$\lambda_n = \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \dots, \frac{n\pi}{l}$$

ist. Wegen (7) erhält man also die Frequenzen zu

$$p_{0n} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\varrho F}}, \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\varrho F}}, \dots, \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\varrho F}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} v i,$$

wo i den Trägheitsradius der Querschnittsfläche bedeutet. Damit wird die Schwingungsdauer der $(n-1)$ ten Oberschwingung

$$T_{0n} = \frac{2\pi}{p_{0n}} = \frac{2l^2}{n^2 \pi \cdot v \cdot i}.$$

Das Verhältnis der Schwingungsdauer der Quer- und Längsschwingungen für den Grundton ($n = 1$) bei dem beiderseits gelenkig und am einen Ende längsverschieblich gelagerten Stab ergibt sich also zu:

$$\frac{2l^2}{\pi v i} \frac{v}{4l} = \frac{1}{2\pi} \frac{l}{i}.$$

Für Schlankheiten $\frac{l}{i} > 2\pi$ haben also die Querschwingungen eine kleinere Frequenz als die Längsschwingungen.

3. Querschwingungen infolge einer konstanten Stoßkraft.

Wir wollen im folgenden den Fall untersuchen, in welchem ein beiderseits gelenkig gelagerter Stab durch eine während der Stoßdauer τ konstante Stoßkraft X beansprucht wird. Wir idealisieren den Fall dadurch, daß wir die Längsschwingung vernachlässigen, d. h. annehmen, daß die Längskraft während der Stoßdauer an jeder Stelle des Stabes dieselbe ist. Mit Vernachlässigung der rotatorischen Trägheit ist nach (5b) die zu lösende partielle Differentialgleichung des Problems:

$$EJ \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - X \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \varrho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - X \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (8)$$

Die Abweichungen der Stabachse gegenüber der Geraden, d. h. die ursprüngliche Stabform entwickeln wir nach den Ortsfunktionen $\sin \lambda_n x$ der Lösung (7a) in eine Fourier-Reihe:

$$\eta = \sum_n \varepsilon_n \sin \lambda_n x = \varepsilon_1 \sin \lambda x + \varepsilon_2 \sin 2\lambda x + \dots + \varepsilon_n \sin n\lambda x + \dots \quad (9)$$

wo $\lambda = \frac{\pi}{l}$ der erste Eigenwert der freien Querschwingung (vgl. Abschnitt IV 2) und $\varepsilon_n = \text{const.}$ ist. Die Lösung von (8) hat die Form:

$$\eta = \sum_n \eta_{tn} \eta_{xn} = \eta_{t1} \sin \lambda_1 x + \eta_{t2} \sin \lambda_2 x + \dots + \eta_{tn} \sin \lambda_n x + \dots$$

$$= \eta_{t1} \sin \lambda x + \eta_{t2} \sin 2\lambda x + \dots + \eta_{tn} \sin n\lambda x + \dots,$$

wo $\eta_t = f(t)$

$\eta_x = \varphi(x)$ ist.

Wir führen diese Werte von η und η in (8) ein und erhalten:

$$EJ \lambda^4 \sum_n n^4 \cdot \eta_{tn} \cdot \sin n\lambda x + X \lambda^2 \sum_n n^2 \cdot \eta_{tn} \sin n\lambda x + \varrho F \sum_n \frac{d^2 \eta_{tn}}{dt^2} \sin n\lambda x + X \lambda^2 \sum_n n^2 \varepsilon_n \cdot \sin n\lambda x = 0.$$

Für die Grundschwingung gilt also die Gleichung:

$$EJ \lambda^4 \eta_{t1} + X \lambda^2 \eta_{t1} + \varrho F \frac{d^2 \eta_{t1}}{dt^2} + X \lambda^2 \varepsilon_1 = 0 \quad (10)$$

und für die $(n-1)$ te Oberschwingung:

$$n^4 EJ \lambda^4 \cdot \eta_{tn} + n^2 X \lambda^2 \eta_{tn} + \varrho F \frac{d^2 \eta_{tn}}{dt^2} + n^2 X \lambda^2 \varepsilon_n = 0, \quad (11)$$

Die eben aufgestellten Gleichungen gelten während des eigentlichen Stoßvorganges. Nach dem Stoß führt der Stab freie Schwingungen aus, deren Anfangsbedingungen durch die Durchbiegung und Geschwindigkeit am Ende des Stoßes gegeben sind.

a) Die Grundschwingung.

Bei statischer Belastung gilt bekanntlich für den beiderseits gelenkig gelagerten Stab die Eulersche Knicklast (vgl. hierzu auch Abschn. V):

$$P_E = EJ \frac{\pi^2}{l^2} = EJ \lambda^2. \quad (12)$$

Wir wollen das Verhältnis der Stoßkraft zur Eulerlast mit a bezeichnen, d. h. es sei

$$a = \frac{X}{P_E}, \quad (13)$$

damit wird $X = a EJ \lambda^2$ und (10) geht in

$$\varrho F \frac{d^2 \eta_t}{dt^2} + EJ \lambda^4 (1 - a) \eta_t = a \varepsilon EJ \lambda^4 \quad (14)$$

über, wobei der Index 1 einfachheitshalber weggelassen wurde.

Bei Lösung dieser Gleichung müssen drei Fälle unterschieden werden:

1. $X > -P_E$ d. h. $a < 1$
2. $X = -P_E$ „ „ $a = 1$
3. $X < -P_E$ „ „ $a > 1$.

$\alpha)$ Die Stoßkraft ist kleiner als die Euler-Last³⁾ ($a < 1$).

Wir gehen in (14) mit dem Ansatz

$$\eta_t = \bar{\eta}_t + \tilde{\eta}_t$$

ein, wo $\bar{\eta}_t$ die Lösung der homogenen Gleichung und $\tilde{\eta}_t$ den Einfluß der Störungsfunktion bedeutet. Die homogene Gleichung

$$e F \frac{d^2 \bar{\eta}_t}{dt^2} + EJ \lambda^4 (1-a) \bar{\eta}_t = 0$$

hat wegen $\frac{EJ}{eF} \lambda^4 (1-a) > 0$ die Lösung

$$\bar{\eta}_t = k_1 \sin p t + k_2 \cos p t.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_t}{dt^2} = -p^2 \cdot \bar{\eta}_t.$$

Die Einführung dieser Werte in die homogene Gleichung ergibt die Frequenz:

$$p = \lambda^2 \sqrt{\frac{EJ}{eF} (1-a)} = p_0 \sqrt{1-a}, \quad \dots (15)$$

wo p_0 die Frequenz der freien Grundschwingung ist (vgl. Abschnitt IV 2).

Der Einfluß des auf der rechten Seite von (14) stehenden Störungsgliedes ergibt sich aus

$$EJ \lambda^4 (1-a) \tilde{\eta}_t = a e EJ \lambda^4$$

zu

$$\tilde{\eta}_t = \frac{a}{1-a} \varepsilon.$$

Es gilt also

$$\eta_t = k_1 \sin p t + k_2 \cos p t + \frac{a}{1-a} \varepsilon \quad \dots (16)$$

und hieraus

$$\dot{\eta}_t = p (k_1 \cos p t - k_2 \sin p t) \quad \dots (17)$$

Für den Stoßanfang $t = 0$ seien $\eta_t = 0$ und $\dot{\eta}_t = 0$. Aus (16) und (17) folgt dann:

$$k_2 + \frac{a}{1-a} \varepsilon = 0; \quad k_2 = -\frac{a}{1-a} \varepsilon; \quad k_1 = 0.$$

Wir haben die Lösung:

$$\eta_t = \frac{a}{1-a} \varepsilon (1 - \cos p t) \quad \dots (18)$$

und hieraus

$$\dot{\eta}_t = \frac{a}{1-a} \varepsilon p \sin p t \quad \dots (19)$$

Es sei τ die Stoßdauer. Dann gelten für das Stoßende:

$$\eta_t = \frac{a}{1-a} \varepsilon (1 - \cos p \tau) \quad \dots (20)$$

$$\dot{\eta}_t = \frac{a}{1-a} \varepsilon p \sin p \tau \quad \dots (21)$$

Für die nach dem Stoßende einsetzenden freien Schwingungen gilt die Lösung der Gleichung (6):

$$\eta = \eta_t \cdot \eta_x = C \sin (p_0 t + \varphi) \cdot \sin \lambda x, \quad \dots (22)$$

wo φ die Phasenverschiebung bedeutet. Für diesen Abschnitt der Vorgänge gelten (20) und (21) als Anfangsbedingungen. Man hat also:

$$C \sin (p_0 \tau + \varphi) = \frac{a}{1-a} \varepsilon (1 - \cos p \tau)$$

$$C p_0 \cos (p_0 \tau + \varphi) = \frac{a}{1-a} \varepsilon p \sin p \tau.$$

Die Addition der Quadrate dieser Gleichungen liefert

$$C^2 = \frac{a^2}{(1-a)^2} \varepsilon^2 \left[(1 - \cos p \tau)^2 + \frac{p^2}{p_0^2} \sin^2 p \tau \right]$$

oder mit Berücksichtigung von (15):

$$C = \frac{a}{1-a} \varepsilon \sqrt{2 - 2 \cos p \tau - a \sin^2 p \tau}.$$

Wir benutzen die Schwingungszeit der freien Schwingung $T = \frac{2\pi}{p_0}$ als Zeitmaßstab und führen die Bezeichnung ein:

$$\tau = b T = \frac{2\pi}{p_0} b.$$

Damit werden

$$p \tau = 2\pi b \sqrt{1-a}$$

und

$$C = \frac{a}{1-a} \varepsilon \sqrt{2 - 2 \cos (2\pi b \sqrt{1-a}) - a \sin^2 (2\pi b \sqrt{1-a})}.$$

Uns interessiert das größte auftretende Biegemoment. Dieses ist mit der größten Krümmung proportional.

Die Krümmung kann mit $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ gleichgesetzt werden. Aus (22) erhält man

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -C \lambda^2 \sin (p_0 t + \varphi) \sin \lambda x.$$

Der Größtwert der Krümmung tritt in der Stabmitte ($x = \frac{l}{2}$) auf und beträgt:

$$\max \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = C \lambda^2 = C \frac{\pi^2}{l^2} = \varepsilon \frac{\pi^2}{l^2} f(a, b),$$

wo

$$f(a, b) =$$

$$= \frac{a}{1-a} \sqrt{2 - 2 \cos (2\pi b \sqrt{1-a}) - a \sin^2 (2\pi b \sqrt{1-a})}. \quad (23)$$

Dieser Wert ist maßgebend für das größte Moment nach der eigentlichen Stoßperiode. Es kann aber vorkommen, daß während der eigentlichen Stoßperiode ein noch größeres Moment auftritt. Dies ist der Fall, wenn der Stoß mindestens so lange dauert, bis der größtmögliche Ausschlag das erste Mal erreicht wird. Aus (18) folgt, daß der größtmögliche Ausschlag während des Stoßes das erste Mal für $\cos p t = -1$ erreicht wird. Ist also

$$\tau \geq \frac{\pi}{p} = \frac{\pi}{p_0 \sqrt{1-a}}$$

oder

$$b \geq \frac{\pi}{p T \sqrt{1-a}} = \frac{1}{2 \sqrt{1-a}},$$

dann wird das größte Moment bereits während des Stoßes erreicht. Während des Stoßes galt nun (vgl. 18):

$$\eta = \frac{a}{1-a} \varepsilon (1 - \cos p t) \sin \lambda x,$$

daher ist der mit dem größten Moment annähernd proportionale Wert

$$\max \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 2 \frac{a}{1-a} \varepsilon \lambda^2 = \varepsilon \frac{\pi^2}{l^2} f(a, b),$$

wo

$$f(a, b) = 2 \frac{a}{1-a} \quad \dots (24)$$

ist.

Zusammengefaßt: für Stoßdauern $b < \frac{1}{2 \sqrt{1-a}}$ gilt (23),

für Stoßdauern $b \geq \frac{1}{2 \sqrt{1-a}}$ gilt (24) als die für das größte

Moment maßgebende Größe. Für $b = \frac{1}{2 \sqrt{1-a}}$ geht (23) in

(24) stetig über. (24) stellt einen absoluten Höchstwert von $f(a, b)$ dar, der bei keiner Stoßdauer überschritten werden kann.

³⁾ Hierzu gehören auch alle Fälle mit negativem a , d. h. die Fälle der stoßartigen Zugbeanspruchungen!

β) Die Stoßkraft ist gleich der Euler-Last ($a = 1$).

In diesem Falle vereinfacht sich (14) zu:

$$\frac{d^2 \eta_t}{dt^2} = \frac{EJ}{\varrho F} \lambda^4 \varepsilon.$$

Nach zweimaliger Integration hat man:

$$\eta_t = \frac{EJ}{2\varrho F} \lambda^4 \varepsilon t^2 + k_1 t + k_2.$$

Die Anfangsbedingungen

$$\eta_t = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\eta}_t = 0 \quad \text{für} \quad t = 0$$

ergeben: $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$. Es gilt also

$$\eta_t = \frac{EJ}{2\varrho F} \lambda^4 \varepsilon t^2, \quad \dots \quad (25)$$

woraus für das Stoßende

$$\eta_t = \frac{EJ}{2\varrho F} \lambda^4 \varepsilon \tau^2, \quad \dots \quad (26)$$

und

$$\dot{\eta}_t = \frac{EJ}{\varrho F} \lambda^4 \varepsilon \tau, \quad \dots \quad (27)$$

sich ergeben. Für den Abschnitt nach dem eigentlichen Stoßvorgang gilt wieder Gleichung (22) und als Anfangsbedingungen für diesen Stoßabschnitt gelten (26) und (27). Man hat also

$$C \sin(p_0 \tau + \varphi) = \frac{EJ}{2\varrho F} \lambda^4 \varepsilon \tau^2$$

$$C p_0 \cos(p_0 \tau + \varphi) = \frac{EJ}{\varrho F} \lambda^4 \varepsilon \tau,$$

daher

$$C = \frac{EJ}{\varrho F} \lambda^4 \varepsilon \tau \sqrt{\frac{\tau^2}{4} + \frac{1}{p_0^2}},$$

oder wenn wir wieder die Beziehungen

$$\tau = \frac{2\pi}{p_0} b \quad \text{und} \quad \frac{EJ}{\varrho F} \lambda^4 = p_0^2$$

berücksichtigen:

$$C = 2\pi b \varepsilon \sqrt{\pi^2 b^2 + 1}.$$

Aus (22) erhält man wieder

$$\max \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = C \lambda^2 = \varepsilon \frac{\pi^2}{b^2} f(a, b),$$

wo

$$f(a, b) = 2\pi b \sqrt{\pi^2 b^2 + 1}. \quad \dots \quad (28)$$

Da die während des Stoßes geltende Gleichung (25) — im Gegensatz zu dem Falle $a < 1$ — hier aperiodisch ist, kann während des Stoßes kein größerer Ausschlag als am Stoßende auftreten. Das Stoßende ist aber als Anfang der freien Schwingung durch (28) erfaßt.

γ) Die Stoßkraft ist größer als die Euler-Last ($a > 1$).

In diesem Falle ist

$$\frac{EJ}{\varrho F} \lambda^4 (1 - a) < 0$$

und die der Gleichung (14) entsprechende homogene Gleichung hat die Lösung

$$\bar{\eta}_t = k_1 \operatorname{sh} p t + k_2 \operatorname{ch} p t.$$

Hieraus ist

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_t}{dt^2} = p^2 \cdot \bar{\eta}_t.$$

Die Einführung dieser Werte in die homogene Gleichung ergibt

$$p^2 = \frac{EJ}{\varrho F} \lambda^4 (a - 1) = p_0^2 (a - 1), \quad \dots \quad (29)$$

wo p_0 wieder die Frequenz der freien Grundschiwingung bedeutet.

Das partikuläre Integral $\bar{\eta}_t$ bestimmt sich aus

$$EJ \lambda^4 (1 - a) \bar{\eta}_t = a \varepsilon EJ \lambda^4$$

zu

$$\bar{\eta}_t = -\frac{a}{a - 1} \varepsilon.$$

Es gelten also

$$\eta_t = k_1 \operatorname{sh} p t + k_2 \operatorname{ch} p t - \frac{a}{a - 1} \varepsilon \quad \dots \quad (30)$$

$$\dot{\eta}_t = p (k_1 \operatorname{ch} p t + k_2 \operatorname{sh} p t). \quad \dots \quad (31)$$

Für $t = 0$ seien wieder $\eta_t = 0$ und $\dot{\eta}_t = 0$. Aus (30) und (31) folgen dann

$$k_2 = \frac{a}{a - 1} \varepsilon \quad \text{und} \quad k_1 = 0.$$

Es gelten also

$$\eta_t = \frac{a}{a - 1} \varepsilon (\operatorname{ch} p t - 1) \quad \dots \quad (32)$$

$$\dot{\eta}_t = \frac{a}{a - 1} \varepsilon p \operatorname{sh} p t.$$

Für das Stoßende $t = \tau$ gelten:

$$\eta_t = \frac{a}{a - 1} \varepsilon (\operatorname{ch} p \tau - 1) \quad \dots \quad (33)$$

$$\dot{\eta}_t = \frac{a}{a - 1} \varepsilon p \operatorname{sh} p \tau. \quad \dots \quad (34)$$

Für die freien Schwingungen nach dem Stoß gilt wieder (22) mit den Anfangsbedingungen (33) und (34). Man hat also

$$C \sin(p_0 \tau + \varphi) = \frac{a}{a - 1} \varepsilon (\operatorname{ch} p \tau - 1)$$

$$C p_0 \cos(p_0 \tau + \varphi) = \frac{a}{a - 1} \varepsilon p \operatorname{sh} p \tau$$

und hieraus mit Berücksichtigung von (29)

$$C = \frac{a}{a - 1} \varepsilon \sqrt{2 - 2 \operatorname{ch} p \tau + a \operatorname{sh}^2 p \tau},$$

oder wegen

$$p \tau = 2\pi b \frac{p}{p_0} = 2\pi b \sqrt{a - 1}$$

$$C = \frac{a}{a - 1} \varepsilon \sqrt{2 - 2 \operatorname{ch}(2\pi b \sqrt{a - 1}) + a \operatorname{sh}^2(2\pi b \sqrt{a - 1})}.$$

Aus (22) ergibt sich wieder die größte Krümmung:

$$\max \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = C \lambda^2 = \varepsilon \frac{\pi^2}{b^2} f(a, b),$$

wo

$$f(a, b) = \frac{a}{a - 1} \sqrt{2 - 2 \operatorname{ch}(2\pi b \sqrt{a - 1}) + a \operatorname{sh}^2(2\pi b \sqrt{a - 1})} \quad \dots \quad (35)$$

ist. Da die während des Stoßes geltende Gleichung (32) für η_t aperiodisch ist und mit wachsendem t wächst, kann während des Stoßes kein größerer Ausschlag auftreten als der größte nach dem Stoße erreichte Ausschlag. Dieser aber ist durch (35) erfaßt.

b) Die $(n-1)$ te Oberschwingung.

Mit der Substitution

$$X = -a EJ \lambda^2$$

geht (11) in

$$\varrho F \frac{d^2 \eta_{tn}}{dt^2} + n^2 EJ \lambda^4 (n^2 - a) \eta_{tn} = n^2 a EJ \lambda^4 \varepsilon_n. \quad (36)$$

über.

Wir unterscheiden wieder drei Fälle:

1. $a < n^2$,
2. $a = n^2$,
3. $a > n^2$.

Von diesen drei Fällen ist jedoch nur der erste von praktischem Interesse: selbst bei der ersten Oberschwingung ($n = 2$) beziehen sich die Fälle 2. und 3. auf Stoßkräfte, die mindestens $2^2 = 4$ mal so groß sind wie die Euler-Last. Wir können auf die Untersuchung so großer Überschreitungen der Euler-Last verzichten und uns daher auf die Untersuchung des Falles $a < n^2$ beschränken.

Die Lösung der Gleichung (36) für $a < n^2$ erfolgt analog der Lösung der Gleichung (14) für $a < 1$. Die Lösung der homogenen Gleichung sei wieder

$$\eta_{tn} = k_1 \sin p_n t + k_2 \cos p_n t,$$

woraus

$$\frac{d^2 \eta_{tn}}{dt^2} = -p_n^2 \eta_{tn}$$

folgt. Die Einführung dieser Werte in die homogene Gleichung ergibt die Frequenz:

$$p_n = n \lambda^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F} \sqrt{n^2 - a}} = n p_{01} \sqrt{n^2 - a}, \quad (37)$$

wo p_{01} die Frequenz der freien Grundschwingung bedeutet (vgl. Abschnitt IV 2).

Den Einfluß der Störungsfunktion erhält man aus

$$n^2 EJ \lambda^4 (n^2 - a) \ddot{\eta}_{tn} = n^2 a EJ \lambda^4 \varepsilon_n$$

zu

$$\ddot{\eta}_{tn} = \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon_n,$$

daher die Lösung von (8a) zu

$$\eta_{tn} = k_1 \sin p_n t + k_2 \cos p_n t + \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon_n.$$

k_1 und k_2 bestimmt man wieder aus den Anfangsbedingungen: $\eta_{tn} = 0$ und $\dot{\eta}_{tn} = 0$ für $t = 0$. Man gelangt zu

$$\eta_{tn} = \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon_n (1 - \cos p_n t) \quad (38)$$

$$\dot{\eta}_{tn} = \frac{a}{n^2 - a} p_n \varepsilon_n \sin p_n t = \frac{n a}{\sqrt{n^2 - a}} p_{01} \varepsilon_n \sin p_n t.$$

Für das Stoßende $t = \tau$ gelten also

$$\eta_{tn} = \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon_n (1 - \cos p_n \tau) \quad (39)$$

$$\dot{\eta}_{tn} = \frac{n a}{\sqrt{n^2 - a}} p_{01} \varepsilon_n \sin p_n \tau \quad (40)$$

Nach dem Stoß führt der Stab die $(n-1)$ te freie Oberschwingung aus. Für diese gilt

$$\eta_n = C_n \sin (n^2 p_{01} t + \varphi_n) \sin n \lambda x \quad (41)$$

Zur Bestimmung von C und φ gelten (39) und (40) als Anfangsbedingungen:

$$C_n \sin (n^2 p_{01} \tau + \varphi_n) = \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon_n (1 - \cos p_n \tau)$$

$$C_n n^2 p_{01} \cos (n^2 p_{01} \tau + \varphi_n) = \frac{n a}{\sqrt{n^2 - a}} p_{01} \varepsilon_n \sin p_n \tau.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich C zu

$$C_n = \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon_n \sqrt{2 - 2 \cos p_n \tau - \frac{a}{n^2} \sin^2 p_n \tau}.$$

$$\text{Mit } \tau = \frac{2\pi}{p_{01}} b \text{ hat man wegen (37)}$$

$$p_n \tau = 2 n \pi b \sqrt{n^2 - a}.$$

Es gilt also

$$C_n =$$

$$= \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon_n \sqrt{2 - 2 \cos (2 n \pi b \sqrt{n^2 - a}) - \frac{a}{n^2} \sin^2 (2 n \pi b \sqrt{n^2 - a})}.$$

Aus (41) ergibt sich die Krümmung zu

$$\frac{\partial^2 \eta_n}{\partial x^2} = -C_n n^2 \lambda^2 \sin (n^2 p_{01} t + \varphi_n) \sin n \lambda x,$$

folglich die größte Krümmung zu

$$\max \frac{\partial^2 \eta_n}{\partial x^2} = C_n n^2 \lambda^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \varepsilon_n f(n, a, b),$$

wo

$$f(n, a, b) =$$

$$= \frac{n^2 a}{n^2 - a} \sqrt{2 - 2 \cos (2 n \pi b \sqrt{n^2 - a}) - \frac{a}{n^2} \sin^2 (2 n \pi b \sqrt{n^2 - a})} \quad (42)$$

ist.

(42) ist für das größte Moment nur dann maßgebend, wenn dieses erst nach dem Stoße auftritt. Dauert der eigentliche Stoßvorgang mindestens so lange, bis der größtmögliche Aus Schlag das erstmal erreicht wird, so tritt das größte Moment

bereits während des eigentlichen Stoßvorganges auf. Nach (38) ist dies der Fall, wenn $\cos p_n \tau = -1$ ist, d. h., wenn die Stoßdauer

$$\tau \geq \frac{\pi}{p_n} = \frac{\pi}{n p_{01} \sqrt{n^2 - a}}$$

oder

$$b \geq \frac{1}{2 n \sqrt{n^2 - a}} \text{ ist.}$$

In diesem Falle hat man aus

$$\eta_n = \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon (1 - \cos p_n t) \sin n \lambda x$$

die Krümmung

$$\frac{\partial^2 \eta_n}{\partial x^2} = \frac{a}{n^2 - a} \varepsilon n^2 \lambda^2 (1 - \cos p_n t) \sin n \lambda x,$$

daher die größte Krümmung

$$\max \frac{\partial^2 \eta_n}{\partial x^2} = \frac{2 a}{n^2 - a} \varepsilon n^2 \lambda^2 = \varepsilon_n \frac{\pi^2}{l^2} f(n, a, b),$$

wo

$$f(n, a, b) = \frac{2 a n^2}{n^2 - a} \quad (43)$$

ist.

Zusammengefaßt: Für Stoßdauern

$$b < \frac{1}{2 n \sqrt{n^2 - a}}$$

gilt (42), für Stoßdauern

$$b \geq \frac{1}{2 n \sqrt{n^2 - a}}$$

gilt (43) als die für das größte Moment maßgebende Größe.

Für $b = \frac{1}{2 n \sqrt{n^2 - a}}$ geht (42) in (43) über. Der letztere

Ausdruck stellt den Höchstwert von $f(n, a, b)$ dar, der bei keiner Stoßdauer überschritten wird.

V. Zahlenmäßige Auswertung und Folgerungen.

Das Verhalten des Stabes bei stoßartiger Belastung kann am besten durch einen Vergleich mit seinem Verhalten bei statischer Belastung beurteilt werden.

Die Differentialgleichung des statischen Falles lautet:

$$EJ \frac{d^2 \eta}{dx^2} - X \eta = X \eta, \quad (44)$$

wobei η wieder durch (9) gegeben ist. Berücksichtigt man nur das erste Glied von (9), dann ergibt sich die Lösung zu

$$\eta = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$$

oder wegen $\eta = 0$ für $x = 0$

$$\eta = C_1 \sin \lambda x \quad (45)$$

Die Einführung von (45) in (44) liefert $\lambda = \frac{\pi}{l}$ und

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1}{\frac{EJ \pi^2}{X l^2} - 1},$$

folglich

$$\eta = \frac{\varepsilon_1 \sin \lambda x}{\frac{EJ \pi^2}{X l^2} - 1} \quad (46)$$

Für

$$-X = P_E = EJ \frac{\pi^2}{l^2},$$

d. h. für die Euler-Last wird $\eta = \infty$. Damit und mit Berücksichtigung von (13) wird

$$\eta = \frac{a}{1 - a} \varepsilon_1 \sin \lambda x$$

und hieraus

$$\max \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \frac{\pi^2}{l^2} \varepsilon_1 \cdot f(a) \quad (47)$$

wo $f(a) = \frac{a}{1 - a}$ ist.

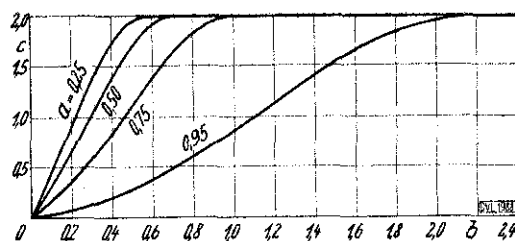


Abb. 3. Verhältnis c der größten Momente im dynamischen und statischen Fall in Abhängigkeit vom Verhältnis b der Stoßdauer zur Dauer der freien Querschwingung für verschiedene Verhältnisse a der Längskraft zur Euler-Last.

Das Verhältnis c der Momente infolge stoßartiger und statischer Belastung beträgt also im Fall $a < 1$ für Stoßdauern

$$b \leq \frac{1}{2\sqrt{1-a}}$$

aus (23) und (47)

$$c = \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi b \sqrt{1-a})} - a \sin^2(2\pi b \sqrt{1-a}) \quad (48)$$

und für Stoßdauern

$$b \geq \frac{1}{2\sqrt{1-a}}$$

aus (24) und (47)

$$c = 2 \quad (49)$$

Man sieht zunächst, daß die Ausdrücke für c von der Größe der Exzentrizität ϵ unabhängig sind.

Die Werte von c sind für verschiedene Werte von a und b errechnet worden. Das Ergebnis ist in Abb. 3 aufgetragen.

Es zeigt sich, daß das Verhältnis c der dynamischen zur statischen Beanspruchung bei kleinen Stoßdauern b kleiner, bei größeren Stoßdauern größer ist als 1 und daß sein Größtwert 2 ist. Ferner geht aus Abb. 3 hervor, daß das Verhältnis c bei gleichen Stoßdauern um so kleiner ist, je größer die Stoßkraft.

Trägt man, wie in Abb. 4, diejenige Stoßdauer b in Abhängigkeit von der Stoßkraft a auf, für die die dynamische und statische Beanspruchung gleich groß ist, so zeigt es sich, daß in der Nähe der Euler-Last verhältnismäßig große Stoßdauern b notwendig sind, um die dynamische Beanspruchung so hoch zu steigern wie die statische Beanspruchung ist. Bei einer Stoßdauer entsprechend der rd. 0,97fachen Euler-Last ist diese Stoßdauer so groß wie die Eigenschwingungszeit des freien Stabes.

Ist die Stabform derart, daß gerade nur die $(n-1)$ te Oberschwingung entsteht, dann erhält man in sinnvoller Weise wie für den Fall, in dem nur die Grundschwingung entsteht, die n te Stabilitätsgrenze zu

$$-X = EJ \frac{n^2 \pi}{l^2}$$

und die für das größte Moment maßgebende Funktion zu

$$f(a, n) = \frac{n^2 a}{n^2 - a} \quad (50)$$

Der Vergleich mit (42) bzw. (43) liefert für

$$b \leq \frac{1}{2n\sqrt{n^2 - a}}$$

$$c = \sqrt{2 - 2 \cos(2n\pi b \sqrt{n^2 - a})} - \frac{a}{n^2} \sin^2(2n\pi b \sqrt{n^2 - a}) \quad (51)$$

und für

$$b \geq \frac{1}{2n\sqrt{n^2 - a}}$$

$$c = 2.$$

Der Gültigkeitsbereich von (51) beschränkt sich auf sehr kleine Stoßdauern. Selbst für $n = 2$ und $a = 1$ beträgt die obere Grenze von b nur 0,144. Da bei sehr kleinen Stoßdauern die Voraussetzungen der Rechnungen sowieso kaum

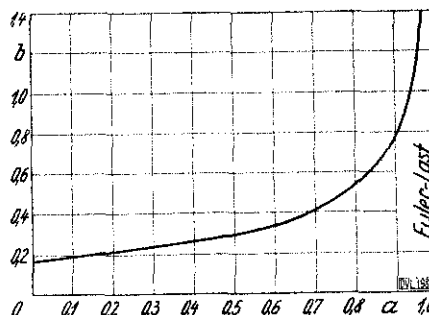


Abb. 4. „Stoßdauer“ b für verschiedene „Stoßkräfte“ a , für welche die größte dynamische und statische Beanspruchung gleich groß, d. h. $c = 1$ ist.

erfüllt sind⁴⁾, kann daher auf die Auswertung von (51) verzichtet werden, umso mehr, da der Fall, in dem die Stabform derart ist, daß gerade nur die $(n-1)$ te Oberschwingung entsteht, praktisch ohne Bedeutung ist.

Bedeutungsvoller wäre dagegen der Fall, in welchem die Stabform derart ist, daß gleichzeitig mehrere Schwingungen entstehen. Dieser Fall läßt sich aber naturgemäß nicht allgemein behandeln, da die Ergebnisse von der relativen Größe und von dem Vorzeichen der Werte ϵ_n in Gleichung (9) wesentlich beeinflusst werden.

Die Lösung der Gleichung (44) kann nur in den Fällen zur Bewertung der Ergebnisse der dynamischen Untersuchung herangezogen werden, in welchem die Kraft unterhalb der Stabilitätsgrenze liegt, d. h. für $n = 1$ im Gebiet $a < 1$, für $n = 2$ im Gebiet $a < 4$ usw. Für Kräfte oberhalb der Stabilitätsgrenze müßte man statt (44) die genauere Gleichung der elastischen Linie berücksichtigen, deren Lösung bekanntlich recht unbequem ist. Wir beschränken uns daher auf die Gegenüberstellung der Ergebnisse für $n = 1$ im Gebiet $a < 1$ mit denen im Gebiet $a = 1$ bzw. $a > 1$. Dies geschieht in Abb. 5, in der die mit den größten Momenten proportionalen Funktionen $f(a, b)$ aus (23), (24), (28) und (35) für verschiedene Werte von a in Abhängigkeit von b aufgetragen sind, und zwar der besseren Übersicht halber beide in logarithmischen Maßstab.

Aus Abb. 5 ersieht man, daß bei stoßartiger Knickbeanspruchung die Euler-Last überschritten werden darf, wenn nur die Stoßdauer kurz genug ist.

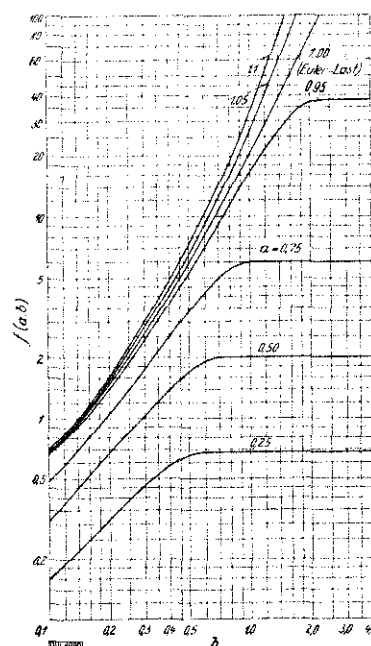


Abb. 5. Abhängigkeit der mit den größten Momenten proportionalen Größe $f(a, b)$ von der „Stoßdauer“ b für verschiedene „Stoßkräfte“ a . Abszisse und Ordinate im logarithmischen Maßstab.

⁴⁾ Vgl. hierzu Taub: Stoßartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich. Abschn. III.

Es zeigt sich ferner, daß die größten dynamischen Beanspruchungen mit wachsender Stoßkraft a und wachsender Stoßdauer b wachsen. Während sie aber bei Stoßkräften unterhalb der Euler-Last ($a < 1$) bei einer bestimmten Stoßdauer einen Grenzwert erreichen, der bei keiner Stoßdauer überschritten werden kann, wachsen sie bei oberhalb der Euler-Last liegenden Stoßkräften unbegrenzt weiter.

VI. Abhängigkeit der Beanspruchung vom Stoßantrieb $\int P dt$.

Vielfach wird angenommen, daß die Beanspruchung infolge einer stoßartig wirkenden Kraft P nur vom Stoßantrieb $\int P dt$ abhängt, d. h. von der Größe der Stoßkraft und Stoßdauer im einzelnen unabhängig ist.⁵⁾

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zeigen ohne weiteres, daß diese Annahme nicht exakt richtig sein kann, denn sonst würde in den Ausdrücken für $f(a, b)$ als einzige Veränderliche das Produkt ab auftreten. Man kann sich aber die Frage vorlegen, ob sie vielleicht näherungsweise richtig ist. Zu diesem Zweck sollen für einige Werte von $S = \int P dt = ab$ die Funktionen $f(a, b)$ in Abhängigkeit von b errechnet werden.

Für einen gegebenen Wert von $S = ab$ sind, wenn man nur die Grundschiwingung betrachtet, drei Gebiete von b zu unterscheiden:

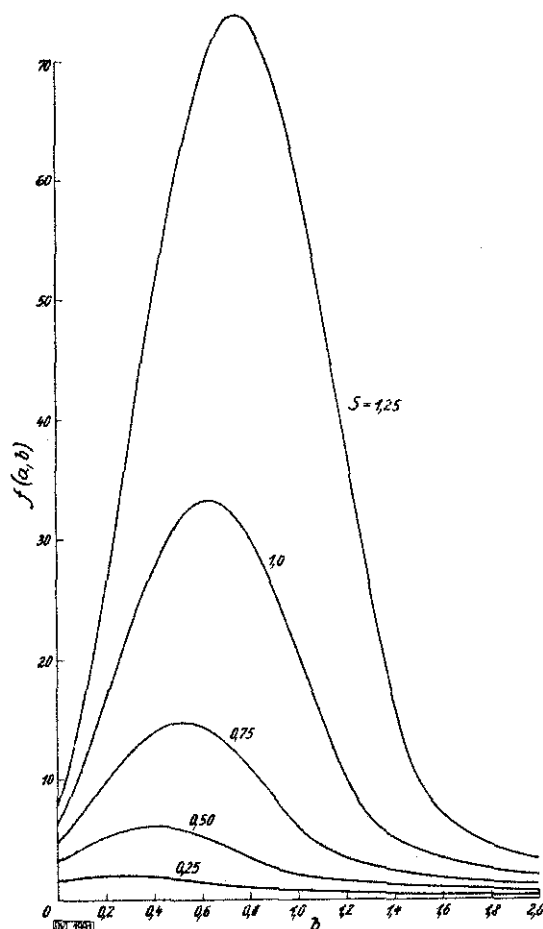


Abb. 6. Abhängigkeit der Beanspruchung $f(a, b)$ von der Stoßdauer b , für verschiedene Stoßantriebe $S = \int P dt$.

⁵⁾ Es ist allgemein üblich, das Zeitintegral $\int P dt$ als „Stoßkraft“ zu bezeichnen, während für die Größe P keine besondere Bezeichnung vorhanden ist. Diese Gepflogenheit resultiert wohl eben aus der Auffassung, daß für den Stoßvorgang nur das Zeitintegral $\int P dt$ maßgebend ist, der Größe P dagegen keine besondere Bedeutung zukommt. Die Verfasser sind auf Grund ihrer Untersuchungen zu der entgegengesetzten Auffassung gelangt und halten auch sonst für logischer die Größe P , die die Dimension einer Kraft hat als Stoßkraft und das Zeitintegral $\int P dt$ mit der Dimension Kraft mal Zeit als Stoßantrieb zu bezeichnen.

für $a > 1$ gelte das Gebiet $0 < b < b_1$;

für $a < 1$ gelte, sofern die größte Beanspruchung nach der eigentlichen Stoßperiode auftritt,
 $b_1 < b < b_2$;
 sofern sie während der eigentlichen Stoßperiode auftritt $b_2 < b$.

Die Werte b_1 und b_2 lassen sich, wie folgt, bestimmen:

für b_1 ist $a = 1$, also ist $b_1 = S$;

für b_2 gilt

$$b_2 = \frac{1}{2\sqrt{1-a}}$$

oder wegen

$$a = \frac{S}{b_2}$$

$$b_2 = \frac{1}{2} (S + \sqrt{S^2 + 1}).$$

Für $f(a, b)$ gelten:

im Gebiet $0 < b < b_1$. . . Gleichung (35),

„ „ $b_1 < b < b_2$. . . „ (23),

„ „ $b_2 < b$. . . „ (24),

für $b = b_1$. . . „ (28).

Den Wert von $f(a, b)$ für $b = 0$ erhält man, wenn man in (35) $a = S/b$ setzt und b gegen Null gehen läßt. Es gilt also:

$$\lim_{b \rightarrow 0} f(a, b) = \sqrt{\frac{S}{b}} \operatorname{sh}^2(2\pi\sqrt{Sb - b^2}) = \\ = \pi S \frac{(S - 2b) \operatorname{sh}(4\pi\sqrt{Sb - b^2})}{\sqrt{Sb - b^2}} = 2\pi S.$$

Mit Hilfe der angegebenen Formeln wurden die Funktionen $f(a, b)$ für $S = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$ und $1,25$ und für verschiedene Werte von b errechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 6 aufgetragen. Man sieht, daß die Ordinaten der einzelnen Kurven mit dem Parameter S nicht annähernd konstant sind, daß also die Beanspruchung bei stoßartiger Belastung nicht einmal annäherungsweise als Funktion des Stoßantriebes angegeben werden kann. Es müssen vielmehr Stoßkraft und Stoßdauer jeweils getrennt bekannt sein, wenn man die Stoßbeanspruchung bestimmen will.

Dieses Ergebnis ist von großer Bedeutung für die Durchführung von Stoßversuchen. Man kann bei solchen auf Messung der Stoßkraft und Stoßdauer nicht verzichten, obgleich dies schwieriger sein dürfte als die Messung des Stoßantriebes.

VII. Zusammenfassung.

Nach Ableitung der an und für sich bereits bekannten Differentialgleichungen des Problems und deren Lösung bei fehlender Längskraft werden die Querschwingungen eines ursprünglich nicht ganz geraden, durch eine konstante Längskraft (Stoßkraft) beanspruchten beiderseits gelenkig gelagerten Stabes untersucht. Zu diesem Zweck wird der Verlauf der Stabform in eine Sinusreihe entwickelt, sodann die Untersuchung für die Grundschiwingung und die $(n-1)$ te Oberschiwingung getrennt durchgeführt.

Bei der Untersuchung der Grundschiwingung unterscheidet man drei Fälle, je nachdem die Stoßkraft kleiner oder größer als die Euler-Last ist, oder schließlich mit der Euler-Last gleich ist.

Bei der Untersuchung der $(n-1)$ ten Oberschiwingung unterscheidet man ebenfalls drei Fälle, je nachdem die Stoßkraft kleiner oder größer als die $(n-1)$ te Stabilitätsgrenze des Stabes ist oder schließlich mit der $(n-1)$ ten Stabilitätsgrenze gleich ist. Von diesen drei Fällen ist jedoch bei Oberschiwingungen nur der erste von praktischer Bedeutung.

Bei dem bei stoßartiger Knickbeanspruchung sich abspielenden Vorgang müssen zwei Abschnitte untersucht werden: der Abschnitt während des eigentlichen Stoßvorganges und der Abschnitt der freien Schwingungen, die nach dem eigentlichen Stoßvorgang auftreten.

Die Untersuchung führt zu Funktionen, die mit den zeitlich und räumlich größten Beanspruchungen infolge der stoßartigen Knickbeanspruchungen proportional sind. Diese Funktionen werden in dem Fall, in welchem die Stoßkraft kleiner als die Euler-Last ist, mit den räumlich größten Beanspruchungen bei statischer Belastung verglichen. Es zeigt sich, daß die ersteren bei kleinen Stoßdauern kleiner, bei größeren größer, und zwar im Höchstfall doppelt so groß sind wie die letzteren.

In dem ganzen Gebiet der Stoßkräfte werden ferner die für die größten Beanspruchungen maßgebenden Funktionen untereinander verglichen. Es zeigt sich, daß bei stoßartigen Knickbeanspruchungen die Euler-Last ohne Gefahr überschritten werden darf, wenn die Stoßdauer kurz genug ist, ferner, daß, während die Beanspruchungen bei Stoßkräften oberhalb der Euler-Last mit wachsender Stoßdauer uneingeschränkt wachsen, sie bei Stoßkräften unterhalb der Euler-Last eine obere Grenze erreichen, die bei keiner Stoßdauer überschritten wird.

Die Arbeit schließt mit einer Untersuchung über die Abhängigkeit der stoßartigen Knickbeanspruchung vom Stoßantrieb $\int P dt$. Es geht aus ihr hervor, daß die Beanspruchung bei gleichem Stoßantrieb — im Gegensatz zur vielfach verbreiteten Ansicht — sehr wesentlich von der Stoßdauer abhängt. Zur Ermittlung der Beanspruchung genügt es also nicht, das Zeitintegral $\int P dt$ zu kennen, sondern es müssen sowohl die Stoßkraft als auch die Stoßdauer bekannt sein — eine Feststellung, die in versuchstechnischer Beziehung von wesentlicher Bedeutung ist.

Anhang.

Einfluß einer kleinen Abänderung der ursprünglichen Stabform auf die Ergebnisse.

Bei der zahlenmäßigen Auswertung der Ergebnisse vorliegender Arbeit wurde die ursprüngliche Stabform so gewählt, daß infolge der Stoßkraft gerade die Grundschwingung entstehen soll. Wir wollen nun in einem Zahlenbeispiel untersuchen, welchen Einfluß eine kleine Abänderung der ursprünglichen Stabform auf die Ergebnisse ausüben kann. Im Interesse der Vereinfachung der Rechnung beschränken wir uns auf das Gebiet $a < 1$, also auf das Gebiet, in welchem sich das Verhältnis c der dynamischen und statischen Beanspruchung ohne größere Schwierigkeiten bilden läßt.

Wir nehmen an, daß die Stabform derart ist, daß außer der Grundschwingung auch noch die zweite Oberschwingung auftritt. Gleichung (9) lautet dann:

$$y = \varepsilon_1 \sin \frac{\pi}{l} x + \varepsilon_3 \sin 3 \frac{\pi}{l} x,$$

wobei $\frac{\pi}{l} = \lambda$ ist.

Wir nehmen Stoßdauern

$$b \geq \frac{1}{2 \sqrt{1-a}}$$

an. Für diese gilt die Bedingung

$$b \geq \frac{1}{2 n \sqrt{n^2 - a}} = \frac{1}{6 \sqrt{9 - a}}$$

erst recht. Nach den Abschnitten IV 3a α und IV 3b treten also die größten Durchbiegungen bereits während des Stoßes auf. Für die Krümmung der elastischen Linie gilt also der Ausdruck:

$$\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right| = \left| a \lambda^2 \left[\frac{\varepsilon_1}{1-a} (1 - \cos p t) \sin \lambda x + \frac{9 \varepsilon_3}{9-a} (1 - \cos p_3 t) \sin 3 \lambda x \right] \right| \quad \dots (52)$$

Die Stellen der räumlichen Höchst- bzw. Kleinstwerte dieser Funktion ergeben sich als Lösungen der Gleichung:

$$\left| \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right| = \left| a \lambda^3 \left[\frac{\varepsilon_1}{1-a} (1 - \cos p t) \cos \lambda x + \frac{27 \varepsilon_3}{9-a} (1 - \cos p_3 t) \cos 3 \lambda x \right] \right| = 0. \quad (53)$$

Mit

$$\cos 3 \lambda x = 4 \cos^3 \lambda x - 3 \cos \lambda x$$

zerfällt (53) in

$$\cos \lambda x = 0 \quad \dots (54a)$$

und

$$\frac{\varepsilon_1}{1-a} (1 - \cos p t) + \frac{27 \varepsilon_3}{9-a} (1 - \cos p_3 t) (4 \cos^2 \lambda x - 3) = 0. \quad \dots (54b)$$

Wir betrachten zunächst nur den von (54a) bestimmten, also den in $x = \frac{l}{2}$ auftretenden Höchstwert. Hierfür ergibt sich aus (52):

$$\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right| = \left| a \lambda^2 \left[\frac{\varepsilon_1}{1-a} (1 - \cos p t) - \frac{9 \varepsilon_3}{9-a} (1 - \cos p_3 t) \right] \right|. \quad \dots (55)$$

Sofern $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_1$, folglich auch $\left| \frac{9 \varepsilon_3}{9-a} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_1}{1-a} \right|$ ist, lassen sich hieraus folgende Grenzen für den Höchstwert der Krümmung ablesen:

wenn ε_1 und ε_3 gleiche Vorzeichen haben:

$$\left| 2 a \lambda^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{1-a} - \frac{9 \varepsilon_3}{9-a} \right) \right| \leq \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{\max} \leq \left| 2 a \lambda^2 \frac{\varepsilon_1}{1-a} \right|, \quad (56a)$$

wenn ε_1 und ε_3 verschiedene Vorzeichen haben:

$$\left| 2 a \lambda^2 \frac{\varepsilon_1}{1-a} \right| \leq \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{\max} \leq \left| 2 a \lambda^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{1-a} + \frac{9 \varepsilon_3}{9-a} \right) \right|. \quad (56b)$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit dem Wert der Krümmung an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ im statischen Fall

$$\left| \frac{d^2 \eta}{d x^2} \right|_{x=\frac{l}{2}} = \left| a \lambda^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{1-a} - \frac{9 \varepsilon_3}{9-a} \right) \right|,$$

so ergibt sich, daß das Verhältnis c der dynamischen und statischen Beanspruchung zwischen folgenden Grenzen liegt:

wenn ε_1 und ε_3 gleiche Vorzeichen haben:

$$2 \leq c \leq 2 \left| \frac{\varepsilon_1 (9-a)}{\varepsilon_1 (9-a) - 9 \varepsilon_3 (1-a)} \right| \quad \dots (57a)$$

wenn ε_1 und ε_3 verschiedene Vorzeichen haben:

$$2 \left| \frac{\varepsilon_1 (9-a)}{\varepsilon_1 (9-a) - 9 \varepsilon_3 (1-a)} \right| \leq c \leq 2 \quad \dots (57b)$$

Es ist nur noch die Frage zu beantworten, ob nicht an irgendeiner von $x = \frac{l}{2}$ verschiedenen Stelle eine obere

Grenze von $\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{\max}$ auftreten kann, die die von (57a) bzw. (57b) gegebenen Werte überschreitet.

Obere Grenzwerte von $\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{\max}$ können außer bei $x = \frac{l}{2}$ nur dort auftreten, wo x die Gleichung (54b) befriedigt. Es sei x_1 eine reelle Wurzel dieser Gleichung. Es gilt also

$$\cos^2 \lambda x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{108} \frac{9-a}{1-a} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \frac{1 - \cos p t}{1 - \cos p_3 t},$$

folglich

$$\begin{aligned} \sin 3 \lambda x_1 &= \sin \lambda x_1 (-1 + 4 \cos^2 \lambda x_1) = \\ &= \sin \lambda x_1 \left(2 - \frac{1}{27} \frac{9-a}{1-a} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \frac{1 - \cos p t}{1 - \cos p_3 t} \right). \end{aligned}$$

Nach (52) ergibt sich also die Krümmung an der Stelle $x = x_1$ zu:

$$\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x=x_1} = \left| a \lambda^2 \sin \lambda x_1 \left[\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_1}{1-a} (1 - \cos p t) + \frac{18 \varepsilon_3}{9-a} (1 - \cos p_3 t) \right] \right| \quad \dots (58)$$

Die oberen Grenzen von (58) sind,
wenn ε_1 und ε_3 gleiche Vorzeichen haben:

$$\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x=x_1} \leq \left| 2a\lambda^2 \sin \lambda x_1 \left(\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_1}{1-a} + \frac{18\varepsilon_3}{9-a} \right) \right| \quad (59a)$$

und wenn ε_1 und ε_3 verschiedene Vorzeichen haben,

$$\left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{x=x_1} \leq \left| \frac{4}{3} \lambda^2 \frac{a\varepsilon_1}{1-a} \sin \lambda x_1 \right| \quad (59b)$$

Aus der Forderung, daß die Krümmung an Stelle $x = x_1$ bei gleichen Vorzeichen von ε_1 und ε_3 höchstens dem durch (56a) gegebenen Höchstwert gleich sein soll, folgt:

$$\left| 2a\lambda^2 \sin \lambda x_1 \left(\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_1}{1-a} + \frac{18\varepsilon_3}{9-a} \right) \right| \leq \left| 2a\lambda^2 \frac{\varepsilon_1}{1-a} \right|.$$

Diese Bedingung ist stets erfüllt für

$$\left| \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_1}{1-a} + \frac{18\varepsilon_3}{9-a} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon_1}{1-a} \right|,$$

d. h. wegen $\frac{1-a}{9-a} \leq \frac{1}{9}$, für

$$\left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right| \leq \frac{1}{6} \quad (60)$$

Für verschiedene Vorzeichen von ε_1 und ε_3 folgt in analoger Weise aus (56b) und (59b):

$$\left| \frac{4}{3} \lambda^2 \frac{a\varepsilon_1}{1-a} \sin \lambda x_1 \right| \leq \left| 2a\lambda^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{1-a} - \frac{9\varepsilon_3}{9-a} \right) \right|.$$

Wie man sofort einsieht, ist diese Bedingung für jeden Wert von ε_3 erfüllt.

Schließlich kann es bei gleichem Vorzeichen von ε_1 und ε_3 vorkommen, daß der Größtwert von $\left| \frac{d^2 \eta}{dx^2} \right|$ im statischen

Fall an der Stelle $x = x_1$ größer ist als an der Stelle $x = \frac{l}{2}$. Dieser Fall, der — wie man es leicht nachweisen kann — für $\left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right| \geq \frac{1}{9}$ eintritt, hat lediglich eine Verkleinerung der oberen Grenze von (57a) zur Folge.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß, sofern $\left| \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right| \leq \frac{1}{6}$ ist, die Untersuchung auf die Stelle $x = \frac{l}{2}$ beschränkt werden kann.

Für den Fall, daß die ursprüngliche Stabform derart ist, daß während der Stoßdauer nur die Grundschiwingung auftritt, galt nach Gleichung (49): $c = 2$. Aus (57) ergibt sich die größtmögliche prozentuale Abweichung von diesem Wert in dem hier untersuchten Falle zu

$$\frac{9 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} (1-a)}{(9-a) - 9 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} (1-a)} 100 \leq \frac{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}}{1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}} 100.$$

Man sieht, daß die größtmögliche prozentuale Abweichung des Wertes c vom Wert $c = 2$ (Grundschiwingung) mit wachsenden Stoßkräften (a) abnimmt. Bei verschwindender Stoßkraft ist die Abweichung am größten, und zwar ist sie um ein wenig größer als die Größe $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} 100$. Je näher die Stoßkraft zur Euler-Last liegt, um so geringeren Einfluß hat der Verlauf der ursprünglichen Exzentrizitäten auf die Ergebnisse. Bei gleichen Vorzeichen von ε_1 und ε_3 können nur Überschreitungen, bei verschiedenen Vorzeichen von ε_1 und ε_3 nur Unterschreitungen des Wertes $c = 2$ auftreten.

Rapport A. 258.

Onderzoek van molen-modellen

door

ir. A. G. VON BAUMHAUER.

Bulletin A. 258: Essais de modèles de moulins à vent.

Report A. 258: Test of models of a windmill.

Bericht A. 258: Messungen an Windmühlenmodellen.

RAPPORT A. 258

van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart.

Onderzoek van molen-modellen.*Uittreksel.*

Een model van den Hollandschen windmolen werd onderzocht in zijn oorspronkelijken en in gewijzigden vorm in den windtunnel van bovengenoemden dienst. De vorm der modellen is weergegeven in Fig. 2, terwijl de spoedhoeken in Tabel 3 zijn vermeld.

Gemeten werden draaimoment en toerental van den molen en de snelheid van den windstroom, verder de temperatuur en de druk van de lucht.

Aanvankelijk werd het draaimoment gemeten met een touwrem, beter was echter de meting met de remdynamo, waarbij een stabiele gang van den molen werd verkregen ook in het gebied waar het moment met de draaisnelheid toeneemt. De uitwerking geschiedde in stuwdrückcoëfficiënten, zooals gebruikelijk in Göttingen, zie vergelijkingen 1), 2) en 3).

De uitkomsten vertoonen overeenkomst met die van anderen.

De energie-coëfficiënt c_e blijkt, door het afronden der achterzijde van de wieken, aanmerkelijk te worden verhoogd. De grootste waarde, $c_e = 0,36$, is niet veel kleiner dan de beste aan moderne molens gevonden waarde.

In hoeverre de opstelling en de betrekkelijk kleine schaalwaarde belangrijke afwijkingen van de ware grootte veroorzaken, kan niet worden beoordeeld.

BULLETIN A. 258

de l'Institut Aérotechnique de l'État.

Essais de modèles de moulins à vent.*Résumé.*

Dans le laboratoire aérodynamique de cet Institut on a étudié le modèle d'un moulin hollandais dans sa forme originale et après des transformations. La forme est représentée dans la Fig. 2; les angles du pas sont mentionnés en Table 3. On a mesuré le couple et la vitesse angulaire du moulin et la vitesse du courant d'air; puis la température et la pression de l'air.

Au commencement les couples furent mesurés au frein de Prony; une autre méthode, à l'aide d'un dynamomètre électrique fut trouvée plus favorable, parce qu'elle permet des mesures stables même au régime où le couple accroît avec la vitesse angulaire.

Les calculs ont été fait d'après la méthode employée à Göttingen, voir les formules 1), 2) et 3).

Les résultats ressemblent à ceux d'autres expérimentateurs. Le coefficient de l'énergie (c_e) a augmenté d'une manière favorable en arrondissant le côté dorsal des ailes. Le maximum $c_e = 0,36$, ne diffère pas beaucoup des meilleures valeurs trouvées autre part à des moulins modernes. Nous ne pouvons pas juger si les circonstances de l'essai p.e. l'échelle relativement petite, causent des déviations appréciables des conditions en grandeur réelle.

Onderzoek van molen-modellen

door

ir. A. G. VON BAUMHAUER.

Rapport A. 258 van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart.

Overzicht.

In verband met de studie van de werking van den Hollandschen windmolen zijn in den windtunnel van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart modellen onderzocht van den Hollandschen molen in oorspronkelijken en in gewijzigden vorm.

Het model was van een molen, in vereenvoudigde uitvoering, bovendien onderzocht na het aanbrengen van een gladde bedekking aan de achterzijde der wieken.

Het grootste deel der metingen en de uitwerking daar-

REPORT A. 258

of the National Institute for Aeronautical Research.

Test of models of a windmill.*Summary.*

A model of a Dutch windmill was tested in the wind-channel of this Institute. The form of the model, original and after alterations, is shown in Fig. 2. The pitch angles are given in Table 3.

The measurements comprise torque and rotational speed of the windmill, speed of the air current, and also the temperature and pressure of the air.

At first the torque was measured by a Prony's brake. An electrical dynamometer was more satisfactory as it allowed for stable conditions even in the range where the torque increases with the rotational speed.

The results are expressed in so-called pressure head coefficients as used in Göttingen, vide equations 1), 2) and 3). There is a good agreement with similar measurements. It is found that the energy coefficient is appreciably increased by the fairing of the back of the blades. The maximum value of $c_e = 0,36$ does not differ much with the results of the best modern windmills.

These tests do not allow to say whether the conditions of the test and the small scale on which it was carried out cause an appreciable difference with full scale.

BERICHT A. 258

der Reichsversuchsanstalt für Luftfahrt.

Messungen an Windmühlenmodellen.*Zusammenfassung.*

Im Windkanal obiger Anstalt wurde ein Modell einer holländischen Windmühle in ursprünglicher und abgeänderter Form untersucht.

Die Form ist in Fig. 2 wiedergegeben; die Steigungswinkel findet man in Tabelle 3.

Gemessen wurden Drehmoment und Drehgeschwindigkeit der Mühle sowie Geschwindigkeit des Windstroms; ferner Lufttemperatur und Luftdruck.

Anfangs wurde das Drehmoment mittels einer Seilbremse gemessen. Besser verlief die Messung mit einer elektrischen Dynamometerwaage. Dabei wurde ein stabiler Gang, sogar im Gebiete wo das Drehmoment mit der Drehgeschwindigkeit zunimmt, erhalten.

Die Ergebnisse wurden ausgedrückt in Staudruckbeiwerten, wie dies in Göttingen üblich ist (Gleichungen 1), 2) und 3)). Das Resultat stimmt mit dem anderer Messungen überein.

Die Energie-Beizahl (c_e) wurde durch Abrundung der Rückseite der Blätter erheblich vergrößert. Der grösste Wert von $c_e = 0,36$ ist nicht viel kleiner als die höchste bei modernen Mühlen gefundene Zahl.

Inwiefern die Verhältnisse der Messung und der kleine Kennwert erhebliche Abweichung von der wahren Grösse verursachen, kann aus diesen Versuchen nicht geschlossen werden.

Conclusie.

Afgezien van bijkomstige factoren, welke nader zijn vermeld onder A 1, is het volgende gevonden.

De uitkomsten der meting aan het oorspronkelijke model komen overeen met die aan een soortgelijk model te Göttingen gevonden.

Door het glad maken van de achterzijde der wieken van dit model van een Hollandschen molen wordt het molen-vermogen aanmerkelijk vergroot en niet veel kleiner dan de waarden gevonden aan de beste elders onderzochte molen-modellen.

Voor eventueel uit te voeren *verder onderzoek* kan worden genoemd:

1e. toepassing der theorie van luchtschroeven op windmolens; teneinde de werking van molens nader te leeren kennen en een verklaring te zoeken voor verschillende tegenstrijdigheden, welke in de uitkomsten van modelproeven voorkomen.

2e. de studie van wiekvormen, waarbij het zoogenaamde zwichten, d.i. het wegnemen der zeilen, ter vermijding van de kans op stormschade bij het buiten-bedrijf-stellen, kan komen te vervallen.

De wiekvorm moet niet alleen zoo gunstig mogelijk zijn in aerodynamisch opzicht, maar ook wat betreft eenvoud van fabricage.

3e. de studie van hulpmiddelen tot verhooging van het aanloopmoment, waarbij gedacht wordt aan hulpvleugels volgens Handley Page. Een verhoogd aanloopmoment is vooral van belang voor molens, welke een scheprad aandrijven (lit. 1, zie literatuuropgave aan het einde van dit rapport).

4e. bij proeven nagaan den invloed van de beperkte afmeting van den luchtstroom.

Indeeling.

A. Meetmethoden.

1. Algemeen.
2. De windsnelheid.
3. De momenten.
4. De draaisnelheid.

B. Methode van uitwerken.

C. De proeven.

1. Beschrijving der modellen.
2. Uitkomsten.

Tabellen.

Literatuur-opgaven.

A. Meetmethoden.

1. Algemeen.

In den windtunnel van den R.S.L. werden verschillende modellen in den z.g. vrijen straal onderzocht, waarbij de bepalende grootheden werden gemeten.

De gang der meting was zóó, dat de windsnelheid ongeveer constant werd gehouden en wel op bijna 5 m/sec, waarbij de draaisnelheid in verband met de sterkte en de balanceering van het model niet te groot werd.

Door de rem was dan de toestand bepaald. Daarbij werden draaimoment en windsnelheid gemeten.

Met de touwrem had men of stilstand of een vrij hooge snelheid. Met de elektrische rem had men het toerental van nul tot de maximale waarde geheel in de hand. Dit laatste was vooral van belang om de gegevens te verkrijgen, die den aanloop van den molen bepalen, waarbij de karakteristiek van het aangedreven werktuig mede een rol speelt (lit. 1.)

De schaal van het model was ongeveer 1 : 30.

Het getal van REYNOLDS, dat kan worden genoemd het hydrodynamische schaalgetal, is dus ongeveer $\frac{1}{30}$ van dat der ware grootte. De absolute waarde daarvan bedraagt $3,7 \times 10^4$, waarbij de wiekbreedte (b), de windsnelheid (v) en de viscositeit van lucht bij 760 mm kwik en 15° C (ν) als bepalende grootheden zijn genomen. Deze waren in een bepaald geval: $t = 13,1$ cm, $v = 412$ cm/sec.

en $\nu = 0,145$ cm²/sec., zoodat $R = \frac{vt}{\nu} = 3,7 \times 10^4$.

Naar aanleiding van de gunstige ervaring opgedaan bij de toepassing van de uitkomsten van modelproeven met luchtschroeven en vliegtuig-vleugels op ware grootte is de aanname gewettigd, dat deze molen-model-uitkomsten

bij benadering ook gelden voor de molens op ware grootte. Hierbij wordt afgezien van de verschillende bijkomstige omstandigheden, met welke bij het model-onderzoek geen rekening is gehouden, b.v.:

1. bij het model ontbrak het molen-lijf,
2. de luchtsnelheid is over den geheelen molencirkel practisch constant, terwijl op ware grootte de wieken tot dichtbij den grond komen, waar de windsnelheid veel kleiner is dan op eenige hoogte boven den grond.
3. de luchtstroom in den windtunnel is betrekkelijk rustig, terwijl in den vrijen wind de snelheid zeer sterk kan wisselen.
4. elastische vervormingen kunnen invloed hebben op de aërodynamische eigenschappen van den molen en wel aan het model anders dan op ware grootte.
5. het model draait in een luchtstroom van beperkte afmetingen.

Het model-onderzoek kan daarom ingevolge de punten 1, 2 en 3 gelden als een benadering van ideale omstandigheden, waaronder een molen zou kunnen werken.

De onder 2 en 3 genoemde onregelmatigheden naar plaats en tijd zijn een aanwijzing voor de moeilijkheden, welke zich voordoen bij de beproefing van molens op ware grootte.

De punten 4 en 5 wijzen op bezwaren tegen dit onderzoek.

De proeven aan de gewijzigde modellen, waarbij de diameter van het model constant bleef, leveren een aanwijzing voor den invloed, die deze veranderingen op ware grootte tengevolge kunnen hebben.

2. De windsnelheid.

Met behulp van den geijkten Robinson-molen V 72 werd de windsnelheid bepaald op ongeveer 1.2 m vóór den molen (zie fig. 1).

Het is aannemelijk, dat de relatieve fout in de snelheidsopgave ten hoogste 2 % bedraagt.

3. De momenten.

a. touwrem.

De eerste metingen waren verricht met een touwrem. Daarbij was de molennaaf op kogellagers in het hart van den windtunnel opgesteld, terwijl over een snaarschijf aan den molen bevestigd een snaar liep, welke aan beide zijden verticaal naar beneden met een gewicht was belast. Aan één zijde rustte het gewicht op een geijkten brievenweger. Het verschil der snaarspanningen is gelijk aan de remmende omtrekskracht, zoodat het moment gevonden wordt door deze kracht met den straal der schijf te vermenigvuldigen. De wrijving der kogellagers werd hierbij verwaarloosd.

Met deze inrichting kon alleen bij betrekkelijk groote draaisnelheid worden gemeten en bij stilstand. In het tusschengelegen gebied was de gang onstabiel.

Dit is niet het geval met de tweede methode.

b. elektrische rem. (fig. 1).

In navolging van metingen in Engeland verricht, ter bepaling van het rolmoment van vliegtuigmodellen, werd een electromotor zoodanig ingericht, dat daarmede het moment kon worden gemeten. Het huis van den motor was daartoe in kogellagers opgehangen concentrisch met de as van draaiing. Met behulp van een potentiometer kon de ankerspanning worden geregeld. Op deze wijze kon het toerental willekeurig worden gekozen. Het elektrische schema hiervoor werd aangegeven door den ing. H. A. HOEKSTRA.

De electromotor was naast den luchtstraal opgesteld en werd als dynamo door den molen aangedreven met behulp van een darm-snaar. Het verband tusschen molen-moment en de door een weegschaal bepaalde omtrekskracht, die het motorhuis in evenwicht houdt, werd door ijking bepaald.

De spreiding in de momenten door den molen geleverd was ongeveer 1 à 2 % van het maximale moment.

4. De draaisnelheid.

Op de molenas is een busje met uitwendige schroefdraad

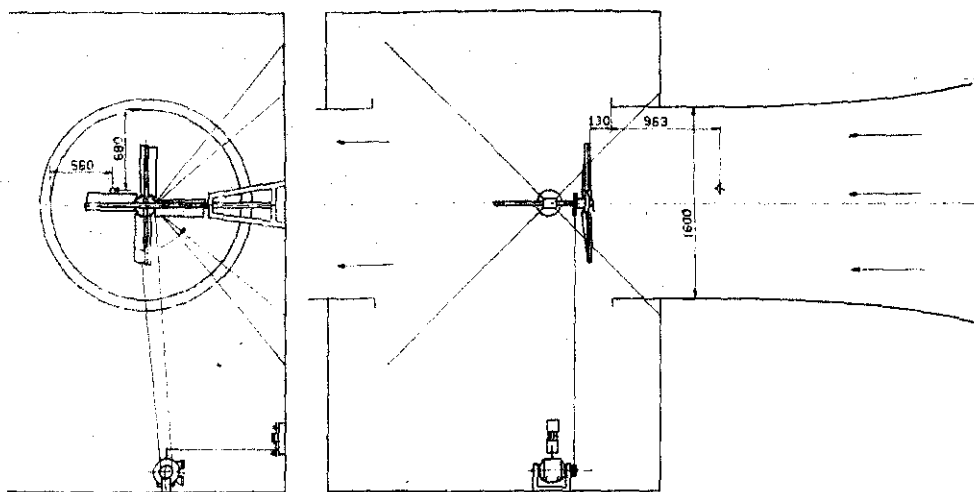


Fig. 1. Meet-inrichting. Het molen-model drijft met een snaar een meet-dynamo aan, welke buiten den luchtstroom is opgesteld. De plaats van den windsnelheidsmeter is in de figuur aangegeven.

aangebracht, waartegen als wormwiel een 100-tandig wielje loopt.

Op deze wijze maakte het wielje 1 omwenteling voor elke 100 omwentelingen van de molenas. De tijd voor een bepaald aantal omwentelingen werd met behulp van een nauwkeurig seconde-horloge bepaald. De fout hierin was wel gering, b.v. $< 1\%$.

B. Methode van uitwerken.

In navolging van de Göttinger school (lit. 2 en 3) zijn de gevonden waarden voor de momenten uitgedrukt in den dimensieloozen momentencoëfficiënt.

$$c_d = \frac{M}{q O R} \quad \dots \dots \dots (1)$$

De energiecoëfficiënt c_e wordt bepaald door

$$c_e = \frac{M\omega}{q O v} \quad \dots \dots \dots (2)$$

waarin:

- M het molen-moment in kgm,
- q de stuwdruk van den luchtstroom in kg/m^2 , $q = \frac{1}{2} \rho v^2$,
- ρ de massa van de lucht per m^3 in kg m^{-3} sec²,
- v de ongestoorde snelheid in m/sec,
- O oppervlak van den molencirkel, $O = \pi R^2$, in m^2 ,
- R de straal van den molen-cirkel,
- ω de hoeksnelheid van den molen in radialen per sec,
- u de omtreksnelheid van den molen in m/sec.

$$\text{de relatieve omtreksnelheid } u' = \frac{u}{v} \quad \dots \dots \dots (3)$$

De energiecoëfficiënt is het quotiënt van het door den molen opgenomen vermogen en het arbeidsvermogen van beweging van de ongestoorde lucht, die per seconde door een oppervlak ter grootte van den molencirkel stroomt.

In deze definitie, afkomstig van Coulomb, is gedacht aan de verhouding van de energie, die de molen opneemt, tot de energie, die in de lucht beschikbaar is, welke laatste op willekeurige wijze is gedefinieerd door den molencirkel als beslissend oppervlak aan te nemen.

Volgens berekening, kan c_e ten hoogste $\frac{16}{27}$ ($= 0,593$) bedragen, ook al zouden de wieken geen wrijvings- of profielweerstand bezitten (lit. 2).

Een eenvoudige tusschenberekening toont, dat $c_e = c_d u'$ of $c_e = c_d \cdot \frac{u}{v}$

De grootheden c_d en c_e zijn voor elke proef uitgerekend en uitgezet als functie van de relatieve omtreksnelheid $\frac{u}{v}$.

Hierbij moet worden opgemerkt, dat een fout in de windsnelheid, als gevolg van een meetfout, of wel van de eindigheid van den luchtstraal, een groote invloed heeft op de waarde van de coëfficiënten.

Een fout van b.v. 5% in v beteekent een afwijking van 10% in c_d van ongeveer 16% in c_e .

Hierbij kan worden opgemerkt, dat het normale werken van den molen plaats vindt in het gebied waar het moment daalt met stijgende relatieve omtreksnelheid, b.v. waar u/v tusschen 2 en 2.5 ligt.

Voor het aandrijven van schroefpompen en dergelijke, betrekkelijk snellopende, hydrodynamische opvoerwerktuigen (geen schepraderen of vijzels)

is het van voordeel, dat het gebied van goed rendement bij hogere waarden van u/v valt, zoodat de molen betrekkelijk snel draait.

C. De proeven.

De modellen.

Het oorspronkelijke model 1 A stelt voor een Hollandschen molen, bestaande uit 4 wieken, welke op 2 roeden zijn bevestigd. Zie fig. 2.

Het is vervaardigd door een molenmaker naar diens gegevens van Zaanse windmolens. De wieken zijn breeder dan veelal met oud-Hollandsche molens het geval is (omstreeks 20%). Ter besparing van werk zijn de roeden en het hekwerk grover uitgevoerd dan dit volgens schaal had moeten zijn. Er zijn nu relatief dikkere hekklatten gebruikt, maar minder in aantal, zoodat de weerstand daarvan bij benadering wel met die van een zuiverder uitgevoerd model zal overeenkomen.

Evenals bij vele Hollandsche windmolens wordt de wiek gevormd door een roede met een vlak windbord in draai-richting vóór de roede en erachter een gebogen zeilvlak, dat wordt bepaald door de hekklatten. Het model, dat weinig torsie-stijf is, werd door het aanbrengen van wijzigingen eenigszins verbogen. In de oorspronkelijke toestand (1 A) vertoonde de achterzoom de gebruikelijke zeeg, waarbij dicht bij de as de hoek, die de hekken met het maalvlak maken, weinig varieert (eerst iets toeneemt), terwijl die hoek geleidelijk naar het wiekeinde afneemt. Op ongeveer $\frac{1}{10}$ van het einde is die hoek 0° , d.w.z. daar staat de heklat loodrecht op de molenas, terwijl aan het einde de hoek $-2\frac{1}{2}^\circ$ bedraagt.

Deze stand van de onderste heklat is dikwijls als onjuist aangemerkt, wellicht omdat men alleen dacht aan de luchtkrachten, die op het zeil werken. Het geknikte profiel, gevormd door windbord en zeil, vertoont echter ook hier een spoedhoek, die van hetzelfde teken is als op het overige deel van de wiek.

De zeilen waren op analoge wijze als op ware grootte aan het molen-model bevestigd. Luchtlek tusschen zeil en roede was daarbij wel mogelijk.

Eenige gegevens betreffende den wiekvorm, zijn in tabel 3 verzameld.

Onder spoedhoek wordt verstaan de hoek, die de koorde aan de drukzijde van de wiek met het vlak van draaiing maakt. In deze tabel is ook aangegeven de relatieve meetkundige spoed, dat is de uit dien spoedhoek berekende spoed gedeeld door den molendiameter $\left(S' = \frac{S}{D} \right)$.

De meetpunten zijn aangegeven door de betreffende waarden van den relatieven straal d.i. as-afstand gedeeld door wienlengte $\left(r' = \frac{r}{R} \right)$.

TABEL I.
Het model.

Nr.	A			B			C		
	u/v	c _d	c _e	u/v	c _d	c _e	u/v	c _d	c _e
1	0,00	0,044	0,000	0,00	0,051	0,000	0,00	0,051	0,000
2	0,24	0,047	0,011	0,34	0,048	0,016	0,37	0,053	0,019
3	0,47	0,051	0,024	0,39	0,051	0,020	0,54	0,059	0,032
4	0,61	0,056	0,034	0,74	0,060	0,044	0,72	0,068	0,049
5	0,82	0,063	0,052	1,11	0,080	0,089	0,94	0,077	0,072
6	0,95	0,070	0,067	1,20	0,085	0,102	1,15	0,098	0,113
7	1,40	0,099	0,139	1,48	0,102	0,151	2,42	0,149	0,361
8	1,71	0,109	0,186	1,64	0,116	0,190	3,15	0,087	0,274
9	1,84	0,112	0,206	1,84	0,127	0,234	3,89	0,021	0,082
10	1,92	0,104	0,200	1,98	0,130	0,257	4,17	0,005	0,021
11	2,11	0,092	0,194	2,07	0,126	0,261	1,34	0,124	0,166
12	2,25	0,078	0,176	2,20	0,122	0,268	1,53	0,141	0,216
13	2,45	0,058	0,142	2,47	0,099	0,245	2,04	0,167	0,341
14	2,65	0,037	0,098	2,67	0,080	0,214	2,25	0,159	0,358
15	2,81	0,017	0,048	2,85	0,062	0,177	2,58	0,134	0,346
16	2,97	0,000	0,000	3,01	0,043	0,129	2,91	0,109	0,317
17				3,25	0,017	0,055	3,31	0,073	0,241
18				3,43	0,000	0,000	3,64	0,043	0,157

¹⁾ 2e proef.

Teneinde na te gaan in hoeverre de werking kon worden verbeterd, is aan het oorspronkelijke model (A), aan de zuigzijde, dat is de naar het molenlichaam gekeerde zijde, een gladde bedekking aangebracht en wel in geval B alleen achter het voorste deel van de wijk, d.i. achter het windbord en de roede. Ten slotte is het model ook onderzocht met geheel glad afgewerkte achterzijde (model 1 C).

TABEL 2.
Overzicht der belangrijke gegevens.

	Model 1.		
	A	B	C
c _d bij stilstand	0,044	0,051	0,051
c _d -max.	0,112	0,130	0,167
u/v voor c _d = 0	2,97	3,43	4,12
c _e -max.	0,203	0,265	0,360
u/v bij c _e -max.	1,9	2,2	2,3

TABEL 3.
Gegevens van den wijkvorm.

r'	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
Spedhoek in graden ..	19½	18	15½	12½	6
S' = $\frac{\text{Spoed}}{\text{Diameter}}$	0,22	0,41	0,52	0,56	0,33

Een soortgelijke wijziging werd door schrijver dezes aan een molen van 8 m diameter met succes beproefd (Vierhouten 1917). In ons land en in Duitsland zijn gunstige uitkomsten met dergelijke wijzigingen aan groote windmolens verkregen (in 1929 resp. 1932).

Globale berekeningen over molens met verbeterde profielen zijn door ir. C. KONING geleverd (lit. 4).

Dat een hoekige roede het rendement van den molen drukt, volgt uit de ervaring, opgedaan met vleugelprofielen,

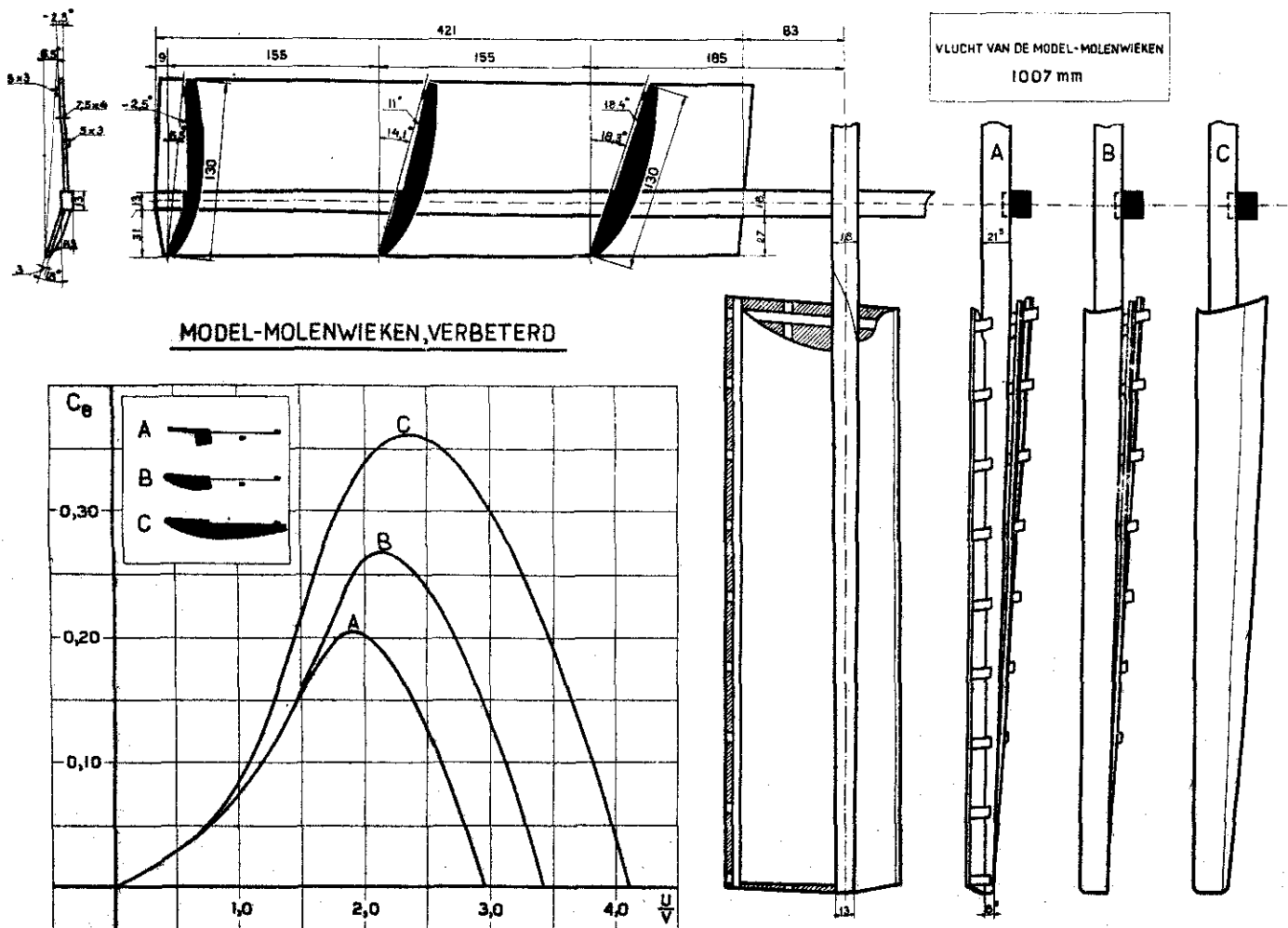


Fig. 2. Model 1 van een Hollandschen windmolen, met verbeteringen B en C. c_e is een maat voor het vermogen, hetgeen afhangt van de betrekkelijke omtreksnelheid $\frac{u}{v}$ (zie vergelijking 2).

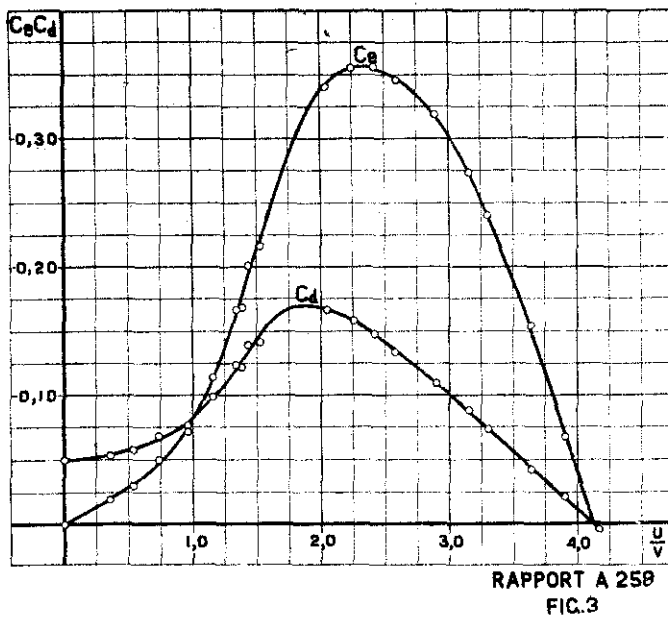


Fig. 3. Energie- en momenten-coëfficiënten voor het verbeterde model 1 C.

waarbij gebleken is, dat tengevolge van scherpe randen aan de zuigzijde de draagkracht afneemt en de weerstand toeneemt. Dit werd door schrijver dezes besproken op de vergadering van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs op 20 April 1926. Daar werden ook de uitkomsten der voorloopige, minder nauwkeurige metingen aan dit model, vermeld (lit. 5) welke praktisch met de latere kloppen.

Uitkomsten.

Deze zijn op de boven omschreven wijze uitgedrukt in energie-coëfficiënt c_e en momenten-coëfficiënt c_d . De waarden van c_e zijn in fig. 2 respectievelijk fig. 3 op de relatieve omtreksnelheid $\frac{u}{v}$ uitgezet (zie ook tabel 1 en 2).

In figuur 3 is van model 1 C ook het verloop van c_d weer gegeven.

Als een voorbeeld volgen hier de waarnemingen van een proef.

Model 1A. proef n°. 8.

$H = 767,3$ mm kwik, $t = 19,0$ °C, $\rho = 0,124$ kgm.⁻⁴sec.², $v = 4,12$ m/sec., stuwdruk $q = 1,05$ kg/m², tijd voor 100 omwentelingen van den molen 45,0 sec, $u = 7,03$ m/sec, $\frac{u}{v} = 1,71$, moment 0,0459 kgm, $c_d = 0,109$, $c_e = 0,186$.

In het algemeen zien we, dat het maximale draaimoment veel grooter is dan het aanlooppmoment, en verder dat bij een hoge relatieve omtreksnelheid het moment nul wordt; de molen draait dan dol. De grootte van $\frac{u}{v}$, waarbij dit

optreedt, bepaalt de snelheid van den gang van den molen. Is hierbij $\frac{u}{v} > 3$ dan heet de molen een snellooper (lit. 2.)

In het gebied van kleine $\frac{u}{v}$, waar het moment toeneemt met stijgende $\frac{u}{v}$, konden met de elektrische rem rustige metingen worden uitgevoerd, hetgeen met de touwrem niet het geval was en, gezien de uitkomsten, te Göttingen met de wervelstroom-rem ook niet mogelijk was (lit. 3). Het verband bleek ook in dit gebied vloeiend te zijn.

Dit gebied is van belang ter beoordeeling van de stabiliteit van den gang, wanneer de molen een werktuig aandrijft, in het bijzonder bij het aanloopen met zwakken wind (lit. 1).

Het oorspronkelijke model blijkt een maximale waarde van $c_e = 0,205$ te bezitten, hetgeen overeenkomt met de waarde, welke te Göttingen werd gevonden aan het model van een Hollandschen molen, n.l. de door LA COUR genoemd ideale molen (lit. 6 en 7). (met vlakke wieken?)

De gewijzigde modellen blijken grotere momenten en daarmede hogere waarden voor den energie-coëfficiënt te leveren. Voor model 1 B is deze ten hoogste 0,27, voor model 1 C $c_{e \max}$ is = 0,36.

Het model 1B blijkt ongeveer 30 % beter te zijn dan het oorspronkelijke model. Model 1C heeft echter een 80 % grotere maximale energie-coëfficiënt dan 1A.

Deze hoge waarde is niet veel lager dan de hoogste waarden gevonden aan moderne molen-ontwerpen, welke geheel vloeiend van vorm zijn en vleugelprofielen bezitten. De metingen van SABININ leverden een hoogste waarde van $c_e = 0,42$ (lit. 8).

Een overzicht der belangrijkste gegevens van de hier onderzochte modellen is gegeven in tabel 2.

LITERATUUR-OPGAVEN.

1. A. G. VON BAUMHAUER. Mogelijkheden tot verbetering van den Hollandschen windmolen voor polderbemaling. *De Ingenieur*, 19 Oct. 1929, n°. 42, blz. W 207.
2. A. BETZ. Wind-Energie und ihre Ausnutzung durch Windmühlen. Uitgave VANDENHOECK & RUPRECHT, Göttingen 1926.
3. R. SEIFERTH. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. III. Liefening, blz. 140.
4. Rapport A. 38 van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart. *De Ingenieur* n°. 13, 1923.
5. A. G. VON BAUMHAUER. Mogelijkheden tot verbetering van den Hollandschen molen. *De Ingenieur* 1926 blz. 441 en 543.
6. K. BILAU. Schnellaufende Windmotoren, *Elektrotechnische Zeitschrift*. 1925, Heft 37.
7. O. FLACHSBART. Handbuch der Experimental Physik, Band 4, 3 Teil, blz. 398.
8. G. H. SABININ. Problems of utilising of energy of wind. Transactions of the Central Aero-Hydrodynamical Institute n°. 28, 1926.

Rapport A. 269.

Proefnemingen met modellen van windmolens

door

A. HAVINGA.

Report A. 269: Experiments with three models of windmill sails.

Rapport A. 269: Expériences sur trois modèles de moulins à vent.

Bericht A. 269: Untersuchung von Windrädern.

RAPPORT A. 269

Proefnemingen met modellen van windmolens.

Uittreksel.

A. Inleiding.

In de inleiding tot het rapport wordt een onderwerp behandeld uit de geschiedenis van de aerodynamica, dat in dit verband van actuele betekenis mag worden geacht.

B. De modellen.

De modellen n^o. 1 en n^o. 2 zijn gemaakt overeenkomstig de voorschriften van het molenmaker's handboek van VAN NATRUS, VAN VUUREN en POLLY (Amsterdam 1734—'36). Het model n^o. 3 is een model van hedendaagsche Hollandsche molenwicken, die in overeenstemming zijn met bepaalde voorschriften in het Molenboek van JOH. VAN ZIJL (Amsterdam 1734); deze laatstgenoemde voorschriften zijn echter niet volledig, zoodat niet kan worden uitgemaakt of de tradities van de oud-Hollandsche molen-bouwkunde aan de bovenbedoelde hedendaagsche wicken zuiver bewaard zijn gebleven.

C. De meetinrichting.

De 3 modellen zijn hoofdzakelijk onderzocht met behulp van de elektrische meetinrichting, die reeds beschreven is in Rapport A 258 (Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Deel VII, blz. 27). Bijzondere metingen hebben plaatsgevonden:

- 1: zonder rem, met verschillende windsnelheden (tabel 3);
- 2: met de elektrische rem, ter bepaling van de veranderingen, die de karakteristieken van het model n^o. 2 ondergaan tengevolge van het „zwichten” der zeilen (tabellen 8 en 9, fig. 5);
- 3: met behulp van een inrichting (fig. 2), voornamelijk dienende tot het meten van den aerodynamischen weerstand (tabellen 4 en 6).

D. Uitwerking van de gegevens.

De gegevens der metingen zijn op de thans gebruikelijke manier herleid tot dimensielooze coëfficiënten; de definities der coëfficiënten zijn mede te vinden in tabel 1.

De uitkomsten der proefnemingen worden medegedeeld zonder commentaar.

REPORT A. 269

Experiments with three models of windmill sails.

Summary.

A. Introduction.

In the introduction to the report a summary is given of the old-renowned treatise „On the construction and effects of windmill sails” by JOHN SMEATON (1724—1792), as it was published in *The philosophical transactions of the Royal Society of London*, complete edition, tome LI, abridged edition, tome XI.

B. Models.

The models n^o. 1 and 2 (zie fig. 3 and 41) were made, as far as possible, according to the instructions given by VAN NATRUS, VAN VUUREN and POLLY in their large book concerning the Dutch windmills (Amsterdam 1734—'36). The model n^o. 3 (see fig. 6) was made after a present-day Dutch windmill, the sails of which are in accordance with instructions of the millwright's handbook by JOH. VAN ZIJL (Amsterdam 1734); it must be remarked, however, that the instructions last-mentioned are incomplete, thus it is not certain, whether the third model may be considered to be representative for 18th century Dutch mill-work.

C. Method of measurement.

A full description of the electrical apparatus, employed for testing the three models, may be found in Report A. 258

(Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Vol. VII, p. 27). The results are given in table 5, 5a, 7 and 10 and in fig. 3, 4 and 6. Special measurements were carried out:

- 1: without any brake, at different velocities of wind (table 3);
- 2: with the usual electrical apparatus, the influence being determined of diminishing the surface of cloth of the sails, which is practised by the Dutch millers in stormy weather (tables 8 and 9, fig. 5);
- 3: with a special apparatus, being suitable for determining the resistance of the models (tables 4 and 6).

D. Calculation of data.

From the measured values of the resistance W , the torque M and the energy E , the coefficients C_w , C_d and C_e were calculated after the formulae, which may be found in table 1a. As the models are very few in number, no completeness can be claimed for the results of the trials, for which reason no conclusions are added to the report.

TABLE 1a.

Notations.

R	radius of windmill sails
$O = \pi \cdot R^2$	surface, commanded by the sails
ω	angular velocity in radians per second
W	resistance
M	torque
$E = \omega \cdot M$	energy
$u = \omega \cdot R$	velocity of the extremities of the sails
ρ	density of air
v	velocity of wind
$q = \frac{1}{2} \rho v^2$	dynamic pressure of wind
$\frac{u}{v}$	coefficient of the velocity of the sails
$C_e = \frac{E}{O v q}$	coefficient of energy
$C_d = \frac{M}{O R q}$	coefficient of torque
$C_w = \frac{W}{O q}$	coefficient of resistance

RAPPORT A. 269

Expériences sur trois modèles de moulins à vent.

Résumé.

A. Introduction.

La célèbre dissertation „On the construction and effects of windmill sails” de JOHN SMEATON (1724—1792) est discutée dans l'introduction de ce bulletin.

B. Modèles.

Les modèles n^o. 1 et n^o. 2 (fig. 3 et 4) sont fabriquées après les préceptes, publiées par VAN NATRUS, VAN VUUREN et POLLY dans leur grand livre sur les moulins à vent hollandais (Amsterdam 1734—'36). La modèle n^o. 3 (fig. 6) a été exécutée après un moulin à vent d'aujourd'hui.

C. Méthode d'expérience.

La méthode d'expérience, basée sur un frein-dynamo, est décrit dans le rapport A. 258 (Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Vol. VI, p. 27). Les résultats sont donnés dans les tables 5, 5a, 7, 10 et les figures 3, 4, 6. On a fait des recherches spéciales:

- 1: sans frein, la vitesse du vent étant variée (table 3);
- 2: avec le frein-dynamo, la surface des voiles étant diminuée comme on fait aux grands moulins hollandais quand le temps devient orageux, (tables 8 et 9, fig. 5);
- 3: avec un dispositif, qui a rendu possible de déterminer la résistance des modèles (tables 4 et 6).

D. Coefficients.

Des valeurs mesurées du moment M , de l'énergie E et de la résistance W on a calculé les coefficients C_d , C_e et C_w suivant les formules:

$$C_d = \frac{M}{O R q} \quad C_e = \frac{E}{O v q} \quad C_w = \frac{W}{O q}$$

Pour les symboles voir le tableau 1a.

Les résultats des expériences sont publiés sans y ajouter des discussions.

BERICHT A. 269

Untersuchung von Windrädern.

Zusammenfassung.

A. Einführung.

Die Einführung enthält eine Beschreibung der Modell-Versuche, wie sie etwa im Jahre 1750 gemacht sind vom Engländer JOHN SMEATON (1724—1792).

B. Modelle.

Die Modelle n°. 1 und n°. 2 (Fig. 3 und 4) sind nach den Vorschriften, gegeben im holländischen „Molenboek“ von VAN NATRUS, VAN VUUREN und POLLY (Amsterdam

1734—'36), hergestellt worden. Das Modell n°. 3 ist ein Modell der Flügel einer neuzeitlichen holländischen Mühle.

C. Meszmethode.

Die Meszmethode, mit einer elektrischen Bremse, ist bereits beschrieben im Bericht A. 258 (Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Bnd VII, S. 27). Die Resultate sind in Tafel 5, 5a, 7 und 10 und in Fig. 3, 4 und 6 gegeben. Spezielle Meszungen fanden Statt:

- 1: ohne Bremse mit verschiedenen Windgeschwindigkeiten (Tafel 3);
- 2: Mit der elektrischen Bremse, wobei bestimmt wurde, wie die charakteristische Kurven einer Windmühle sich ändern durch „zwichten“, d.h. aufrollen der Segel (Tafel 8 u. 9, Fig. 5);
- 3: mit Hilfe einer speziellen Meszvorrichtung, die es gestattete den Widerstand der Modelle zu bestimmen. (Tafel 4 u. 6).

D. Berechnung der Koeffiziente.

Aus den gemessenen Werten des Drehmomentes M , der Leistung E und des Widerstands W wurden berechnet die Koeffiziente C_d , C_e und C_w ; die Definitionen der Koeffiziente sind der *Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen* entnommen. Für die Formelzeichen sei auf Tafel 1a hingewiesen.

Proefnemingen met modellen van windmolens

door

A. HAVINGA.

Rapport A 269, Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

In het rapport worden de uitkomsten medegedeeld van aerodynamische metingen, die in de windtunnel van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart zijn uitgevoerd aan eenige modellen van oud-Hollandsche molenvieken. De modelmetingen zijn ondernomen naar aanleiding van de beroemde verhandeling „On the construction and effects of windmill sails” van John Smeaton (1724—1792), waarvan de inhoud de belangstelling vermogt te wekken voor de windmolens van de 18de eeuw, in het bijzonder voor de toenmalige Hollandsche molens. De resultaten der proefnemingen worden medegedeeld zonder commentaar, in den vorm, die daarvoor heden ten dage de gebruikelijke is.

A. Inleiding.

1. In het jaar 1759 heeft de Engelsche ingenieur John Smeaton algemeene bekendheid gegeven aan proeven, die door hem genomen waren met een aantal modellen van verschildende molens. De uitkomsten dezer 18de eeuwse molenproeven zijn gepubliceerd in eenige verhandelingen, die door Smeaton werden voorgedragen voor het officiele wetenschappelijke genootschap van zijn land; de verhandelingen werden gedrukt in het tijdschrift van dit genootschap¹⁾, waarna in den loop der jaren verschildende nieuwe uitgaven er van verschenen zijn²⁾.

Voor proefnemingen met modellen van windmolens werd door Smeaton gebruik gemaakt van de meetrichting, die in fig. 1 is afgebeeld. De beweging van de lichte opzichte van de modellen werd verkregen met behulp van een werktuig, waarmee een model langs een cirkelbaan bewogen kon worden in stilstaande lucht. De verschildende windmolenmodellen werden alle onderzocht met eenzelfde omlooptijd van het werktuig; deze was zoodanig berekend, dat de snelheid van het middelpunt van een model 6 Engelsche voeten, of 1.88 m per seconde bedroeg. De lengte der wieken was voor alle modellen dezelfde, namelijk 21 Engelsche duimen, of 0.533 m.

De model-molenvieken werden bevestigd aan een as, die belast kon worden door middel van een takeltje, waarvan de loopende part door de draaiing van de as werd opgewonden; tijdens de proefnemingen kon de belasting worden gevarieerd door aan het takeltje meer of minder gewichten te hangen. Bij de verschildende belastingen werd waargenomen, hoeveel omwentelingen de as maakte gedurende een tijdsverloop van 52 seconden, zoodat na afloop van de proeven voor ieder model kon worden bekend, met welke belasting de arbeid, dien het in dat tijdsverloop verricht had, een maximum was geweest. De maximale vermogens van de verschildende modellen en de daarbij behoorende hoeksnelheden vormden voor Smeaton het uitgangspunt tot algemeene beschouwingen en berekeningen met betrekking tot de windmolens op ware grootte.

¹⁾ *The philosophical transactions of the Royal Society of London*; volledige uitgave, deel LI; verkorte uitgave, deel XI.
²⁾ J. Smeaton. *Experimental enquiry concerning the natural powers of wind and water*. London, 1796.
 J. Smeaton. *Recherches experimentales sur l'eau et le vent*. Paris, 1810.
 Reports of the late John Smeaton, uitgegeven anno 1812 door de Institution of Civil Engineers, deel IV.

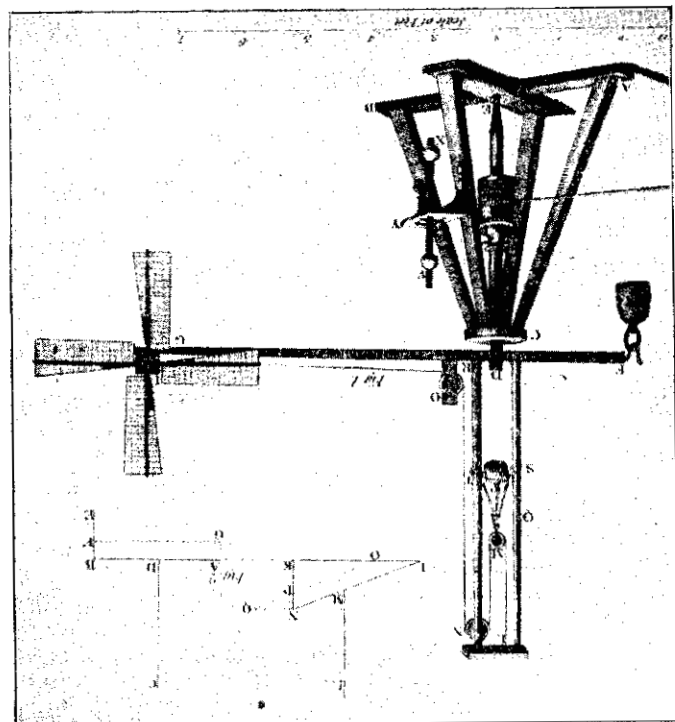


Fig. 1. Meetrichting uit de 18de eeuw voor proefnemingen met modellen van windmolens.

2. Waar alle gegevens daartoe beschikbaar zijn, ligt het voor de hand, de maximale waarde te berekenen van den energie-coëfficiënt, behoorende bij ieder van de door Smeaton onderzochte windmolenmodellen. Onder den energie-coëfficiënt verstaat men een getal, waartoe de uitkomst van een hedenaagsche windmolen-modelproef herleid wordt, ten einde de resultaten van verschildende proefnemingen onderling te kunnen vergelijken, ook al hebben deze niet onder dezelfde omstandigheden plaats gevonden. De coëfficiënt wordt berekend door den arbeid, dien een model per seconde verrichtte, te reduceeren volgens de vergelijking:

$$C_e = \frac{O v q}{E}$$

de energie per seconde E wordt dus gedeeld door een product van factoren, dat afhankelijk is van de wiek-

lengte van het model en van de windsnelheid tijdens de proefnemingen ³⁾).

De modellen van SMEATON bestreken een oppervlakte: $O = \pi \cdot 0,533^2 \text{ m}^2 = 0,89 \text{ m}^2$.

De snelheid van de lucht ten opzichte van de modellen was bij de proeven van SMEATON gemiddeld: $v = 1,83 \text{ m/sec}$.

De aerodynamische stuwdruk, behorende bij deze snelheid, bedraagt: $q = \frac{1}{16} \cdot 1,83^2 \text{ kg/m}^2$, wanneer voor de massa van de lucht per volumen-eenheid $\rho = \frac{1}{8} \text{ kgsec}^2\text{m}^{-4}$ wordt aangenomen.

Het product $O v q$, dat als maatstaf zal dienen voor den maximalen arbeid, dien door SMEATON voor zijn verschillende modellen wordt opgegeven, kan dus bij benadering gelijk aan $0,89 \cdot \frac{1}{16} \cdot 1,83^2 \text{ kgm/sec} = 0,34 \text{ kgm/sec}$ gesteld worden ⁴⁾.

De uitkomsten van de proeven van SMEATON mogen hier in het kort worden samengevat, voor zoover zij betrekking hebben op de molens, die door hem als „Hollandsche molens” omschreven werden. Wanneer de Hollandsche windmolen-modellen geheel onbelast draaiden, waarbij dus $C_e = 0$ was, bedroeg de hoeksnelheid ω ongeveer

14 radialen per seconde, zoodat de verhouding $\frac{\omega \cdot R}{v} = 4$ was. Het vermogen der modellen was maximaal, wanneer

de relatieve omtreksnelheid $\frac{\omega \cdot R}{v}$ ongeveer 2,7 bedroeg.

Voor het geval, dat aan de model-molenwieken de smalle hekken met de windborden ontbraken en zij dus alleen breede hekken met zeilen voerden, was het bedrag van den maximalen arbeid: 0,06 tot 0,08 kgm/sec, al naar den meer of minder gunstigen stand der hekken; door het aanbrengen van smalle hekken kon het vermogen worden vergroot tot 0,10 kgm/sec, overeenkomende met een maximale waarde van den energie-coëfficiënt: $C_e = 0,3$.

3. Wanneer men de modelmetingen van SMEATON volgens moderne inzichten nader uitgewerkt heeft, komt men allicht er toe, een vergelijking te maken tusschen de resultaten van deze uitwerking en de uitkomsten van hedendaagsche windmolen-modelmetingen, zooals zij in de rapporten der groote aerodynamische laboratoria worden medegedeeld; daarbij rijst dan echter onmiddellijk de vraag, of zulk een vergelijking niet eenigszins mank gaat.

Het wordt heden ten dage vanzelfsprekend geacht, dat men voor proefnemingen met modellen van windmolens gebruik maakt van een zoogenaamde windtunnel, die op een geheel ander principe berust als het werktuig volgens fig. 1; bovendien is bij de tegenwoordige metingen de windsnelheid steeds veel grooter dan 1,83 m/sec, zoodat de schaal, waarop zij genomen worden, een geheel andere is dan die van de proeven van SMEATON. Het is niet onmiddellijk in te zien, in hoeverre deze verschillen tusschen de 18de eeuwse en de hedendaagsche modelmetingen van beteekenis kunnen zijn; bij voorkeur zal men dus de uitkomsten onderling niet vergelijken, voordat men zich

³⁾ De in dit rapport gevolgde notaties zijn verzameld in tabel 1.

⁴⁾ Bij deze becijfering is geen rekening gehouden met de omstandigheid, dat de snelheid v niet voor alle punten van het bewegingsvlak der model-molenwieken even groot was. Dit laatste zou in rekening gebracht kunnen worden, door ieder oppervlakte-element dO van het bewegingsvlak te vermenigvuldigen met die waarde van $v \cdot q$, die bij dat element behoort, om vervolgens de functie $dO v q$ over de geheele oppervlakte O te integreren.

De integratie levert geen bijzondere moeilijkheden op; voor de door SMEATON aangegeven afmetingen van de modellen en van het werktuig volgens fig. 1 leidt zij tot het resultaat, dat

$$\int_0^O dO v q = 0,37 \text{ kgm/sec}$$

bedraagt, hetgeen dus niet onaanzienlijk grooter is dan de uitkomst van de eenvoudige vermenigvuldiging.

er van heeft vergewist, dat zulk een vergelijking inderdaad geoorloofd is. Daartoe zou men aldus te werk willen gaan, dat men copieën vervaardigde van eenige van SMEATON's modellen om vervolgens de eigenschappen daarvan te onderzoeken met de verfijnde hulpmiddelen van een modern laboratorium voor aerodynamica.

Een dergelijke voortzetting van de klassieke modelproeven schijnt echter niet goed mogelijk te zijn, omdat de modellen in de desbetreffende verhandeling slechts in grove trekken beschreven worden, zoodat het niet zoo eenvoudig blijkt te zijn, hen tot in alle details nauwkeurig te reconstrueeren. Wat heden ten dage nog wel tot de mogelijkheden behoort, is de vervaardiging van nauwkeurige modellen van molenwieken, zooals zij in de 18de eeuw gemaakt werden door Hollandsche molenmakers; door middel van moderne aerodynamische modelmetingen kan dus worden nagegaan, of de oud-Hollandsche molenwieken inderdaad de eigenschappen bezeten hebben, die op grond van de 18de eeuwse modelmetingen aan hen toegeschreven kunnen worden.

In de windtunnel van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart zijn daartoe de modelproeven genomen, waarvan de uitkomsten in het navolgende worden medegedeeld.

B. Vervaardiging van de modellen.

4. Door den schrijver zijn drie windmolenmodellen vervaardigd en genummerd 1, 2 en 3; bij de vervaardiging werd acht geslagen op de voorschriften van de groote Hollandsche molenmaker's handboeken, die omstreeks het jaar 1730 te Amsterdam zijn uitgegeven ⁵⁾.

Het model n°. 1 is het model op schaal 1 : 23,6 van de wieken, die beschreven worden in het Molenboek van VAN NATRUS, deel I, plaat 9. Het model is vervaardigd aan den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart.

Het model n°. 2 is het model op schaal 1 : 30,2 van de wieken, die beschreven worden in het Molenboek van VAN NATRUS, deel II, plaat 3; bij de vervaardiging is tevens de 11de plaat van deel III bestudeerd. Het model n°. 2 is gemaakt in de werkplaats voor mechanische technologie van de Technische Hoogeschool te Delft, evenals het hierna te beschrijven model n°. 3.

Het model n°. 3 berust gedeeltelijk op het Molenboek van VAN ZIJL, waarin op plaat 47, in den vorm van zoogenaamde roemallen, aanwijzingen worden gegeven ten aanzien van de hoeken, die de breede hekken moeten maken met het bewegingsvlak van de wieken; andere details van het hekwerk worden in dit Molenboek niet beschreven.

Bij het opmeten van verschillende molens van de Lopiker- en Alblasserwaarden is den schrijver gebleken, dat de molenwieken aldaar zeer goed met de roemallen van VAN ZIJL overeenstemmen; aangezien deze auteur, volgens de titel-pagina van zijn boek, molenmaker was te Lexmond, kan hieruit worden opgemaakt, dat de schoot dezer wieken in de laatste twee eeuwen zeer weinig verandering heeft ondergaan, hetgeen verder aanleiding kan geven tot de vooronderstelling, dat zij ook in andere opzichten weinig veranderd zijn. Het model n°. 3 is het model op schaal 1 : 30,3 van de wieken van een molen in de Lopikerwaard, die nagenoeg overeenkomen met den roemal n°. 2 van VAN ZIJL; de molen dient voor de bemaling van het Waterschap „Lopik, Lopikerkapel en Zevenhoven” en wordt aldaar aangeduid als Molen n°. 3.

⁵⁾ Moolen-boek, uitgegeven bij Johannes Covens en Cornelis Mortier;

anno 1734: deel I, door VAN NATRUS, VAN VUUREN en POLLY;

anno 1736: deel II, door dezelfde;

anno 1727: deel III, door LINPERCU.

Moolen-boek, uitgegeven bij Petrus Schenk;

anno 1734: deel I, door JOHANNIS VAN ZIJL (een tweede druk van het eerste deel verscheen in 1761, het tweede deel schijnt nimmer uitgegeven te zijn).

TABEL I.
Notaties.

R	lengte van molenwieken, gemeten vanaf het middelpunt van draaiing totaan de uiteinden	m
$D = 2 \cdot R$	vluicht van molenwieken	m
$O = \pi \cdot R^2$	oppervlakte, die door de wieken van een molen bestreken wordt	m ²
ω	hoeksnelheid	radialen p.sec
W	aerodynamische weerstand	kg
M	aerodynamisch moment	kgm
$E = \omega \cdot M$	aerodynamisch vermogen	kgm/sec
$u = \omega \cdot R$	snelheid van de uiteinden der wieken	m/sec
ρ	massa van lucht per volumeneenheid	kgsec ² m ⁻⁴
v	windsnelheid	m/sec
$q = \frac{1}{2} \rho v^2$	aerodynamische stuwdruk	kg/m ²
$\frac{u}{v}$	relatieve omtreksnelheid	
$C_e = \frac{E}{O v q}$	energiecoëfficiënt	
$C_d = \frac{M}{O R q}$	momentencoëfficiënt	
$C_w = \frac{W}{O q}$	weerstandcoëfficiënt	

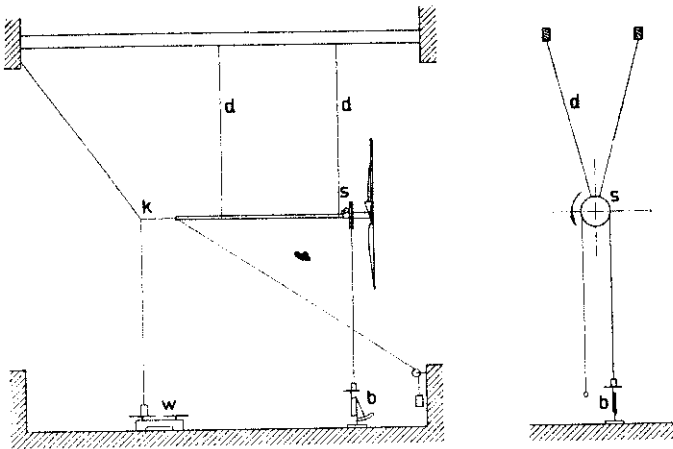


Fig. 2. Schema van een moderne meetinrichting voor windmolen-modelproeven met behulp van een wrijvingsrem. Het te beproeven model wordt vastgeschroefd aan een naaf, die op kogelringen draaibaar aan een vloeijzeren stang bevestigd is; de stang is beweeglijk opgehangen aan de staaldraden dd. Door een systeem van staaldraden, die in het knooppunt k samenkomen, wordt de aerodynamische weerstand van het model overgebracht op de weegschaal w. Het model wordt geremd door de wrijving aan de snaarschijf s; deze kan worden gemeten door middel van den briefweger b.

5. De roeden der drie modellen zijn vervaardigd van hout, terwijl voor de hekken vertind koperdraad van 1½ mm vierkante doorsnede is toegepast; de modelhekscheden werden dwars door de roeden gestoken, waarna aan het hekwerk de vereischte samenhang is gegeven door soldeeren. De borden en zeilen van de molenwieken op ware grootte zijn aan de modellen geïmiteerd, onder-

scheidenlijk door reepen berken-triplex van 1,1 mm dikte en door strooken glad papier. De hoeken, die de model-

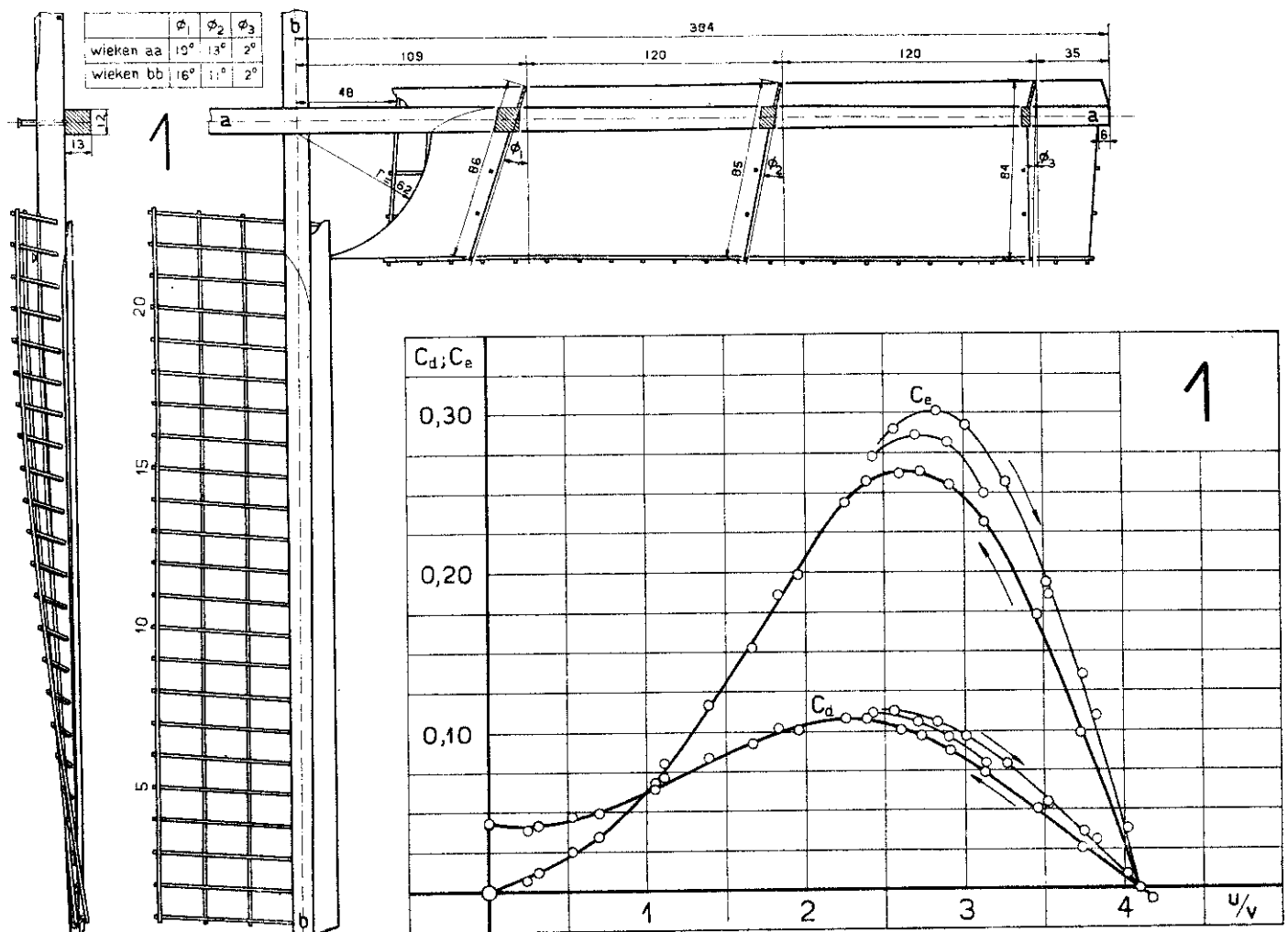


Fig. 3. Teekening van het model n°. 1, en graphische voorstelling van de gegevens der tabellen 3, 5 en 5a. De gegevens van tabel 4 zijn in de graphiek niet verwerkt, teneinde de overzichtelijkheid van de figuur niet te schaden.

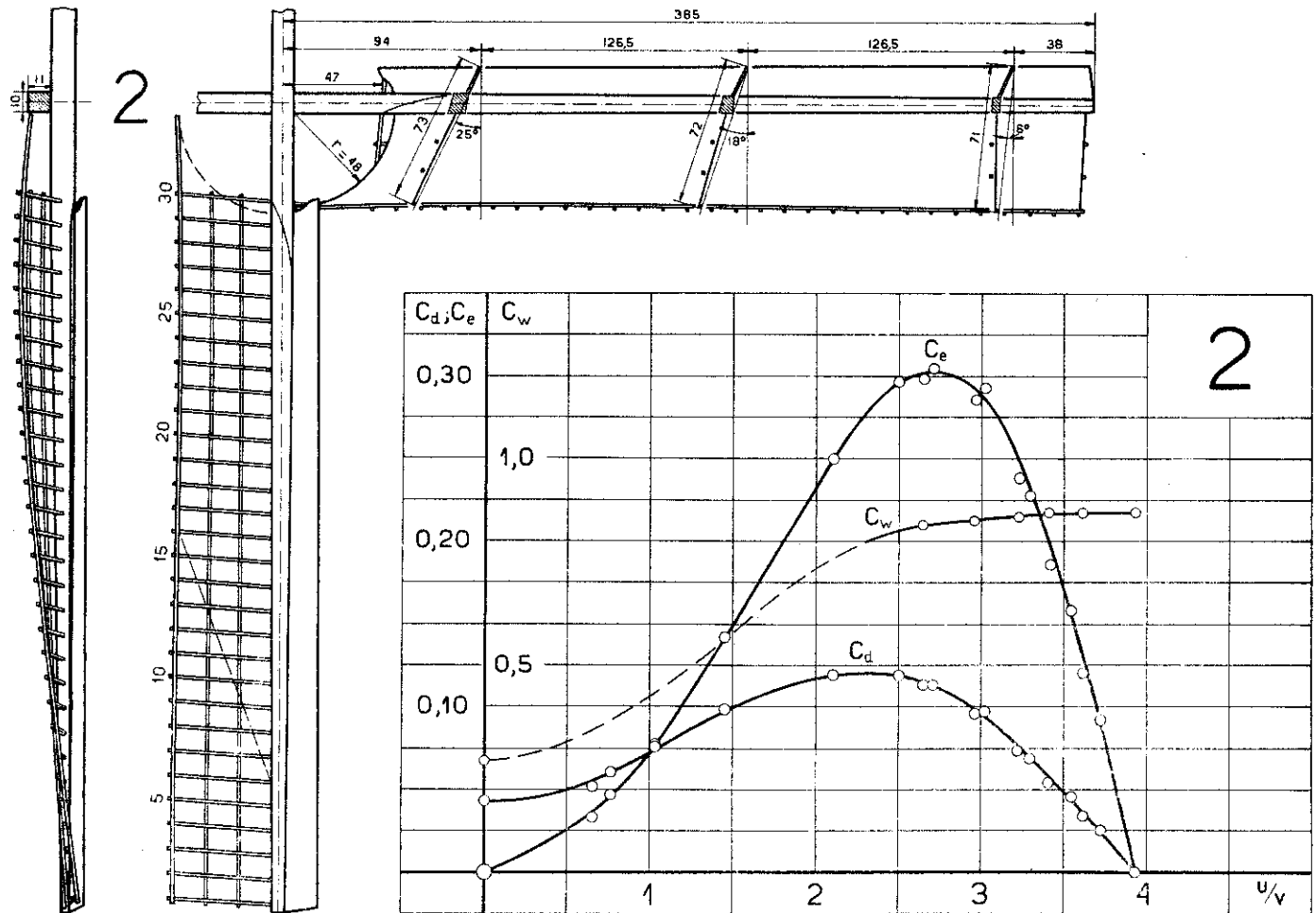


Fig. 4. Teekening van het model n°. 2 en graphische voorstelling van de gegevens der tabellen 6 en 7.

TABEL 2.

Hoeken tusschen de hekscheden van de drie modellen en de vlakken van beweging der model-molenwieken.

	hekschede no.	hoek in graden	zeils-breedte mm	wiek-breedte mm
Model n°. 1 wieken aa (zie fig.3) $R = 0,384$ m	1	$-3\frac{1}{2}$		
	3	0	62	84
	10	$11\frac{1}{2}$		
	11	18	62	85
	13	$15\frac{1}{2}$		
	19	19	62	86
	23	$17\frac{1}{2}$		
Model n°. 1 wieken bb (zie fig.3) $R = 0,384$ m	1	$-3\frac{1}{2}$		
	3	$-0\frac{1}{2}$	62	84
	10	$9\frac{1}{2}$		
	11	11	62	85
	13	18		
	19	16	62	86
	23	$14\frac{1}{2}$		
Model n°. 2 (zie fig. 4) $R = 0,385$ m	1	-4		
	4	0	48	71
	15	$15\frac{1}{2}$	48	72
	21	$22\frac{1}{2}$		
	26	25	48	78
	30	23		
Model n°. 3 (zie fig. 6) $R = 0,445$ m	1	-5		
	3	0	59	85
	12	18		
	14	15	58	84
	20	19		
	25	22	57	83
	30	24		

hekscheden met het bewegingsvlak van de wieken maken, zijn voor de drie modellen in tabel 2 opgegeven; in de figuren 3, 4 en 6 zijn verschillende profielen van de model-molenwieken in tekening gebracht, waarbij de totale breedte en scheefte der wieken aangegeven zijn, benevens de lengte der hekken en de wiekenlengte R . In verband met deze laatste afmeting dient te worden vermeld, dat de inwendige middellijn van de windtunnel, waarin de proefnemingen plaats vonden, 1600 mm bedraagt en dat de drie modellen alléén in den vrijen luchtstraal onderzocht zijn.

C. Proefnemingen in de windtunnel.

Proefnemingen zonder rem.

6. Tijdens de metingen in de windtunnel was een model vastgeschroefd aan een naaf, draaiende op kogelringen. Teneinde een inzicht te verkrijgen in de grootte van de wrijving aan de naaf is de hoeksnelheid gemeten,

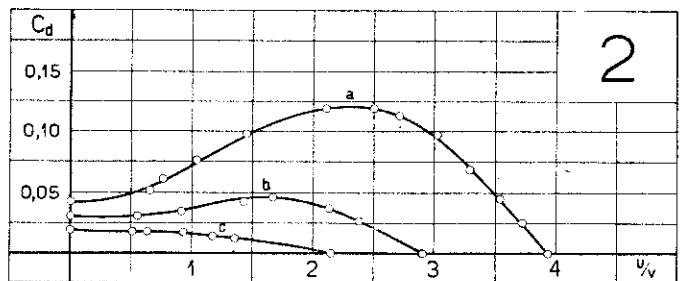


Fig. 5. Figuur, aangevende welke veranderingen het aerodynamisch moment ondergaat door verminderen, of zwichten der zeilen;

- a. model n°. 2 met vier volle zeilen;
- b. model n°. 2 met vier halve zeilen;
- c. model n°. 2 zonder zeilen.

De gegevens voor de lijnen a, b en c zijn onderscheidelijk aan de tabellen 7, 8 en 9 ontleend; de omtreksvorm van de „halve zeilen” is in fig. 4 door stippellijnen aangegeven.

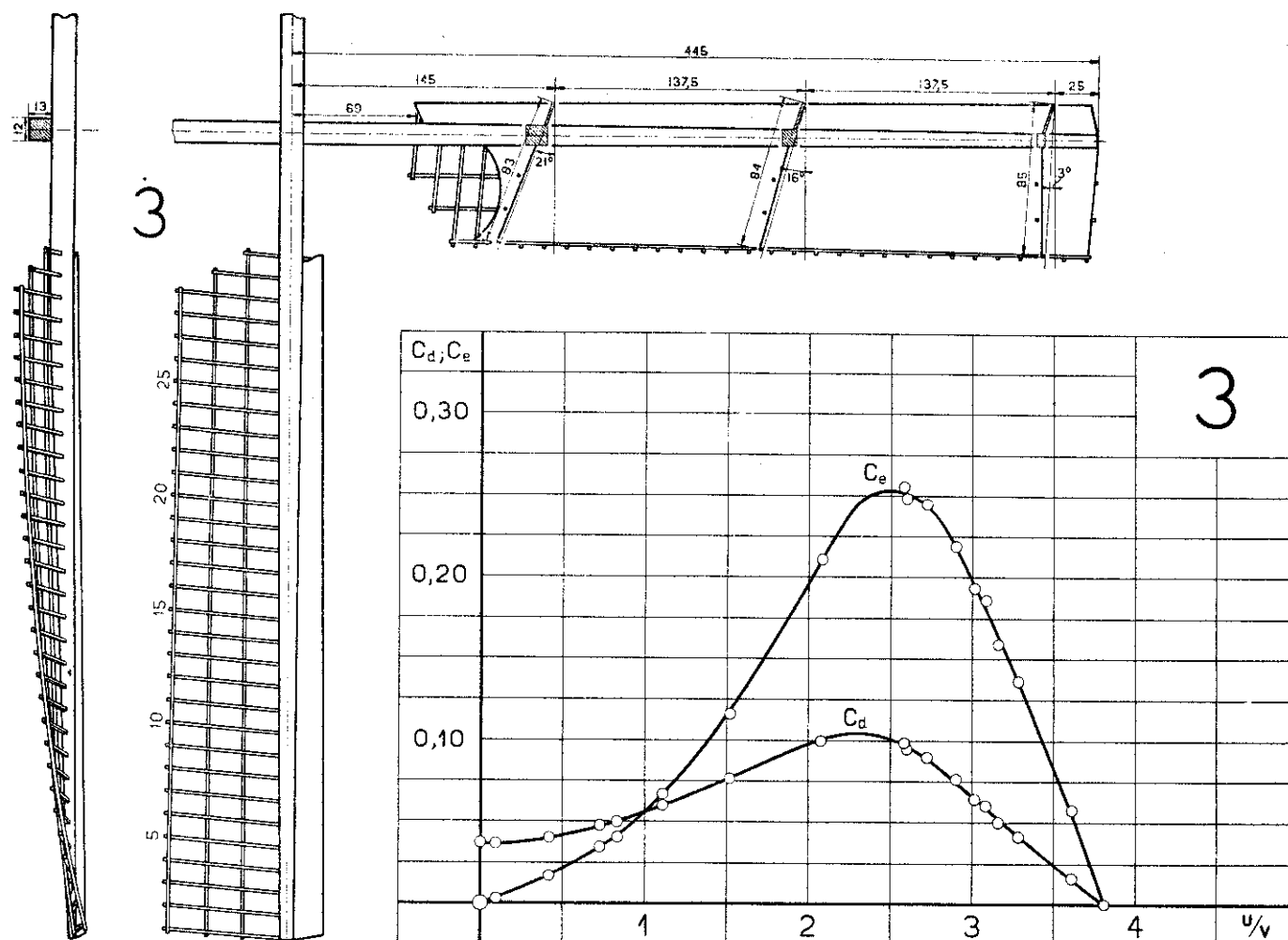


Fig. 6. Teekening van het model n^o. 3, en graphische voorstelling van de gegevens van tabel 10. De voorzijden van de roeden van dit model zijn zwak gebogen; de pijl van de bocht of sporing bedraagt voor de buitenroede 3 mm, voor de binnenroede 10 mm.

die het model n^o. 1 bij verschillende windsnelheden aannam, wanneer het alleen door deze wrijving belast werd. De anemometer was opgesteld in het omsloten gedeelte van den luchtstroom, op een afstand van 1,2 m vóór het model en circa 0,3 m vanaf de hartlijn van de tunnel.

De gemeten hoeksnelheid ω is herleid tot den dimensieloozen coëfficiënt $\frac{\omega \cdot R}{v}$ of $\frac{u}{v}$; de aldus herleide uitkomsten van de metingen zijn in tabel 3 gegeven. Uit de tabel blijkt, dat bij deze proefnemingen zonder rem de verhouding $\frac{u}{v}$ gemiddeld 4,10 bedroeg. De afwijking van het gemiddelde bedrag is voor geen der waarnemingen grooter dan 1 % terwijl een bepaald verloop van $\frac{u}{v}$ met de windsnelheid niet te onderkennen is; het mag daarom aannemelijk worden geacht, dat de afwijkingen voornamelijk het gevolg zijn van meetfouten en niet van de wrijving aan de naaf, waaruit zou volgen, dat deze uitermate gering is geweest.

Proefnemingen met behulp van een wrijvingsrem.

7. Met de modellen n^o. 1 en n^o. 2 zijn proeven genomen onder gebruikmaking van een meetinrichting, waarmee de resultante der aerodynamische krachten en momenten volledig bepaald kon worden. Het aantal componenten van de resultante bedraagt in het algemeen 6; bij willekeurige opstelling van de modellen zouden voor het meten van deze 6 componenten ook 6 balansen vereischt worden. Het aantal balansen kan tot twee worden teruggebracht, wanneer de modellen zoodanig opgesteld zijn, dat de toestand symmetrisch is ten opzichte van de hartlijn van de tunnel, omdat dan de richtingen van de resulterende kracht en het resulterende moment reeds van te voren vaststaan.

In fig. 2 is de wijze van opstelling der balansen schematisch aangegeven. Voor het remmen van een model werd gebruik gemaakt van een met het model meedraaiende snaarschijf, waarover een zijden snoer gehangen werd; de wrijving tusschen de snaarschijf en het snoer kon worden geregeld door het loshangende part van het snoer meer of minder met gewichten te belasten. De balans, waarmee deze wrijving gemeten werd, was een nauwkeurige briefweger; tijdens de proefnemingen kon aan den slinger van den briefweger oogenblikkelijk worden waargenomen of de wrijving constant was, omdat de minste verandering daarvan een beweging van den slinger tengevolge had.

Bij de metingen met het model n^o. 2 is gebleken, dat na een verandering van de belasting aan het snoer geruimen tijd (circa 5 minuten) verstrijken moest, voordat de briefweger geheel tot rust was gekomen; daarna konden het moment M , de weerstand W en de hoeksnelheid ω in betrekkelijk korten

TABEL 3.

Proefnemingen met het model n^o. 1 zonder rem, bij verschillende windsnelheden.

windsnelheid v	$\frac{u}{v}$
m/sec	
2,76	4,09
3,33	4,09
3,50	4,13
4,26	4,08
4,55	4,13
4,65	4,10
4,79	4,11
5,01	4,08

tijd gemeten worden. Verdere waarnemingen hadden betrekking op de sterkte van den luchtstroom in de tunnel, uitgedrukt in de *windsnelheid* v en in den *stuwdruk* q .

Bij de metingen met het model n°. 1 bleek de briefweger zelfs na tientallen minuten nog geen evenwichtsstand gevonden te hebben; het moment en de hoeksnelheid schenen aan voortdurende fluctuaties onderhevig te zijn. Merkwaardigerwijze was de weerstand daarbij nagenoeg onveranderlijk. Bij de wrijvings-remproeven met het model n°. 1 werden daarom alléén gemeten: de weerstand en de gemiddelde hoeksnelheid gedurende een betrekkelijk langdurig tijdsverloop, benevens de sterkte van den luchtstroom, terwijl de momentenmeting achterwege is gelaten.

Proefnemingen met behulp van een elektrische rem ⁸⁾.

8. De drie modellen zijn alle onderzocht met behulp van een kleine meetdynamo, die in de meetkamer van de windtunnel buiten den luchtstroom was opgesteld; de overbrenging van de beweging tusschen de molennaaf en de dynamo geschiedde daarbij door middel van een darmsnaar van ongeveer 1 mm dikte. In verband met de trekkracht van de snaar is bij de elektrische remproeven afgezien van het meten van den weerstand der modellen; overigens hadden de waarnemingen betrekking op dezelfde factoren, die bij de wrijvingsremproeven met het model n°. 2 gemeten werden.

Met de elektrische meetinrichting is verder aan het model n°. 2 onderzocht, welke veranderingen de eigenschappen van molenwieken ondergaan door halveering en door algeheele verwijdering van de zeilen; de omtreksvorm van de „halve zeilen” is in fig. 4 door stippellijnen aangegeven.

Bij al deze proefnemingen waren de modellen symmetrisch ten opzichte van de hartlijn van de tunnel opgesteld; het was dus een vereischte, dat de uitkomsten van de elektrische en de wrijvingsremproeven met het model n°. 2 geheel identiek zouden zijn.

D. Uitkomsten der proefnemingen.

9. De uitkomsten der proefnemingen in de windtunnel zijn herleid tot de dimensielooze coëfficiënten, zooals zij gedefinieerd zijn in publicaties op dit gebied van A. BETZ ⁷⁾; de definities luiden:

$$\text{de energiecoëfficiënt } C_e = \frac{E}{O v q}$$

$$\text{de momentencoëfficiënt } C_d = \frac{M}{O R q}$$

$$\text{de weerstandcoëfficiënt } C_w = \frac{W}{O q}$$

Alvorens de herleiding toe te passen op den weerstand, zooals deze met behulp van de meetinrichting volgens fig. 2 bepaald was, is daarvan de weerstand van de meetinrichting zonder een model afgetrokken; voor de metingen, die waren uitgevoerd bij snelle draaiing van de modellen, bedroeg deze correctie ongeveer 5%. Bij de herleiding van het moment M en de daaruit berekende energie $E = \omega M$ is de wrijving aan de molennaaf veronachtzaamd; het moment en de energie zijn dus herleid, zooals zij gemeten waren.

De einduitkomsten van de remproeven met de drie modellen zijn verzameld in de tabellen 4 tot en met 10, waarin de uitgewerkte waarnemingen in chronologische volgorde gerangschikt zijn.

10. In de figuren 3 tot en met 6 zijn voor de drie modellen de coëfficiënten C_d en C_e graphisch voorgesteld als functies van de relatieve omtreksnelheid $\frac{u}{v}$; bij de

⁸⁾ De elektrische meetinrichting, die aan den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart gebezigd wordt voor het onderzoek van windmolen-modellen, is uitvoerig beschreven door A. G. VON BAUMHAUER in het R. S. L. Rapport A 258 (*De Ingenieur*, 1 September 1933, blz. W. 160)

⁷⁾ *Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen*, gepubliceerd door L. PRANDTL en A. BETZ; deel III, blz. 140; deel IV, blz. 118.

TABEL 4.

Proefnemingen met het model n°. 1 met behulp van een wrijvingsrem; windsnelheid $v = 4$ m/sec.

$\frac{u}{v}$	C_w
3,91	1,00
3,73	0,97
3,56	0,98
3,35	0,97
3,15	0,96
3,05	0,96
2,89	0,97
2,60	0,93
0,00	0,31

TABEL 5.

Proefnemingen met het model n°. 1 met behulp van een meetdynamo; windsnelheid $v = 5$ m/sec.

$\frac{u}{v}$	C_d	C_e
0,00	0,043	0,000
0,31	0,041	0,013
0,70	0,049	0,034
1,05	0,064	0,068
1,39	0,084	0,117
1,67	0,092	0,153
1,96	0,101	0,199
2,26	0,108	0,244
2,56	0,113	0,290
2,83	0,106	0,301
3,01	0,097	0,292
3,27	0,079	0,257
3,52	0,055	0,194
3,75	0,036	0,135
4,18	—0,007	—
3,74	0,026	0,099
3,46	0,050	0,173
3,13	0,074	0,232
2,91	0,088	0,256
2,73	0,097	0,264
2,60	0,101	0,262
2,39	0,108	0,258

TABEL 5a.

Proefnemingen met het model n°. 1 met behulp van een meetdynamo; windsnelheid $v = 5$ m/sec.

$\frac{u}{v}$	C_d	C_e
0,00	0,041	0,000
0,25	0,039	0,010
0,53	0,047	0,025
1,11	0,072	0,080
1,83	0,102	0,186
2,43	0,112	0,273
2,70	0,106	0,286
2,90	0,097	0,282
3,13	0,080	0,250
3,53	0,053	0,186
3,83	0,029	0,109
4,02	0,010	0,039

beschouwing dezer figuren ziet men onmiddellijk, dat de aerodynamische karakteristieken van de modellen onderling aanzienlijke verschillen ⁹⁾, waaruit dus blijkt, dat niet aan

⁹⁾ Bij de onderlinge vergelijking van de uitkomsten der proefnemingen met de drie modellen dient men rekening te houden met de omstandigheid, dat de wielengte R niet voor alle drie de modellen even groot is. De middellijn van de windtunnel is beperkt in verhouding tot de vlucht der modelmolenwieken, hetgeen waarschijnlijk eenigen invloed heeft gehad op de uitkomsten van de metingen; deze invloed zou dan het grootste zijn geweest voor het model met de langste wieken, dat is het model n°. 3.

TABEL 6.

Proefnemingen met het *model n° 2* met behulp van een wrijvingsrem; windsnelheid $v = 3$ m/sec.

$\frac{u}{v}$	C_w	C_d	C_e
3,98	0,87	0,000	0,000
3,61	0,87	0,038	0,120
3,41	0,87	0,054	0,185
3,22	0,86	0,074	0,238
2,97	0,85	0,096	0,284
2,65	0,84	0,118	0,299
0,00	0,27	—	—

TABEL 7.

Proefnemingen met het *model n° 2* met behulp van een meetdynamo; windsnelheid $v = 5$ m/sec.

$\frac{u}{v}$	C_d	C_e
0,00	0,043	0,000
0,65	0,052	0,034
0,76	0,061	0,047
1,03	0,076	0,077
1,45	0,098	0,142
2,10	0,119	0,250
2,50	0,119	0,297
2,71	0,113	0,305
3,02	0,097	0,293
3,93	0,000	0,000
3,72	0,025	0,092
3,54	0,045	0,158
3,29	0,069	0,228

TABEL 8.

Proefnemingen met het *model n° 2* met behulp van een meetdynamo; windsnelheid $v = 7$ m/sec; de vier zeilen gehalveerd.

$\frac{u}{v}$	C_d	C_e
2,90	0,000	0,000
2,38	0,026	0,061
2,13	0,037	0,079
1,67	0,046	0,077
1,43	0,043	0,062
0,91	0,035	0,032
0,55	0,031	0,017
0,00	0,031	0,000

TABEL 9.

Proefnemingen met het *model n° 2* met behulp van een meetdynamo; windsnelheid $v = 6$ m/sec; de vier zeilen geheel verwijderd.

$\frac{u}{v}$	C_d	C_e
2,16	0,000	0,000
1,36	0,012	0,016
1,17	0,014	0,017
0,91	0,017	0,015
0,64	0,018	0,012
0,51	0,018	0,009
0,00	0,019	0,000

TABEL 10.

Proefnemingen met het *model n° 3* met behulp van een meetdynamo; windsnelheid $v = 7$ m/sec.

$\frac{u}{v}$	C_d	C_e
0,00	0,037	0,000
0,09	0,036	0,003
0,42	0,040	0,017
0,83	0,050	0,041
0,72	0,048	0,035
1,11	0,060	0,067
1,52	0,076	0,116
2,58	0,099	0,256
2,72	0,090	0,245
3,08	0,060	0,186
3,16	0,050	0,159
3,81	0,000	0,000
3,61	0,016	0,057
3,28	0,041	0,136
3,01	0,064	0,193
2,90	0,076	0,219
2,60	0,095	0,249
2,09	0,100	0,210

blijklijk wordt de stroomingstoestand van de lucht niet door de hoeksnelheid en de windsnelheid alléén bepaald, maar zijn er nog andere, onbekende omstandigheden, die hierbij een rol spelen, terwijl de verschillende mogelijke stroomingstoestanden ieder een groote mate van stabiliteit bezitten.

Het modelonderzoek leidt dus tot de gevolgtrekking, dat een algemeene omschrijving van de eigenschappen der oud-Hollandsche molenwieken noodzakelijkerwijze eenigszins vaag zal zijn. Een dergelijke omschrijving zal hier achterwege worden gelaten, daar het aantal der onderzochte modellen te gering is om de resultaten van het onderzoek op volledigheid aanspraak te kunnen doen maken; opgemerkt moge slechts worden, dat deze resultaten niet in tegenspraak zijn met de uitkomsten van de modelproeven van JOHN SMEATON, zooals zij werden samengevat in de inleiding tot dit rapport.

alle oud-Hollandsche molenwieken dezelfde eigenschappen toegeschreven mogen worden. Bij de proefnemingen met het *model n° 1* is verder geconstateerd, dat met een bepaalde windsnelheid bij eenzelfde hoeksnelheid van het model verschillende momenten kunnen optreden; klaar-

Rapport A. 426.

Het loslaten van de strooming bij groote invalshoeken van een vleugel

door

ir. C. KONING en ir. A. BOELEN.

Rapport A. 426. Le décollement des filets fluides sur l'extrados d'une aile.

Report A. 426. Separation of the flow at large angles of incidence.

Bericht A. 426. Die Ablösung an einem Flügel bei grossen Anstellwinkeln.

RAPPORT A. 426

Het loslaten van de strooming bij groote invalshoeken van een vleugel.

Uittreksel.

De in het rapport beschreven proeven vormen het eerste deel van een uitvoeriger onderzoek naar den invloed van den vleugelvorm op het loslaten van de strooming.

De resultaten zijn echter ook op zichzelf beschouwd van belang, daar zij karakteristieke verschillen toonen in het gedrag bij verschillende waarden van het Reynolds'sche getal. De oorzaak hiervan ligt waarschijnlijk in den aard van de strooming in de grenslaag.

RAPPORT A. 426

Le décollement des filets fluides sur l'extrados d'une aile.

Résumé.

1. *Introduction.*

Les expériences font partie de recherches plus étendues sur l'influence de la forme de l'aile sur le décollement.

2. *Modèle, méthode d'expérience.*

Les essais furent faits avec une maquette d'une aile de forme conventionnelle (fig. 1).

La région de décollement fut déterminée pour un nombre d'angles d'attaque et pour quelques vitesses. Les observations furent faites à l'aide d'un fil de soie tenu à petite distance (1 à 3 mm) de la surface.

3. *Résultats (fig. 2).*

Pour la vitesse la plus petite (5,3 m/sec) le décollement commence à un angle d'attaque inférieur à celui pour la vitesse la plus grande (23,7 m/sec). La forme de la région de décollement est tout à fait différente en ces deux cas. Pour des vitesses intermédiaires ces formes de décollement furent observées toutes les deux.

4. *Origine des différences.*

Les différences observées doivent être attribuées probablement au caractère de l'écoulement dans la couche limite, étant laminaire pour des vitesses petites, par contre partiellement turbulente pour des vitesses plus élevées.

5. *Récherches subséquentes.*

Des essais seront faits avec des modèles d'aile, différant en gauchissement seulement.

REPORT A. 426

Separation of the flow at large angles of incidence.

Summary.

1. *Introduction.*

The experiments form the introductory part of an investigation on the influence of the wing form on separation.

2. *Model, method of experiment.*

The experiments were made with a model of a tapered wing of conventional form (fig. 1).

The boundary of the region, on which separation occurs, was determined for a number of angles of attack and some values of the velocity. The character of the flow was observed by means of a small silk windvane, held at a short distance (1 to 3 mm) above the surface.

3. *Results (fig. 2).*

The angle of incidence, at which separation starts, is smaller at low (5,3 m/sec) than at high velocity (23,7 m/sec).

The form of the region of separation is quite different in these two cases. At intermediate values of the velocity, both forms of separation were observed.

4. *Cause of the phenomena observed.*

The differences in character of the separation are probably due to the behaviour of the boundary layer, being laminar at low and partly turbulent at high velocity.

5. *Further development.*

Experiments are made with a set of wing models, differing in washout only.

BERICHT A. 426

Die Ablösung an einem Flügel bei grossen Anstellwinkeln.

Zusammenfassung.

1. *Einführung.*

Die Versuche bilden den Anfang einer Untersuchung über den Einfluss der Flügelform auf die Ablösung.

2. *Modell, Versuchsverfahren.*

Es wurde ein Modell eines Trapezflügels von üblicher Form benutzt. Die Grenze des Ablösungsgebietes wurde festgestellt mittels eines seidenen Fadens, der kurz über (1 bis 3 mm) der Oberfläche gehalten wurde.

3. *Resultate.*

Die Ablösung fängt bei kleiner Geschwindigkeit (5,3 m/sec) bei einem kleineren Anstellwinkel an als bei grosser Geschwindigkeit (23,7 m/sec). Die Form des Ablösungsgebietes ist in diesen Fällen ganz verschieden. Bei zwischenliegenden Geschwindigkeiten wurden beide Ablösungsformen beobachtet.

4. *Ursache der Unterschiede.*

Die beobachteten Unterschiede in Ablösung hängen wahrscheinlich mit dem Charakter der Strömung in der Grenzschicht zusammen, die bei kleiner Geschwindigkeit laminar, bei höherer dagegen teilweise turbulent ist.

5. *Fortsetzung der Versuche.*

Weitere Versuche werden ausgeführt mit Flügelmodellen, die nur in Verwindung verschieden sind.

Het loslaten van de strooming bij groote invalshoeken van een vleugel

door

ir. C. KONING en ir. A. BOELEN.

Rapport A. 426. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

In het onderstaande worden eenige proeven beschreven, waarbij nagegaan werd, hoe het loslaten van de strooming zich bij vergroting van den invalshoek uitbreidt. Hierbij werden karakteristieke verschillen tusschen het gedrag bij lage en hogere waarden van het REYNOLDS'sche getal gevonden, terwijl bij tusschengelegen waarden twee toestanden bestaanbaar bleken te zijn. Een mogelijke oorzaak van deze verschijnselen wordt in het kort besproken.

1. Inleiding.

Wordt de invalshoek van een vleugel vergroot, dan zal, zolang deze hoek onder een bepaalde grens blijft, bij constant gehouden snelheid, de lift ongeveer lineair met den invalshoek toenemen. Na overschrijden van deze grens blijft de lift weliswaar voorloopig aangroeien, de toename wordt echter geleidelijk aan minder snel, totdat tenslotte een tweede grens, de zoogenaamde kritische invalshoek, bereikt wordt, waarboven een verdere vergroting van den invalshoek gepaard gaat met een afname van de lift. Ook het verloop van andere grootheden, b.v. de weerstand, wijst er op, dat tusschen de beide genoemde grenzen een overgangsgebied ligt, waarin het karakter van de strooming verandert. Reeds een kwalitatief onderzoek van de strooming met windvaantjes toont aan, dat dit inderdaad het geval is. Bij kleine invalshoeken blijkt de strooming langs boven- en ondervlak van den vleugel geheel aan te liggen, hoogstens buigt zij in de onmiddellijke omgeving van den achterrand eenigszins van het bovenvlak af. Zoo dra echter bij vergroting van den invalshoek deze in het bovenbedoelde gebied komt, wordt dit verschijnsel duidelijker zichtbaar. Op het achterste deel van het bovenvlak volgt de strooming nu het oppervlak niet meer, doch tusschen beide vormt zich een wervelgebied: „de strooming laat los.” Bij de gebruikelijke vormen van vleugels treedt dit verschijnsel meestal het eerst in het midden van den vleugel op. Bij verdere vergroting van den invalshoek breidt zich het gestoorde gebied zoowel zijdelings als naar voren uit, terwijl tevens de wervellaag dikker wordt en de intensiteit van de werveling lijkt toe te nemen. Bij en boven den kritischen invalshoek is de strooming langs het overgrote deel van het bovenvlak gestoord en is dus het karakter ervan geheel verschillend van dat bij kleine invalshoeken.

Het hier beschreven verschijnsel is reeds lang bekend, evenals de oorzaak ervan, die in punt 4 ter sprake zal komen. Tot nu toe is echter weinig aandacht besteed aan de wijze, waarop de loslating zich bij vergroting van den invalshoek uitbreidt. Toch is dit om verschillende redenen van belang, waarvan hier in het bijzonder de invloed ge-

noemd mag worden, die deze verschijnselen hebben op de dwarsstabiliteit en -besturing van het vliegtuig bij groote invalshoeken. Als een begin in de richting van het verzamelen van experimenteel materiaal op dit gebied werden in de tunnel eenige proeven uitgevoerd met een vleugelmodel van een veel gebruikten vorm.¹⁾ Behalve in dezen zin hebben de verkregen resultaten echter ook nog in ander opzicht beteekenis. Het bleek namelijk, dat bij verschillende waarden van de snelheid, dus van het Reynolds'sche getal, de loslating zich op verschillende wijze uitbreidde terwijl bij sommige snelheden twee toestanden mogelijk waren. Dit is in overeenstemming met hetgeen bij proeven, waarbij de op een vleugel werkende krachten gemeten worden, vaak gevonden wordt. Hierbij hebben dan bij verschillende snelheden de kritische invalshoek en de daarbij behorende maximum-lift-coëfficiënt verschillende waarden, terwijl soms ook bij éénzelfden invalshoek en snelheid twee duidelijk verschillende waarden van de lift waargenomen kunnen worden.

2. Beschrijving van model en wijze van onderzoek.

Het model, dat bij het onderzoek gebruikt werd, is met eenige hoofdmaten in fig. 1 gegeven. Het was een model van een tapschen vleugel met prismatisch middendeel en ongeveer halfcirkelvormig afgeronde uiteinden. De groot-

¹⁾ Ook met de behandeling van een andere zijde van dit vraagstuk, namelijk de invloed van den vleugelvorm op het verloop van den aerodynamischen invalshoek over de vleugelbreedte, werd een aanvang gemaakt. De eerste resultaten van dit onderzoek zijn gepubliceerd in het *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, 1933, n^o. 2, S. 43.

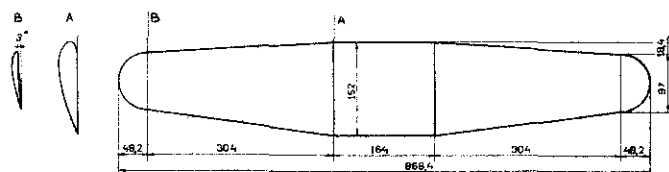


Fig. 1. Het bij de proeven gebruikte vleugelmodel.

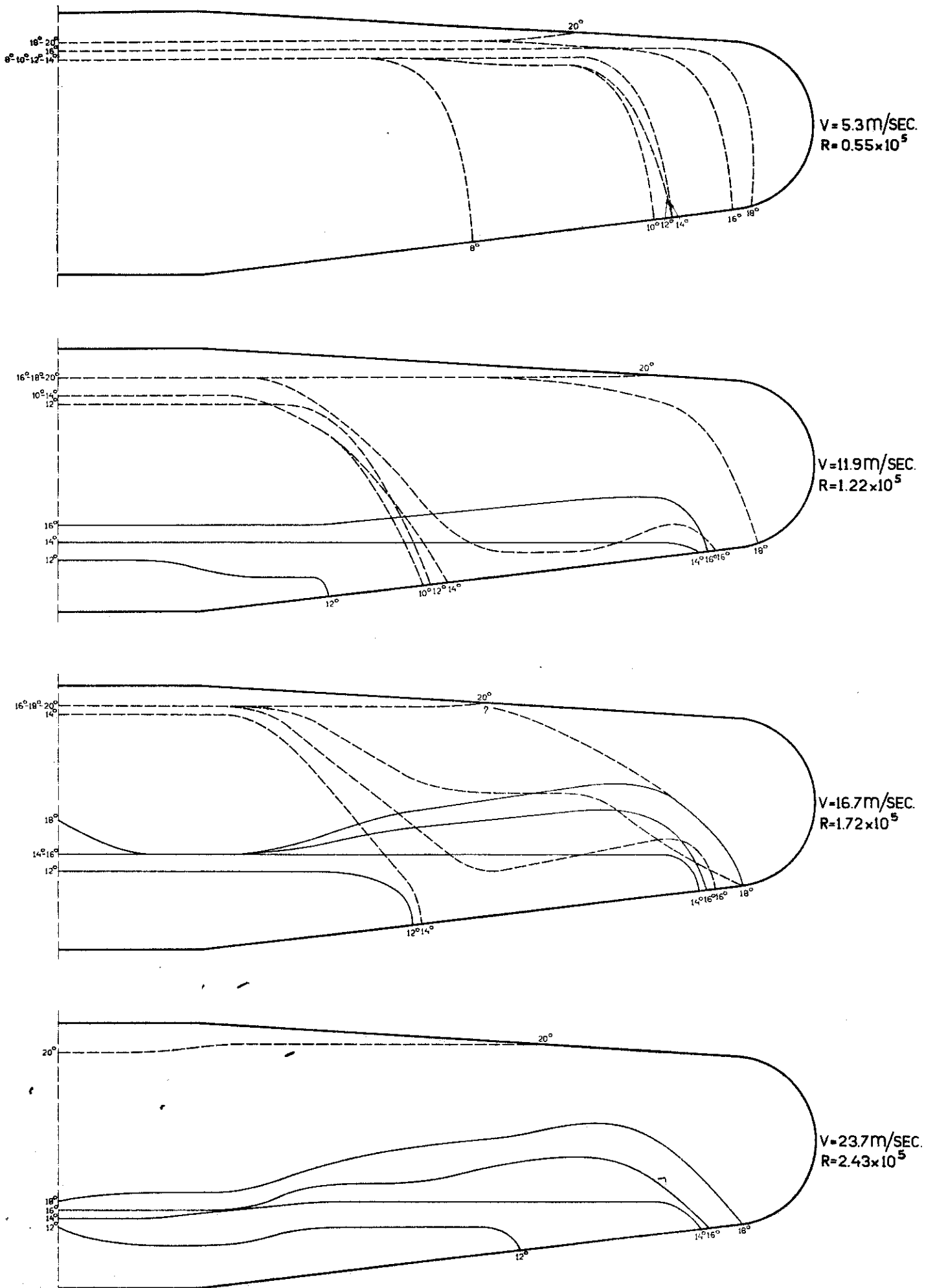


Fig. 2. De scheidingslijnen tussen de gebieden van aanliggende en losgelaten strooming. De getallen bij de lijnen geven den invalshoek aan, de aard van de lijnen den toestand (stippellijn = toestand I; getrokken lijn = toestand II).

ste dikte van het middenprofiel (A) was 19,9 % van de koorddiepte en lag op 30 % van deze achter den voorrand. Voor het profiel aan het uiteinde (B) waren deze waarden 7,6 % en 30 %.

Bij het onderzoek was het model zoodanig aan draden in den vrijstraal opgehangen, dat de invalshoek veranderd kon worden. Op den vleugel was een vierkantennet aangegeven, waardoor een eenvoudige plaatsbepaling mogelijk was. Het karakter van de strooming werd in punten, die dicht boven het oppervlak lagen (1—3 mm), bepaald met een windvaantje. Het hierbij gebruikte windvaantje was een zijden draad van ongeveer 3 cm lengte, bevestigd aan een dun metalen staafje. Het werd met de hand vastgehouden, waardoor het mogelijk werd door verplaatsing ervan boven het oppervlak van den vleugel het overgangspunt te vinden tusschen gladde strooming (rustig windvaantje) en losgelaten strooming (onrustig windvaantje). Door bij eenzelfde invalshoek meerdere van deze punten te zoeken werd de bij dezen hoek behorende scheidingslijn gevonden tusschen de gebieden van gladde en van losgelaten strooming. Deze lijnen werden bij vier snelheden bepaald voor de met 2° opklimmende invalshoeken, gelegen in het gebied tusschen den hoek, waarbij voor het eerst loslating waargenomen werd en dien, waarbij de strooming over nagenoeg de geheele vleugelbreedte gestoord was. De snelheden waren ongeveer 5, 12, 17 en 24 m/sec., de bijbehorende waarden van het Reynolds'sche getal respectievelijk $0,55, 1,22, 1,72$ en $2,43 \times 10^5$. Als lengtemaat werd hierbij de grootste koorddiepte van het model (0.152 m) aangenomen.

Het onderzoek werd beperkt tot één vleugelhelft, daar aangenomen kon worden, dat, waar het model en zijn stand ten opzichte van de strooming symmetrisch waren, ook de strooming zelve symmetrisch zal zijn.

3. Resultaten.

In fig. 2 zijn de gevonden scheidingslijnen tusschen het losgelaten en het aanliggende deel van de strooming gegeven. De getallen bij deze lijnen geven de bijbehorende invalshoeken aan.

Het blijkt, dat de loslating zich bij vergroting van den invalshoek op twee verschillende wijzen kan uitbreiden.

Bij de eerste („toestand I”), die bij lage snelheid waargenomen werd (zie $V = 5.3$ m/sec.), laat, zoodra de loslating begint, de strooming op het middendeel van den vleugel nagenoeg gelijktijdig over het grootste deel van de diepte van het profiel los. Bij vergroting van den invalshoek breidt het gestoorde gebied zich zijdelings uit, de diepte in de stroomingsrichting blijft echter nagenoeg onveranderd.

Bij de tweede („toestand II”) daarentegen, die bij hogere snelheid optrad (zie $V = 23.7$ m/sec.), beperkt de loslating zich in het begin tot de omgeving van den achterrand. Bij vergroting van den invalshoek vindt aanvankelijk hoofdzakelijk uitbreiding in zijdelingsche richting plaats terwijl de diepte slechts langzaam toeneemt. Eerst bij veel grotere hoeken beweegt de scheidingslijn zich snel naar voren.

Terwijl bij de hier aangegeven uiterste waarden van de snelheid steeds eenzelfde toestand optrad, bleken bij de tusschen gelegen snelheden (11.9 en 16.7 m/sec.) twee toestanden mogelijk te zijn, die beide min of meer labiel waren. De eene had geheel hetzelfde karakter als de boven beschreven toestand II, de andere kwam in hoofdzaken overeen met toestand I. In enkele gevallen gingen deze toestanden zonder aanwijsbare oorzaak in elkaar over. Meestal trad echter toestand I op, waarbij dan toestand II verkregen kon worden door het omslaan in te leiden door de strooming vóór den vleugel te verstoren. Na het intreden van toestand II was deze over het algemeen tamelijk stabiel. De indruk werd verkregen, dat bij grotere snelheid toestand II, bij kleinere daarentegen toestand I meer stabiel is. Dit is in overeenstemming met de waarnemingen bij de uiterste waarden van de snelheid: bij 23.7 m/sec

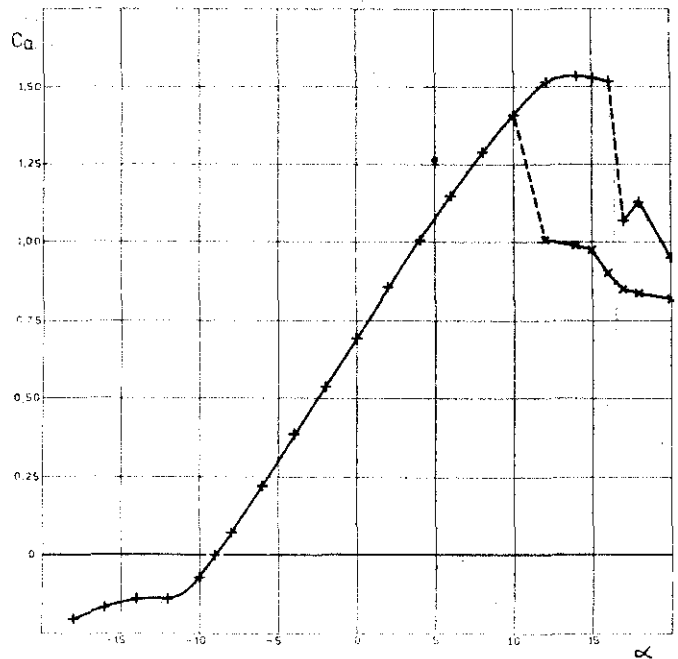


Fig. 3. Voorbeeld van een geval, waarbij bij eenzelfde snelheid dubbele waarden van den liftecoëfficiënt gevonden werden.

werd toestand I in het geheel niet meer waargenomen, terwijl het bij 5.3 m/sec. niet mogelijk bleek door verstoring van de strooming toestand II te doen intreden.

In de inleiding werd reeds gewezen op de overeenstemming van de hier beschreven verschijnselen en die, welke soms bij krachtenmeting gevonden werden. Fig. 3 geeft als voorbeeld een geval, waarbij bij grotere invalshoeken twee verschillende waarden van den liftecoëfficiënt gevonden werden, hetgeen dus ook wijst op de mogelijkheid van twee naast elkaar bestaande stroomingstoestanden.

4. Oorzaken van het verschillende gedrag bij verschillende snelheden.

Over de oorzaak van de hier beschreven verschijnselen kan zonder nader onderzoek van de strooming weinig met zekerheid gezegd worden. Toch moge hier de richting, waarin zij waarschijnlijk gezocht moet worden, in het kort besproken worden. Deze beschouwingen blijven opzettelijk aan de oppervlakte. Voor diepergaande kan verwezen worden naar de in de opgave aan het einde van het rapport aangegeven literatuur, welke opgave echter geenszins als een volledige bedoeld is.

Zooals bekend is, speelt bij loslatingsverschijnselen de onmiddellijk langs het lichaam stroomende laag lucht of vloeistof, die door wrijvingsinvloed vertraagd wordt, de zoogenaamde „grenslaag”, een belangrijke rol. Neemt langs het oppervlak van het lichaam de druk in de stroomingsrichting toe, dan kan zich het volgende verschijnsel voordoen. De lucht buiten de grenslaag, die slechts in zeer geringe mate door de wrijving beïnvloed wordt, heeft voldoende snelheid om deze druktoename te overwinnen. De lucht in de grenslaag daarentegen, die belangrijk meer vertraagd wordt, is hiertoe niet in staat. Er ontstaat nu in de grenslaag een tegenstrooming, d.w.z. de lucht gaat zich hier bewegen in een richting, tegengesteld aan die in de buitenstrooming. Als gevolg hiervan wordt deze laatste van het oppervlak van het lichaam weggedrongen en er ontstaat een wervelgebied tusschen het lichaam en de ongestoorde buitenstrooming, in het kort er treedt loslating op. Echter niet in ieder geval, waar een druktoename bestaat, zal loslating optreden. Voorwaarde hiervoor is in de eerste plaats, dat deze, of juist haar verhouding tot den stuwdruk, een door de verdere omstandigheden bepaalde waarde overschrijdt, verder zal ook de aard van de grenslaag van betekenis zijn. Terwijl de druktoename afhankelijk is van de buitenstrooming, dus van den vorm

van het lichaam, is de aard van de grenslaag hoofdzakelijk bepaald door hetgeen zich in deze zelve afspeelt. Waar nu in dit gebied naast den invloed van de traagheid ook die van de wrijving van beteekenis is, is te verwachten, dat de toestand van de grenslaag en dus ook de wijze, waarop loslating optreedt, afhankelijk is van de waarde van het Reynolds'sche getal. Immers dit getal kan beschouwd worden als een maat voor de verhouding tusschen de traagheids- en wrijvingskrachten.

Waar hier gesproken werd over den aard van de grenslaag werd niet alleen gedacht aan de mate, waarin deze, als geheel genomen, vertraagd wordt, doch ook aan hetgeen haar structuur genoemd zou kunnen worden. In de grenslaag is namelijk tweërlei strooming mogelijk, deze kan „laminair” of wel „turbulent” zijn. In de laminaire grenslaag is de strooming nagenoeg stationnair, de vloeistofdeeltjes bewegen zich in banen evenwijdig aan het oppervlak van het lichaam. In de turbulente daarentegen treden, als in iedere turbulente strooming, belangrijke schommelingen in de snelheid op, terwijl een voortdurende uitwisseling van deeltjes tusschen de verschillende lagen plaats heeft. Bij lage waarden van het Reynolds'sche getal is de grenslaag langs het geheele oppervlak van het lichaam laminair, bij hogere daarentegen alleen langs het voorste gedeelte, terwijl zij langs het verdere deel turbulent is. Bij toename van het Reynolds'sche getal verschuift het overgangspunt naar voren, terwijl de ligging ervan overigens ook beïnvloed wordt door de mate van turbulente in de buitenstrooming.

Een karakteristiek verschil tusschen de laminaire en de turbulente grenslaag schijnt nu te zijn, dat eerstgenoemde meer neiging tot loslaten vertoont. Dit brengt het volgende mede. Een lichaam zij gegeven van zoodanigen vorm en stand, dat de strooming in de omgeving van een bepaald punt loslaat, zoolang de grenslaag tot aan dit punt laminair is. Wordt nu, onder overigens gelijk blijvende omstandigheden, de toestand, b.v. door vergroting van de snelheid en dus van het Reynolds'sche getal, zoodanig gewijzigd, dat het omslaan van de laminaire in de turbulente grenslaag reeds vóór genoemd punt plaats heeft, dan zal zich het loslatingspunt verder naar achteren verplaatsen of mogelijk zelfs in het geheel geen loslating optreden.

Na deze inleiding ligt de volgende verklaring van de boven beschreven verschijnselen voor de hand, doch er zij nadrukkelijk op gewezen, dat zij nog een bevestiging door nader onderzoek behoeft.

Bij lage waarden van het Reynolds'sche getal R is de grenslaag over de geheele vleugeldiepte of over een belangrijk deel ervan laminair. De bij betrekkelijk lage invalshoeken (8°) bestaande druktoename is reeds voldoende om loslating te weeg te brengen en deze treedt dan dadelijk over een groot deel van de vleugeldiepte op (toestand I).

Bij hoge waarden van R is de grenslaag over een groot deel van de vleugeldiepte turbulent, er is een grootere druktoename noodig, om loslating te doen ontstaan, zoodat deze eerst bij een tusschen 10° en 12° gelegen invalshoek

begint en zich bovendien voorloopig beperkt tot het achterste deel van den vleugel (toestand II).

Het bestaan van twee mogelijke toestanden naast elkaar bij de tusschenwaarden van R is in dezen gedachtengang verklaarbaar als gevolg van verplaatsingen van het punt, waar de laminaire grenslaag overgaat in de turbulente, die veroorzaakt kunnen worden door toevalligheden in de buitenstrooming. Ook het feit, dat in sommige gevallen toestand II, volgens het bovenstaande dus de toestand, waarbij de grenslaag overwegend turbulent is, verkregen kon worden door opzettelijk verstoren, dus turbulent maken, van de buitenstrooming, past in deze verklaring.

Deze beschouwingen versterken het vermoeden, dat bij waarden van het Reynolds'sche getal, grooter dan de hier beschouwde, dus ook op ware grootte, de wijze van loslaten in groote trekken overeen zal komen met den hier beschreven toestand II.

Over de wijze, waarop de loslating zich zijdelings uitbreidt, behoeft hier weinig gezegd te worden. Uit den aard der zaak is zij afhankelijk van het verloop van profielvorm en aerodynamischen invalshoek en dus voor iederen vleugelvorm verschillend.

(Afgesloten Juni 1933).

LITERATUUROPGAVE.

Theorie van de laminaire grenslaag.

1. PRANDTL, L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verh. d. III Intern. Math. Kongresses, Heidelberg, 1904. (Leipzig, 1905, S 484), ook in: Prandtl-Betz. Vier Abh. z. Hydrodyn. u. Aerodyn. (Göttingen 1927).
2. TOLLMIE, W. Grenzschichttheorie. Handb. d. Experimental-Physik, Bnd. 4, 1 Teil. (Leipzig 1931, S 241).

Theorie van de turbulente grenslaag.

3. VON KÁRMÁN, TH. Über laminare und turbulente Reibung, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. Bnd 1 (1923, S 233).

Experimentele onderzoekingen over de grenslaag.

4. BURGERS, J. M. and VAN DER HEGGE ZYNEN, B. G. Preliminary measurements of the distribution of the velocity of a fluid in the immediate neighbourhood of a plane, smooth surface. Verh. d. Kon. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam, (Eerste Sectie), Deel XIII, n°. 3 (1924).
5. VAN DER HEGGE ZYNEN, B. G. Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface. Thesis Delft. (1924).
6. BURGERS, J. M. The motion of a fluid in the boundary layer along a plane smooth surface. Proc. First Int. Congr. f. Appl. Mech. Delft 1924 (Delft 1925, p. 113).
7. Het omslaan van de laminaire in de turbulente grenslaag. BURGERS, J. M. Over het omslaan van den laminairen stroomingstoestand in de grenslaag in den turbulenten toestand. Kon. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam, Versl. v. d. Gew. Verg. d. Wis- en Nat. Afd., Deel XXXII, n°. 8. Zie ook 4, 5 en 6.

De invloed van den aard van de grenslaag op het loslaten van de strooming.

8. VON KÁRMÁN, TH. Quelques problèmes actuels de l'aérodynamique. Journées Techn. Intern. de l'Aéronautique (1932).

RAPPORT S. 67.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. II.

door

Dr. Ir. A. VAN DER NEUT.

Rapport S. 67: L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. II.

Report S. 67: The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. II.

Bericht S. 67: Der Einfluss der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. II.

RAPPORT S. 67.

De invloed van het ribverband en de bekleding op de sterkte van vliegtuigvleugels. II.

Uittreksel.

Omdat bij de toepassingen van de gepubliceerde theorie over den vleugel met ribben en bekleding (lit. 7) op bestaande vleugels, eenige uitbreidingen noodig bleken te zijn, worden deze hier gegeven.

De differentiaalvergelijkingen van de doorbuigingen der liggers worden afgeleid voor het geval, dat de afschuivingen (v) der liggers niet verwaarloosbaar klein zijn. Dit geval doet zich voor bij normale houten doosliggers (punt 3, vergel. 23—27).

Dikwijls varieert de dikte van de bekleding tusschen de liggers. Dit geval wordt hier behandeld. Eveneens is de omstandigheid in aanmerking genomen, dat de bekleding tengevolge van knik minder stijf is tegenover samendrukking, dan tegenover trek; de elasticiteitsmodulus van de bekleding der bovenzijde is daarom opgevat als een functie van x (punt 4).

De vergelijking die het verband aangeeft tusschen liggerdoorbuigingen en schuifspanningen in de huid is verbeterd (punt 2, vergel. 10).

REPORT S. 67.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. II.

Summary.

Some extensions are given to the problem of the cantilever wing with ribs and rigid covering, which appeared to be necessary in applying the previously published method (lit. 7) to existing wings.

The differential equations for the deflexions of the spars are deduced for the case that the deflexions (v) by shear of the sparwebs are not to be neglected. This occurs with normal box-spars if they are constructed in wood (point 3, equ. 23—27).

Often the thickness of the covering between the spars varies along the wing. This has been considered here. Attention has also been paid to the fact, that the covering, as a result of buckling, possesses a smaller rigidity against compression than against extension; therefore the modulus of elasticity of the covering in the upper surface has been considered as a function of x (point 4).

A correction is given for the formula expressing the relation between spar-deflections and shearing stresses in the skin. (point 2, equ. 10).

RAPPORT S. 67.

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. II.

Résumé.

Il a paru à l'application aux ailes existantes, que la méthode de calcul pour les ailes cantilever au revêtement résistant, exposée dans une publication précédente (lit. 7) avait besoin de quelques compléments. Les considérations supplémentaires sont données ici.

Les équations différentielles pour les déformations des longerons sont déduites pour le cas, où l'on ne peut pas négliger les déformations (v) par le cisaillement des parois verticales des longerons.

C'est toujours le cas avec les longerons-caissons, construits en bois. (point 3. eq. 23-27).

Très souvent l'épaisseur du revêtement entre les longerons n'est pas constante, mais elle varie le long de la cellule. Cette possibilité a été considérée dans le rapport ci-dessus. De plus on a considéré la circonstance, qu'à cause du flambage la résistance du revêtement contre la compression est plus basse que contre la tension, en supposant que le coefficient d'élasticité du revêtement dorsal soit fonction de x (point 4).

Une correction a été donnée pour la déduction de la formule qui exprime la relation entre les déflexions des longerons et les efforts de glissement dans le revêtement (point 2, eq. 10).

BERICHT S. 67.

Der Einfluss der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. II.

Zusammenfassung.

Als Fortsetzung der früheren Arbeit über den Einfluss der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln (lit. 7) werden hier der Problemstellung einige Erweiterungen zugefügt, die in der Praxis der Festigkeitsrechnung von ausgeführten Flügeln erforderlich erschienen.

Die Differentialgleichungen der Holmendurchbiegung werden abgeleitet, für den Fall, dass die Durchbiegungen (v) infolge des Schubs der Holmstege nicht vernachlässigbar sind. Dieser Fall trifft zu bei den hölzernen Kastenholmen normaler Bauart (punkt 3, Gl. 23—27).

Die Beplankung zwischen den Holmen ist in vielen Fällen zusammengesetzt aus Teilen verschiedener Stärke. Diesem Umstande wird hier Rechnung getragen. Ausserdem wird darauf Rücksicht genommen, dass die Beplankung infolge der Faltenbildung den Druckspannungen weniger Widerstand entgegensetzt als den Zugspannungen. Deshalb wird der Elastizitätsmodul der Beplankung an der Flügeloberseite als eine von x abhängige Grösse erfasst (Punkt 4).

Eine Berichtigung für die Berechnung der Schubspannungen in der Beplankung wird gegeben (Punkt 2, Gl. 10).

RAPPORT S. 67.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. II.

door

Dr. Ir. A. VAN DER NEUT.

Overzicht.

In het onderstaande wordt een voortzetting gegeven van een vroegere publicatie, waarin de afleiding werd gegeven van de differentiaal-vergelijkingen van den vleugel met weerstandbiedende bekleeding. In de beschouwingen worden nu opgenomen de vervormingen van de liggers door afschuiving en de mogelijkheid van bekleeding van niet-constante dikte en met veranderlijke elasticiteitsmodulus.

Indeeling.

1. Inleiding. 2. De schuifspanningen in de bekleeding. 3. De invloed van de liggerafschuiving. a. De spanningen in de liggers. b. De spanningen in de bekleeding. c. Het verband tusschen de dwarskracht in den ligger en de afschuiving. d. De evenwichtsvergelijkingen. e. De randvoorwaarden. 4. Bekleeding van niet-constante dikte en met varieerende elasticiteitsmodulus.

1. Inleiding.

In een vroegere publicatie (lit. 7) werd de methode aangegeven voor de opstelling van de differentiaal-vergelijkingen voor vleugels, die zijn samengesteld uit 2 evenwijdige liggers, onderling door ribben verbonden en bekleed met een weerstandbiedende huid.

Hierbij werden zekere aannamen gedaan, die ten deele voor deze methode essentieel zijn, terwijl andere ingevoerd werden met de bedoeling een overzichtelijk systeem te verkrijgen. Een grootere volledigheid zou de duidelijkheid hebben geschaad, en ook geen nieuwe elementen aan de methode hebben toegevoegd. Reeds werd in genoemde publicatie gewezen op de mogelijkheid van verfijning.

In het volgende worden enkele uitbreidingen aan de methode gegeven, waarvan bij de toepassing op bestaande vleugels de wenschelijkheid gebleken was.

Als eerste dezer uitbreidingen moet genoemd worden het in rekening brengen van de vervormingen der doosliggers door afschuiving (punt 3). Deze vervormingen zijn vooral bij houten vleugels niet verwaarloosbaar, omdat zij een belangrijken invloed uitoefenen op de spanningsverdeeling bij wringing. Verder beïnvloeden zij in sterke mate den vorm van de elastische lijnen der liggers, wat vooral van betekenis is bij de experimenteele contrôle van de berekeningsmethode door vergelijking van berekende en gemeten elastische lijnen.

Vervolgens is een uitbreiding noodig, die rekening houdt met de mogelijkheid van veranderde dikte en elastische eigenschappen van de huid (punt 4). Tengevolge van het inzicht, dat de huid niet alleen dienst doet voor overbrenging van de luchtkrachten op de ribben, maar dat zij in uitgebreider zin constructie-element is, ontstond het streven de bekleeding tusschen de beide liggers grootere dikte te geven in het dichtst bij het vleugelmidden gelegen gedeelte. De bekleeding bestaat dan uit platen van verschillende dikte, echter heeft iedere plaat een constante dikte. De discontinuïteit in dikte treedt op langs een der ribben.

In verband met de plooiing van de dunne bekleeding heeft het ook zin met niet-constante elastische eigenschappen van de bekleeding te rekenen. Voor zoover de bekleeding door trekspanningen belast wordt, is de aanname van constante elasticiteitsmodulus E juist. In deelen waar drukspanningen aanwezig zijn zal spoedig plooivormig optreden, zoodat de stijfheid tegenover samendrukking kleiner is dan tegenover uitrekking. De verhouding van deze stijfheden $\frac{E_b}{E_o}$ zal kleiner zijn naarmate de drukspanningen grooter zijn en naarmate de bekleeding minder gesteund en dunner is. Daarom wordt in het volgende met een veranderlijke waarde van $\frac{E_b}{E_o}$ gerekend; hoe deze grootheid verandert is overigens onbekend.

Tenslotte bleek er in de vroegere afleidingen een onjuistheid te zijn bij de berekening van de vervorming γ_{xz} , die verband houdt met de omstandigheid dat de bekleding tusschen de liggers niet een plat vlak is, maar een ander regelvlak. De verbeteringen, die hiervoor noodig zijn, worden eveneens gegeven (punt 2), en in de differentiaalvergelijkingen ingevoerd (punt 3).

De hier gegeven beschouwingen gaan slechts tot aan de differentiaalvergelijkingen. De methode voor het verkrijgen van numerische oplossingen wordt elders beschreven (lit. 8).

2. De schuifspanningen in de bekleding.

Beschouwd wordt een deel ABCD van de bekleding der bovenzijde, dat zich bij onbelasten vleugel op het vleugelvlak als rechthoek projecteert (fig. 1). Daarna wordt nagegaan welken vorm dit deel van de bekleding heeft bij den vleugel in belasten toestand, waarbij $\xi_b = \bar{\xi}_b$ gesteld wordt. De verplaatsingen $\bar{\xi}_b$, voor welke in het vervolg u_b geschreven wordt, kunnen afzonderlijk in rekening worden gebracht.

De ribben zijn onvervormbaar gedacht, de lengten AB en DC veranderen dus niet. De vorm van het ontwikkeld oppervlak ABCD is dan volkomen bepaald, indien bekend is welke lengte de lijnen AC, BD en AD hebben.¹⁾

De schuifspanningen in de bekleding zijn gelijk aan

$$\bar{\tau}_b = G_b \bar{\gamma}_b, \quad (1)$$

waarin $\bar{\gamma}_b$, daar $\angle ABD$ bij benadering $\frac{\pi}{2}$ is, de toename is van $\angle ABD = \beta$.

Dan kan met verwaarloozing van termen van hogere orde geschreven worden

$$\bar{\gamma}_b = \Delta \beta = \sin \beta \Delta \beta = -\Delta \cos \beta. \quad (2)$$

In $\triangle ABD$ kan $\cos \beta$ berekend worden uit:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 AB \cdot BD \cos \beta, \quad (3)$$

dus

$$\cos \beta = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2 AB \cdot BD}. \quad (4)$$

Kwadraten van vervormingen verwaarloozend, wordt na differentiatie van (4) gevonden:

$$\Delta \cos \beta = \frac{(AD^2 + BD^2 - AB^2) \Delta BD - 2 AD \cdot BD \cdot \Delta AD}{2 AB \cdot BD^2}.$$

Bij gebruikmaking van (3) gaat dit over in:

$$\Delta \cos \beta = \frac{BD^2 - AB \cdot BD \cos \beta}{AB \cdot BD^2} \Delta BD - \frac{AD}{AB \cdot BD} \Delta AD = \frac{1}{BD} \left[\left(\frac{BD}{AB} - \cos \beta \right) \Delta BD - \left\{ 1 - \left(1 - \frac{AD}{AB} \right) \right\} \Delta AD \right].$$

De hierin voorkomende lengteveranderingen ΔAD en ΔBD zijn, zooals blijkt bij een nadere beschouwing, van de later in te voeren verplaatsingen, van dezelfde orde van grootte, $\left(1 - \frac{AD}{AB} \right) \cdot \frac{BD}{AB}$ en $\cos \beta$ zijn klein vergeleken bij de eenheid, zoodat zij verwaarloosd mogen worden en de gegeven uitkomst overgaat in

$$\Delta \cos \beta = -\frac{\Delta AD}{BD}.$$

Op grond van (2) is dus de afschuivingshoek

$$\bar{\gamma}_b = \frac{\Delta AD}{BD}. \quad (5)$$

De berekeningen van ΔAD kan op de volgende wijze geschieden.

De coördinaten van het punt A in figuur 1 zijn x_A, y_A, z_A , en van punt D x_D, y_D, z_D , zoodat

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2}. \quad (6)$$

Bij verwaarloozing van kwadraten van vervormingen wordt ΔAD na differentiatie van (6) gevonden

$$\Delta AD = \frac{1}{AD} \left[(x_D - x_A) \Delta(x_D - x_A) + (y_D - y_A) \Delta(y_D - y_A) + (z_D - z_A) \Delta(z_D - z_A) \right]. \quad (7)$$

Uit fig. 1 blijkt, dat:

$$x_D - x_A = dx, \quad y_D - y_A = \frac{1}{2}(h_2 + h_2' dx - h_1), \quad z_D - z_A = b.$$

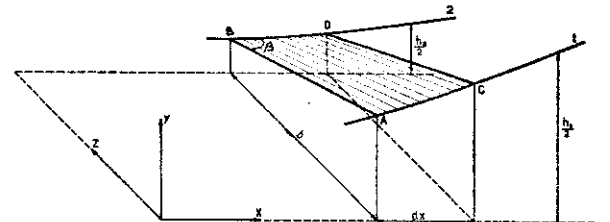


Fig. 1. Element dx van de bekleding tusschen de beide liggers aan de bovenzijde van den vleugel.

¹⁾ Grootheden, die op den gedeformeerden toestand betrekking hebben, zijn overstreep.

Verder is

$$\Delta x = -\frac{1}{2} h y', \quad \Delta y = Y', \quad \Delta z = \frac{1}{2} \frac{Y_1 - Y_2}{b} h,$$

zoodat

$$\begin{aligned} \Delta(x_D - x_A) &= -\frac{1}{2} \left[h_2 y_2' + (h_2 y_2')' dx - h_1 y_1' \right] \\ \Delta(y_D - y_A) &= Y_2 + Y_2' dx - Y_1 \\ \Delta(z_D - z_A) &= \frac{1}{2} \left[\frac{Y_1 - Y_2}{b} h_2 + \left(\frac{Y_1 - Y_2}{b} h_2 \right)' dx - \frac{Y_1 - Y_2}{b} h_1 \right]. \end{aligned}$$

Hierna volgt uit (7) onder invoering van v overeenkomstig (11):

$$\Delta AD = \frac{dx}{2AD} \left[(h_1 + h_2) (Y_1' - Y_2') - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right].$$

Daar met verwaarloozing van termen van hoogere orde

$$AD = b \quad \text{en} \quad BD = dx$$

volgt uit (5):

$$\gamma_b = \frac{1}{2b} \left[(h_1 + h_2) (Y_1' - Y_2') - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right]. \quad (8)$$

De afschuivingshoek, volgende uit de verplaatsingen u, is:

$$\gamma_b = \frac{\partial u_b}{\partial z}. \quad (9)$$

De schuifspanningen in de bekleding der bovenzijde zijn dus:

$$\tau_b = \frac{1}{2b} G_b \left[(h_1 + h_2) (Y_1' - Y_2') - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right] + G_b \frac{\partial u_b}{\partial z}, \quad (10a)$$

en in de bekleding der onderzijde wordt op overeenkomstige wijze gevonden:

$$\tau_o = -\frac{1}{2b} G_o \left[(h_1 + h_2) (Y_1' - Y_2') - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right] + G_o \frac{\partial u_o}{\partial z}. \quad (10b)$$

De op deze wijze afgeleide uitkomsten zijn in overeenstemming met die, welke op streng analytische wijze verkregen worden door de verplaatsingen te beschouwen ten opzichte van een coördinaten-stelsel, waarin één der vlakken samenvalt met dat van het beschouwde element van de bekleding.

3. De invloed van de liggerschuiving.

Bij de in de vroegere publicaties beschouwde doorbuigingen y_1 en y_2 , die door buiging van de liggers optreden, moeten nu de doorbuigingen v_1 en v_2 worden gevoegd, die door afschuiving van de liggers ontstaan. De totale doorbuigingen zijn dan:

$$Y_1 = y_1 + v_1 \quad (11a)$$

$$Y_2 = y_2 + v_2. \quad (11b)$$

Indien uitgegaan wordt van de veronderstelling van Bernoulli over het vlakblijven van de normale doorsneden van den ligger, kunnen y en v als volgt nader worden gedefinieerd.

De doorbuigingen door buiging, y , berusten op de relatieve verdraaiing $\frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x$ van twee, den afstand Δx van elkaar verwijderde, dwarsdoorsneden van den ligger; hierbij verschuiven deze dwarsdoorsneden niet ten opzichte van elkaar.

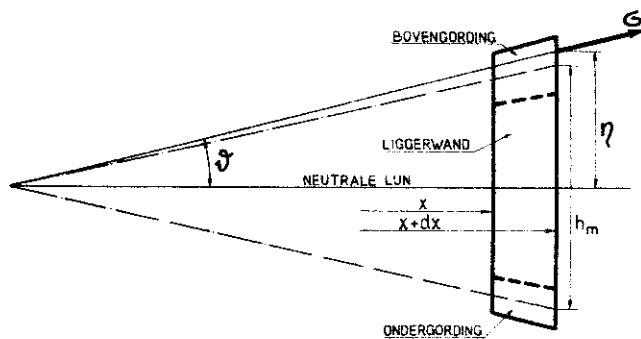


Fig. 2. Element dx van den tapschen ligger.

De doorbuigingen door afschuiving, v , berusten op de relatieve verschuiving $\frac{dv}{dx} \Delta x$ van twee, den afstand Δx van elkaar verwijderde, dwarsdoorsneden; hierbij verdraaien zij niet ten opzichte van elkaar.

Als toevoeging op de vroeger gegeven afleidingen (lit. 7) heeft nu nog alleen vastgesteld te worden, welken invloed de doorbuigingen v hebben op de spanningen, en op welke wijze v berekend moet worden.

Tusschen de spanningen enerzijds en de uitwendige belastingen anderzijds blijven dezelfde evenwichtsbetrekkingen bestaan (lit. 7 vergel. (9a) en (11a)).

a. De spanningen in de liggers.

Bij een prismatischen ligger zou het verband tusschen belasting en vervorming aldus blijken te zijn, dat y slechts afhankelijk was van het buigend moment, en v slechts van de dwarskracht. Bij liggers met niet-evenwijdige gordingen is dit verband minder eenvoudig. Om dit verband af te leiden wordt in aanmerking genomen, dat de gordingen het overgrootste gedeelte van het buigend moment opnemen, en dat

¹⁾ De verplaatsing Y is gedefinieerd door (11) (punt 3), waarbij ook de afschuiving van de liggers in rekening wordt gebracht.

de gordingdikte klein is in vergelijking tot de liggerhoogte. De spanningen in de gording op de normale doornede van den ligger zullen dan niet evenwijdig aan de staafas gericht zijn, maar zullen met de staafas een zoodanigen hoek ϑ maken, dat hun snijpunt ongeveer samenvalt met het snijpunt van de staafas en en de middellijn der gording (zie fig. 2).

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\eta}{h_m} h_m', \quad (12)$$

h_m = afstand van de zwaartepunten der beide gordingdoorsneden.

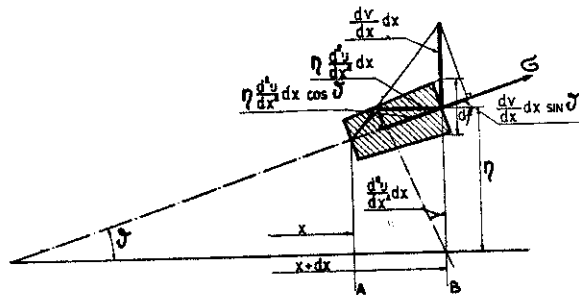


Fig. 3. Berekening van de rek van een element der liggergording.

Het element van de balk tusschen de vlakken x en $x + dx$, dat evenwijdig is aan σ , in het vlak x de doorsnede df heeft, en zich op den afstand η boven de neutrale lijn bevindt, ondergaat door de draaiing van het vlak A ten opzichte van het vlak B de verlenging $-\eta \frac{d^2 y}{dx^2} dx \cos \vartheta$, en door de afschuiving de verlenging $\frac{dv}{dx} dx \sin \vartheta$ (zie fig. 3).

De oorspronkelijke lengte was $\frac{dx}{\cos \vartheta}$, dus

$$\sigma = E \epsilon = E \left(-\eta \frac{d^2 y}{dx^2} \cos^2 \vartheta + \frac{dv}{dx} \sin \vartheta \cos \vartheta \right). \quad (13)$$

De schuifspanning in den liggerwand is, daar de afschuiving $\frac{dv}{dx}$ bedraagt,

$$\tau = G \gamma = G \frac{dv}{dx}, \quad (14)$$

terwijl de schuifspanning door torsie van den ligger samenhangt met den torsiehoek $\Phi = \left(\frac{Y_1 - Y_2}{b} \right)$. (15)

Het buigend moment, opgeleverd door de spanningen σ , is

$$M_e = - \int_F \sigma (df \cos \vartheta) (\eta \cos \vartheta). \quad (16)$$

Na substitutie van (12) en (13) in (16) volgt:

$$M_e = E \int_F \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dv}{dx} \frac{h_m'}{h_m} \right) \eta^2 \cos^4 \vartheta df. \quad (16a)$$

Omdat de grootste bijdrage in deze integraal geleverd wordt door de gordingen geldt ten naaste bij

$$E \int_F \eta^2 \cos^4 \vartheta df = \frac{EI}{\left(1 + \frac{h_m'^2}{4} \right)} = S_b,$$

I = traagheidsmoment.

Verder kan geschreven worden $\frac{h_m'}{h_m} = \frac{h'}{h}$, dus

$$M_{e1} = S_{b1} \left(y_1'' - \frac{h_1'}{h_1} v_1' \right) \quad (17a)$$

$$M_{e2} = S_{b2} \left(y_2'' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right). \quad (17b)$$

De dwarskracht in den ligger is volgens (lit. 7, vergel. (12a))

$$D_{e1} = -M_{e1}' - m_1 = -M_{e1}' + \frac{h_1}{2} (\tau_b \delta_b - \tau_o \delta_o)_{z=0} \quad (18a)$$

$$D_{e2} = -M_{e2}' - m_2 = -M_{e2}' - \frac{h_2}{2} (\tau_b \delta_b - \tau_o \delta_o)_{z=b}. \quad (18b)$$

Nu substitutie van (10) en (17a, b) volgt

$$D_{e1} = - \left[S_{b1} \left(y_1'' - \frac{h_1'}{h_1} v_1' \right) \right]' + \frac{1}{4b} (G_b \delta_b + G_o \delta_o) h_1 \left\{ (h_1 + h_2) (Y_1 - Y_2)' - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right\} + \frac{h_1}{2} \left\{ G_b \delta_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial z} \right)_{z=0} - G_o \delta_o \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=0} \right\} \quad (19a)$$

$$D_{e2} = - \left[S_{b2} \left(y_2'' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) \right]' - \frac{1}{4b} (G_b \delta_b + G_o \delta_o) h_2 \left\{ (h_1 + h_2) (Y_1 - Y_2)' - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right\} - \frac{h_2}{2} \left\{ G_b \delta_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial z} \right)_{z=b} - G_o \delta_o \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=b} \right\}. \quad (19b)$$

Het wringend koppel, dat door de liggers wordt opgenomen, is evenredig met de specifieke torsiehoek $\Phi' = \frac{1}{b}(Y_1 - Y_2)'$

$$W_{e1} + W_{e2} = -\frac{S_{t1} + S_{t2}}{b}(Y_1 - Y_2)'. \quad (20)$$

b. De spanningen in de bekleeding.

Volgens vergelijking (lit. 7 (3)) is de verplaatsing ξ in x-richting uit te drukken als:

$$\xi = (\xi)_{z=0} + \left\{ (\xi)_{z=b} - (\xi)_{z=0} \right\} \frac{z}{b} + u.$$

Evenzoo kan voor de rek in het xy-vlak geschreven worden:

$$\varepsilon = \varepsilon_{z=0} + (\varepsilon_{z=b} - \varepsilon_{z=0}) \frac{z}{b} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

De rekken $\varepsilon_{z=0}$ en $\varepsilon_{z=b}$ worden reeds door (13) gegeven, indien hierin voor η gesubstitueerd wordt $\frac{1}{2}h$. Omdat h' een klein getal is, kan $1 - \cos^2 \vartheta$ tegenover de eenheid verwaarloosd worden, zoodat:

$$\sigma_b = -\frac{1}{2}E_b \left\{ h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'') \frac{z}{b} - h_1' v_1' - (h_2' v_2' - h_1' v_1') \frac{z}{b} \right\} + E_b \frac{\partial u_b}{\partial x} \quad (21a)$$

$$\sigma_o = \frac{1}{2}E_o \left\{ h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'') \frac{z}{b} - h_1' v_1' - (h_2' v_2' - h_1' v_1') \frac{z}{b} \right\} + E_o \frac{\partial u_o}{\partial x}. \quad (21b)$$

Het verband tusschen de schuifspanningen τ en de vervormingen werd reeds in het voorgaande (punt 2) vastgesteld.

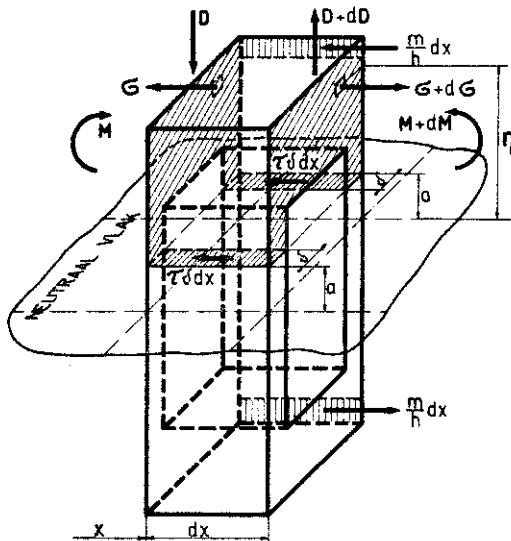


Fig. 4. Berekening van de afschuiving in den liggerwand.

c. Het verband tusschen de dwarskracht in den ligger en de afschuiving.

Behalve de door de vergelijkingen (19a,b) tot uitdrukking gebrachte betrekking tusschen de dwarskracht D en de vervormingen, kan er nog een tweede stel betrekkingen worden opgesteld tusschen dezelfde grootheden. Na eliminatie van D tusschen dit viertal vergelijkingen wordt een tweetal vergelijkingen in y , v en u verkregen, dat met de vier evenwichtsvergelijkingen (lit. 7 vergel. (8a,b), (9a) en (9b)), het voldoende aantal differentiaalvergelijkingen oplevert, dat te zamen met de nog te noemen randvoorwaarden de oplossing der 6 onbekende verplaatsingsgrootheden bepaalt.

Het door de beschouwing der afschuivingen noodig geworden stel vergelijkingen wordt verkregen door te berekenen welke afschuiving de liggerwanden ondergaan tengevolge van de op den ligger werkende krachten.

Hiertoe wordt het evenwicht in de x-richting beschouwd van een deel van den ligger, dat begrensd wordt door de vlakken x , $x+dx$ en een vlak op afstand a boven de neutrale lijn (fig.4). Op dit liggerdeel werken:

- 1° de schuifspanningen in de doorsneden liggerwanden $-\tau \Sigma \delta dx$,
- 2° de buigspanningen op het vlak x met resultante $-\int \sigma \cos \vartheta df$,
- 3° de buigspanningen op het vlak $x+dx$ met resultante $-\int \sigma \cos \vartheta df + \frac{d}{dx} \left(\int \sigma \cos \vartheta df \right) dx$,
- 4° de schuifspanningen in de doorsneden bekleeding $-\frac{m}{h} dx$.

Hierin is $\Sigma \delta$ de som van de dikten der liggerwanden.

De evenwichtsvergelijking is dan:

$$-\Sigma \tau \delta + \frac{d}{dx} \left(\int \sigma \cos \vartheta df \right) - \frac{m}{h} = 0. \quad (22)$$

Uit (12), (13) en (16a) volgt dat

$$\sigma = -M_e \frac{\eta \cos^2 \vartheta}{\int_F \eta^2 \cos^4 \vartheta df},$$

$$\int \sigma \cos \vartheta df = -M_e \frac{\int \eta \cos^3 \vartheta df}{\int_F \eta^2 \cos^4 \vartheta df}.$$

zoodat

Daar $\cos \vartheta$ ten hoogste $\frac{h'}{2}$ is, kan het quotient der beide integralen bij benadering gelijk worden gesteld aan $\frac{S}{I}$, waarin S het statisch moment is ten opzichte van de neutrale lijn van dat deel der liggedoorsnede, dat door het vlak a wordt begrensd. In aanmerking nemend, dat S slechts weinig met a varieert, omdat de hoofdbijdrage in het statisch moment door de gording geleverd wordt, kan met voldoende nauwkeurigheid S bij een bepaalde waarde van x als een constante grootte beschouwd worden. De schuifspanningen τ zijn dan eveneens afhankelijk van a , wat in overeenstemming is met de, op grond van de veronderstelling over het vlakblijven der normale doorsnede, opgestelde betrekking (14).

Vergelijking (22) kan nu als volgt geschreven worden:

$$-G v' \Sigma \delta = \left(M_e \frac{S}{I} \right)' + \frac{m}{h}. \quad (22a)$$

Voor de berekening van het quotient $\frac{S}{I}$ wordt I voldoende nauwkeurig benaderd als de eigen-traagheidsmomenten van de gordingen en de bijdragen in het traagheidsmoment van de zijwanden worden verwaarloosd. Indien bij de berekening van S dan eveneens de bijdrage der zijwanden verwaarloosd wordt, volgt:

$$\frac{S}{I} = \frac{1}{h_m},$$

waarin h_m de afstand van de zwaartepunten der gordingen is.

Bij nauwkeuriger berekening, als ook rekening gehouden wordt met de aanwezigheid van de bekleeding vóór den voorligger en achter den achterligger, en de boven aangeduide verwaarloozingen niet worden gemaakt, komt er in de plaats van h_m een iets grotere lengte, die ongeveer gelijk is aan h . Daarom wordt gesteld:

$$\frac{S}{I} = \frac{1}{h},$$

zoodat (22a) overgaat in

$$-G v' \Sigma \delta = \frac{1}{h} (M_e' + m) - M_e \frac{h'}{h^2},$$

waarvoor na substitutie van (18) geschreven kan worden:

$$v' G \Sigma \delta = \frac{D_e}{h} + M_e \frac{h'}{h^2}. \quad (22b)$$

De vergelijking (22b) toegepast op beide liggers geeft:

$$v_1' = \frac{1}{G_1 h_1 \Sigma \delta_1} \left(D_{e1} + M_{e1} \frac{h_1'}{h_1} \right) \quad (23a)$$

$$v_2' = \frac{1}{G_2 h_2 \Sigma \delta_2} \left(D_{e2} + M_{e2} \frac{h_2'}{h_2} \right). \quad (23b)$$

d. De evenwichtsvergelijkingen.

De voorwaarde van het evenwicht van de bekleeding in de x -richting eischt, dat voldaan wordt aan

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0,$$

waaruit na substitutie van (21) en (10) volgt

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} + \frac{G_b}{E_b} \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + \frac{G_o}{E_o} \frac{\partial^2 u_o}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left[h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'') \frac{z}{b} \right] - \left[h_1' v_1' + (h_2' v_2' + h_1' v_1') \frac{z}{b} \right] \right\}'. \quad (24a,b)$$

De evenwichtsvergelijking (lit. 7 (9a)) voor het buigend moment in de vleugeldoorsnede geeft na substitutie van (17a,b) en (21a,b)

$$A_1 \left(y_1'' - \frac{h_1'}{h_1} v_1' \right) + A_2 \left(y_2'' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) = \int_x^1 (q_1 + q_2) (\xi - x) d\xi + F_1(u_b, u_o), \quad (25)$$

waarin

$$A_1 = S_{b1} + \frac{1}{24} (E_b \delta_b + E_o \delta_o) b h_1 (2 h_1 + h_2)$$

$$A_2 = S_{b2} + \frac{1}{24} (E_b \delta_b + E_o \delta_o) b h_2 (h_1 + 2 h_2)$$

$$F_1(u_b, u_o) = \frac{1}{2} \int_0^b \left(E_b \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - E_o \delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) \left(h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right) dz.$$

De evenwichtsvergelijking (lit. 7 (11a)) voor het moment om de x-as door den voorligger gaat na substitutie van (10a, b), (19a, b), (20) en (21a, b) over in

$$\left[S_{b2} \left(y_2'' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) \right]' + B(Y_1 - Y_2)' = - \int_x^1 q_2 d\xi + F_2(y_1, y_2, v_1, v_2) + F_3(u_b, u_o) + F_4(v_1, v_2), \quad (26)^1$$

waarin

$$B = \frac{1}{b^2} \left\{ S_{t1} + S_{t2} + \frac{1}{4} (G_b \delta_b + G_o \delta_o) b (h_1 + h_2)^2 \right\}$$

$$F_2(y_1, y_2, v_1, v_2) = -\frac{1}{48} (E_b \delta_b + E_o \delta_o) b \left\{ (h_1' + h_2') (h_1 y_1'' - h_1' v_1') + (h_1' + 3h_2') (h_2 y_2'' - h_2' v_2') \right\}$$

$$F_3(u_b, u_o) = -\frac{h_2}{2} \left\{ G_b \delta_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial z} \right)_{z=b} - G_o \delta_o \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=b} \right\} + \frac{1}{2b} \int_0^b \left(E_b \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - E_o \delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) \left(h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right)' z dz$$

$$F_4(v_1, v_2) = \frac{1}{4b} (G_b \delta_b + G_o \delta_o) (h_1 + h_2) (h_1 v_1' - h_2 v_2').$$

e. De randvoorwaarden.

Aan een vleugel kan in den regel onderscheiden worden een deel, waar geen ribben aanwezig zijn en dat zich tusschen de ophangpunten van den romp aan den vleugel bevindt, en de deelen buiten de ophangpunten, waar wel ribverband aanwezig is. Daar de boven afgeleide differentiaalvergelijkingen slechts op de laatste deelen betrekking hebben ligt het voor de hand het punt $x=0$ te kiezen op de plaats, waar het ribverband begint, dus in een ophangpunt. De vervormingen van het vleugeldeel tusschen de ophangpunten kunnen zonder meer uitgedrukt worden in de uitwendige belasting van de liggers in dit deel en de buigende momenten, die ter plaatse $x=0$ in de liggers aanwezig zijn.

Bij symmetrische belastingen, welke in het volgende steeds zullen worden verondersteld, is in het vleugelmidden $y_1' = y_2' = 0$.

Dan volgt op de boven uiteengezette wijze voor de hellingshoeken in de ophangpunten

$$x=0: \quad y_1' = a_1, \quad y_2' = a_2. \quad (27a, b)$$

Verder geldt voor de ophangpunten

$$x=0: \quad y_1 = y_2 = v_1 = v_2 = 0. \quad (27c, d, e, f)$$

In de plaats van de randvoorwaarden (lit. 7 (22e)) komt nu

$$x=1: \quad C_1 \left(y_1'' - \frac{h_1'}{h_1} v_1' \right) + (A_2 - C_2) \left(y_2'' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) - \frac{S_{tr}}{b} (Y_1 - Y_2)' = F_5(u_b, u_o), \quad (27g)$$

waarin

$$C_1 = \frac{1}{48} (E_b \delta_b + E_o \delta_o) b h_1 (h_1 + h_2)$$

$$C_2 = \frac{1}{48} (E_b \delta_b + E_o \delta_o) b h_2 (h_1 + h_2)$$

$$F_5(u_b, u_o) = \frac{1}{2b} \int_0^b \int_{z_1}^h \left(h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right) \left(E_b \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - E_o \delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) dz dz_1.$$

Voor de verplaatsingen ξ gelden de randvoorwaarden (lit. 7 (23)).

Het systeem van vergelijkingen (23), (24), (25) en (26) met de randvoorwaarden (27) en (lit. 7 (23)) bepaalt de oplossing van de functies $y_1, y_2, u_b, u_o, v_1, v_2$. Het is mogelijk uit dit systeem van vergelijkingen v_1 en v_2 te elimineren. Omdat deze eliminatie tot weinig overzichtelijke vergelijkingen voert zal van deze mogelijkheid geen verder gebruik gemaakt worden.

4. Bekleding van niet-constante dikte en met varieerende elasticiteitsmodulus.

Het verband tusschen vervormingen en spanningen is hier hetzelfde als door de vergelijkingen (21) en (10) uitgedrukt wordt. Het eenige verschil is, dat E_b niet meer een constante grootheid is, doch een functie van x geworden is.

De evenwichtsvergelijking wordt, indien de bekledingsdikte δ ook een functie van x is,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta \sigma) + \delta \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

1) In afwijking van de vroeger gepubliceerde vergelijking (lit. 7) wordt hier S_{b2} niet herleid tot A_2 , omdat de hier gegeven vorm der vergelijking bij numerische berekening den voorkeur verdient.

zoodat de differentiaalvergelijking, waaraan u_b voldoen moet, nu is:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E_b \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} \right) + G_b \delta_b \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \left\{ E_b \delta_b \left[h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'') \frac{z}{b} \right] - E_b \delta_b \left[h_1' v_1' + (h_2' v_2' - h_1' v_1') \frac{z}{b} \right] \right\}' \quad (29a)$$

en de differentiaalvergelijking voor u_o wordt, omdat E_o constant is:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) + \frac{G_o}{E_o} \delta_o \frac{\partial^2 u_o}{\partial z^2} = -\frac{1}{2} \left\{ \delta_o \left[h_1 y_1'' + (h_2 y_2'' - h_1 y_1'') \frac{z}{b} \right] - \delta_o \left[h_1' v_1' + (h_2' v_2' - h_1' v_1') \frac{z}{b} \right] \right\}'. \quad (29b)$$

Deze vergelijkingen gelden voor het geheele gebied $0 \leq x \leq 1$, ook als δ of E discontinuïteiten hebben. De oplossing moet voldoen aan de voorwaarden, dat u een continue functie van x en z is, die aan de randen $x=0$, $x=1$, $z=0$ en $z=b$ de waarde nul heeft.

$$u_b = u_o = 0. \quad (30)$$

Notaties.

De notaties zijn dezelfde als in (lit. 7), echter met de volgende afwijkingen: voor de „elasticiteitsmodulus bij verhinderde contractie” E wordt hier $\bar{E}$ ingevoerd; de letter h zonder index, die betrekking had op de halve liggerhoogte, geldt nu voor de totale liggerhoogte; voor de verplaatsing ξ wordt nu geschreven u .

Toegevoegd worden de volgende:

$\Sigma \delta$ = gezamenlijke dikte van de doosliggerwanden (δ kan ook voorkomen als bekleedingsdikte, doch dan met index b of o , terwijl het als doosliggerwanddikte den index 1 of 2 heeft).

h_m = afstand van de zwaartepunten van de doorsnede der liggergordingen.

I = traagheidsmoment der normale doorsnede van den samengestellten ligger.

$$S_b = \frac{EI}{(1 + \frac{1}{2} h' m^2)^2}$$

Y = ordinaat van de elastische lijn van een ligger.

y = ordinaat van de elastische lijn van een ligger, voor zoover van buiging afkomstig.

v = ordinaat van de elastische lijn van een ligger, voor zoover van afschuiving afkomstig.

LITERATUUR.

1. Biezeno, C. B., Koch, J. J. u. Koning, C. Ueber die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 6, April 1926, S. 97–105.
2. Biezeno, C. B., Koch, J. J. en Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R. S. L. Rapport V. 175. De Ingenieur, 13 Nov. 1926 = Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Deel IV, blz. 101–137.
3. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II. R. S. L. Rapport V. 284. De Ingenieur, 12 Jan. 1929 = Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Deel VI, blz. 1–4.
4. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III. R. S. L. Rapport V. 285. De Ingenieur, 10 Jan. 1930 = Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Deel VI, blz. 25–31.
5. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels IV. R. S. L. Rapport V. 357. De Ingenieur, 16 Januari 1931 = Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Deel VI, blz. 37–64.
6. Koning, C. The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. Cinquième Congrès International de la Navigation Aérienne. La Haye 1930. Tome I, p. 644–649.
7. Koning, C. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels I, R. S. L. Rapport V. 358. Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Deel VI, blz. 139–152.
8. Koning, C. en van der Neut, A. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels III, R. S. L. Rapport S. 68. Verslagen en Verhandelingen R. S. L., Deel VII, blz. 67–96.

RAPPORT S. 68.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. III.

door

Ir. C. KONING en Dr. Ir. A. VAN DER NEUT,

Rapport S. 68: L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. III.

Report S. 68: The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. III.

Bericht S. 68: Der Einfluss der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. III.

RAPPORT S. 68.

De invloed van het ribverband en de bekleding op de sterkte van vliegtuigvleugels. III.

Uittreksel.

a. *Omvang van het hier behandelde deel (punt 1).*

Nadat in vroegere publicaties over dit onderwerp (lit. 7 en 8) de differentiaalvergelijkingen en de randvoorwaarden zijn gegeven, wordt hier een iteratiemethode aangegeven voor de bepaling van numerische oplossingen. Besproken wordt tot hoever deze iteratie moet worden doorgevoerd; de methode wordt toegelicht met numerische voorbeelden, die betrekking hebben op bestaande vleugels.

b. *De iteratiemethode.*

De verschillende termen der vergelijkingen (10 a,b) en der randvoorwaarden (11a,b) worden zo gerangschikt, dat, indien het 2e lid der vergelijkingen wordt opgevat als uitwendige belasting, de aldus gelezen vergelijkingen formeel analoog zijn met de vergelijkingen van den vleugel zonder stijve bekleding. Indien voor deze termen van het 2e lid, hun waarde volgens de $n-1^{\text{ste}}$ benadering genomen wordt, kan hieruit de n^{de} benadering berekend worden (punt 3). Als onderdelen van de rekenmethode komen de oplossing van de Z-vergelijking en van de u-vergelijking voor. De Z-vergelijking (vergel. 24) wordt uit de hoofdvergelijkingen (13) en (14) gevonden op een reeds vroeger aangegeven wijze (lit. 5). Een nieuwe oplossingsmethode wordt gegeven, die ook toegepast kan worden indien discontinuïteiten in uitwendige belasting en in de stijfheidsfactoren voorkomen (punt 4). De u-vergelijking (vergel. 7) wordt op gelijksoortige wijze opgelost (punt 5).

Eenige praktische aanwijzingen worden gegeven, die tot verkorting van het rekenwerk kunnen leiden (punt 6).

REPORT S. 68.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. III.

Summary.

a. *Extent of the part treated here (point 1).*

In former publications on this subject the differential equations and their boundary conditions were given (see literature („Literatuur”) 7 and 8). In this report a method of iteration is indicated, by which numerical solutions may be found. The limits are discussed beyond which the continuation of the iteration is not wanted. The method is illustrated with numerical examples, corresponding to existing wings.

b. *The differential equations and boundary conditions (point 2).*

The equations are given in report S. 67 (see lit. 8 equ. 23, 25, 26, 29), and the boundary conditions are given in the same report (see lit. 8 equ. 27, 30). Introducing non-dimensional quantities and the variable w , defined by eq. 2, the equations are transformed in (4), (5), (6) and (7), and the boundary conditions in (8) and (9).

c. *The method of iteration (point 3).*

Equation (6) is transformed in (10a) and its boundary condition (8g) in (11a). Instead of equation (5) the equation (10b) and boundary condition (11b), corresponding to (10a) and (11a), are introduced. Interpreting the second part of (10) and (11) as an external load system, the equations are in formal analogy with the equations of the uncovered wing (see lit. 5, I). Therefore the iteration is arranged in such a way, that the numerical values for the $n-1^{\text{th}}$ approximation are introduced in the right hand side of (10) and (11) (equ. 13, 14), and then, solving the equations (13, 14), the n^{th} approximation of w is calculated.

Next the n^{th} approximation of u is calculated from the n^{th} approximation of w , by solving equation (7). And then, substituting the n^{th} approximation of w and n and the $n-1^{\text{th}}$ of v in the right hand side of (4) the n^{th} approximation of v is obtained (eq. 21).

It is recommended to conduct the iteration in such a way, that the calculations for the n^{th} approximation only concern the differences of the n^{th} and the $n-1^{\text{th}}$ approximation ($n-1^{\text{th}}$ correction) (eq. 15).

d. *The method for the solution of the Z-equation (point 4).*

The equations (13) and boundary conditions (14) are transformed in the Z-equations (24) ($Z = S_b w''$) in the way, indicated in report V. 357 (lit. 5, point 4).

The solution of the Z-equation is formed by composing the solutions Z_{11} and Z_{12} (see lit. 5, summary point e). These solutions are obtained in a way, resembling to „step by step” methods. This method is also able to take account of discontinuities in external load and in coefficients of rigidity. Table III illustrates the method of calculation.

e. *The method for the solution of the u-equation (point 5).*

The solution is supposed to have the form (35). The right hand side of equation (7) must be analysed then in the same way as a harmonic function of z . This operation produces the $u_m(x)$ -equation, that after one integration obtains the form (40). This equation, being in complete analogy with the Z -equation it can be solved in the same manner. A numerical example is given in table V-VIII.

f. *Some practical hints for the calculation (point 6).*

The following observations concern the calculations of wooden cantilever wings with flexural and torsional stiffnesses, that decrease very much along the span. If they are applied to wings of different construction, it is recommended to check the solution in the following way. The solutions for w , u and v are substituted in the equations (10) and (11) and the loads, for which these functions give the exact solution, are calculated (fig. 12, 13).

The load system can be divided into a pure bending load I, and a pure torsional load II (equ. 43, 44). In most cases the solution for load system I is sufficiently approximated by w_1^0 and w_2^0 , as defined by equation (48) (fig. 4).

In the case of load system II the first approximation of the Z -equation is calculated after the assumption w^0 , etc. equal to zero has been made.

The first „correctional transverse load” $\Delta_1 D$, by which the first correction of w is to be determined (see equ. 15, 16), can be approximated by $D(\Delta_0 v_1, \Delta_0 v_2)$ (fig. 7, 8). The second correction of Z is sufficiently approximated by (49) (fig. 9).

The computation of shearing stresses in the wing covering requires in case I the solution of the u_m -equation for $m=1$, and, if considerable variations in thickness of covering occur, also for $m=3$ (fig. 5, 6). In case II the calculation of u_m may be omitted (fig. 10, 11).

The formulae for the computation of the stresses are given under point 7.

g. *Notations.*

Notations are the same as the former (lit. 7, 8), under addition of:

c = centre of pression of the loads.

g = $\frac{G}{E_0}$.

K = $\left(\frac{EI^4}{S}\right)$.

k = $\frac{E_b}{E_0}$.

$()^n$ = n^{th} approximation of $()$.

$\Delta_n ()$ = n^{th} correction of $()$ (equ. 15).

N = load, normal to the spar-section.

t = wing chord.

w = deflexion, defined by equ. 2.

Z = $S_b y''$.

Z_{i1} = solution of the non-homogeneous Z_i -equation.

Z_{i2} = solution of the homogeneous Z_i -equation.

u_m = component of the displacement u after equ. (35).

u_{m1} = solution of the non-homogeneous u_m -equation.

u_{m2} = solution of the homogeneous u_m -equation.

indice I = related to pure bending load.

indice II = related to pure torsional load.

stripe — above the symbols l , S and Q gives these symbols the dimensions of a length, a stiffness and a force.

RAPPORT S. 68.

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes III.

Résumé.

a. *Etendue de la partie traitée ici (article 1).*

Dans les rapports antérieurs les équations différentielles et les conditions de limite ont été déduites (voir littérature („Literatuur”) 7 et 8). Le rapport présenté maintenant expose une méthode de solution par itération avec laquelle on peut obtenir des solutions numériques. Les limites sont discutées, en dehors desquelles il n'est pas nécessaire de continuer l'itération. La méthode est illustrée par des exemples numériques qui sont empruntés à des ailes existantes.

- $k = \frac{E_b}{E_0}$
 $()_n$ = approximation n de $()$.
 $\Delta_n ()$ = correction n de $()$ (voir équ. 15).
 N = charge, normale à la section du longeron.
 t = corde de l'aile.
 w = déflexion, définie par l'équ. 2.
 Z = S_{by}'' .
 Z_{i1} = solution de l'équation non-homogène Z_i .
 Z_{i2} = solution de l'équation homogène Z_i .
 u_m = composante du déplacement u d'après l'équ. (35).
 u_{m1} = solution de l'équation non-homogène u_m .
 u_{m2} = solution de l'équation homogène u_m .
 indice I = concernant la charge fléchissante.
 indice II = concernant la charge torsionnelle.
 la barre — au dessus des symboles I, S et Q donne à ces symboles la dimension d'une longueur, d'une rigidité et d'une charge.

BERICHT S. 68.

Der Einfluss der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln III.

Zusammenfassung.

a. Umfang des hier behandelten Teiles. (Punkt 1).

In den vorhergehenden Berichten über den Einfluss von Rippen und Beplankung auf die Festigkeit von freitragenden Flügeln wurden die Differentialgleichungen und ihre Randbedingungen abgeleitet (siehe Schrifttum („Literatur“) 7 und 8). In dem vorliegenden Bericht wird ein Verfahren entwickelt, das die Lösung durch Iteration herbeiführt. Die Grenzen, über die die Iteration nicht hinauszugehen braucht, werden besprochen. Das Verfahren wird mit Zahlenbeispielen, die Berechnungen ausgeführten Flügeln entnommen sind, erläutert.

b. Die Differentialgleichungen und Randbedingungen. (Punkt 2).

Die Differentialgleichungen haben die in Bericht S. 67 (siehe Schr. 8, Gl. 23, 25, 26, 29) angegebene Form, die Lösung muss den Randbedingungen (Schr. 8, Gl. 27, 30) genügen. Durch Einführung dimensionsloser Grössen und einer neuen Variablen w (Gl. 2) gehen die Gleichungen über in (4), (5), (6) und (7), und die Randbedingungen in (8) und (9).

c. Das Iterationsverfahren. (Punkt 3).

Die Gleichung (6) wird umgeschrieben auf (10a) und ihre Randbedingung (8g) auf (11a). An Stelle der Gleichung (5) wird das mit (10a, 11a) analoge Gleichungspaar (10b, 11b) gesetzt. Wenn das zweite Glied dieser Gleichungen (10) und (11) als äussere Belastung interpretiert wird, zeigen die Gleichungen eine formelle Uebereinstimmung mit den Gleichungen für den nicht-beplankten Flügel (siehe Schr. 5, I). Das zweite Glied dieser Gleichungen wird durch ihre numerische Grösse nach der $n-1^{\text{te}}$ Approximation approximiert (Gl. 13, 14) und durch Lösung dieser Gleichungen die n^{te} Approximation von w bestimmt. Zunächst wird aus der n^{te} Approximation von w die n^{te} Approximation von u abgeleitet (Gl. 7).

Danach folgt die n^{te} Approximation von v aus der n^{ten} von w und u und der $n-1^{\text{ten}}$ von v (Gl. 21).

Es ist empfehlenswert, die Berechnungen zur Bestimmung der n^{ten} Approximation so zu gestalten, dass diese sich auf die Differenz der n^{ten} und der $n-1^{\text{ten}}$ Approximation ($n-1^{\text{te}}$ Korrektur (Gl. 15)) beziehen.

d. Das Lösungsverfahren der Z-Gleichung (Punkt 4).

Die Gleichungen (13) und die Randbedingungen (14) werden, wie in Bericht V. 357 (Schr. 5, Punkt 4) angegeben, unter Einführung der neuen Variablen $Z = S_{bw}''$, auf die Z-Gleichung (24) transformiert, deren Lösung aus Z_{i1} und Z_{i2} zusammengesetzt wird (siehe Schr. 5, Zusammenfassung, Punkt e). Für die Bestimmung dieser Funktionen ist ein Lösungsverfahren entwickelt worden, das der Differenzrechnung anverwandt ist, und das auch anwendbar ist, wenn die Steifigkeitsfaktoren und Belastungen Unstetigkeiten aufweisen. Ein Rechnungsschema wird in Tafel III gegeben.

e. *Das Lösungsverfahren der u-Gleichung. (Punkt 5).*

Die Lösung wird in der Form (35) angesetzt. Die bekannten Glieder der Gleichung (7) sollen in Sinusreihen von z entwickelt werden. Daraus ergibt sich die $u_m(x)$ -Gleichung, die nach einmaliger Integration auf eine Form (40) gebracht wird, welche der Z-Gleichung ganz analog ist, und deshalb auf gleiche Weise gelöst wird. Ein Rechnungsbeispiel wird gegeben in Tafel V bis VII.

f. *Die praktische Durchführung der Rechnungen. (Punkt 6).*

Die nachfolgenden Vorschläge sind der Berechnung an hölzernen freitragenden Flügeln mit starker Verjüngung entnommen. Falls diese auch angewendet wurden auf Flügel abweichender Bauart, empfiehlt es sich nach Abschluss der Rechnungen diese zu prüfen. Diese Prüfung ist möglich, indem man mit der Lösung in die Gleichungen (10) und (11) hineingeht, und die mit dieser Lösung verbundene Belastung berechnet (fig. 12, 13).

Jede Belastung kann wieder unterteilt werden in eine rein biegende Belastung I, und eine rein-tordierende Belastung II (Gl. 43, 44).

Meistens wird die Lösung bei der Belastung I genügend genau approximiert durch w^0_1 and w^0_2 entsprechend Gl. (48) (fig. 4).

Im II^{ten} Belastungsfall wird die Z-Gleichung gelöst, nachdem w^0 , u.s.w. gleich 0 gesetzt worden ist. Die erste Korrektionsquerkraft $\Delta_1 D$ zur Ermittlung der ersten Korrektur für w (siehe Gl. 15, 16) kann annäherungsweise durch $D(\Delta_0 v_1, \Delta_0 v_2)$ gegeben werden (fig. 7, 8). Die zweite Korrektur für Z wird genügend genau durch (49) approximiert (fig. 9).

Zur Berechnung der grössten Schubspannungen in der Beplankung in Fall I, soll die u_m -Gleichung gelöst werden für $m=1$, und bei grossen Unstetigkeiten in der Beplankungsstärke, auch für $m=3$ (fig. 5, 7). Im II^{ten} Fall kann die u_m -Berechnung fortfallen. (fig. 10, 11).

Die Formeln für die Spannungsrechnung sind unter Punkt 7 gesammelt.

g. *Formelzeichen.*

Die Formelzeichen sind dieselben wie in Schr. 7, 8. Hinzugefügt werden:

c	= Druckmittelpunkt der Belastung.
g	= E_0 .
K	= $\left(\frac{EI^4}{S} \right)$.
k	= $\frac{E_b}{E_0}$.
$()^n$	= n^{te} Approximation von $()$.
$\Delta_n()$	= n^{te} Korrektur von $()$ (Gl. 15).
N	= Normalkraft in dem Holm.
t	= Flügeltiefe.
w	= Durchbiegung, definiert von Gl. (2).
Z	= S_{by}'' .
Z_{i1}	= Lösung der nicht-homogenen Z_i -Gleichung.
Z_{i2}	= Lösung der homogenen Z_i -Gleichung.
u_m	= Komponente der Verschiebung u nach Gl. (35).
u_{m1}	= Lösung der nicht-homogenen u_m -Gleichung.
u_{m2}	= Lösung der homogenen u_m -Gleichung.
Zeiger I	= zur reinen Biegung gehörend,
Zeiger II	= zur reinen Torsion gehörend.
Strich	— über den Grössen l , S und Q gibt diesen Grössen die Dimension einer Länge, einer Steifigkeit und einer Kraft.

RAPPORT S. 68.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. III.

door

Ir. C. KONING en Dr. Ir. A. v. d. NEUT.

Overzicht.

Een iteratie-methode voor het verkrijgen van numerische oplossingen van de vroeger afgeleide differentiaalvergelijkingen voor den vleugel met ribverband en bekleeding wordt aangegeven. Op grond van uitgevoerde vleugelberekeningen wordt besproken hoever de iteratie moet worden voortgezet.

Indeeling.

1. Inleiding. 2. De differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden. 3. De iteratie-methode. a. Algemeene gang der oplossingsmethode. b. Analogie met den niet-bekleeden vleugel. c. De benadering van w_1 en w_2 . d. De benadering van u_b en u_o . e. De benadering van v_1 en v_2 . 4. De oplossing van de Z-vergelijking. a. De Z-vergelijking. b. Samenstelling van de oplossing uit twee andere in verband met de randvoorwaarden. c. Integratie van de Z-vergelijking. 5. De oplossing van de u-vergelijking. a. u als functie van z. b. Integratie van de u_m -vergelijking. c. Samenstelling van de oplossing uit twee andere in verband met de randvoorwaarden. d. Substitutie van (35) in de differentiaalvergelijkingen. 6. De praktische uitvoering der berekening. a. Splijting der belasting in buigende en wringende belasting. b. De iteratie bij zuiver buigende belasting. c. De iteratie bij zuiver wringende belasting. d. Eenige opmerkingen over de gegeven oplossingsmethode. 7. De spanningsberekening. a. De normaalspanningen in de liggergordingen. b. De schuifspanningen in de liggerwanden. c. De spanningen in de bekleeding.

1. Inleiding.

Reeds werd in het kort in een vroegere publicatie (lit. 7) aangeduid op welke wijze een oplossing verkregen kan worden van de voor den vleugel met bekleeding afgeleide differentiaalvergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn lineair en simultaan in de onbekende functies y_1 , y_2 , u_b , u_o , v_1 en v_2 (punt 2). Het optreden van het laatste viertal functies maakt, dat niet zonder meer de oplossingsmethoden kunnen worden toegepast, die gelden voor den vleugel, waarbij geen bekleeding aanwezig is, en waarbij v verwaarloosd werd. (lit. 4, 5). Als onderdeelen van een iteratie-methode (punt 3) bleven zij echter in principe bruikbaar. Het is echter gebleken bij de numerische berekening van gegeven vleugels, dat aan de toepassing van deze methoden enkele bezwaren in den weg stonden.

Een methode, in rapport V. 285 (lit. 3) aangeduid, bleek bij het verloop, dat de stijfheidsfactoren S_b en B hebben, slechts toegepast te kunnen worden, indien de vleugel in een groot aantal intervallen wordt onderverdeeld, en de differentiaalvergelijkingen voor ieder dezer intervallen afzonderlijk geïntegreerd worden onder inachtnahme van de randvoorwaarden bij elke overgang van twee intervallen. De hoeveelheid rekenwerk, die bij deze methode vereischt wordt, maakt haar toepassing bezwaarlijk.

Bij de methode, die in rapport V. 357 (lit. 5) gegeven is, schuilt de voornaamste moeilijkheid in de benadering van de stijfheidsfactoren door polynomen. Bij numerische toepassingen op bestaande vleugels bleek het lastig te vermijden, dat, bij de benadering van de stijfheidsfactoren door polynomen van x, deze polynomen wortels hadden binnen de eenheidscirkel om het punt $x = 0$. Deze eisch, waaraan voldaan moet worden, opdat de oplossing convergent zij, kon slechts bevredigd worden ten koste van concessies ten opzichte van de nauwkeurigheid der benadering. Bovendien is het bij deze methode onmogelijk discontinuïteiten in de stijfheidsfactoren, die vooral bij B van belang kunnen zijn, door de dikteverandering van de bekleeding, door benadering met polynomen van lagen graad weer te geven. Doch ook doen zich speciaal bij den tapschen vleugel met torsiestijve bekleeding omstandigheden voor, die, afgezien van het vorige, de praktische bruikbaarheid van deze methode verminderen. Het is n.l. gebleken, dat bij deze vleugels, waar aan den tip de verhouding tusschen torsiestijfheid van den vleugel en buigingsstijfheid van de liggers groot is, de oplossing, die in den vorm van een reeks verkregen wordt, slechts langzaam convergeert. Eerst na

een uitvoeriger berekening wordt dus een voldoende nauwkeurige oplossing verkregen. Ter vergelijking met het geval, dat in rapport V. 357 (lit. 5) behandeld is en waar de gegeven stijfheden ongeveer overeenkomen met die van een vleugel zonder bekleding, worden in tabel I de resultaten vermeld van de berekeningen aan een vleugel met 5 maal zoo groote torsiestijfheid, wat meer overeenkomt met den toestand bij den bekleeden vleugel. De grootheid K_n geeft aan, welke waarde het berekende buigend moment in den voorligger ter plaatse $x=0$ heeft, wanneer van de reeks, die de oplossing vormt, de coëfficiënten van de eerste $n+1$ termen bepaald zijn. De in tabel I vermelde getallen K_n laten duidelijk zien, welken invloed de grootere torsiestijfheid heeft op de snelheid van convergentie der oplossing, en daarmee op de praktische bruikbaarheid der oplossingsmethode.

Omdat bij gebruikmaking van gepubliceerde oplossingsmethoden de boven besproken bezwaren ondervonden werden, en het mogelijk bleek op eenvoudiger wijze een oplossing te verkrijgen, wordt in het volgende (punt 4) een methode ontwikkeld, die vooral den voorkeur verdient bij de berekening van gegeven vleugels, waar dus de stijfheidsfactoren niet meer zoo kunnen worden veranderd, dat zij beter in het kader van een bepaalde oplossingsmethode passen. De bruikbaarheid van deze methode is, doordat zij reeds op verscheidene vleugels is toegepast, voldoende gebleken.

Als verder onderdeel van de iteratie-methode komt als nieuw element naast de Z-vergelijking (punt 4) de u-vergelijking (lit. 8 verg. (29)). De methode voor de oplossing van deze laatste vertoont overeenkomst met de methode, die voor de oplossing van de Z-vergelijking wordt aangegeven (punt 5). Zij wordt in de plaats gesteld van de in rapport V. 358 (lit. 7) aangeduide methode, die slechts toegepast kan worden, indien de dikte en de elasticiteitsmodulus van de bekleding constant zijn.

Verder wordt besproken hoe ver de iteratie moet worden voortgezet, en welke termen der differentiaalvergelijkingen als verwaarloosbaar kunnen worden beschouwd (punt 6).

Tenslotte worden de formules voor de berekening van de spanningen in liggers en bekleding gegeven (punt 7).

2. De differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden.

Uitgegaan wordt van de differentiaalvergelijkingen, zooals zij gegeven zijn in rapport S. 67 (lit. 8 verg. 23, 25, 26 en 29). De berekeningen worden overzichtelijker gehouden, indien de in deze vergelijkingen voorkomende grootheden vervangen worden door dimensielooze. Dit kan geschieden door aan te nemen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{l}x, \quad \bar{z} = \bar{l}z, \quad \bar{b} = \bar{l}b, \quad \bar{h} = \bar{l}h, \quad \bar{\delta} = \bar{l}\delta, \\ \bar{S}_b &= \bar{S}S_b, \quad \bar{S}_t = \bar{S}S_t, \\ \bar{q} &= \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{l}}\right)q, \quad \bar{D} = \bar{Q}D, \quad \bar{M} = (\bar{Q}\bar{l})M, \\ \bar{y} &= \left(\frac{\bar{Q}\bar{l}^3}{\bar{S}}\right)y, \quad \bar{v} = \left(\frac{\bar{Q}\bar{l}^3}{\bar{S}}\right)v, \quad \bar{u} = \left(\frac{\bar{Q}\bar{l}^3}{\bar{S}}\right)u, \\ \bar{\sigma} &= \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{l}^2}\right)\sigma, \quad \bar{\tau} = \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{l}^2}\right)\tau, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

waarin de niet overstreepte grootheden dimensieloos zijn, de overstreepte grootheden wel een dimensie hebben, $\bar{l}$, $\bar{S}$ en $\bar{Q}$ resp. een willekeurig gekozen lengte, stijfheidsfactor en kracht zijn.¹⁾ De berekeningen worden aanmerkelijk vereenvoudigd indien voor $\bar{l}$ gekozen wordt de afstand van het punt $\bar{x}=0$ tot den tip. Verder kan voor $\bar{S}$ gebruikt worden de buigingsstijfheid van den achterligger ter plaatse $\bar{x}=0$, en voor $\bar{Q}$ de grootheid ($p\bar{l}^2$) waarin p de vlaktebelasting van den vleugel is.

De differentiaalvergelijkingen (lit. 8, verg. 23, 25, 26, 29) en de randvoorwaarden (lit. 8, verg. 27, 30) worden nog in een eenigszins anderen vorm geschreven door invoering van de nieuwe veranderlijken w_1'' en w_2'' , die gedefinieerd zijn door:

$$\left. \begin{aligned} w_1'' &= y_1'' - \frac{h_1'}{h_1} v_1', \\ w_2'' &= y_2'' - \frac{h_2'}{h_2} v_2', \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

en waarmee de veranderlijken y_1 en y_2 geëlimineerd worden.

In de vergelijkingen treedt als laagste afgeleide van y zijn eerste afgeleide op, waarvoor in verband met de randvoorwaarde (lit. 8, verg. 27a, b) volgt:

$$y' = a + \int_0^x w'' dx + \int_0^x \frac{h'}{h} v' dx.$$

Tevens nog stellend, dat in het punt $x=0$ geldt $w'=u$, volgt:

¹⁾ De vergelijkingen van rapport S. 67 (lit. 8) behoorden in deze notatie in overstreepte grootheden te worden geschreven

$$y' = w' + \int_0^x \frac{h'}{h} v' dx. \quad (3)$$

Na substitutie van (1), (2) en (3) gaan de differentiaalvergelijkingen (lit. 8, vergel. 23a, b) over in:

$$v_1' = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{g_1 h_1 \Sigma \delta_1} \left(D_{e1} + M_{e1} \frac{h_1'}{h_1} \right) \quad (4a)$$

$$v_2' = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{g_2 h_2 \Sigma \delta_2} \left(D_{e2} + M_{e2} \frac{h_2'}{h_2} \right), \quad (4b)$$

met:

$$K = \left(\frac{E_o l^4}{S} \right)$$

$$g = \left(\frac{G}{E_o} \right)$$

$$M_{e1} = S_{b1} w_1''$$

$$M_{e2} = S_{b2} w_2''$$

$$D_{e1} = -M_{e1}' + K \left\{ \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) h_1 \left[(h_1 + h_2) \left(w_1' - w_2' + \int_0^x \left(\frac{h_1'}{h_1} v_1' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) dx \right) + h_2 v_1' - h_1 v_2' \right] + \right. \\ \left. + \frac{h_1}{2} \left[g_b \delta_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial z} \right)_{z=0} - g_o \delta_o \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=0} \right] \right\}$$

$$D_{e2} = -M_{e2}' - K \left\{ \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) h_2 \left[(h_1 + h_2) \left(w_1' - w_2' + \int_0^x \left(\frac{h_1'}{h_1} v_1' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) dx \right) + h_2 v_1' - h_1 v_2' \right] + \right. \\ \left. + \frac{h_2}{2} \left[g_b \delta_b \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=b} - g_o \delta_o \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=b} \right] \right\}.$$

De vergelijking (lit. 8, vergel. 25) gaat over in:

$$A_1 w_1'' + A_2 w_2'' = \int_x^1 (q_1 + q_2) (\xi - x) d\xi + F_1(u_b, u_o), \quad (5)$$

met:

$$A_1 = S_{b1} + K \frac{1}{24} (k \delta_b + \delta_o) b h_1 (2h_1 + h_2)$$

$$A_2 = S_{b2} + K \frac{1}{24} (k \delta_b + \delta_o) b h_2 (h_1 + 2h_2)$$

$$k = \frac{E_b}{E_o}$$

$$F_1(u_b, u_o) = K \frac{1}{2} \int_0^b \left(k \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - \delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) \left(h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right) dz.$$

De vergelijking (lit. 8, vergel. 26) gaat over in:

$$(S_{b2} w_2'')' + B(w_1 - w_2)' = - \int_0^1 q_2 d\xi + F_2(w_1, w_2) + F_3(u_b, u_o) + F_4(v_1, v_2), \quad (6)$$

waarin:

$$B = \frac{1}{b^2} (S_{t1} + S_{t2}) + K \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) b (h_1 + h_2)^2$$

$$F_2(w_1, w_2) = -K \frac{1}{48} (k \delta_b + \delta_o) b \left\{ (h_1' + h_2') h_1 w_1'' + (h_1' + 3h_2') h_2 w_2'' \right\}$$

$$F_3(u_b, u_o) = K \left\{ - \frac{h_2}{2} \left[g_b \delta_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial z} \right)_{z=b} - g_o \delta_o \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=b} \right] + \frac{1}{2b_o} \int_0^b \left(k \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - \delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) \left(h_1' + (h_2' - h_1') \frac{z}{b} \right) z dz \right\}$$

$$F_4(v_1, v_2) = K \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) (h_1 + h_2) (h_1 v_1' - h_2 v_2') - B \left[v_1' - v_2' + \int_0^x \left(\frac{h_1'}{h_1} v_1' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) dx \right].$$

Ten slotte gaan de vergelijkingen (lit. 8, vergel. 29a, b) over in:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} \right) + g_b \delta_b \frac{\partial^2 u_b}{\partial z^2} = \left[\frac{1}{2} k \delta_b \left\{ h_1 w_1'' + (h_2 w_2'' - h_1 w_1'') \frac{z}{b} \right\} \right]' \quad (7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + g_0 \delta_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = - \left[\frac{1}{2} \delta_0 \left\{ h_1 w_1'' + (h_2 w_2'' - h_1 w_1'') \frac{z}{b} \right\} \right]' \quad (7b)$$

De randvoorwaarden (lit. 8, vergel. 27) worden nu:

$$x=0: \quad w_1' = a_1, \quad w_2' = a_2, \quad (8a, b)$$

$$w_1 = w_2 = v_1 = v_2 = 0, \quad (8c, d, e, f)$$

$$x=1: \quad C_1 w_1'' + (A_2 - C_2) w_2'' - \frac{S_{tr}}{b} (Y_1 - Y_2)' = F_5(u_b, u_0), \quad (8g)$$

met:

$$C_1 = K \frac{1}{48} (k \delta_b + \delta_0) b h_1 (h_1 + h_2)$$

$$C_2 = K \frac{1}{48} (k \delta_b + \delta_0) b h_2 (h_1 + h_2)$$

$$F_5(u_b, u_0) = K \frac{1}{2b_0} \int_0^b dz_1 \int_{z_1}^b \left(h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right) \left(k \delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - \delta_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dz.$$

De randvoorwaarde (lit. 8, vergel. 30) wordt nu:

$$x=0, x=1, z=0, z=b: \quad u_b = u_0 = 0. \quad (9)$$

3. De iteratiemethode.

a. De algemeene gang der oplossingsmethode.

Als in de vergelijkingen (5) en (6) en in de randvoorwaarden (8g) de functies van u en v verwaarloosd worden en verder zekere termen, die w bevatten, wordt een stel vergelijkingen in w_1 en w_2 verkregen, dat met zijn randvoorwaarden (8a, b, c, d, g,) direct oplosbaar is. Deze oplossing voor w_1 en w_2 vormt een eerste benadering voor deze grootheden. Na substitutie van deze eerste benadering van w_1 en w_2 in (7a,b) kan van deze vergelijkingen met de randvoorwaarde (9) de oplossing bepaald worden, die dan de eerste benadering van u_b en u_0 geeft. Met de eerste benadering van w_1 , w_2 , u_b en u_0 kunnen vervolgens uit de vergelijkingen (4a, b) en de randvoorwaarden (8e, f) v_1 en v_2 in eerste benadering worden gevonden.

Vervolgens worden nu, onder gebruikmaking van de verkregen waarden van w , u en v , die termen van (5), (6) en (8g) berekend, die bij de eerste benadering weggelaten werden. Door nu deze termen in te voeren en de vergelijkingen (5) en (6) opnieuw op te lossen, wordt een nauwkeuriger oplossing voor w_1 en w_2 verkregen. Deze oplossing voor w_1 en w_2 wordt de tweede benadering van deze grootheden genoemd. Zij stelt weer in staat tot de bepaling van een tweede benadering van u , en vervolgens ook van v , waarna w op dezelfde wijze in derde benadering berekend kan worden. Dit proces kan worden voortgezet, totdat een voldoende nauwkeurige benadering is verkregen.

Blijkbaar wordt de mate, waarin dit iteratieproces convergeert, bepaald door de mate, waarin de verschillen der aanvankelijk in (5) en (6) verwaarloosde functies bij opeenvolgende benadering kleiner zijn.

Bij de numerische berekening wordt bij iedere volgende benadering, inplaats van de totale waarde der diverse functies, gerekend met de verandering, die deze functie ten opzichte van de vorige benadering ondergaan heeft. Deze verandering wordt „correctie” genoemd, de n^{de} correctie komt dus overeen met de $n+1^{\text{ste}}$ benadering. In dit verband wordt ook het begrip „correctie-dwarskracht” ingevoerd, dat in het volgende nader zal worden uiteengezet.

b. Analogie met den niet-bekleeden vleugel.

Voor vergelijking (6) wordt geschreven:

$$(S_{b2} w_2'')' + B(w_1 - w_2)' = - \left[D_{u2} + D_2(w_1, w_2) + D_2(u_b, u_0) + D_2(v_1, v_2) \right], \quad (10a)$$

waarin:

$$D_{u2} = \int_x^1 q_2 d\xi$$

$$D_2(w_1, w_2) = -F_2(w_1, w_2)$$

$$D_2(u_b, u_0) = -F_3(u_b, u_0)$$

$$D_2(v_1, v_2) = -F_4(v_1, v_2).$$

Naar analogie van (10a) volgt voor het momentenevenwicht om den voorligger, door verwisseling van de indices 1 en 2 en vervanging van z door $b-z$,

$$(S_{b1} w_1'')' - B(w_1 - w_2)' = - \left[D_{u1} + D_1(w_1, w_2) + D_1(u_b, u_0) + D_1(v_1, v_2) \right], \quad (10b)$$

waarin :

$$D_{u1} = \int_x^1 q_1 d\xi$$

$$D_1(w_1, w_2) = K \frac{1}{48} (k\delta_b + \delta_o) b \left\{ (3h_1' + h_2') h_1 w_1'' + (h_1' + h_2') h_2 w_2'' \right\}$$

$$D_2(u_b, u_o) = -K \left\{ \frac{h_1}{2} \left[g_b \delta_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial z} \right)_{z=0} - g_o \delta_o \left(\frac{\partial u_o}{\partial z} \right)_{z=0} \right] + \frac{1}{2b} \int_0^b \left(k\delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - \delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) \left(h_1' + (h_2' - h_1') \frac{z}{b} \right) (b-z) dz \right\}$$

$$D_1(v_1, v_2) = K \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) (h_1 + h_2) (h_1 v_1' - h_2 v_2') - B \left[v_1' - v_2' + \int_0^x \left(\frac{h_1'}{h_1} v_1' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) dx \right].$$

Voor de randvoorwaarde (8g) wordt geschreven:

$$x=1: \quad S_{b2} w_2'' = M_2(w_1, w_2) + M_2(u_b, u_o) + M_2(v_1, v_2), \quad (11a)$$

waarin :

$$M_2(w_1, w_2)_{x=1} = -K \frac{1}{48} \left[(k\delta_b + \delta_o) b \left\{ (h_1 + h_2) h_1 w_1'' + (h_1 + 3h_2) h_2 w_2'' \right\} \right]_{x=1} + \frac{S_{tr}}{b} (w_1 - w_2)'_{x=1}$$

$$M_2(u_b, u_o)_{x=1} = F_5(u_b, u_o)_{x=1}$$

$$M_2(v_1, v_2)_{x=1} = \frac{S_{tr}}{b} \left\{ (v_1' - v_2')_{x=1} + \int_0^1 \left(\frac{h_1'}{h_1} v_1' - \frac{h_2'}{h_2} v_2' \right) dx \right\}.$$

De analoge randvoorwaarde voor het buigend moment aan het eind van den voorligger is:

$$x=1: \quad S_{b1} w_1'' = M_1(w_1, w_2) + M_1(u_b, u_o) + M_1(v_1, v_2), \quad (11b)$$

waarin :

$$M_1(w_1, w_2)_{x=1} = -K \frac{1}{48} \left[(k\delta_b + \delta_o) b \left\{ (3h_1 + h_2) h_1 w_1'' + (h_1 + h_2) h_2 w_2'' \right\} \right]_{x=1} - \frac{S_{tr}}{b} (w_1 - w_2)'_{x=1}$$

$$M_1(u_b, u_o)_{x=1} = K \frac{1}{2b} \int_0^b \int_0^1 \left\{ \left(h_1 + (h_2 - h_1) \frac{z}{b} \right) \left(k\delta_b \frac{\partial u_b}{\partial x} - \delta_o \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) \right\}_{x=1} dz$$

$$M_1(v_1, v_2)_{x=1} = -M_2(v_1, v_2)_{x=1}.$$

Na optelling van (10a) en (10b), en integratie van de dan verkregen vergelijking onder inachtnahme der randvoorwaarden (11a, b), wordt verkregen:

$$S_{b1} w_1'' + S_{b2} w_2'' = M_{u1} + M_{u2} + M_1(w_1, w_2) + M_2(w_1, w_2) + M_1(u_b, u_o) + M_2(u_b, u_o) + M_1(v_1, v_2) + M_2(v_1, v_2), \quad (12)$$

waarin :

$$M_{u1} = \int_x^1 D_{u1} d\xi, \quad M_{u2} = \int_x^1 D_{u2} d\xi,$$

$$M_n(a, b) = \int_x^1 D_n(a, b) d\xi + M_n(a, b)_{x=1} \quad n=1, 2.$$

Vergelijking (12) is identiek met (5), wat na eenige herleiding met behulp van (7) blijkt, zoodat (10b) en (11b) samen (5) vervangen kunnen.¹⁾

De vorm, waarin de differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden door (10) en (11) gebracht zijn, maakt het mogelijk een formeele analogie met den niet-bekleeden vleugel te treffen.

De differentiaalvergelijkingen van den niet-bekleeden vleugel zijn (lit. 5, I):

$$(S_{b1} y_1'')' - r(y_1 - y_2)' = -D_1$$

$$(S_{b2} y_2'')' + r(y_1 - y_2)' = -D_2,$$

en de randvoorwaarden zijn:

$$x=1: \quad S_{b1} y_1'' = M_1(1) \quad S_{b2} y_2'' = M_2(1),$$

waarin D_1 en D_2 de resulterende dwarskrachten van de uitwendige belasting op voor- en achterligger zijn, en $M_1(1)$ en $M_2(1)$ de momenten door de uitwendige belasting op het liggereind uitgeoefend.²⁾

¹⁾ Wegens de herleiding over (7), die noodig is om de identiteit van (12) en (5) aan te toonen, gelden niet de betrekkingen $F_1(u_b, u_o) = M_1(u_b, u_o) + M_2(u_b, u_o)$, enz.

²⁾ In de rapporten over den vleugel zonder bekleding hebben D en M het tegengestelde teken, omdat de definitie van de positieve richting tegengesteld is.

Er bestaat nu formeel overeenstemming tusschen den bekleeden en den niet-bekleeden vleugel, indien het 2e lid van (10a, b) geïnterpreteerd wordt als dwarskracht voor een vleugel zonder bekleding, en de door (11a, b) gedefinieerde momenten als uitwendige momenten aan het vleugeleinde worden toegevoegd aan de belasting door deze dwarskrachten. Deze formeele analogie vormt de grondgedachte van de oplossingsmethode.

c. De benadering van w_1 en w_2 .

Volgens de in het voorgaande (punt 3a) aangegeven iteratiemethode wordt de n^{de} benadering van w_1 en w_2 (w_1^n en w_2^n) bepaald uit de vergelijkingen:

$$(S_{b1} w_1^{n''})' - B(w_1^n - w_2^n)' = -D_1^n = -[D_{u1} + D_1(w_1^{n-1}, w_2^{n-1}) + D_1(u_b^{n-1}, u_o^{n-1}) + D_1(v_1^{n-1}, v_2^{n-1})] \quad (13a)$$

$$(S_{b2} w_2^{n''})' + B(w_1^n - w_2^n)' = -D_2^n = -[D_{u2} + D_2(w_1^{n-1}, w_2^{n-1}) + D_2(u_b^{n-1}, u_o^{n-1}) + D_2(v_1^{n-1}, v_2^{n-1})], \quad (13b)$$

met de randvoorwaarden:

$$x=1: S_{b1} w_1^{n''} = M_1^n = M_1(w_1^{n-1}, w_2^{n-1}) + M_1(u_b^{n-1}, u_o^{n-1}) + M_1(v_1^{n-1}, v_2^{n-1}) \quad (14a)$$

$$x=1: S_{b2} w_2^{n''} = M_2^n = M_2(w_1^{n-1}, w_2^{n-1}) + M_2(u_b^{n-1}, u_o^{n-1}) + M_2(v_1^{n-1}, v_2^{n-1}). \quad (14b)$$

De $(n+1)$ -de benadering van w_1 en w_2 wordt verkregen uit de vergelijkingen (13a, b) en de randvoorwaarden (14a, b), waarin nu n vervangen is door $n+1$.

De n^{de} correctie van w_1 en w_2 ,

$$\Delta_n w = w^{n+1} - w^n, \quad (15)$$

voldoet dus aan de vergelijkingen, die verkregen worden door de vergelijkingen (13), behorende bij de n -de benadering, af te trekken van de overeenkomstige vergelijkingen, die voor de $(n+1)$ -de benadering gelden.

$$(S_{b1} \Delta_n w_1'')' - B(\Delta_n w_1 - \Delta_n w_2)' = -\Delta_n D_1 \quad (16a)$$

$$(S_{b2} \Delta_n w_2'')' + B(\Delta_n w_1 - \Delta_n w_2)' = -\Delta_n D_2, \quad (16b)$$

met de randvoorwaarden:

$$x=1: S_{b1} \Delta_n w_1'' = \Delta_n M_1 \quad (17a)$$

$$x=1: S_{b2} \Delta_n w_2'' = \Delta_n M_2. \quad (17b)$$

De n^{de} correctiedwarskracht $\Delta_n D$ en het n^{de} correctie-eindmoment $\Delta_n M$ zijn dan gedefinieerd door:

$$\Delta_n D_1 = D_1(\Delta_{n-1} w_1, \Delta_{n-1} w_2) + D_1(\Delta_{n-1} u_b, \Delta_{n-1} u_o) + D_1(\Delta_{n-1} v_1, \Delta_{n-1} v_2) \quad (18a)$$

$$\Delta_n D_2 = D_2(\Delta_{n-1} w_1, \Delta_{n-1} w_2) + D_2(\Delta_{n-1} u_b, \Delta_{n-1} u_o) + D_2(\Delta_{n-1} v_1, \Delta_{n-1} v_2) \quad (18b)$$

$$\Delta_n M_1 = M_1(\Delta_{n-1} w_1, \Delta_{n-1} w_2) + M_1(\Delta_{n-1} u_b, \Delta_{n-1} u_o) + M_1(\Delta_{n-1} v_1, \Delta_{n-1} v_2) \quad (18c)$$

$$\Delta_n M_2 = M_2(\Delta_{n-1} w_1, \Delta_{n-1} w_2) + M_2(\Delta_{n-1} u_b, \Delta_{n-1} u_o) + M_2(\Delta_{n-1} v_1, \Delta_{n-1} v_2). \quad (18d)$$

Indien gesteld wordt: $w_1^0 = w_2^0 = u_b^0 = u_o^0 = v_1^0 = v_2^0 = 0$ worden de vergelijkingen voor de bepaling van de eerste benadering:

$$(S_{b1} w_1^{1''})' - B(w_1^1 - w_2^1)' = -D_{u1} \quad (19a)$$

$$(S_{b2} w_2^{1''})' + B(w_1^1 - w_2^1)' = -D_{u2}, \quad (19b)$$

en de randvoorwaarden:

$$x=1: S_{b1} w_1^{1''} = S_{b2} w_2^{1''} = 0. \quad (20a, b)$$

Met deze keuze van w_1^0 , enz., krijgen tevens de uitdrukkingen $\Delta_0 w_1$, een zin, zoodat de formules (18) tevens de 1ste correctiedwarskrachten definieren.

Ook had voor w_1^0 , enz., een andere keuze getroffen kunnen worden door een voorloopige schatting te maken van de vervormingen. De 1ste benadering volgde dan uit (13) en (14) met $u_b = u_o = v_1 = v_2 = 0$; de correcties worden op dezelfde wijze als in het vorige geval berekend. In een bepaald geval, waar gemakkelijk een dergelijke schatting kan worden gemaakt, verdient deze methode den voorkeur. Dit geval zal hierna uitvoeriger worden besproken. (punt 6b).

d. De benadering van u_b en u_o .

Indien in het 2de lid van vergelijking (7) de 1ste benadering van w wordt gesubstitueerd vormt de oplossing van deze vergelijking de 1ste benadering van u . Na substitutie van de grootheden $\Delta_n w$ in de plaats van w geeft (7) als oplossing de n -de correctie $\Delta_n u$.

e. De benadering van v_1 en v_2 .

Nadat w_1 , w_2 , u_b en u_o in n^{de} benadering bekend zijn volgt de n^{de} benadering van v_1 en v_2 uit:

$$(v_1^n)' = \frac{1}{K} \frac{1}{g_1 h_1 \Sigma \delta_1} \left(D_{e1}^n + M_{e1}^n \frac{h_1'}{h_1} \right) \quad (21a)$$

$$(v_2^n)' = \frac{1}{K} \frac{1}{g_2 h_2 \Sigma \delta_2} \left(D_{e2}^n + M_{e2}^n \frac{h_2'}{h_2} \right), \quad (21b)$$

met

$$M_{e1}^n = S_{b1}(w_1^n) \quad M_{e2}^n = S_{b2}(w_2^n)$$

$$\begin{aligned} D_{e1}^n = - (M_{e1}^n)' + K \left\{ \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) h_1 \right\} & \left[(h_1 + h_2) \left\{ (w_1^n - w_2^n)' + \int_x^0 \left(\frac{h_1'}{h_1} (v_1^{n-1})' - \frac{h_2'}{h_2} (v_2^{n-1})' \right) dx \right\} + \right. \\ & \left. + h_2 (v_1^{n-1})' - h_1 (v_2^{n-1})' \right] + \left[\frac{2}{h_1} \left[g_b \delta_b \frac{\partial u_b^n}{\partial z} - g_o \delta_o \frac{\partial u_o^n}{\partial z} \right] \right]_{z=0}^{z=b} \\ D_{e2}^n = - (M_{e2}^n)' - K \left\{ \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) h_2 \right\} & \left[(h_1 + h_2) \left\{ (w_1^n - w_2^n)' + \int_x^0 \left(\frac{h_1'}{h_1} (v_1^{n-1})' - \frac{h_2'}{h_2} (v_2^{n-1})' \right) dx \right\} + \right. \\ & \left. + h_2 (v_1^{n-1})' - h_1 (v_2^{n-1})' \right] + \left[\frac{2}{h_2} \left[g_b \delta_b \frac{\partial u_b^n}{\partial z} - g_o \delta_o \frac{\partial u_o^n}{\partial z} \right] \right]_{z=b}^{z=0} \end{aligned}$$

De n-de correctie wordt dan overeenkomstig (15) bepaald uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (22a) \quad \Delta v_1' &= \frac{1}{I} K g_1 h_1 \Sigma \delta_1 (\Delta_n D_{e1} + \Delta_n M_{e1} \frac{h_1}{h_1}) \\ (22b) \quad \Delta v_2' &= \frac{1}{I} K g_2 h_2 \Sigma \delta_2 (\Delta_n D_{e2} + \Delta_n M_{e2} \frac{h_2}{h_2}) \end{aligned}$$

met

$$\Delta_n M_{e1} = S_{b1} \Delta_n w_1 \quad \Delta_n M_{e2} = S_{b2} \Delta_n w_2$$

$$\begin{aligned} \Delta_n D_{e1} = - \Delta_n M_{e1}' + K \left\{ \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) h_1 \right\} & \left[(h_1 + h_2) (\Delta_n w_1' - \Delta_n w_2') + \int_x^0 \left(\frac{h_1'}{h_1} \Delta_{n-1} v_1' - \frac{h_2'}{h_2} \Delta_{n-1} v_2' \right) dx + \right. \\ & \left. + h_2 \Delta_{n-1} v_1' - h_1 \Delta_{n-1} v_2' \right] + \left[\frac{2}{h_1} \left[g_b \delta_b \frac{\partial}{\partial z} (\Delta_n u_b) - g_o \delta_o \frac{\partial}{\partial z} (\Delta_n u_o) \right] \right]_{z=0}^{z=b} \\ \Delta_n D_{e2} = - \Delta_n M_{e2}' - K \left\{ \frac{1}{4b} (g_b \delta_b + g_o \delta_o) h_2 \right\} & \left[(h_1 + h_2) (\Delta_n w_1' - \Delta_n w_2') + \int_x^0 \left(\frac{h_1'}{h_1} \Delta_{n-1} v_1' - \frac{h_2'}{h_2} \Delta_{n-1} v_2' \right) dx + \right. \\ & \left. + h_2 \Delta_{n-1} v_1' - h_1 \Delta_{n-1} v_2' \right] + \left[\frac{2}{h_2} \left[g_b \delta_b \frac{\partial}{\partial z} (\Delta_n u_b) - g_o \delta_o \frac{\partial}{\partial z} (\Delta_n u_o) \right] \right]_{z=b}^{z=0} \end{aligned}$$

Na de keuze van v_1^0, v_2^0 volgt uit (21) de eerste benadering van v_1 en v_2 .

4. De oplossing van de Z-vergelijking.

a. De Z-vergelijking.

De vergelijkingen (13) of (16) met hun randvoorwaarden (14) of (17) bevatten de onbekenden w_1^n en w_2^n (of $\Delta_n w_1$ en $\Delta_n w_2$) in het eerste lid, terwijl het tweede lid een bekende functie van x bevat. Deze vergelijkingen zijn dus geheel analoog met die, vermeld in rapport V. 357 (lit. 5, vergel. II); en er kan dan ook dezelfde herleiding op worden toegepast als daar geschied is.

Onder invoering van de nieuwe variabelen

$$Z_1 = S_{b1} w_1, \quad Z_2 = S_{b2} w_2$$

gaan de vergelijkingen (13) of (16) met hun randvoorwaarden (indien tevens inplaats van Z^n, D^n, a^n of $\Delta_n Z, \Delta_n D, \Delta_n a$ geschreven wordt Z, D, a) over in:

$$(24a) \quad \frac{Z_1'}{I} - \int_x^0 \frac{Z_1}{I} \left(\frac{S_{b1}}{S_{b2}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) d\xi = f_1(x)$$

$$(24b) \quad Z_1 + Z_2 = f_2(x)$$

$$(25) \quad Z_1 = M_1(1),$$

$x=1$:

$$\text{met:} \quad f_1(x) = - \int_x^0 \frac{M}{S_{b2}} d\xi - \frac{B}{D_1} + (a_1 - a_2)$$

$$f_2(x) = M = \int_1^x (D_1 + D_2) d\xi + M_1(1) + M_2(1).$$

Indien het punt $x=0$, waar het ribverband aanvangt, den afstand l_1 buiten het vleugelmiddeven ligt, wordt de momentenlijn in het gebied $-l_1 < x < 0$ bepaald door:

$$Z_1 = (Z_1)_{x=0} + \int_x^0 D_1 d\xi \quad (26a)$$

$$Z_2 = (Z_2)_{x=0} + \int_x^0 D_2 d\xi \quad (26b)$$

waarin:

$$D = D_u.$$

De hellingshoeken α_1 en α_2 zijn dan:

$$\alpha_1 = \int_{-l_1}^0 \frac{Z_1}{S_{b1}} d\xi$$

$$\alpha_2 = \int_{-l_1}^0 \frac{Z_2}{S_{b2}} d\xi$$

en

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \int_{-l_1}^0 \left[-\frac{M}{S_{b2}} + Z_1 \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) \right] d\xi.$$

Vergelijking (24a) gaat hiermede over in:

$$\frac{Z_1'}{B} - \int_{-l_1}^x Z_1 \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) d\xi = - \int_{-l_1}^x \frac{M}{S_{b2}} d\xi - \frac{D_1}{B} = g_1(x). \quad (27)$$

In vele gevallen bevindt zich de eerste rib bij de ophangpunten van den vleugel. Tusschen de ophangpunten is dan een ruimte, die ribverband mist; hier zijn de liggerafmetingen veelal constant, terwijl D_1 en D_2 vrijwel gelijk aan nul zijn. In deze gevallen geldt:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = l_1 \left[-\frac{M}{S_{b2}} + Z_1 \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) \right]_{x=0}.$$

b. Samenstelling van de oplossing uit twee andere in verband met de randvoorwaarden.

Evenals bij de vroeger aangegeven methode (lit. 5, punt 7) wordt ook hier de oplossing van (27) samengesteld uit een oplossing Z_{11} van de niet-homogene vergelijking (24a) met de willekeurige beginvoorwaarde $Z_{11}(0)$, en een oplossing Z_{12} voor de homogene vergelijking, d.i. de vergelijking, die uit (27) verkregen wordt door het 2de lid gelijk nul te stellen, met de beginwaarde $Z_{12}(0)$.

Iedere functie

$$Z_1 = Z_{11} + HZ_{12}, \quad (28)$$

waarin H een willekeurige constante is, is nu een oplossing van (27). H wordt bepaald uit de randvoorwaarde (25):

$$Z_{11}(1) + HZ_{12}(1) = M_1(1). \quad (29)$$

Een inzicht in het karakter van de beide oplossingen Z_{11} en Z_{12} wordt verkregen, indien de vraag onder de oogen wordt gezien, welke mechanische beteekenis de oplossing van de homogene vergelijking heeft, m.a.w. welk systeem van belastingen in de liggers, overeenkomstig (24b), de momentenverdeling $Z_{12} = -Z_{22}$ bewerkt.

Uit de omstandigheid, dat zoowel het 2e lid van (24b) als van (27) identiek gelijk nul zijn, volgt, dat zoowel M als D_1 identiek gelijk nul zijn. Doch dan moet tevens gelden $D_2 = 0$. De eenige belasting, die aan deze eischen voldoet, bestaat uit twee koppels M_1 en M_2 , die aan de ligger-uiteinden aangrijpen, gelijk van grootte zijn en tegengesteld van richting. Een dergelijke belasting beteekent voor het vleugeleinde torsie. Bij afwezigheid van ribverband of bij tot nul naderende stijfheid ervan zou het buigend moment in de liggers constant zijn, zoodat, bij de sterke afname der buigingsstijfheid naar den vleugeltip, voornamelijk de liggereinden vervormingen zullen ondergaan. Bij oneindig stijf ribverband verhindert de torsiestijfheid iedere tendenz van vervorming der liggers. Het buigend moment, dat aan het ligger-uiteinde M_1 bedraagt, is onmiddellijk naast het punt $x=1$ reeds tot nul afgenomen; het wordt overgenomen door ribben en bekleeding.

De gevallen van oneindig torsieslap en oneindig torsiestijf ribverband geven limietgevallen, die de werkelijke gevallen begrenzen. Bij eindige doch groote torsiestijfheid neemt Z_{12} aan den tip snel af, omdat het ribverband door zijn groote stijfheid de sterke vervormingen van de liggers niet zal kunnen meemaken, zonder dat aanzienlijke dwarskrachten op de liggers worden uitgeoefend, die het moment in de liggers snel doen

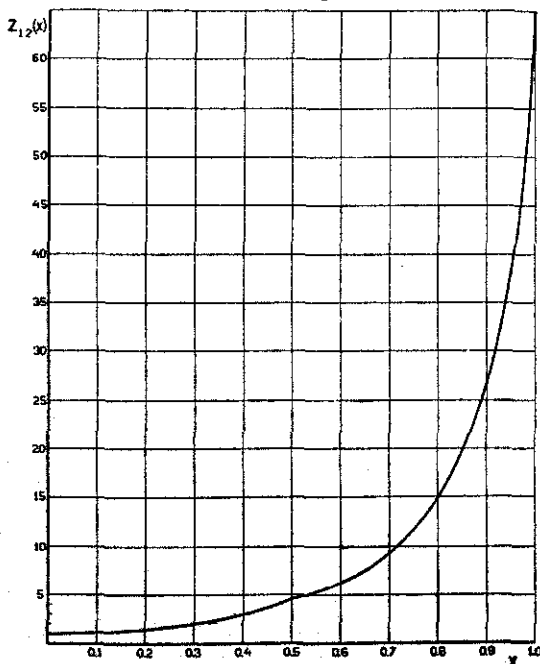


Fig. 1. Oplossing der homogene Z-vergelijking (punt 4b)

afnemen. De afname van Z_{12} zal des te sterker zijn, naarmate de verhouding van torsiestijfheid Bb^2 en buigingsstijfheid $S_{b1} + S_{b2}$ in de omgeving van het vleugeleinde groter is. In de meer naar het midden gelegen vleugeldeel is deze verhouding veel kleiner, zodat de afname van Z daar ook belangrijk minder zal zijn. De lijn $Z_{12}(x)$ zal dus de in figuur 1 aangegeven gedaante moeten hebben.

De oplossing Z_{11} van de niet-homogene vergelijking stelt zich samen uit de oplossing Z_1 , behorende bij de gegeven belasting, en een zeker aantal malen de oplossing Z_{12} , behorende bij de belasting $M_1 = -M_2$ aan de liggereinden. De oplossing Z_{11} komt daarom overeen met de momentenverdeling bij een vleugel, die door de gegeven belasting wordt belast, en verder door twee gelijke en tegengestelde buigende momenten aan de liggereinden.

c. Integratie van de Z -vergelijking.

Indien van de vergelijking

$$\frac{Z'}{B} - \int_{-1}^x Z \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) d\xi = - \int_{-1}^x \frac{M}{S_{b2}} d\xi - \frac{D_1}{B}, \quad (30)$$

waarin Z de eenige onbekende functie is, de oplossing bekend is tot aan het punt $x=a$, kan met behulp van deze vergelijking berekend worden hoe groot Z' is in dit punt. Uit de grootheden $Z(a)$ en $Z'(a)$ kan berekend worden welke waarde Z heeft in het punt $a+da$:

$$Z(a+da) = Z(a) + dZ(a) = Z(a) + Z'(a)da,$$

waarna uit (30) $Z'(a+da)$ volgt, zodat Z van het volgend punt berekend kan worden. Zoo kan worden voortgegaan totdat het punt $x=1$ is bereikt.

Een benaderingsoplossing wordt verkregen, indien van de infinitesimale veranderingen da wordt overgegaan op eindige veranderingen Δa .

Wanneer de functie Z gegeven is tot het punt $x=a$, is $Z'(a)$ uit (30) bekend. De functiewaarde in het punt $a+\Delta a$ kan dan in principe steeds, indien althans geen der functies B , S_{b1} , S_{b2} en $f_1(x)$ singuliere punten bezit in het gebied $a < x < a+\Delta a$, berekend worden met behulp van de Taylor-ontwikkeling:

$$Z(a+\Delta a) = Z(a) + Z'(a)\frac{\Delta a}{1!} + Z''(a)\frac{(\Delta a)^2}{2!} + \dots \quad (31)$$

De afgeleiden van Z kunnen alle door differentiatie van (30) berekend worden:

$$Z'' = Z \cdot B \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) + Z' \frac{B'}{B} + B g_1'(x), \quad (32)$$

zoodat, indien de benadering door:

$$Z(a+\Delta a) = Z(a) + Z'(a)\frac{\Delta a}{1!} \quad (33)$$

te ruw geacht wordt, ook de termen van hogere orde mede in rekening kunnen worden gebracht.

De benadering, die (33) geeft, is beter, naarmate Δa kleiner is, en de functie $Z(x)$ meer tot een lineaire functie van x nadert. Indien aan deze laatste voorwaarde minder goed voldaan wordt, kan de nauwkeurigheid worden verhoogd door verkleining van de intervallen Δa en door vervanging van (33) door (31). Beide maatregelen gaan echter onvermijdelijk gepaard met vermeerderd rekenwerk.

Zonder dat dit gaat ten koste van meerder rekenwerk, kan reeds op de volgende wijze een verbetering der nauwkeurigheid worden bereikt (fig. 2). Aangenomen wordt, dat de functie $Z(x)$ in het gebied $a-\Delta a < x < a+\Delta a$ met voldoende nauwkeurigheid benaderd wordt door de parabool, waarop de punten $Z(a-\Delta a)$, $Z(a)$ en $Z(a+\Delta a)$ liggen. In dat geval is de afwijking tusschen $Z'(a)$ en de raaklijn aan de parabool in $x=a$ verwaarloosbaar, zoodat $Z(a+\Delta a)$ volgt uit:

$$Z(a+\Delta a) = Z(a-\Delta a) + 2Z'(a)\Delta a. \quad (34)$$

Deze methode, die op eenvoudige wijze rekening houdt met de verandering van Z' in het interval Δa , heeft alleen dan zin, wanneer Z' tengevolge van het ontbreken van discontinuïteiten in B of in $f_1(x)$ eveneens geen discontinuïteiten bezit in het gebied $a-\Delta a < x < a+\Delta a$. Indien in het punt a een discontinuïteit in een der genoemde grootheden optreedt, moet den voorkeur gegeven worden aan de rekening, die de termen van hogere orde der Taylor-ontwikkeling in aanmerking neemt.

De intervallen Δa moeten klein zijn in gedeelten waar Z' sterk verandert. Dit doet zich voor bij de oplossing van de homogene vergelijking in de omgeving van het punt $x=1$ (fig. 1). Een eindig aantal intervallen geeft in het algemeen een te kleine waarde van $Z_{12}(1)$. Toch is het niet noodig met het oog hierop de intervallen in dit gebied kleiner te nemen, zoolang de oplossing (28) in dit gebied geen sterk veranderlijke Z_1' heeft. Immers heeft de oplossing van de niet-homogene vergelijking, indien zij tenminste

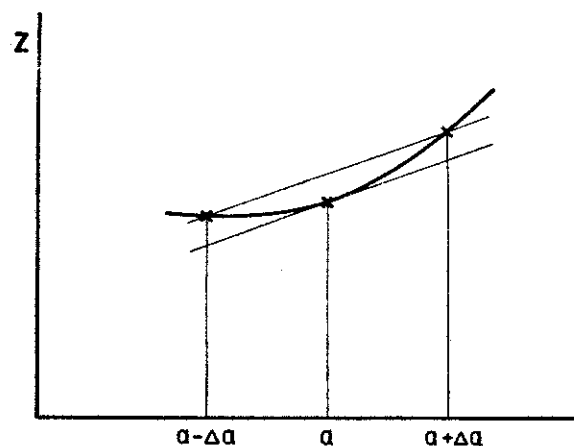


Fig. 2. Het verband tusschen 3 opeenvolgende functiewaarden (punt 4c).

met dezelfde intervallen en op dezelfde wijze berekend is als de oplossing der homogene vergelijking, op gelijke wijze een te kleine waarde voor $Z_{11}(1)$, zoodat de fout in het resultaat Z_1 geëlimineerd is.

De oplossing der homogene vergelijking, die bij de oplossing van de niet-homogene vergelijking wordt opgeteld, corrigeert de afwijking tusschen $Z_1(0)$ en de aangenomen $Z_{11}(0)$. Naarmate het moment in het punt $x=0$ met $Z_{11}(0)$ minder juist geschat is, is de correctie door $HZ_{12}=Z_1-Z_{11}$ grooter. Wegens het in figuur 1 gegeven verloop van Z_{11} is $HZ_{12}(x)$ dan vele malen grooter dan $Z_1(x)$, zoodat de correctie zeer groot is vergeleken met de functie Z_1 . Om een voldoende nauwkeurige oplossing te verkrijgen is het dan noodig Z_{11} en Z_{12} met zeer groote nauwkeurigheid te berekenen. De vereischte nauwkeurigheid van berekening der functies Z_{11} en Z_{12} is minder, indien voor $Z_{11}(0)$ een waarde gekozen wordt, die weinig afwijkt van $Z_1(0)$. Met eenige ervaring in vleugelberekening kan meestal wel een vrij goede schatting gemaakt worden.

In tabel II wordt het resultaat vermeld van de berekening over het 2de belastingsgeval in het rekenvoorbeeld van rapport V.357, indien de berekening wordt uitgevoerd met intervallen van verschillende grootte, n.l. Δa ter grootte van 0,2, 0,1 en 0,05. Het blijkt, dat de gevonden momenten in deze drie benaderingen weinig van elkaar afwijken, zoodat zelfs de benadering met 5 intervallen reeds bruikbaar is.

Als rekenvoorbeeld ter toelichting van de uiteengezette oplossingsmethode wordt in tabel III de berekening gegeven van de oplossing der niet-homogene vergelijking bij een vleugel, die in het punt $x=-1$, is ingeklemd, waarbij het punt $x=0$ ophangpunt is, en waarbij tusschen de ophangpunten de liggers constante stijfheid bezitten en ribverband missen. Deze vleugel heeft ook discontinuïteiten in de stijfheidsfactoren bij het punt $x=0,5$.

De intervallen zijn gelijk 0,1 gekozen. Een uitkomst van een berekening, waarbij, in verband met de sterke verandering van Z in dit gebied, de intervallen in het gebied $0 < x < 0,5$ gelijk worden genomen aan 0,05, levert vrijwel hetzelfde resultaat (tabel IV), zoodat de intervallen $\Delta a=0,1$ voldoende klein zijn.

5. De oplossing van de u-vergelijking.

a. u als functie van z .

De oplossing wordt samengesteld uit een reeks, waarvan iedere term gelijk is aan het product van een functie van x en een harmonische functie van z .

$$u_b(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{bm}(x) \sin m\pi \frac{z}{b}; \quad (35a)$$

$$u_o(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{om}(x) \sin m\pi \frac{z}{b}, \quad (35b)$$

waarin m een geheel getal is.

Bij deze aanname wordt steeds voldaan aan de randvoorwaarden $z=0$, $z=b$: $u=0$.

Bij substitutie van (35) in (7) wordt het linkerlid van de u -vergelijking in een Fourier-reeks van z ontwikkeld. Het ligt dan voor de hand ook het rechterlid op deze wijze te ontwikkelen, dus in een reeks, waarvan iedere term bestaat uit het product van een functie van x en één der harmonische functies $\sin m\pi \frac{z}{b}$.

De eenige functie van z , die het rechterlid bevat is $\frac{z}{b}$. Deze functie heeft in het gebied $-1 < \frac{z}{b} < 1$ de Fourier-ontwikkeling:

$$\frac{z}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2}{m\pi} \sin m\pi \frac{z}{b}. \quad (36)$$

De grootheid $h_1 w_1''$, die het rechterlid bevat, komt voor zonder een functie van z als coëfficiënt. Bij de voorgenomen ontwikkeling van het rechterlid is het dan noodig de eenheid als functie van z op te vatten, door deze in het gebied $0 < \frac{z}{b} < 1$ te ontwikkelen in de harmonischen $\sin m\pi \frac{z}{b}$:

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} \sin (2m-1)\pi \frac{z}{b}. \quad (37)$$

Na substitutie van (35), (36) en (37) in (7a) volgt nu:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (k\delta_b u'_{bm})' - g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \delta_b u_{bm} \right\} \sin m\pi \frac{z}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[k\delta_b F_m(x) \right]' \sin m\pi \frac{z}{b}$$

met

$$F_m(x) = \frac{1}{m\pi} \left[h_1 w_1'' + (-1)^{m+1} h_2 w_2'' \right].$$

Deze vergelijking moet een identiteit in z zijn, zoodat voor iedere geheele waarde m gelden moet:

$$(k\delta_b u'_{bm})' - g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \delta_b u_{bm} = \left[k\delta_b F_m(x) \right]'. \quad (38a)$$

Evenzoo volgt uit (7b) :

$$(\delta_o u'_{om})' - g_o \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \delta_o u_{om} = - \left[\delta_o F_m(x) \right]' \quad (38b)$$

Deze vergelijkingen zijn gewone differentiaalvergelijkingen van de 2^{de} orde in $u_m(x)$. Haar randvoorwaarden worden na substitutie van (35) in (6) verkregen uit :

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m(0) \sin m\pi \frac{z}{b} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m(1) \sin m\pi \frac{z}{b} = 0$$

$$\text{als:} \quad u_m(0) = 0 \quad (39a)$$

$$u_m(1) = 0. \quad (39b)$$

b. Integratie van de u_m -vergelijking.

Integratie van (38) tusschen de grenzen 0 en x geeft :

$$k\delta_b u'_{bm} = (k\delta_b u'_{bm})_{x=0} + g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \int_0^x \delta_b u_{bm} dx + \left[k\delta_b F_m(x) \right]_0^x \quad (40a)$$

$$\delta_o u'_{om} = (\delta_o u'_{om})_{x=0} + g_o \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \int_0^x \delta_o u_{om} dx - \left[\delta_o F_m(x) \right]_0^x \quad (40b)$$

Deze vergelijkingen vertoonen veel overeenkomst met de Z-vergelijking. Indien namelijk u_m bekend is tot het punt $x=a$, is het rechterlid van (40) bekend, zoodat in dit punt u'_m berekend kan worden, en de waarde van u_m in het volgende punt volgt uit :

$$u_m(a+da) = u_m(a) + u'_m(a)da$$

Door den overgang te maken naar eindige intervallen Δa , wordt een benaderingsoplossing van u_m verkregen. De nauwkeurigheid kan weer worden opgevoerd door u_m in twee opeenvolgende intervallen te benaderen door een parabool, zoodat

$$u_m(a+\Delta a) = u_m(a-\Delta a) + 2u'_m(a)\Delta a, \quad (41)$$

en door verder, indien zulk een gebied van twee intervallen een discontinuïteit in k of δ bevat, naast de discontinuïteit de functie u_m te ontwikkelen in een Taylor-reeks, waarvan de afgeleiden hoger dan de tweede worden verwaarloosd.

$$u_m(a+\Delta a) = u_m(a) + u'_m(a) \frac{\Delta a}{1!} + u''_m(a) \frac{(\Delta a)^2}{2!} \quad (42)$$

$$u''_{bm} = \frac{1}{k\delta_b} \left\{ - (k\delta_b)' u'_{bm} + g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \delta_b u_{bm} + \left[k\delta_b F_m(x) \right]' \right\}$$

$$u''_{om} = \frac{1}{\delta_o} \left\{ - \delta_o' u'_{om} + g_o \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \delta_o u_{om} - \left[\delta_o F_m(x) \right]' \right\}.$$

c. Samenstelling van de oplossing uit twee andere in verband met de randvoorwaarden.

De aangegeven oplossingsmethode veronderstelt, dat in het punt $x=0$ niet alleen u_m , maar ook u'_m bekend is. Om deze methode bruikbaar te maken voor het gegeven randvoorwaardeprobleem, moet dan evenals bij de oplossing der Z-vergelijking, een oplossing u_{m1} van de niet-homogene vergelijking, die aan de voorwaarde $u_{m1}(0)=0$ voldoet, gecombineerd worden met een oplossing u_{m2} van de homogene vergelijking, die eveneens aan de voorwaarde $u_{m2}(0)=0$ voldoet, tot de oplossing

$$u_m = u_{m1} + H u_{m2},$$

waarin H zoodanig gekozen is, dat $u_m(1)=0$.

Bij de bepaling van een oplossing van de niet-homogene vergelijking wordt $(u_{m1})'_{x=0}$ willekeurig aangenomen; $(u_{m2})'_{x=0}$ moet in ieder geval ongelijk aan nul zijn, opdat u_{m2} niet identiek nul zij.

De oplossing van de homogene vergelijking heeft weer een mechanische beteekenis, die een inzicht verschaft in het karakter van de functies u_{m2} . Bij de oplossing van de homogene vergelijkingen, behoort n.l. blijkens (40) een vervormingstoestand van den vleugel, die uitgedrukt wordt door

$$h_1 w_1'' = h_2 w_2'' = 0.$$

Langs de randen $z=0$, $z=b$ van de bekleeding is de rek in de bekleeding dus nul. In verband met de randvoorwaarde $u_{m2}(0)=0$, volgt dan verder, dat de verplaatsingen u_{m2} optreden in de bekleeding, indien

de randen $x=0$, $z=0$, $z=b$ worden ingeklemd en de rand $x=1$ de verplaatsing $u_{m2}(1) \sin m\pi \frac{z}{b}$ ondergaat.

Op grooten afstand van den rand $x=1$ is de verplaatsing $u_{m2}(x)$ dan klein, vergeleken met $u_{m2}(1)$. Hetzelfde geldt voor de spanningen, die evenredig zijn met $u'_{m2}(x)$. Indien de rand $x=1$ belast wordt

door een systeem van spanningen $\sigma_{mz}(1) \sin m\pi \frac{z}{b}$, is de spanning, die diensengevolge in het punt $x=0$

optreedt zeer klein, en kleiner naarmate m een grooter getal is. Bij een hogere frequentie m is alleen

de naaste omgeving van het gebied, waar de belasting is aangebracht ($x=1$), merkbaar belast: de deformatie wordt meer en meer een lokaal verschijnsel. Dit heeft ten gevolge dat, indien de aanname van $u'_{m1}(0)$ eenigszins afwijkt van $u'_m(0)$, voor de grotere waarden van x zeer groote verplaatsingen $u_{m1}(x)$ worden gevonden, vooral bij grotere waarden van m . Om desondanks toch een voldoende nauwkeurige oplossing $u_m(x)$ te verkrijgen, is het noodig de berekening van de oplossingen der homogene en niet-homogene vergelijkingen zeer nauwkeurig (vele decimalen) te verrichten. Aan deze nauwkeurigheidseisch kan worden tegemoetgekomen op de volgende wijze.

Daar het niet goed mogelijk is, een eenigszins goede schatting te maken van $u'_{m1}(0)$, is er geen bezwaar tegen in het algemeen bij de oplossing der niet-homogene vergelijking te stellen $u'_{m1}(0)=0$. Aanzienlijke verplaatsingen $u_{m1}(x)$ moeten dan verwacht worden. De bezwaren, die dit heeft voor de nauwkeurigheid der berekening kunnen worden ondervangen door b.v. na 2 of 3 intervallen bij de oplossing zooveel maal de oplossing der homogene vergelijking op te tellen, dat de resulterende verplaatsing in dit punt a nul is. Als 't ware wordt hier de randvoorwaarde $u_m(1)=0$ benaderd door een randvoorwaarde $u_m(a)=0$ en de constante H door een constante H_a . Op deze wijze wordt reeds een eerste correctie van $u'_{m1}(0)$ door $H_a u'_{m2}$ verkregen, voordat al te groote verplaatsingen $u_{m1}(x)$ zijn opgetreden in de berekening. Van het punt a af wordt dan verder gerekend met deze gecorrigeerde functie u_{m1} . Het nog ontbrekende aan de constante H wordt tenslotte gegeven door de randvoorwaarde $u_m(1)=0$, die bevredigd wordt door bij $u_{m1}(1)$ op te tellen $H_1 \cdot u_{m2}(1)$. In het gebied $0 < x < a$ is dan de oplossing $u_m = u_{m1} + (H_a + H_1) u_{m2}$ en in het gebied $a < x < 1$ is de oplossing $u_m = u_{m1} + H_1 u_{m2}$.

Volgens deze methode is de u_b -vergelijking opgelost voor $m=3$ van een vleugel, die bij het punt $x=0,5$ een discontinuïteit in bekledingsdikte heeft (Tabel V, VI, VII).

d. Substitutie van (35) in de differentiaalvergelijkingen.

De in punt (3b) gegeven functies van u gaan na substitutie van (35) over in:

$$D_1(u_b, u_o) = -K \frac{b}{2\pi} \left\{ \frac{\pi^2 h_1}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} (g_b \delta_b u_{bm} - g_o \delta_o u_{om}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (k \delta_b u'_{bm} - \delta_o u'_{om}) \left[h_1' + \frac{2(h_2 - h_1)'}{(m\pi)^2} (1 - (-1)^m) \right] \right\}$$

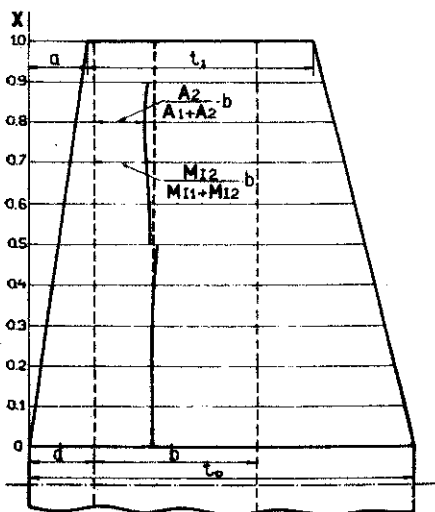
$$D_2(u_b, u_o) = K \frac{b}{2\pi} \left\{ \frac{\pi^2 h_2}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m (g_b \delta_b u_{bm} - g_o \delta_o u_{om}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (k \delta_b u'_{bm} - \delta_o u'_{om}) \left[(-1)^m h_2' + \frac{2(h_2 - h_1)'}{(m\pi)^2} (1 - (-1)^m) \right] \right\}$$

$$M_1(u_b, u_o) = K \frac{b}{2\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (k \delta_b u'_{bm} - \delta_o u'_{om}) \left[h_1 + \frac{2(h_2 - h_1)}{(m\pi)^2} (1 - (-1)^m) \right] \right\}$$

$$M_2(u_b, u_o) = -K \frac{b}{2\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (k \delta_b u'_{bm} - \delta_o u'_{om}) \left[(-1)^m h_2 + \frac{2(h_2 - h_1)}{(m\pi)^2} (1 - (-1)^m) \right] \right\}.$$

6. De praktische uitvoering der berekening.

a. Splitsing der belasting in buigende en wringende belasting.



3. Het aangrijpingspunt van de belasting, die de belasting bij zuivere buiging benadert. (De vleugelafmetingen in de beide richtingen zijn op verschillende schaal uitgezet). (punt 6a).

Indien beide liggers gelijke doorbuiging hebben, wordt de vleugel niet getordeerd. De werking van de ribben als belastingoverdragende elementen tusschen de beide liggers is dan praktisch uitgeschakeld, en de vleugel zou bij afwezigheid van de ribben op vrijwel gelijke wijze vervormen. Het belastingstype dat bij deze vervormingen hoort wordt hier als „zuiver buigend” gekwalificeerd.

De doorbuigingen Y_1 en Y_2 worden nu hoofdzakelijk geleverd door de vervormingen w_1 en w_2 . De voorwaarde van gelijke doorbuigingen geeft dan ten naaste bij $w_1'' = w_2'' = w''$. Afziende van den invloed der verplaatsingen u is de buigingsstijfheid van den vleugel $A_1 + A_2$. Als de belasting zoodanig tusschen de beide liggers verdeeld is, dat:

$$M_{u1} : M_{u2} = A_1 : A_2,$$

zullen de doorbuigingen van beide liggers ongeveer gelijk moeten zijn.

Steeds is het mogelijk een gegeven belasting, waarvan dus in ieder punt $M_u(x)$ bekend is, te splitsen in twee andere:

I. De zuiver buigende belasting met de momentenverdeling:

$$\left. \begin{aligned} M_{I1}(x) &= \frac{A_1}{A_1 + A_2} M_u(x) \\ M_{I2}(x) &= \frac{A_2}{A_1 + A_2} M_u(x). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

II. De zuiver wringende belasting met de momentenverdeling:

$$M_{II1}(x) = -M_{II2}(x) = M_{u1}(x) - M_{l1}(x). \quad (44)$$

In vele gevallen kan de verdeling I op eenvoudige wijze worden benaderd door een belasting met constant drukpunt.

In het volgende wordt een vleugel beschouwd, die in het gebied $0 < x < 1$ trapeziumvormig is (fig. 3). De aerodynamische eigenschappen van den vleugel worden verondersteld zoodanig te zijn, dat de belasting van den vleugel aangrijpt op een afstand achter den vleugelvoorrand, die tot de plaatselijke koorddiepte t in alle punten x in dezelfde verhouding c staat.

Het drukpunt ligt dan achter den voorligger op een afstand $(ct + ax - d)l$.

De belasting per oppervlakte-eenheid wordt uitgedrukt in den druk $\bar{p}_0$, in het midden van den vleugel, vermenigvuldigd met een coëfficiënt λ , die met toenemende x van 1 tot 0 afneemt. Per lengte-eenheid van den vleugel is dus de achterliggerbelasting:

$$q_2 = \frac{ct + ax - d}{b} t \lambda (\bar{p}_0 l)$$

en de voorliggerbelasting:

$$q_1 = \frac{-ct - ax + d + b}{b} t \lambda (\bar{p}_0 l).$$

Indien wordt verondersteld, dat λ onafhankelijk is van c , kan de veranderlijkheid van c bij verschillende vliegt toestanden als volgt in de sterkteberekening worden betrokken.

De belasting P wordt gesplitst in een buigende belasting P_I , met de drukpuntsligging c_I en een tordeerende belasting P_{II} , zoodanig, dat

$$P = P_I + K P_{II}$$

iedere belasting kan voorstellen.

Voor het dimensieloos maken der optredende grootheden wordt gesteld:

$$\bar{Q} = \bar{p}_0 l^2$$

dus:

$$\left. \begin{aligned} q_{I1} &= \frac{c_I t + ax - d}{b} t \lambda \\ q_{I2} &= \frac{-c_I t - ax + d + b}{b} t \lambda \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

De belasting P_{II} wordt gevormd door

$$q_{II1} = -q_{II2} = -\frac{t^2}{b} \lambda, \quad (46)$$

zoodat de belasting met drukpunt c uit q_I en q_{II1} kan worden samengesteld door

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_{I1} + (c - c_I) q_{II1} \\ q_2 &= q_{I2} + (c - c_I) q_{II2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Deze splitsing veroorlooft nog een willekeurige keuze van c_I . Onder al de mogelijkheden voor c_I wordt nu die gekozen, bij welke de belasting P_I zoo goed mogelijk zuivere buiging benadert. Op de vleugelteekening wordt in iedere doorsnede x het punt

geteekend, dat den afstand $\frac{M_{u2}}{M_{u1} + M_{u2}} b$ achter den voorligger ligt, en verder ook het punt, dat den afstand $\frac{A_2}{A_1 + A_2} b$ achter den voorligger ligt. De 2 lijnen, die op deze wijze ontstaan, moeten nu zooveel mogelijk samen-vallen, waarbij afwijkingen bij grootere waarden van x beter getolereerd blijken te kunnen worden dan die bij kleinere. Een voorbeeld wordt gegeven in figuur 3.

b. De iteratie bij zuiver buigende belasting.

In de laatste alinea van punt 3c. werd met een enkel woord de mogelijkheid besproken om van de grootheden w_1^0 en w_2^0 een schatting te maken, waardoor de iteratie wordt versneld. Dit geval doet zich hier voor.

Indien namelijk voor het maken van deze schatting de vleugel vervangen wordt gedacht door een andere zonder ribverband en met de liggerstijfheden A_1 en A_2 , volgt uit:

$$\left. \begin{aligned} M_{u1} &= A_1 w_1^{0''} \\ M_{u2} &= A_2 w_2^{0''} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

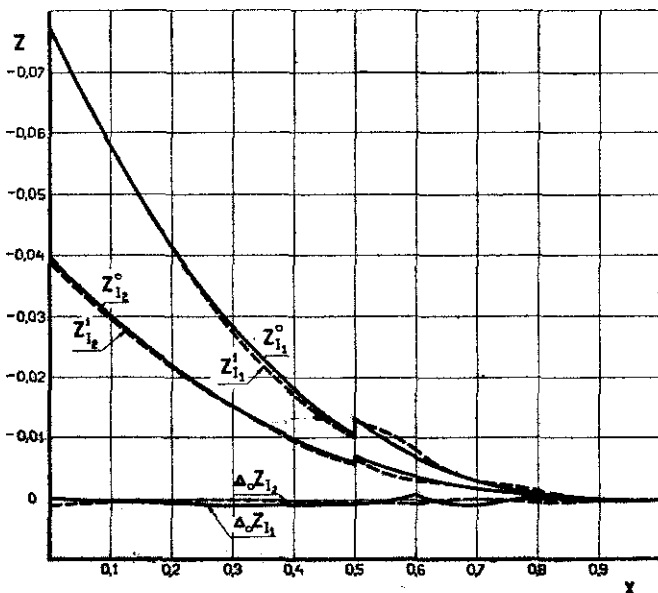


Fig. 4. Buigende momenten in de liggers bij zuivere buiging volgens vergelijking (48) (getrokken) en volgens 1ste benadering (gestippeld) (punt 6b).

Door oplossing van (7) wordt u^0 gevonden en vervolgens uit (21) v^0 . Wat betreft de berekening van u^0 kan worden opgemerkt, dat de eerste term ($m=1$) in de harmonische analyse volgens (35) hier verreweg de belangrijkste is. Een illustratie daarvan geeft tabel VIII, die betrekking heeft op dezelfde

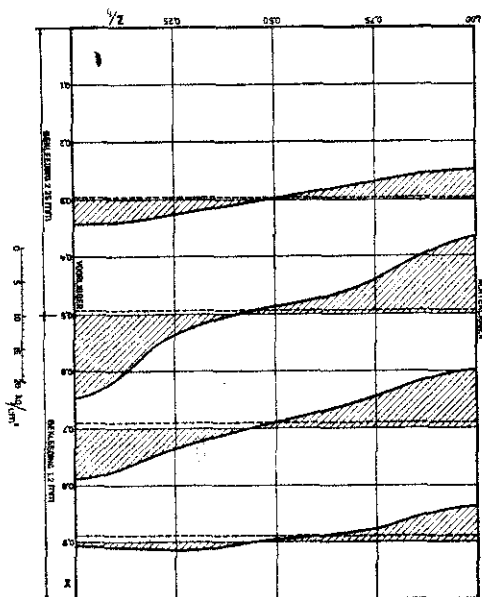


Fig. 6. Schuifspanningen in de bekleding (onderzijde) bij zuivere buiging. (Het gedeelte der spanning, dat volgens vergelijking (55) uit v en w bepaald wordt, is met een stippe lijn aangegeven.) (punt 6b).

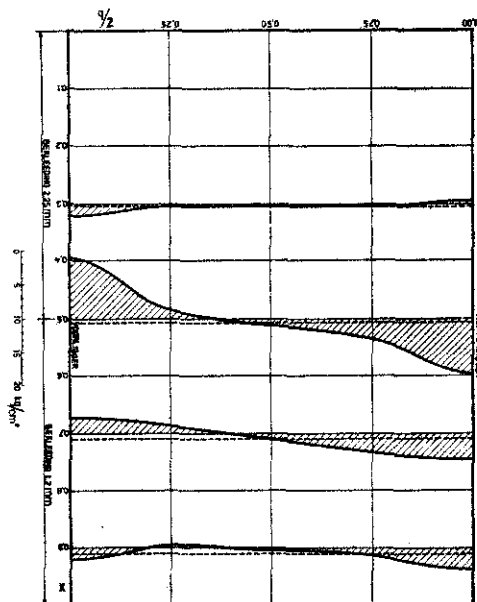


Fig. 5. Schuifspanningen in de bekleding (bovenzijde) bij zuivere buiging. (Het gedeelte der spanning, dat volgens vergelijking (55) uit v en w bepaald wordt, is met een stippe lijn aangegeven.) (punt 6b).

vleugel als de gegeven u -berekening, waaruit ook blijkt, dat u het belangrijkste is in de omgeving van de discontinuïteit in de bekledingsdikte, en verder, dat u voor even waarden van m minder belangrijk is dan voor de oneven waarden. Bij de berekening van de eerste benadering w_1^1 en w_2^1 uit de vergelijkingen (13) en (14) worden dan ook de functies van u uit het rechterlid van deze vergelijkingen (punt 5d) voldoende benaderd door de eerste term uit de harmonische ontwikkeling.

Alleen in die gevallen, waar de belastingsverdeling I minder goed beantwoord aan den eisch (43) is het noodig deze eerste benadering te bepalen. Als daarentegen de afwijkingen van (43) gering zijn

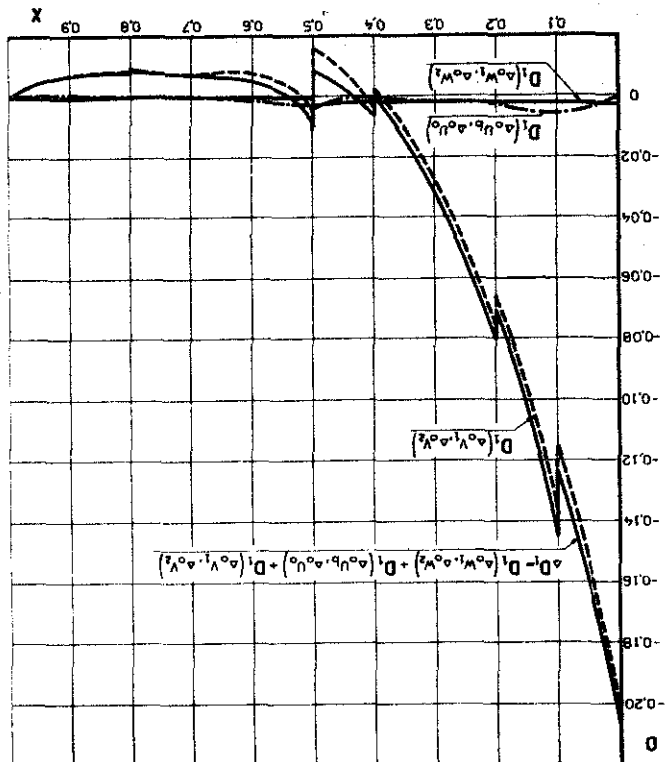


Fig. 7

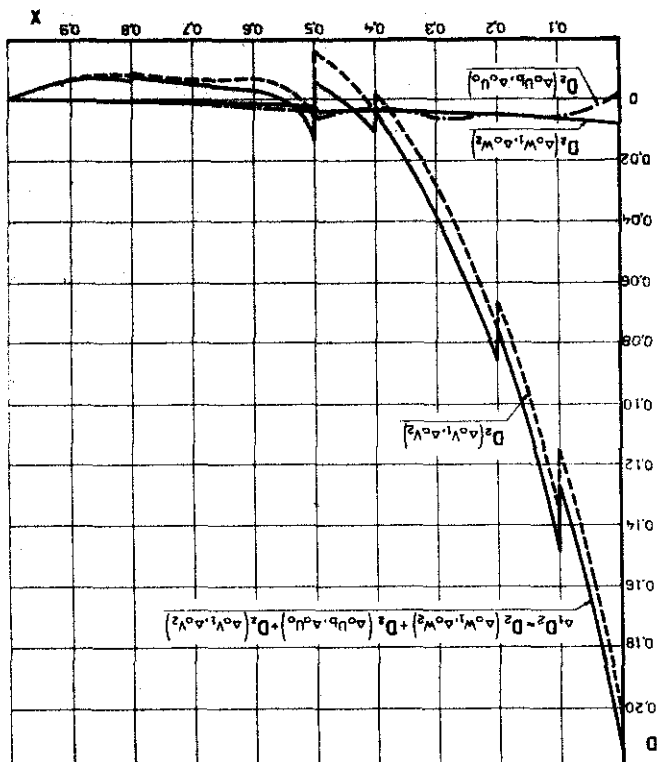


Fig. 8

De eerste correctiewaarskracht bij zuivere wringing (Afzonderlijk aangegeven is de grootte der door u , v en w gevormde componenten der correctiewaarskracht) (punt 6c).

is ook reeds de eerste benadering overbodig en is de schatting w^0 voldoende nauwkeurig (zie fig. 4). Hieruit volgen de buigspanningen in de liggers; de schuifspanningen in de liggers worden voldoende nauwkeurig gevonden indien in (21) u verwaarloosd wordt; voor de kennis van de schuifspanningen in de bekleding moet u wel in de berekening betrokken worden. Deze laatste schuifspanningen zijn in het algemeen het grootst naast de discontinuïteit in de bekledingsdikte, en wel aan de getrokken zijde (onder), zoodat voor de bepaling van de grootste schuifspanning in de bekleding volstaan kan worden met de oplossing van de u -vergelijking voor deze vleugelzijde. Een en ander wordt door de figuren 5 en 6 geïllustreerd.

c. De iteratie bij zuiver wringende belasting.

Bij wringende belasting komt de invloed van het ribverband sterk tot uiting. Het is daarom niet wel mogelijk een goede schatting w^0 te maken, waarom gesteld wordt $w_1^0 = w_2^0 = 0$. Hierna volgt uit (7) en (21) $u_b^0 = u_o^0 = v_1^0 = v_2^0 = 0$.

De eerste benadering w_1^1 en w_2^1 volgt nu uit (19) en (20) door oplossing van de Z -vergelijking. Op bekende wijze wordt vervolgens uit (7) u_b^1 en u_o^1 afgeleid en daarna uit (21) v_1^1 en v_2^1 . Over de verplaatsingen u_b^1 en u_o^1 kan worden opgemerkt, dat tegenover de termen, behorend bij $m=1$ en $m=2$ alle andere verwaarloosd kunnen worden (tabel IX). De invloed van u op v is gering, zoodat in (21) u kan worden verwaarloosd.

De berekening van de correctiedwarskrachten $\Delta_1 D_1$ en $\Delta_1 D_2$ volgens (18) levert op, dat verreweg de belangrijkste bijdrage gegeven wordt door $D(\Delta_0 v_1, \Delta_0 v_2)$. In de figuren 7 en 8 zijn de correctiedwarskrachten $D(\Delta_0 w_1, \Delta_0 w_2)$, $D(\Delta_0 u_b, \Delta_0 u_o)$, $D(\Delta_0 v_1, \Delta_0 v_2)$ benevens de totale correctiedwarskrachten gegeven. Hieruit blijkt, dat de correctiedwarskracht benaderd kan worden door $D(\Delta_0 v_1, \Delta_0 v_2)$, zoodat de oplossing der u -vergelijking bij zuivere wringing niet vereischt is voor zoover het de bepaling der spanningen in de liggers betreft.

Uit de correctiedwarskrachten wordt door oplossing van de $\Delta_1 Z$ -vergelijking de 1ste correctie van w_1 en w_2 bepaald, onder invoering van de randvoorwaarde $\Delta_1 Z_1(1) = \Delta_1 Z_2(1) = 0$. Deze randvoorwaarde kan bij benadering gesteld worden in de plaats van de randvoorwaarde (17), omdat bij de hier beschouwde vleugels de liggeruiteinden slechts zeer geringe stijfheid bezitten, zoodat het door de liggereinden opgenomen buigend moment ook maar klein kan zijn.

Uit $\Delta_1 w$ volgt met behulp van (22), waarin weer $\Delta_1 u$ verwaarloosd mag worden, $\Delta_1 v$. Daarna kan de 2de correctiedwarskracht bepaald worden, die eveneens voldoende benaderd wordt door de termen in $\Delta_1 v$ en hiermee kan de 2de correctie $\Delta_2 Z$ berekend worden.

In fig. 9 zijn de 3 opeenvolgende benaderingen van $Z_1 = -Z_2$ geteekend, die op deze wijze bepaald zijn. Hierbij kan worden opgemerkt, dat de opeenvolgende correcties $\Delta_n Z$ van voorteken wisselen, zoodat de eerste benadering te groote, en de 2de benadering te kleine Z oplevert. Daar de 2de correctie reeds zeer klein geworden is, wordt deze voldoende nauwkeurig geschat met de veronderstellingen, dat de opeenvolgende correcties zich verhouden als de termen van een meetkundige reeks:

$$\Delta_2 Z = \frac{(\Delta_1 Z)^2}{\Delta_0 Z}. \quad (49)$$

De hiermee verkregen 3de benadering is eveneens in fig. 9 aangegeven. Op deze wijze wordt de iteratie dus na de eerste correctie afgebroken, terwijl ook de u -vergelijking buiten beschouwing blijft.

Uit de als eindoplossing beschouwde momentenlijn Z worden de buigspanningen in de liggers berekend, vervolgens ook de schuifspanningen in de liggerwanden, en het niet van u afhankelijke deel der schuifspanningen in de bekleding. Het deel der schuifspanningen, dat van u afhankelijk is, is klein tegenover de rest, zooals blijken moge uit figuur 10 en 11, waar de schuifspanning als functie van z voor verschillende waarden van x gegeven is. Dit deel kan dan ook verwaarloosd worden, zoodat de berekening der spanningen niet de kennis van u vereischt.

d. Eenige opmerkingen over de gegeven oplossingsmethode.

In de hierboven onder b en c gegeven oplossingsmethode worden een aantal benaderingen en verwaarloozingen uitgevoerd, waarvan het gewenscht kan zijn achteraf te controleren in welke mate zij voor het eindresultaat van belang zijn.

Deze controle is steeds mogelijk. Zij wordt verkregen door aan de hand van de vergelijkingen (10a, b) na te gaan, welke dwarskrachten D_n exact behooren bij de gevonden oplossing. Deze dwars-

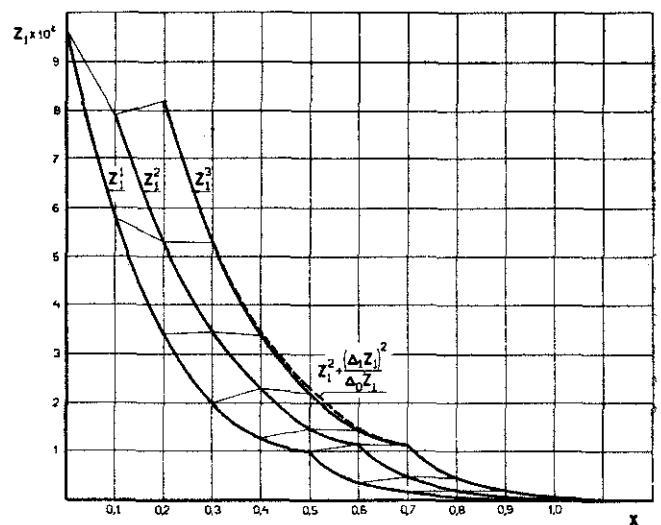


Fig. 9. Buigende momenten in de liggers bij zuivere wringing volgens 1ste, 2de en 3de benadering (getrokken), en volgens de uit vergelijking (49) afgeleide 3de benadering (gestippeld). (In x -richting zijn de opeenvolgende benaderingen telkens 0.1 ten opzichte van elkaar verschoven. Corresponderende punten zijn door gebroken lijnen met elkaar verbonden) (punt 6c).

krachten mogen nu slechts een verwaarloosbaar bedrag verschillen van de aanvankelijk aangenomene.

Voor den vleugel, op welken de bovengenoemde tabellen betrekking hebben zijn deze berekeningen uitgevoerd. Figuur 12 laat zien voor het geval van zuivere buiging welke verschillen optreden tusschen de gegeven dwarskrachten D_{uI} en de uit de benadering volgens vergel. (48) afgeleide dwarskrachten D_{uI}^* (uit deze verschillen is de in figuur 4 gegeven correctie $\Delta_0 z_I$ berekend). Figuur 13 geeft voor het geval van zuivere torsie aan welke benadering van D_{uII} bereikt wordt met D_{uII}^* , na de 3e benadering volgens vergelijking (49). Duidelijk blijkt uit deze beide figuren, dat voor dezen vleugel de aangegeven benaderingen toelaatbaar kunnen worden geacht.

Dit laatste geldt niet alleen voor dezen vleugel, maar voor alle vleugels van overeenkomstige samenstelling, zooals ook aan uitgevoerde vleugelberekeningen gebleken is. Bij afwijkende constructie-verhoudingen zal het goed zijn de benaderende berekeningen aan de uiteengezette eindcontrole te onderwerpen en bij eventueel te groote waarde van $D_u - D_u^*$ deze als correctiedwarskracht alsnog in te voeren. De hier beschouwde vleugel wordt in hoofdzaak gekenmerkt door de volgende eigenschappen: de buigingsstijfheid A van den vleugel is, behalve in de omgeving van den tip voor het overwegend groote deel afkomstig van de beide liggers (zie tabel X), de buigingsstijfheidsfactoren S_b nemen sterk af naar den tip (zie tabel III), van voor- en achterligger staan zij in alle punten x in ongeveer dezelfde verhouding tot elkaar (zie figuur 3), de torsiestijfheid Bb^2 neemt naar den tip minder sterk af dan de buigingsstijfheid (zie tabel III), de verhouding $\frac{b}{l} = 0,186$.

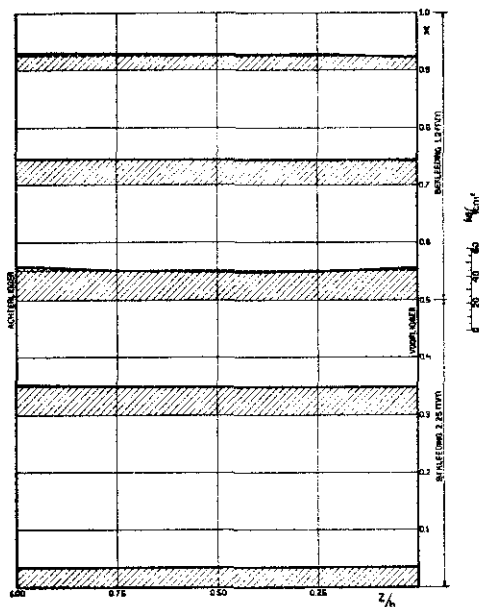


Fig. 10. Schuifspanningen in de bekleeding (bovenzijde) bij zuivere wringing. (Het gedeelte der spanning, dat volgens vergelijking (55) uit v en w bepaald wordt, is met een stippellijn aangegeven). (punt 6c).

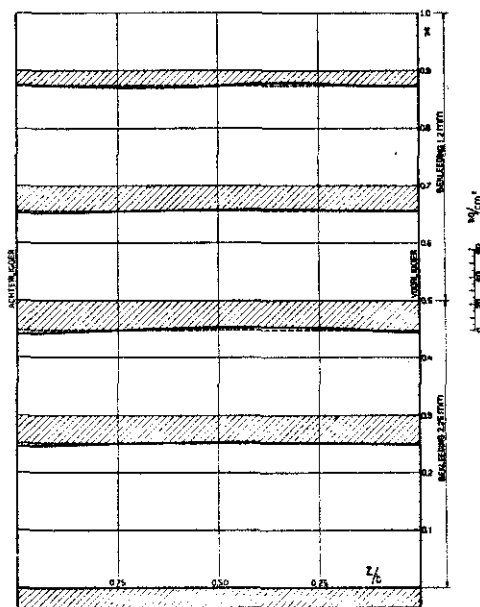


Fig. 11. Schuifspanningen in de bekleeding (onderzijde) bij zuivere wringing. (Het gedeelte der spanning, dat volgens vergelijking (55) uit v en w bepaald wordt, is met een stippellijn aangegeven). (punt 6c).

7. De Spanningsberekening.

a. De normaalspanningen in de liggergordingen.

De vleugelliggers worden door de momenten Z_1 en Z_2 gebogen, de buigspanningen zijn dus

$$\sigma_{b1} = \left(\frac{Z_1}{W_1} \right), \quad \sigma_{b2} = \left(\frac{Z_2}{W_2} \right), \quad (50)$$

waarin $\bar{W}$ op den samengestelden ligger betrekking heeft.

Maar behalve buigende momenten zijn er ook normaalkrachten. Doordat de resultante in x -richting van de normaalspanningen in de bekleeding ongelijk nul is, treden in de liggers normaalkrachten op, die gelijk zijn aan

$$N_1 = - \int_0^b (\sigma_b \delta_b + \sigma_0 \delta_0) \frac{b-z}{b} dz$$

$$N_2 = - \int_0^b (\sigma_b \delta_b + \sigma_0 \delta_0) \frac{z}{b} dz.$$

In verband met de secundaire beteekenis van deze normaalkrachten is het voldoende nauwkeurig den invloed van u op het resultaat te verwaarlozen, zoodat blijkens (lit. 8 verg. 21)

$$N_1 = -K \frac{b}{12} (\delta_0 - k\delta_b) [2h_1 w_1'' + h_2 w_2''] \quad (51)$$

$$N_2 = -K \frac{b}{12} (\delta_0 - k\delta_b) [h_1 w_1'' + 2h_2 w_2'']. \quad (51b)$$

De normaalspanning tengevolge van deze krachten is:

$$\bar{\sigma}_{n1} = \left(\frac{N_1}{F_{n1}} \right), \quad \bar{\sigma}_{n2} = \left(\frac{N_2}{F_{n2}} \right), \quad (52)$$

waarin $\bar{F}_n$ het oppervlak van de liggerdoorsnede is.

De totale spanning is dan

$$\sigma_1 = \sigma_{1b} + \sigma_{1n}, \quad \sigma_2 = \sigma_{2b} + \sigma_{2n}. \quad (53)$$

b. De schuifspanningen in de liggerwanden.

De schuifspanningen in de liggerwanden zijn volgens vergel. (4):

$$\bar{\tau}_1 = \left(\frac{Q}{F_{1d}} \right) \left(D_{e1} + Z_1 \frac{h_1'}{h_1} \right) \quad (54a)$$

$$\bar{\tau}_2 = \left(\frac{Q}{F_{2d}} \right) \left(D_{e2} + Z_2 \frac{h_2'}{h_2} \right), \quad (54b)$$

waarin $\bar{F}_d$ het oppervlak is, dat bij de afschuiving van den samengestellten doorsligger in aanmerking moet worden genomen, en dat weinig grooter is dan $(h_m \Sigma \delta)$, waarin h_m de afstand van de zwaartepunten der gordingen is. Voor een exacte berekening van $\bar{F}_d$ wordt verwezen naar lit. 9. D_e is door (4) gedefinieerd, meestal kan bij de berekening van D_e u verwaarloosd worden. Alleen in de omgeving van een discontinuïteit in de bekledingsdikte kan het noodig zijn ook u in aanmerking te nemen. De schuifspanningen door torsie van den ligger hangen samen met den specifieke torsiehoek $\frac{1}{b}(Y_1 - Y_2)'$.

Voor de berekening ervan wordt verwezen naar lit. 9.

c. De spanningen in de bekleding.

De normaalspanningen zijn het hoogst in de punten, waar de bekleding aan den ligger grenst (in dat geval zijn de hoogste spanningen berekenbaar zonder kennis van u), of bij een discontinuïteit in bekledingsdikte in dat deel der bekleding, dat het dunste is, en dat onmiddellijk aan de discontinuïteit grenst. Hier

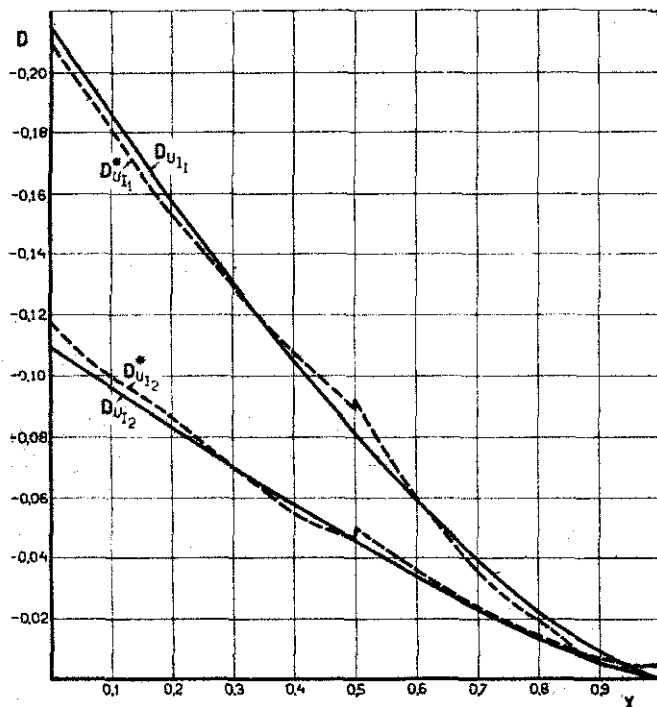


Fig. 12. De gegeven dwarskrachten D_{uI} bij zuivere buiging (getrokken), en de dwarskrachten D_{uI}^* , welke exact behoren bij de aangegeven benaderingsoplossing volgens vergelijking (48) (gestippeld). (punt 6d).

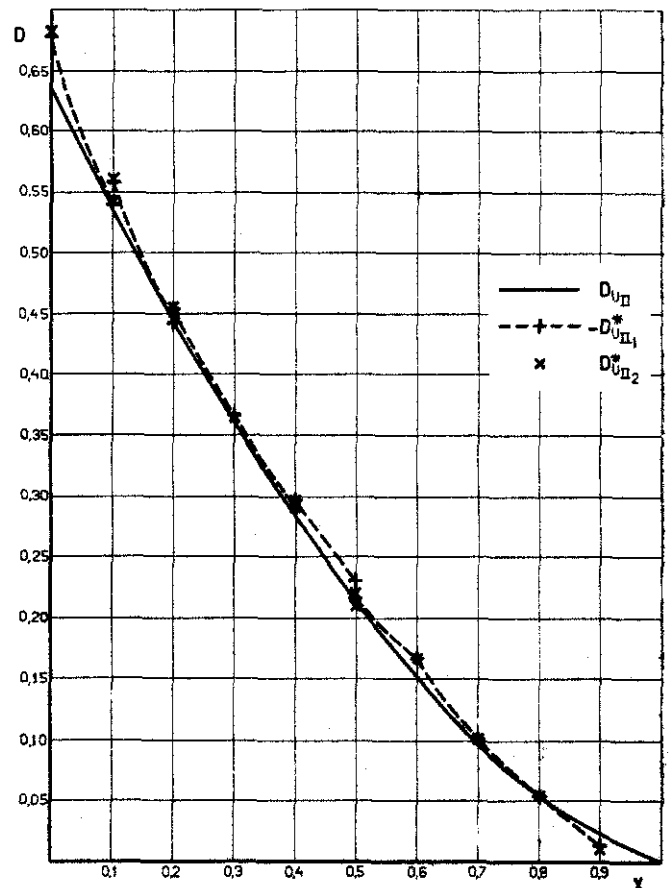


Fig. 13. De gegeven dwarskrachten D_{uII} bij zuivere wringing (getrokken), en de dwarskrachten D_{uII}^* , welke exact behoren bij de aangegeven benaderingsoplossing tot in de 3de benadering, waarbij de 3de benadering uit vergelijking (49) bepaald is. (punt 6d). Omdat D_{uII}^* ongeveer gelijk is aan $D_{uII}^*_{2}$ is alleen door de eerstgenoemde punten een lijn geteekend (gestippeld).

zal de grootste spanning, ten minste bij het belastingstype I, optreden ongeveer in het midden tusschen de beide liggers.

Indien de bekleeding, zooals bij houten vleugels, uit triplex bestaat, is de trekspanning in de onderbeksleeding aanzienlijk minder gevaarlijk dan een schuifspanning, daar de trekvastheid van triplex in den regel hooger is dan die van het spruce der gordingen en de optredende trekspanningen daarom beneden de trekvastheid liggen, daarentegen de schuifspanning door de lage schuifvastheid een onmiddellijk gevaar kan beteekenen. Bij triplex is daarom de schuifspanning τ_{xz} het criterium voor de veiligheid van de bekleeding. Bij uitgevoerde berekeningen (zie fig. 5, 6) is gebleken, dat de schuifspanning bij zuivere buiging in de onderbeksleeding grooter is dan in de bovenbeksleeding tengevolge van $k < 1$. Zij bedraagt naast den voorligger (lit. 8, vergel. (10b)):

$$(\bar{\tau}_0)_{z=0} = (\bar{p}_0) K \frac{k_0}{2b} \left\{ - \left[(h_1 + h_2) (Y_1 - Y_2)' - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right] + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} m u_{om} \right\} \quad (55a)$$

en naast den achterligger:

$$(\bar{\tau}_0)_{z=b} = (\bar{p}_0) K \frac{k_0}{2b} \left\{ - \left[(h_1 + h_2) (Y_1 - Y_2)' - h_1 v_1' + h_2 v_2' \right] + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m u_{om} \right\}. \quad (55b)$$

Een vrij goede benadering van (55) wordt reeds verkregen, indien van de reeks in u_0 slechts de eerste term in rekening wordt gebracht. Alleen wanneer de spanningen vrij groot blijken te zijn, zooals meestal bij een sterke dikteverandering van de bekleeding het geval is, is een nauwkeuriger berekening vereischt, waarin ook $m=3$ in aanmerking wordt genomen.

Bij zuivere torsie is het van y en v afhankelijke deel der spanningen veel grooter dan het van u afhankelijke, zoodat hier u verwaarloosd worden kan (zie fig. 10, 11).

Notaties.

De notaties zijn dezelfde als in (lit. 7, 8), onder toevoeging van de volgende:

c = drukpunt van de belasting.

g = $\frac{G}{E_0}$.

K = $\left(\frac{EI^*}{S} \right)$.

k = $\frac{E_b}{E_0}$.

$()^n$ = n -de benadering van $()$.

$\Delta_n()$ = n -de correctie van $()$ (vergelijking (15)).

N = normaalkracht in den ligger.

t = koorddiepte.

w = doorbuiging gedefinieerd door vergel. (2).

Z = $S_b y''$.

Z_{i1} = oplossing van de niet-homogene Z_i -vergelijking.

Z_{i2} = oplossing van de homogene Z_i -vergelijking.

u_m = component van de verplaatsing u , gedefinieerd door (35).

u_{m1} = oplossing van de niet-homogene u_m -vergelijking.

u_{m2} = oplossing van de homogene u_m -vergelijking.

index I = behoorend bij zuivere buiging.

index II = behoorend bij zuivere wringing.

streep — boven een der grootheden l , S en Q duidt op grootheden met de dimensie van resp.: een lengte, een stijfheidsfactor en een kracht.

LITERATUUR.

1. Biezeno, C.B., Koch, J. J. u. Koning, C. Ueber die Berechnung von freitragenden Flugzeugflügeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 6, April 1926, S. 97-105.
 2. Biezeno, C.B., Koch, J. J. en Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels I. RSL-Rapport V.175. De Ingenieur, 13 November 1926. = Verslagen en Verhandelingen RSL., Deel IV, blz. 101-137.
 3. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels II. RSL-Rapport V.284. De Ingenieur, 12 Januari 1929. = Verslagen en Verhandelingen RSL., Deel VI, blz. 1-4.
 4. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels III. RSL-Rapport V.285. De Ingenieur, 10 Januari 1930. = Verslagen en Verhandelingen RSL., Deel VI, blz. 25-31.
 5. Koning, C. De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels IV. RSL-Rapport V.357. De Ingenieur, 16 Januari 1931. = Verslagen en Verhandelingen RSL., Deel VI, blz. 37-64.
 6. Koning, C. The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. Cinquième Congrès International de la Navigation Aérienne. La Haye 1930. Tome I, p. 644-649.
 7. Koning, C. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels I. RSL-Rapport V. 358. = Verslagen en Verhandelingen RSL., Deel VI, blz. 139-152.
 8. Van der Neut, A. De invloed van het Ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels II. RSL-Rapport S.67. = Verslagen en Verhandelingen RSL., Deel VII, blz. 55-65.
 9. Van der Neut, A. Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers. RSL-Rapport S.48. De Ingenieur, 11 December 1931. = Verslagen en Verhandelingen RSL., Deel VI, blz. 69-83.
-

TABEL I.
De coëfficiënt K_n (2e Belastingsgeval V.357).

n	$-\sum_0^n A_v$	$\sum_0^n B_v$	K_n	K_n (V.357)
1	0	+ 1,0000	0	+0
2	+0,5000	+ 8,1428	+0,0614	+0,2059
3	+0,1000	+ 6,8333	+0,0146	+0,0462
4	+0,7610	+16,0504	+0,0474	+0,1102
5	+0,6145	+21,7394	+0,0283	+0,0973
6	+0,9087	+21,7893	+0,0417	+0,1001
7	+0,9758	+27,417	+0,0356	+0,1001
8	+1,0900	+29,454	+0,0370	+0,1003
9	+1,0930	+31,669	+0,0345	+0,1004

TABEL IV.
De momenten Z_1 (tabel III).

x	Z_1 $\Delta a = 0,1$	Z_1
		$0 < x < 0,5 \quad \Delta a = 0,05$ $0,5 < x < 1 \quad \Delta a = 0,1$
0	-0,0966	-0,0975
0,1	-0,0578	-0,0583
0,2	-0,0341	-0,0341
0,3	-0,0200	-0,0199
0,4	-0,0126	-0,0125
0,5	-0,0101	-0,0101
0,6	-0,0035	-0,0035
0,7	-0,0015	-0,0016
0,8	+0,0008	+0,0005
0,9	-0,0005	-0,0009
1,0	0	0

TABEL II.
De momenten Z_1 (2e Belastingsgeval V. 357).

x	Aantal intervallen		
	5	10	20
0	0,1091	0,1050	0,1047
0,1		0,1021	0,1015
0,2	0,0949	0,0932	0,0934
0,3		0,0824	0,0821
0,4	0,0694	0,0684	0,0680
0,5		0,0550	0,0543
0,6	0,0415	0,0413	0,0409
0,7		0,0294	0,0287
0,8	0,0182	0,0180	0,0177
0,9		0,0089	0,0081
1,0	0	0	0

TABEL VII.
De oplossing der u_b -vergelijking, $m=3$.

x	$\frac{\delta_b}{\delta} u_{bm2}$	$H \frac{\delta_b}{\delta} u_{bm2}$	$\frac{\delta_b}{\delta} u_{bm1}$	$\frac{\delta_b}{\delta} u_{bm}$	u_{bm}
0	0	- 0	0	0	0
0,1	0,080	- 0,0165 +	0,0139	-0,0026	-0,0026
0,2	0,554	- 0,1142 +	0,1100	-0,0042	-0,0042
0,3	3,048	- 0,6279 +	0,6255	-0,0024	-0,0024
0,4	14,772	- 3,0431 +	3,0434	+0,0003	+0,0003
0,5	64,43	-13,2722 +	13,2845	+0,0123	+0,0123
0,5	34,36	+ 0,0066	0	+0,0066	+0,0124
0,6	260,4	+ 0,0497 -	0,0482	+0,0015	+0,0028
0,7	1222,9	+ 0,2332 -	0,2326	+0,0006	+0,0011
0,8	5093	+ 0,9715 -	0,9686	+0,0029	+0,0054
0,9	19663	+ 3,7503 -	3,7506	-0,0003	-0,0006
1,0	70997	+13,5414 -	13,5414	0	0

$$0 < x < 0,5: H = \frac{-13,2845}{64,43} + \frac{13,5414}{70997} = -0,20618 + 0,00019 = -0,20599.$$

$$0,5 < x < 1: H = \frac{+13,5414}{70997} = +0,00019.$$

TABEL III.
Oplossing van de niet-homogene Z-vergelijking.

x	Z_{11}	$\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}}$	$Z_{11} \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right)$	$2 \left[Z_{11} \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) \right]_m$	$Z_{11} \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) \Delta x$	$\int_{-1_1}^x Z_{11} \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) dx$	$g_1(x)$	$\frac{Z_{11}'}{B}$	B	Z_{11}'	$2Z_{11} \Delta x$
0.0	-0.1	1.5265	- 0.15265	- 0.28150	- 0.01407	- 0.01420	+0.06404	+0.04984	9.97	+0.4967	
0.1	-0.06186	2.083	- 0.12885	- 0.24806	- 0.01240	- 0.02827	+0.06463	+0.03636	8.32	+0.3025	+0.06050
0.2	-0.03950	3.018	- 0.11921	- 0.24352	- 0.01218	- 0.04067	+0.06636	+0.02569	6.71	+0.1724	+0.03448
0.3	-0.02738	4.54	- 0.12431	- 0.29024	- 0.01451	- 0.05285	+0.06822	+0.01537	5.29	+0.0813	+0.01626
0.4	-0.02324	7.14	- 0.16593	- 0.46521	- 0.02326	- 0.06736	+0.06895	+0.00159	4.12	+0.00655	+0.00131
0.5	-0.02607	11.48	- 0.29928			- 0.09062	+0.06830	-0.02232	3.14	-0.07008	
0.5	-0.02607	13.31	- 0.34699	- 0.96139	- 0.04807	- 0.09062	+0.11816	+0.02754	1.815	+0.4999	
0.6	-0.02560	24.00	- 0.61440	- 2.35878	- 0.11794	- 0.13869	+0.10947	-0.02922	1.386	-0.04050	-0.00810
0.7	-0.03417	51.05	- 1.74438	- 7.74839	- 0.38742	- 0.25663	+0.11067	-0.14596	0.880	-0.12844	-0.02569
0.8	-0.05129	117.06	- 6.00401	-50.44270	- 2.52214	- 0.64405	+0.09551	-0.54854	0.568	-0.31157	-0.06231
0.9	-0.09648	460.6	-44.43869			- 3.16619	+0.07914	-3.08705	0.283	-0.87365	-0.17473
1.0	-0.22602										

$$\int_{-1_1}^0 Z \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) dx = 1_1 \left[Z \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) \right]_{x=0} = 0.093 \cdot -0.15265 = -0.01420.$$

$$x=0 : Z'' = \left[Z \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) + g_1'(x) \right] B + \frac{Z'}{B} \cdot B' = (-0.15265 + 0.0059) 9.97 + 0.04984 \cdot -16.95 = -2.3074.$$

$$x=0.1 : Z = Z_0 + Z_0' \Delta x + Z_0'' \frac{1}{2} (\Delta x)^2 = -0.1 + 0.4967 \cdot 0.1 - 2.3074 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.01 = -0.06186.$$

$$x=0.5 : Z'' = \left[Z \left(\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}} \right) + g_1'(x) \right] B + \frac{Z'}{B} \cdot B' = (-0.34699 - 0.0869) 1.815 + 0.02754 \cdot -4.29 = -0.9057.$$

$$x=0.6 : Z = Z_{0.5} + Z_{0.5}' \Delta x + Z_{0.5}'' \frac{1}{2} (\Delta x)^2 = -0.02607 + 0.4999 \cdot 0.1 - 0.9057 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.01 = -0.02560.$$

TABEL V.
Oplossing der homogene u_b -vergelijking, $m=3$.

x	$\frac{\delta_b}{\delta} u_b$	$20 \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b \right)_m \Delta x$	$20 \int_0^x \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b \right) dx$	$g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \int_0^x \dots$	$k \frac{\delta_b}{\delta} u_b'$	k	$\frac{\delta_b}{\delta} u_b'$	$2 \frac{\delta_b}{\delta} u_b' \Delta x$
0	0		0	0	0,25	0,25	1,0	
0,1	0,080	0,080	0,080	0,720	0,97	0,35	2,77	0,554
0,2	0,554	0,634	0,714	6,43	6,68	0,45	14,84	2,968
0,3	3,048	3,602	4,316	38,85	39,10	0,55	71,09	14,218
0,4	14,772	17,820	22,136	199,24	199,49	0,65	306,9	61,38
0,5	64,43	79,20	101,34	912,06	912,31	0,75	1216,4	
0,5	34,36	294,8	101,34	912,06	912,31	0,50	1824,6	
0,6	260,4	1483,3	396,1	3565,	3565,	0,60	5942,	1188,5
0,7	1222,9	6316,	1879,4	16915,	16915,	0,70	24164,	4833,
0,8	5093,	24756,	8195,	73755,	73755,	0,80	92200,	18440,
0,9	19663,	90660,	32951,	296560,	296560,	0,90	329510,	65904,
1,0	70997,		123611,	1112500,	1112500,	1,00	1112500,	

$$0 < x < 0,5: \delta_b = \delta; \quad 0,5 < x < 1,0: \delta_b = 0,5333 \delta; \quad \frac{g_b \left(\frac{\pi}{b} \right)^2}{20} = 1.$$

$$x=0: \quad u_b' = 1; \quad u_b'' = \frac{1}{k \delta_b} \left\{ -(k \delta_b)' u_b' + g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \delta_b u_b \right\} = \frac{1}{0,25} \cdot -1 = -4.$$

$$x=0,1: \quad \frac{\delta_b}{\delta} u_b = \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b \right)_0 + \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b' \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b'' \right)_0 \frac{1}{2} (\Delta x)^2 = 0 + 1,0 \cdot 0,1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,08.$$

$$x=0,5: \quad \frac{\delta_b}{\delta} u_b'' = \frac{1}{0,50} \cdot -1824,6 + \frac{180}{0,50} \cdot 34,36 = 8721.$$

$$x=0,6: \quad \frac{\delta_b}{\delta} u_b = 34,36 + 1824,6 \cdot 0,1 + 8721 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,01 = 260,4.$$

TABEL VI.
Oplossing der niet-homogene u_b -vergelijking, $m=3$.

x	$\frac{\delta_b}{\delta} u_b$	$20 \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b \right)_m \Delta x$	$20 \int_0^x \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b \right) dx$	$g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \int_0^x \dots$	$f_m(x) = \left[k \frac{\delta_b}{\delta} F_m(x) \right]_0^x$	$g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \int_0^x \dots + f_m(x) + \left[k \frac{\delta_b}{\delta} u_b' \right]_0^x$	k	$\frac{\delta_b}{\delta} u_b'$	$2 \frac{\delta_b}{\delta} u_b' \Delta x$
0	0		0	0	0	0	0,25	0	
0.1	+ 0,0139	+ 0,0139	+ 0,0139	+ 0,125	+0,067	+ 0,192	0,35	+ 0,550	+ 0,1100
0.2	+ 0,1100	+ 0,1239	+ 0,1378	+ 1,240	+0,136	+ 1,376	0,45	+ 3,058	+ 0,6116
0.3	+ 0,6255	+ 0,7355	+ 0,8733	+ 7,859	+0,207	+ 8,066	0,55	+ 14,667	+ 2,9334
0.4	+ 3,0434	+ 3,6689	+ 4,5422	+ 40,879	+0,264	+ 41,143	0,65	+ 63,295	+12,6590
0.5	+13,2845	+16,3279	+20,8701	+187,831	+0,291	+188,120	0,75	+250,825	
	-13,2845		-20,8952 ¹⁾	-188,057 ²⁾					
0.5	0	- 0,0482	- 0,0251	- 0,226	+0,000	- 0,278	0,50	- 0,556	
0.6	- 0,0482	- 0,2808	- 0,0733	- 0,660	+0,014	- 0,698	0,60	- 1,163	- 0,2326
0.7	- 0,2326	- 1,2012	- 0,3541	- 3,187	+0,017	- 3,222	0,70	- 4,602	- 0,9204
0.8	- 0,9686	- 4,7192	- 1,5553	- 13,998	-0,023	- 14,073	0,80	- 17,590	- 3,5180
0.9	- 3,7506	-17,2919	- 6,2745	- 56,471	-0,055	- 56,578	0,90	- 62,864	-12,5728
1.0	-13,5414		-23,5664	-212,098	-0,188	-212,338	1,00	-212,338	

$$0 < x < 0,5: \quad \delta_b = \delta; \quad 0,5 < x < 1,0: \quad \delta_b = 0,5333\delta; \quad \frac{g_b}{20} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 = 1.$$

$$x=0: \quad \frac{\delta_b}{\delta} u_b' = 0; \quad \frac{\delta_b}{\delta} u_b'' = \frac{1}{k\delta} \left\{ - (k\delta_b)' u_b' + g_b \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \delta_b u_b + \left[k \delta_b F_m(x) \right]' \right\} = \frac{1}{0,25} \cdot 0,695 = +2,78$$

$$x=0,1: \quad \frac{\delta_b}{\delta} u_b = \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b \right)_0 + \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b' \right)_0 \Delta x + \left(\frac{\delta_b}{\delta} u_b'' \right)_0 \frac{1}{2} (\Delta x)^2 = +2,78 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,01 = +0,0139.$$

$$x=0,5: \quad H_a = \left[\frac{\delta_b}{\delta} u_b' \right]_{x=0} = \frac{-13,2845}{64,43} = -0,20618; \quad \left[k \frac{\delta_b}{\delta} u_b'' \right]_{x=0} = 0,25 \cdot -0,20618 = -0,0515.$$

$$1) \quad 101,34 \cdot -0,20618 = -20,8952.$$

$$2) \quad 912,06 \cdot -0,20618 = -188,057.$$

$$\frac{\delta_b}{\delta} u_b'' = \frac{1}{0,50} \left\{ -1 \cdot -0,556 + 0,184 \right\} = +1,480.$$

$$x=0,6: \quad \frac{\delta_b}{\delta} u_b = 0 - 0,556 \cdot 0,1 + 1,48 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,01 = -0,0482.$$

TABEL VIII.

$$\text{Zuivere buiging } u = \sum_{m=1}^5 u_m \sin m\pi \frac{z}{b}.$$

x	u ₀₁	u ₀₂	u ₀₃	u ₀₄	u ₀₅	u _{b1}	u _{b2}	u ₀₃	u ₀₄	u ₀₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	-0,023	-0,001	-0,001	-0,000	-0,000	-0,035	-0,001	-0,003	-0,000	-0,001
0,2	-0,043	-0,001	-0,001	-0,000	-0,000	-0,042	-0,001	-0,004	-0,000	-0,001
0,3	-0,074	-0,000	-0,002	+0,000	-0,000	-0,011	-0,002	-0,002	-0,000	-0,001
0,4	-0,117	-0,004	-0,005	-0,001	-0,001	+0,036	+0,002	+0,000	+0,000	-0,000
0,5	-0,172	-0,008	-0,014	-0,002	-0,004	+0,114	+0,007	+0,012	+0,001	+0,003
0,5	-0,172	-0,008	-0,014	-0,002	-0,004	+0,114	+0,007	+0,012	+0,001	+0,003
0,6	-0,148	-0,004	-0,007	-0,001	-0,001	+0,067	+0,003	+0,003	+0,000	+0,000
0,7	-0,131	-0,002	-0,006	-0,000	-0,001	+0,054	+0,000	+0,001	+0,000	-0,000
0,8	-0,114	+0,004	-0,008	+0,001	-0,002	+0,057	-0,004	+0,005	-0,001	+0,002
0,9	-0,050	+0,010	-0,001	+0,003	-0,000	+0,017	-0,010	-0,000	-0,002	-0,000
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABEL IX.

$$\text{Zuivere wringing } u = \sum_{m=1}^5 u_m \sin m\pi \frac{z}{b}.$$

x	u ₀₁	u ₀₂	u ₀₃	u ₀₄	u ₀₆	u _{b1}	u _{b2}	u _{b3}	u _{b4}	u _{b6}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	-0,015	+0,021	-0,001	+0,004	+0,001	+0,003	-0,007	-0,000	-0,001	-0,000
0,2	-0,022	+0,022	-0,002	+0,003	+0,001	+0,006	-0,005	-0,000	+0,001	-0,000
0,3	-0,029	+0,021	-0,002	+0,003	+0,001	+0,013	-0,008	+0,001	-0,001	-0,000
0,4	-0,021	+0,019	-0,000	+0,002	+0,000	+0,007	-0,000	-0,000	+0,001	-0,000
0,5	-0,027	+0,031	-0,001	+0,005	+0,002	+0,016	-0,025	+0,001	-0,005	-0,002
0,5	-0,027	+0,031	-0,001	+0,005	+0,002	+0,016	-0,025	+0,001	-0,005	-0,002
0,6	-0,022	+0,024	-0,003	+0,004	+0,001	+0,011	-0,017	-0,000	-0,004	-0,001
0,7	-0,026	+0,014	+0,001	+0,001	+0,000	+0,016	-0,003	-0,001	+0,001	+0,000
0,8	-0,023	+0,008	+0,007	+0,002	+0,000	+0,014	-0,005	-0,000	-0,002	-0,001
0,9	-0,029	+0,001	+0,018	+0,001	-0,001	+0,023	+0,007	+0,003	+0,003	+0,001
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABEL X.

x	$\frac{S_{b1}}{A_1}$	$\frac{S_{b2}}{A_2}$
0,	0,855	0,822
0,1	0,827	0,791
0,2	0,792	0,749
0,3	0,739	0,706
0,4	0,681	0,655
0,5	0,614	0,609
0,5	0,776	0,731
0,6	0,718	0,670
0,7	0,639	0,579
0,8	0,551	0,500
0,9	0,281	0,407
1,0		

RAPPORT S. 70.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. IV.

door

Dr. Ir. A. VAN DER NEUT.

Rapport S. 70: L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. IV.

Beport S. 70: The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings, IV.

Bericht S. 70: Der Einfluss der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. IV.

RAPPORT S. 70.

De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. IV.

Uittreksel.

a. Omvang van het onderzoek.

Om te controleeren of de in vorige publicaties gegeven methode voor de sterkteberekening van vleugels met twee langsliggers, ribben en stijve bekleeding, resultaten geeft, die overeenstemmen met het werkelijk gedrag van deze vleugels, zijn proeven uitgevoerd op een drietal vleugels bij verschillende belastingen.

b. De vleugels en hun belasting.

Onderzocht zijn de volgende vleugels:

1. Een Fokkervleugel van het type F III S.P. (fig. 1). De belastingsverdeling was zoodanig, dat op den achterligger $3 \times$ zooveel aangreep als op den voorligger. Zij werd geleidelijk opgevoerd tot de breuklast bij 7,5-voudige normale belasting (fig. 2, 3).

2. Een Fokkervleugel van het type F III R.R. (fig. 7). Een tweetal typen van belastingsverdeling werd gekozen:

A. Een belasting, waarbij vrijwel geen torsie optrad, waarbij het drukpunt zich bevond op 31,5% der plaatselijke koorde. Het hoogste veelvoud der normale belasting bedroeg $n = 3$.

B. Een belasting, waarbij veel torsie optrad waarbij het drukpunt zich bevond op 75% der plaatselijke koorde. Het hoogste veelvoud der normale belasting bedroeg $n = 1,5$ (fig. 9).

3. Een Koolhoven-vleugel van het type FK 43 (fig. 16). Hierbij werden eveneens 2 verdeelingen onderzocht.

A. Als bij 2A, gevend een drukpunt op 33%. Het hoogste belastingsveelvoud bedroeg $n = 3$.

B. Als bij 2B, gevend een drukpunt op 63%. Het hoogste belastingsveelvoud bedroeg $n = 3$ (fig. 19).

c. De metingen.

De doorbuigingen van de liggers werden bij ieder belastingsstadium gemeten in een aantal punten op de in fig. 10 en 11 aangegeven wijze. Bij den in b.3 genoemden vleugel kon bovendien het buigend moment in het midden van den voorligger gemeten worden. Om eventueel aanwezige asymmetrische vervormingen te kunnen elimineeren werden de voor de bepaling der asymmetrie noodige metingen gedaan (fig. 12, 13).

d. De resultaten.

De vervormingen zijn tot ongeveer de helft der breuklast vrijwel evenredig met de belastingen (zie ook fig. 20, 21). Bij hogere belastingen blijft $\frac{E}{G}$ ook vrijwel constant, wat tot uiting komt in het constant zijn van de verhouding der doorbuigingen van voor- en achterligger (fig. 5, 6); de absolute grootte der doorbuigingen neemt echter eenigszins toe, wat kan worden toegeschreven aan de door plooiing afnemende geschiktheid van de bekleeding om een gedeelte van het buigend moment op te nemen (fig. 4, 6).

De berekende en de gemeten doorbuigingen voor de drie vleugels zijn weergegeven in de figuren 6 (F III S.P.), 14, 15 (F III R.R.), 22, 23, 24 (FK 43).

Zij zijn zeer goed met elkaar in overeenstemming bij de in de berekening ingevoerde waarde:

$$\frac{E}{G} = 14.$$

BERICHT S. 70.

Der Einfluss der Rippenverbundwirkung und der Beplankung auf die Festigkeit von Flugzeugflügeln. IV.

Zusammenfassung.

a. Umfang der Untersuchung.

Die Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen des in früheren Veröffentlichungen entwickelten Verfahrens zur Festigkeitsberechnung von Flügeln mit 2 Holmen, Rippen und steifer Beplankung und dem wirklichen Verhalten der Flügel, wurde durch Versuche an drei Flügeln geprüft.

b. Die Flügel und ihre Belastung.

Die folgenden Flügel wurden untersucht:

1. Ein Fokker-Flügel, Baumuster F III S.P. (Punkt 2, fig. 1). Die Lastverteilung war so, dass die Belastung des Hinterholmes $3 \times$ so gross war wie die Belastung des Vorderholmes. Die Belastung wurde allmählich bis zur Bruchbelastung (7,5-fache normale Belastung) gesteigert (fig. 2, 3).

2. Ein Fokker-Flügel, Baumuster F III R.R. (Punkt 3, fig. 7). Zwei Arten der Lastverteilung wurden gewählt:

A. Eine Belastung ohne Torsion. Der Druckpunkt lag auf 31,5 v.H. der örtlichen Flügeltiefe. Das grösste Lastvielfache war $n = 3$.

B. Eine stark tordierende Belastung, wobei die Lage des Druckpunktes 75 v.H. der örtlichen Flügeltiefe war. Das grösste Lastvielfache war $n = 1,5$ (fig. 9).

3. Ein Koolhoven-Flügel, baumuster FK 43 (Punkt 4, fig. 16). Auch hier wurden ähnliche Lastverteilungen wie 2A und 2B gewählt.

A. Druckpunkt 33 v.H. $n = 3$.

B. Druckpunkt 63 v.H. $n = 3$ (fig. 19).

c. Die Messungen.

Die Durchbiegungen der Holme wurden bei jeder Belastungsstufe in einer Anzahl Punkten auf der in fig. 10, 11 angegebenen Art gemessen. Für den in b.3 genannten Flügel konnte ausserdem das Biegemoment in der Mitte des Vorderholmes gemessen werden.

Um eventuell stattfindende asymmetrische Verformungen auszugleichen wurden die für die Bestimmung der Asymmetrie nötigen Messungen durchgeführt (fig. 12, 13).

d. Die Ergebnisse.

Ungefähr bis zur Hälfte der Bruchlast sind die Verformungen den Belastungen nahezu proportional (siehe auch fig. 20, 21). Bei höheren Belastungen bleibt das Verhältnis zwischen den Durchbiegungen des Vorderholmes und des Hinterholmes konstant (fig. 5, 6), folglich ist auch $\frac{E}{G}$ nahezu konstant. Die absolute Grösse der Durchbiegungen nimmt aber etwas zu, dies kann der Faltenbildung der Beplankung zugeschrieben werden, wodurch der Teil des Biegemomentes, der von der Beplankung aufgenommen wird, sich verkleinert (fig. 4, 6).

Die berechneten und gemessenen Durchbiegungen der drei Flügel sind in den Figuren 6 (F III S.P.), 14, 15 (F III R.R.), 22, 23, 24 (FK 43) gegeben. Sie stimmen sehr gut miteinander überein für den in der Berechnung gewählten Wert: $\frac{E}{G} = 14$.

REPORT S. 70.

The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. IV.

Summary.

a. Extent of the investigation.

To check the method of strength calculation for wings with two spars, ribs and stiff covering, given in foregoing reports, tests have been made on three wings with different loads.

b. The wings and their loads.

The following wings have been tested:

1. A Fokker-wing of the type F III S.P. (point 2, fig. 1). The load distribution was such, that the rear spar carried $3 \times$ as much as the front spar. The load was successively increased to breaking-load, which was $7,5 \times$ normal load (fig. 2, 3).

2. A Fokker-wing of the type F III R.R. (point 3, fig. 7). Two types of load distribution were chosen:

A. A load, giving no torsion of the wing. The centre of pressure was at 31,5% of the local chord. The highest load factor was $n = 3$ ($3 \times$ normal load).

B. A load, twisting the wing heavily. The centre of pressure was at 75% of the local chord. The highest load factor was $n = 1,5$ (fig. 9).

3. A Koolhoven-wing of the type FK 43 (point 3, fig. 16). Here too two load distributions were used.

A. As 2A, giving the centre of pressure at 33%. The highest load factor was $n = 3$.

B. As 2B, giving the centre of pressure at 63%. The highest load factor was $n = 3$ (fig. 19).

c. The measurements.

The deflexions of the spars were measured in a number of points for each condition of loading.

the method of measurement is illustrated in fig. 10 and 11. For the wing, mentioned under b.3, the bending moment at the centre of the front spar could also be measured. To eliminate asymmetrical deformations, measurements were taken to find the asymmetry (fig. 12, 13).

d. The results.

The deformations are practically proportional with the loads below approximately half the breaking load (see also fig. 20, 21). At higher loads the value of $\frac{E}{G}$ remains nearly constant, which is demonstrated by the constant ratio between the deflexions of front and rear spar (fig. 5, 6); the values of the deflexions however increase somewhat, probably due to buckling of the covering reducing the part of the bending moment taken by the covering (fig. 4, 6).

The calculated and measured deflexions for the 3 wings are given in fig. 6 (F III S.P.), 14, 15 (F III R.R.) 22, 23, 24 (FK 43).

They are in close agreement, if in the calculations $\frac{E}{G}$ is taken to be 14.

RAPPORT S. 70.

L'influence des nervures et du revêtement sur la résistance des ailes. IV.

Résumé.

a. Etendue de l'étude.

Pour contrôler si la méthode pour calculer la résistance des ailes avec deux longerons, des nervures et un revêtement rigide, développée dans quelques rapports précédents, donne des résultats en accord avec la réalité, on a fait des mesures sur trois ailes avec des charges différentes.

b. Les ailes et les charges.

On a expérimenté avec les ailes suivantes:

1. Une aile Fokker, type F III S.P. (article 2, fig. 1). La charge était distribuée d'une telle façon, que le longeron arrière porta $3 \times$ la charge, portée par le longeron avant. La charge était augmentée successivement jusqu'à la charge de rupture, étant $7,5 \times$ charge normale (fig. 2, 3).

2. Une aile Fokker, type F III R.R. (article 3, fig. 7). La charge était distribuée en deux façons:

A. Une charge, à laquelle l'aile n'était pas tordue. La position du centre de poussée était à 31,5% de la corde locale. La charge maximale était $3 \times$ charge normale. ($n = 3$).

B. Une charge, donnant beaucoup de torsion. La position du centre de poussée était à 75% de la corde locale. La charge maximale était $1,5 \times$ charge normale (fig. 9, $n = 1,5$).

3. Une aile Koolhoven, type FK 43 (article 4, fig. 16). Les façons de distribution de charge étaient analogues à celles pour les cas 2A et 2B.

A. La position du centre de poussée était à 33% de la corde. Charge maximale = $3 \times$ charge normale.

B. La position du centre de poussée était à 63% de la corde. Charge maximale = $3 \times$ charge normale (fig. 19).

c. Les mesures.

Les déflexions des longerons en un nombre de points étaient mesurées pour chaque condition de charge dans la façon, illustrée en fig. 10, 11. Pour l'aile, nommée en b.3, le moment de flexion au centre du longeron avant était mesuré aussi. Pour éliminer les déformations asymétriques, des mesures pour trouver l'asymétrie étaient conduites (fig. 12, 13).

d. Les résultats.

Jusqu'à environ demi-charge de rupture les déformations sont à plus près proportionnelles aux charges (voir fig. 20, 21). Aux charges plus grandes la valeur de $\frac{E}{G}$ reste à plus près constante, ce qui suit de la proportionnalité de la déflexion du longeron avant et de celle du longeron arrière (fig. 5, 6); les valeurs absolues des déflexions agrandissent un peu, ce qui est causé par la diminution par la formation des plis de la partie du moment de flexion dans le revêtement (fig. 4, 6).

Les déflexions des longerons calculées et mesurées sont données dans les fig. 6 (F III S.P.) 14, 15 (F III R.R.), 22, 23, 24 (FK 43). Prenant $\frac{E}{G} = 14$ dans le calcul, la concordance est frappante.

RAPPORT S. 70.

De invloed van het ribverband en de bekleding op de sterkte van vliegtuigvleugels. IV.

door

Dr. Ir. A. v. d. NEUT.

Overzicht.

In aansluiting op de theoretische behandeling van het vraagstuk, worden hier de resultaten van belastingsproeven meegedeeld, welke zijn verricht op een drietal houten met triplex bekleede vleugels, waarbij de belasting zoowel buigend als wringend was. Bij één vleugel werd de belasting opgevoerd tot den breuklast, bij de beide andere tot ongeveer de helft van den breuklast. De gemeten doorbuigingen waren in goede overeenstemming met de berekende, zoodat de theorie voldoende betrouwbaar bleek te zijn. Ook kon de waarde der materiaalconstante E/G , die bekend moet zijn om de sterkteberekening van een vleugel te kunnen uitvoeren, worden vastgesteld.

Indeeling.

1. Inleiding. — 2. De breekproef op den vleugel van het vliegtuig HN-ABI (type F III S.P.). a. De opstelling van den vleugel en beschouwingen over de wijze van belasting. b. De waarnemingen tijdens de belastingsproef en bespreking van de breukoorzaak. c. De uitkomsten van de metingen. — 3. De proeven op den vleugel van het vliegtuig HN-ABU (type F III R.R.). a. De opstelling van den vleugel. b. De meetinrichting. c. De belastingsproeven. d. De uitkomsten van de metingen. — 4. De proeven op den vleugel van het vliegtuig PH-AIL (type FK 43). a. De opstelling van den vleugel. b. De meetinrichting. c. De belastingsproeven. d. De uitkomsten van de metingen. — 5. Samenvatting der verkregen resultaten.

1. Inleiding.

De hieronder beschreven belastingsproeven hadden ten doel een controle te leveren op de in vroegere publicaties (lit. 1, 2, 3, 4) aangegeven methode van sterkteberekening van houten vleugels, die in hoofdzaak bestaan uit 2 evenwijdige langsliggers, die door dwarsribben verbonden zijn, terwijl de vleugelbedekking door triplexplaten gevormd wordt.

Tot deze controle hebben bijgedragen belastingsproeven op een drietal vleugels, die daartoe welwillend door de K.L.M. ter beschikking werden gesteld. Op deze plaats mag ook een woord van dank aan de Directies van de K.L.M. en de N.V. Nederlandsche Vliegtuigenfabriek niet ontbreken, voor de medewerking, die zij bij de uitvoering der proeven hebben verleend.

De proeven betroffen de volgende vleugels:

1. De breekproef op den vleugel van het Fokker-vliegtuig HN-ABI (type F III Siddeley Puma) in 1928.
2. De belastingsproeven op den vleugel van het Fokker-vliegtuig HN-ABU (type F III Rolls Royce) in 1932.
3. De belastingsproeven op den vleugel van het Koolhoven-vliegtuig PH-AIL (type FK 43) in 1933 en 1934.

Bij de eerstgenoemde proef was het hoofddoel gelegen in het vaststellen van den breuklast, terwijl intusschen enkele minder uitgebreide doorbuigingsmetingen werden verricht om het verloop der vervormingen bij toenemende belasting te kunnen volgen en om materiaal te verkrijgen voor de controle der berekeningsmethode.

Bij de beide andere vleugels werden de proeven verricht om de vervormingen nauwkeurig te kunnen meten en daardoor in staat te zijn de berekende vervormingen nauwkeuriger te kunnen toetsen. Om den vleugel voor meerdere proeven te kunnen gebruiken en ter vermindering van gevaar voor de instrumenten, werden hierbij de hoogste belastingen op een veiligen afstand van den breuklast gehouden. Omdat uit de eerstgenoemde proef gebleken was, dat zulk een belastingsproef reeds voldoende inzicht in het spanningsbeeld gaf, leek een verdere belasting niet noodzakelijk.

De experimentele controle van de resultaten, die een berekeningswijze geeft, is noodig om een oordeel te verkrijgen over de betrouwbaarheid der aannamen, die het probleem zoodanig schematiseerden, dat het voor mathematische behandeling toegankelijk werd. De diverse aannamen zijn genoemd in lit. 2 en 3.

De veronderstelling, waarvan in den regel een sterkteberekening uitgaat, is, dat de vervormingen evenredig zijn met de belastingen. In het onderhavige geval moet gevreesd worden, dat aan deze voorwaarde niet wordt voldaan. Immers bestaat de mogelijkheid, dat bij deze vrij ingewikkelde constructie de belasting, noodig voor het wegnemen van den „dooden gang” een aanzienlijk gedeelte van het geheele belastingsgebied zou beslaan. Bovendien zou het optreden van de plooiën in de huid bij toename der belasting een zoodanig ingrijpende verandering in de gedragingen van het systeem kunnen verwekken, dat bezwaarlijk nog van „met de belasting evenredige vervorming” zou kunnen worden gesproken. Vooral het verloop van de doorbuigingen bij de breekproef geeft hierover een inzicht (zie punt 2).

Het bleek, dat plooiing van de bekleding reeds bij betrekkelijk lage belastingen optrad. De in de berekening voorkomende elastische constanten E_b , E_o , G_b en G_o van het triplex hebben betrekking op een vlak blijvende bekleding. Deze constanten moeten nu zoo gekozen worden, dat de vlak blijvende plaat ongeveer dezelfde stijfheid heeft als het plooiende triplex. Omdat het triplex in de buigingsstijfheid slechts een bijdrage van secundaire betekenis geeft is een grove schatting van E_b en E_o reeds voldoende. Hoewel er aanwijzingen zijn, die doen vermoeden, dat de schijnbare glijdingsmodulus van triplexplaat, die boven de knikgrens belast is, en de glijdingsmodulus beneden de knikgrens weinig verschillen¹⁾, vormt de grootte van den glijdingsmodulus, die in de berekening moet worden gebruikt, een punt waarover proeven eerst zekerheid konden verschaffen.

2. De breekproef op den vleugel van het vliegtuig HN-ABI (type F III S. P.).

a. De opstelling van den vleugel en beschouwingen over de wijze van belasting.

De vleugel was licht beschadigd, voornamelijk doordat in de vleugelbedekking gaten geslagen waren. Voor de proef waren deze beschadigingen gerepareerd. In tegenstelling tot de in de punten 3 en 4 genoemde vleugels, was deze vleugel bij de proef dus geheel compleet. Figuur 1 geeft de hoofdafmetingen van den vleugel aan. Het toelaatbaar totaalgewicht van het vliegtuig was 2300 kg.

De vleugel werd aan zijn 4 ophangbeslagen omgekeerd in een gestel gehangen en met ballast belast. De belasting werd met gelijkmatige hoeveelheden opgevoerd tot den breuklast. Zij was zoodanig langs den vleugel verdeeld, dat de belasting per oppervlakte-eenheid langs den vleugel constant was, terwijl de verdeling in vliegrichting zoodanig werd gekozen, dat de belasting op den achterligger $3 \times$ zoo groot was als op den voorligger. Het drukpunt der belasting lag daarbij op 50 à 55 % der vleugelkoorde, dit komt ongeveer overeen met den toestand in de horizontale vlucht, indien de snelheid iets meer is dan de snelheid, die bij vol motorvermogen in horizontale vlucht optreedt.

Indien in aanmerking genomen wordt, dat de buigingsstijfheid van den achterligger ruim 2 maal zoo klein is als die van den voorligger, volgt dat bij het gekozen type van belastingsverdeling de vleugel sterk gewrongen wordt. Zonder stijve bekleding zou immers de doorbuiging van den achterligger meer dan $3 \times 2 = 6$ maal zoo groot zijn als van den voorligger. In werkelijkheid bleek de doorbuiging van den achterligger ongeveer 2 maal zoo groot te zijn als die van den voorligger (punt 2c), zoodat de buigende momenten in beide liggers ongeveer gelijk moeten zijn. Het totale buigend moment in een vleugeldoorsnede M noemend, is het moment in den achterligger 0,75 M bij afwezigheid van stijve bekleding, en ongeveer 0,50 M in werkelijkheid, zoodat de aanwezigheid der bekleding in dit belastingsgeval en bij dezen vleugel de belasting van den achterligger tot ongeveer $\frac{2}{3}$ terugbracht. Dit effect wordt bereikt, doordat de triplexbekleding een deel van het torsiemoment opneemt. Uit berekeningen blijkt, dat in de omgeving van den vleugeltip nagenoeg het geheele wringende moment door de vleugelbekleding wordt opgenomen, terwijl het in de bekleding opgenomen deel naar het midden van den vleugel afneemt tot nul; in de om-

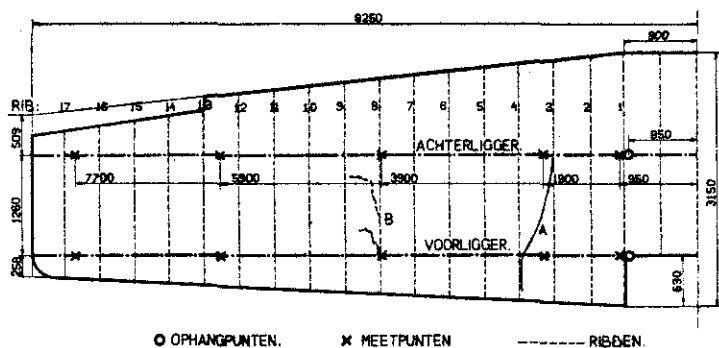


Fig. 1. Vleugel van het type F III. Aangegeven zijn de punten, waarin bij de proef op den vleugel van het vliegtuig HN-ABI de doorbuigingsmetingen werden verricht. De vergroting van den vloeistofmeter in de punten $x = \pm 0,95$ m, $\pm 1,90$ m is 5-voudig, in de overige meetpunten is zij enkelvoudig. De lijnen A en B duiden scheuren aan, welke na afloop van de proef in de bekleding van resp. onder- en bovenzijde van den vleugel werden gevonden.

¹⁾ Uit de aanname, dat de triplexplaat in het geheel geen buigingsstijfheid heeft, volgt, dat onder invloed van de onder 45° met de schuifspanningen gerichte drukspanningen de plaat plooiën zal, zoodat in uitgetrokken toestand de plaat slechts belast is met trekspanningen in de richting der plooiën, waarvan de richting dus een hoek van 45° maakt met de liggers. Uit deze beschouwingen kan worden afgeleid, dat de schijnbare glijdingsmodulus $G_s = \frac{E_{45}}{4}$, waarin E_{45} de elasticiteitsmodulus is, die gevonden wordt bij een trekproef, waarbij de trekrichting een hoek van 45° maakt met de vezelrichting. Daar E_{45} ongeveer $3,4 \times 10^4$ kg/cm² bedraagt, kan voor G_s verwacht worden $0,85 \times 10^4$ kg/cm². Deze waarde verschilt niet zeer veel van de glijdingsmodulus G bij niet uitbuilend triplex, indien de schuifspanningen evenwijdig aan en loodrecht op de vezelrichting gericht zijn. Dan wordt nl. gevonden $1,0 \times 10^4$ kg/cm². De elasticiteitsmodulus stellende op $1,25 \times 10^5$ kg/cm², volgt dus $\frac{E}{G_s} = 14,7$ en $\frac{E}{G} = 12,5$.

geving van het midden gaat deze afname sneller dan in de omgeving van den tip. Omdat het totale wringende moment en de torsiestijfheid toenemen van den tip naar het midden is niet zonder verdere berekening te zeggen waar in de bekleding de grootste schuifspanning optreedt. Het blijkt, dat zij maximaal is op ongeveer 4 m. buiten de ophangpunten. Naar buiten neemt de schuifspanning langzaam af, naar het midden sneller.

b. De waarnemingen tijdens de belastingsproef en bespreking van de breukoorzaak.

In hoofdzaak komen de waarnemingen over de plooiing van de bekleding tijdens de proef met het onder a. besproken verloop der schuifspanningen overeen. Zij betreffen alleen de bovenzijde van den vleugel (onderzijde bij de proef), omdat de onderzijde met dunne planken bedekt was om beschadiging van het triplex door den ballast te voorkomen. Reeds in onbelasten toestand was het triplex niet meer vlak, het was in tal van velden slap. Bij lage belastingen waren dan ook al duidelijke plooiën dwars op de liggers (buigingsplooiën) te bemerken in het middendeel van den vleugel. Bij verdere belasting breidde zich dit gebied met plooiën naar buiten uit. Zij veranderden in de verder gelegen deelen van richting, en verliepen hier onder ongeveer 45° met de liggers. Het gebied met de zwaarste plooiën lag ongeveer op de helft tusschen ophangpunt en vleugeltip.

Bij enkelvoudige belasting is de resulterende belasting uit luchtkrachten en eigen gewicht van den vleugel 1900 kg. Tot het 3-voud van deze belasting werd zij telkens met 1900 kg opgevoerd. Daarna werd de belasting steeds met 950 kg. verhoogd, totdat de breuklast bereikt werd. Tijdens het opbrengen der belasting steunde de vleugel op een hulpconstructie, die met vijzels bewogen kon worden. Bij het losdraaien der vijzels bij 7,5-voudige belasting trad onmiddellijk de breuk op. (fig. 2). Een hevige knal, komende van de linkervleugelhelft, werd gevolgd door den knal van het breken van den achterligger en vervolgens door den knal van het breken van den voorligger.

Op den eerstgenoemden knal correspondeeren 2 breuken, die later in het bekledingstriplex werden gevonden; in figuur 1 zijn deze met A en B aangegeven. De scheur A in de onderbekleding is reeds begonnen bij 4-voudige belasting, toen een scheur werd ontdekt naast rib 4 in het neustriplex. Deze scheur werd geleidelijk langer en zette zich bij het bereiken van de $6\frac{1}{2}$ -voudige belasting tot onder de plankenbedekking voort. Omdat uit berekening blijkt, dat de schuifspanning op deze plaats, dicht bij de ophanging, niet al te groot is, is het onwaarschijnlijk, dat deze scheur opgetreden is door te groote schuifspanning; waarschijnlijk is zij ingeleid, doordat ter plaatse in den neus een beschadiging reeds aanwezig was.

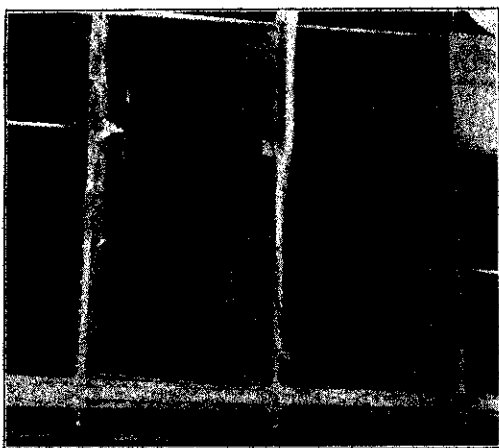


Fig. 3. HN-ABI-vleugel: breuk van het bekledingstriplex tusschen de ribben 8 en 9 van bakboordzijde. De vleugel ligt met de bovenzijde onder; de bekleding der onderzijde is verwijderd om de breuk zichtbaar te maken. Ook de bekleding en de ribben, voor zoover buiten de liggers gelegen, zijn verwijderd. Opgemerkt kan worden de beschadiging van den achterligger.



Fig. 2. HN-ABI-vleugel na breuk. De ballast heeft een totaal gewicht van 13,5 ton, overeenkomend met de 7,5-voudige belasting. Op den achterligger is de belasting 3 maal zoo groot als op den voorligger. De vleugelbekleding is tegen beschadiging beschermd door dunne plankjes, die op de foto zichtbaar zijn.

Het doorscheuren van het triplex bij A stelt het bekledingstriplex tusschen de ribben 3 en 4 buiten werking. Het wringend moment, dat buiten rib 4 in de bekleding wordt opgenomen, moet dan tusschen rib 3 en 4 door de liggers als dwarskracht worden opgenomen, waarna het bij rib 3 weer ten deele in de bekleding teruggevoerd wordt. Omdat het wringend moment in de bekleding dicht bij de ophanging niet groot meer is en de stijfheid van de liggers tegenover afschuiving daar vrij aanzienlijk is, zal de gewijzigde belastingsopname niet veel aan de totale vervorming veranderen.

Anders is het met de breuk bij B tusschen de ribben 8 en 9 aan de bovenzijde (fig. 3). Dit veld is gelegen op de helft tusschen ophanging en vleugeltip, het gebied waar volgens de berekening de schuifspanning het grootst is. Bij 7,5-voudige belasting bedroeg de berekende schuifspanning hier $100-110 \text{ kg/cm}^2$. Het doorscheuren van de bekleding op deze plaats zal ten gevolge hebben, dat een aanzienlijk torsiemoment nu door de liggers tusschen de ribben 8 en 9 als dwarskracht moet worden opgenomen. Omdat de doorsnede der liggerwanden, vooral van den achterligger, hier kleiner is dan tusschen rib 3 en 4, geeft de gewijzigde belastingsopname hier een aanzienlijke extra zakking, vooral van den achterligger. Door de dynamische werking van de massa van den buiten dit punt op den achterligger gelegen ballast kan de verdere constructie overbelast zijn geworden, wat waarschijnlijk de directe oorzaak is geworden

voor de breuk van den achterligger tusschen de ophangpunten. Hierbij moet nog worden opgemerkt, dat inderdaad tusschen de ribben 8 en 9 de triplexwanden van den achterligger sterk vervormd zijn geweest, omdat de lijmmaad tusschen de gordingen en de wanden op deze plaats ten deele losgesprongen bleek te zijn, en de wanden uitgebuit waren (zie fig. 3).

Een en ander maakt den indruk, alsof de scheur B en niet de scheur A de totale breuk heeft ingeleid, en dat de liggerbreuken als secundaire verschijnselen moeten beschouwd worden. Zelfs moet het zeer wel mogelijk worden geacht, dat een plotselinge luchtbelasting, die bij $n = 7,5$ tot de breuk bij B zou leiden, nog niet tot breuk van de liggers zou voeren, omdat bij deze wijze van belasting de dynamische werking der massa's ontbreekt.

Zooals ook uit figuur 3 blijkt, zijn tijdens de proef ook verscheidene steunlatjes van de bekleding bezweken. De oorzaak hiervan zal gelegen zijn in het plooiën van de bekleding. Het kraken, dat bij de hoogere belastingen (5,5-voud en hoger) werd waargenomen, zal zeker voor een deel hieraan toe te schrijven zijn.

c. De uitkomsten van de metingen.

Tijdens de proef werd na iedere belastingsphase in een aantal punten de doorbuiging gemeten, deze punten zijn in figuur 1 aangegeven. De meting geschiedde met de vloeistofmeters, die in punt 3b beschreven worden; de apparatuur was echter minder nauwkeurig dan bij de latere proeven, zoodat niet iedere onregelmatigheid in het verloop der gemeten doorbuigingen als een onregelmatigheid in het gedrag van den vleugel behoeft te worden aangemerkt.

In figuur 4 zijn de gemeten doorbuigingen (Y) gedeeld door het belastingsveeldvoud (n) als ordinaten uitgezet op het belastingsveeldvoud (n) als abscis. Voor de schaal der totale belasting is hierbij als eenheid genomen 1900 kg, het enkelvoud der normale belasting. Indien de wet van Hooke streng gold, zouden de waarnemingen voor ieder meetpunt op een horizontale lijn liggen. Dit blijkt slechts het geval te zijn voor de meetpunten in het midden-deel van den vleugel. Meer naar buiten neemt de doorbuiging met de belasting eenigszins toe, doch niet in die mate, dat het gedrag van den vleugel in de buurt van den breuklast andersoortig is dan bij b.v. de helft van den breuklast. Een afname der stijfheid bij hoogere belastingen valt echter niet te ontkennen.

Bij een op de wet van Hooke gebaseerde berekening der spanningen blijft het resultaat der berekening ook van kracht voor het systeem, waarin de spanningen niet evenredig zijn met de vervormingen, mits de verhouding van alle „elastische constanten” niet verandert. Dit beteekent voor de vleugelberekening, dat veranderingen van E of G niet in tegenspraak zijn met de veronderstellingen der berekening, indien slechts $\frac{E}{G}$ constant is.

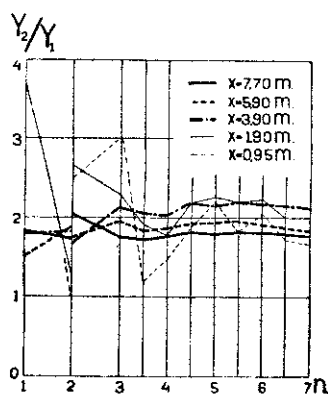


Fig. 5. HN-ABI-vleugel: de verhouding van de doorbuigingen van voor- en achterligger als functie van het belastingsveeldvoud. In die punten, waar de grootte der doorbuiging een voldoende nauwkeurigheid der meting waarborgt, is de verhouding der beide doorbuigingen praktisch constant. In het geheele gebied van belastingen tot aan den breuklast is de werking van het ribverband dus dezelfde.

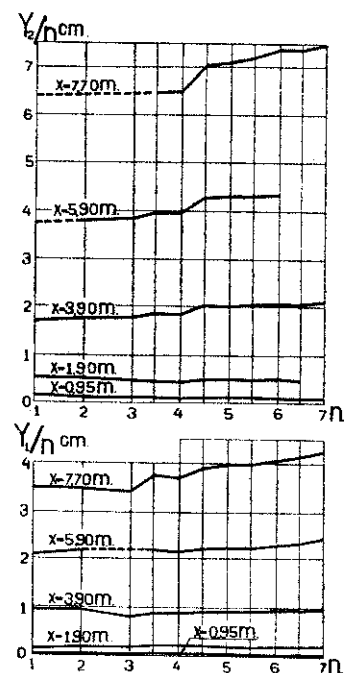


Fig. 4. HN-ABI-vleugel: de doorbuigingen per eenheid van belasting als functie van het belastingsveeldvoud. Over het algemeen neemt de doorbuiging per eenheid van belasting weinig toe met de belasting. In de omgeving van den breuklast verandert het karakter der doorbuigingen ook slechts weinig.

Dat aan deze voorwaarde vrij goed wordt voldaan, blijkt indien het quotient $\frac{Y_2}{Y_1}$ wordt beschouwd (fig. 5). De waarnemingen betreffende de verder van het midden gelegen punten bij de hoogere belastingen geven regelmatig gelegen punten, welke practisch op een horizontale lijn liggen. De waarnemingen betreffende de punten met kleinere doorbuigingen vertoonen minder regelmaat. Uit de afwijkingen spreekt echter niet een bepaalde tendenz voor afwijking van de lijn $\frac{Y_2}{Y_1}$ van de horizontale lijn. De onregelmatigheden zijn waarschijnlijk te wijten aan de onnauwkeurigheid der metingen.

Tenslotte zijn in figuur 6 de doorbuigingen van voor- en achterligger per eenheid van belasting, volgens berekening en volgens meting weergegeven. Van de gemeten doorbuigingen zijn de doorbuigingen gekozen bij de hoogste belasting, waarbij gemeten werd ($n = 7$) en voor een belasting op ruim den halven breuklast ($n = 4$).

De berekende doorbuigingen zijn verkregen door aan te nemen, dat de elasticiteitsmoduli van liggers en bekleding gelijk zijn, en dat $\frac{E}{G} = 14$. Teneinde den invloed van den met de belasting veranderlijken elasticiteitsmodulus te elimineeren zijn niet de doorbuigingen zelf, maar hun product met den elasticiteitsmodulus weergegeven, waarbij E zoodanig gekozen werd, dat berekende en gemeten doorbuigingen zoo goed mogelijk in overeenstemming waren. Het blijkt dan allereerst, dat $\frac{EY}{n}$ voor $n = 4$ en $n = 7$ practisch samenvallen, zoodat — al moge dan de wet van Hooke niet opgaan, omdat E verandert — het product $\frac{EY}{n}$ en bij gevolg ook de spanningen zich gedragen

alsof de wet van Hooke voor het systeem geldt. Berekeningen, die een constante waarde van $\frac{E}{G}$ veronderstellen, blijven dus tot dicht bij de breukbelasting hun geldigheid behouden.

Uit figuur 6 blijkt tevens, dat de berekening, waarin $\frac{E}{G} = 14$ gesteld is, althans voor het middendeel van den vleugel elastische lijnen oplevert, die goed in overeenstemming zijn met de gemeten doorbuigingen. Bij een kleinere waarde van $\frac{E}{G}$ zou betere overeenstemming verkregen zijn voor de verder naar den tip gelegen punten; echter een minder goede voor het middendeel. Omdat het middendeel van den vleugel voor de beoordeling van de sterkte van meer betekenis is, is er naar gestreefd de berekening zoo in te richten, dat de vervormingen en dus ook de spanningen van dit deel van den vleugel het best benaderd werden. Vandaar de voorkeur, die hier gegeven is, aan de grotere waarde van $\frac{E}{G}$.

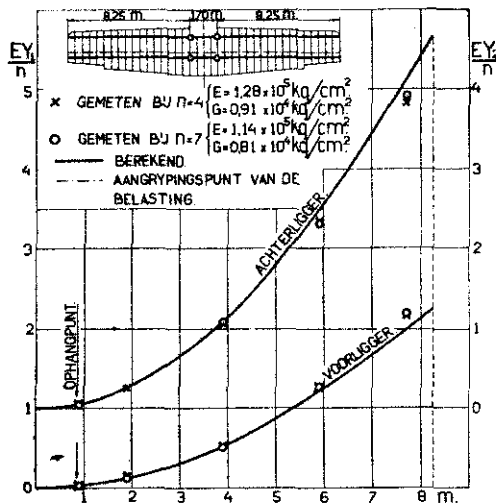


Fig. 6. HN-ABI-vleugel: de berekende elastische lijnen en de bij $n = 4$ en $n = 7$ gemeten doorbuigingen per eenheid van belasting. Bij deze proef was de belasting, die op den achterligger aangreep, 3 maal zoo groot als die op den voorligger. In de berekening is aangenomen $\frac{E}{G} = 14$.

afgenomen. In werkelijkheid hoeft dit niet het geval geweest te zijn. De afname van de gemiddelde E wijst dan op een onevenredige toename der buigspanningen in de liggers. De berekende buigspanningen zullen hier dus kleiner zijn dan de werkelijke.

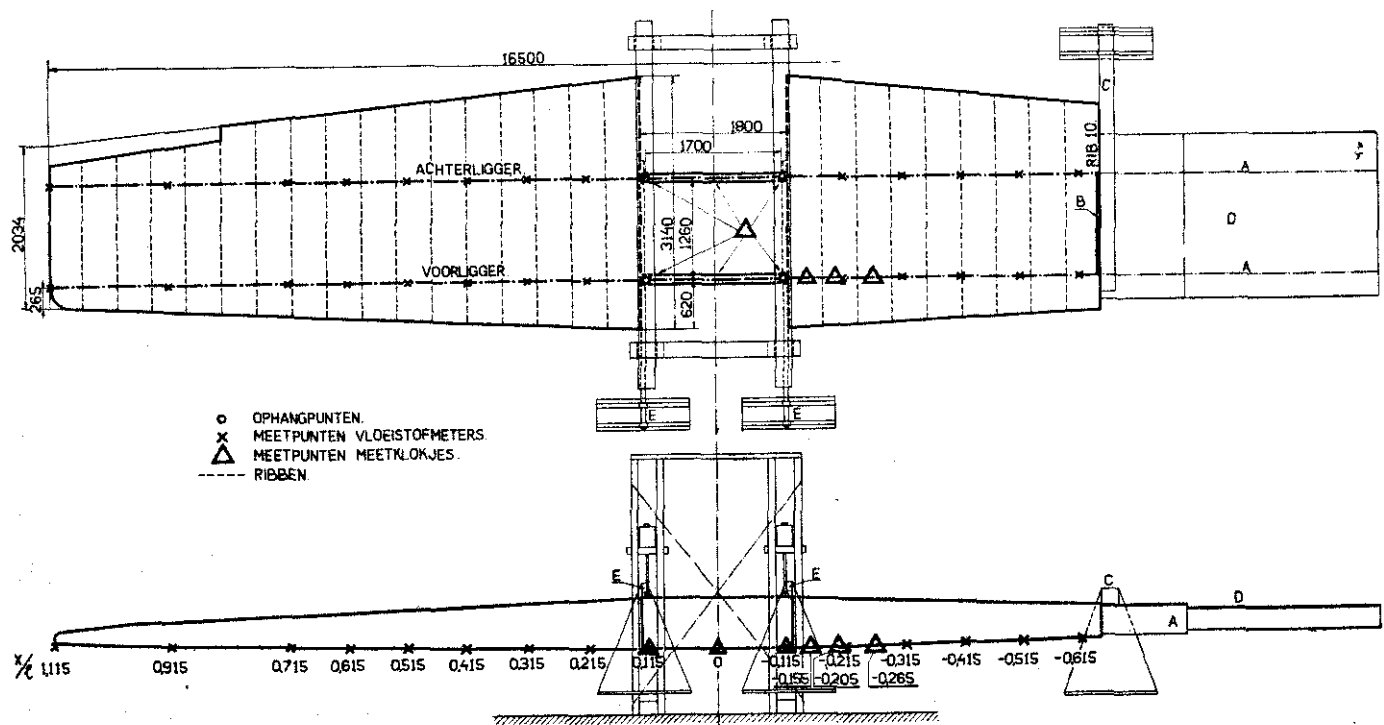


Fig. 7. Opstelling van den vleugel van het vliegtuig HN-ABU, type F. III R.R. De afgebroken liggers zijn bij rib no. 10 van verlengstukken A voorzien, de bekleding heeft daar versterkingslijsten B, een hefboom C met schaal is aangebracht om bij rib 10 het noodige wringende koppel in te leiden. Op het vloertje D wordt de ballast gelegd. De uithouders E met schalen hebben het doel de kanteling van den vleugel om de achterliggerbeslagen bij de proeven B tegen te gaan. De meetpunten $\frac{x}{l} = \pm 0,115, \pm 0,215$ correspondeeren op vloeistofmeters met 4-voudige vergrooting, de vloeistofmeters der meetpunten $\frac{x}{l} = 0,315$ tot $1,115$, en $\frac{x}{l} = -0,315$ tot $-0,615$ hebben 2-voudige vergrooting. In de meetpunten $\frac{x}{l} = 0, \pm 0,115, -0,155, -0,205$ en $-0,265$ worden de doorbuigingen met meetklokken gemeten.

De conclusies, waartoe deze breuk leidt, zijn daarom:

1. Het type van vervorming van den vleugel in de omgeving der breukbelasting en in de omgeving der halve breukbelasting verschillen zoo weinig, dat een proef bij halven breuklast voldoende inzicht geeft over de vervormingen bij den breuklast.
2. In berekeningen over vleugels van deze constructie wordt de werking van het ribverband en de bekleding over het geheele gebied van belastingen tot aan den breuklast goed weergegeven, indien wordt aangenomen $\frac{E}{G} = 14$.
3. De uit de vergelijking van gemeten en berekende doorbuiging gevonden waarde van E bij ongeveer den halven breuklast, wijst er op, dat de berekende spanningen bij deze belasting goed met de werkelijke spanningen zullen overeenstemmen.
4. Bij belastingen, die den breuklast naderen, zijn de spanningen in de liggergordingen voor zoover zij afkomstig zijn van het buigend moment in de vleugeldoorsnede grooter dan de berekende, waarschijnlijk ten hoogste 10 %.

3. De proeven op den vleugel van het vliegtuig HN-ABU (type F III R.R.).

a. De opstelling van den vleugel.

In hoofdafmetingen is deze vleugel gelijk aan die van het type F III S.P. (fig. 1). Omdat hij echter voor een hooger totaal gewicht van het vliegtuig (2750 kg) en voor een grootere maximale snel-

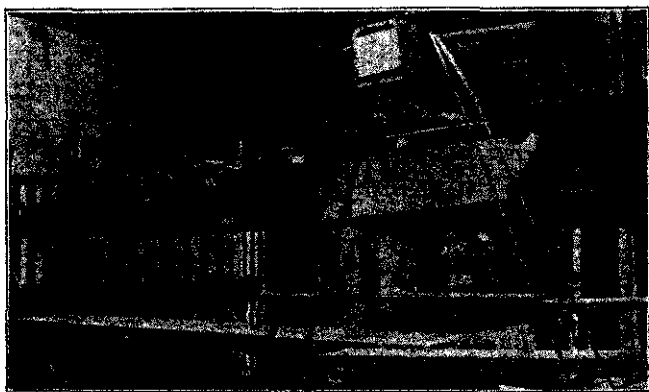


Fig. 8. De HN-ABU-vleugel, gezien van de achterzijde bij rib 10. Verlengstukken A, hefboom met schaal C, belastingsvloertje D.

heid was ontworpen, waren de langsliggers zwaarder gedimensioneerd. De dikte der bekleding was echter gelijk (1,2 mm). De verhouding van de buigingsstijfheid der liggers tot de torsiestijfheid der bekleding was hier dus iets grooter.

De stuurboordzijde van den vleugel was zwaar beschadigd, doordat de tip van rib 11 af geheel vernield was. De beschadigingen van het bekledings-triplex werden voor de proef gerepareerd, behalve enkele ondergeschikte beschadigingen van de stuurboordzijde. Om bij de belastingsproef, ondanks de asymmetrie van den vleugel, een symmetrischen vervormingstoestand te verkrijgen, werd in plaats van het ontbrekende vleugeldeel een verlengstuk aangebouwd, dat zoodanig belast werd, dat in de doorsnede, waar de eigenlijke vleugelconstructie begint (rib 10), de belastingsverdeling gelijk is aan die in den completeen vleugel. Dit beteekent, dat bij rib 10

in ieder van de liggers en in de bekleding het juiste buigend moment wordt ingeleid, en verder, dat in deze doorsnede de juiste dwarskracht en het juiste torsiekoppel aanwezig zijn (fig. 7 en 8).

Daartoe was aan iederen ligger een verlengstuk A aangebouwd; verder was de laatste rib (no. 10) in het deel tusschen de liggers voorzien van breede lijsten B, die in het vlak xz praktisch onvervormbaar waren, zoodat hier $u_b = u_o = 0$; tenslotte was bij rib 10, aan de beide liggers, een hefboom C bevestigd, die aan de achterzijde van den vleugel een schaal voor ballast droeg. Over de beide verlengstukken der liggers was een vloertje D gelegd voor het dragen der belasting.

De belasting, op dit vloertje aangebracht, verdeelt zich over de beide verlengstukken en geeft in de liggerstompen aan de buitenzijde van rib 10, omdat ribverband ontbreekt, een bekend buigend moment. De verdeling werd nu zoodanig gekozen, dat dit moment gelijk is aan het moment, dat aan de binnenzijde van rib 10 bij den symmetrischen vervormingstoestand in de liggers aanwezig moet zijn, vermeerderd met het moment, dat de verstijvingslijsten B der bekleding op den ligger uitoefenen. Het gewicht op de ballastschaal werd zoo groot gekozen, dat dit samen met de belasting op het vloertje de juiste totale dwarskracht en het juiste torsiekoppel gaf bij rib 10. Op deze wijze verkeert de vleugel tusschen de ribben 10 van bakboord- en stuurboordzijde in een symmetrischen belastingstoestand, zoodat de vleugel vervormt alsof het ontbrekende deel aan stuurboord wel aanwezig was, en op dezelfde wijze belast werd als het overeenkomstige deel van de bakboordzijde.

De verdeling van het buigend moment bij rib 10 over de beide liggers werd ontleend aan de



Fig. 9. De HN-ABU-vleugel tijdens proef B, $n = 1\frac{1}{2}$. Opgemerkt kunnen worden de uithouders met schalen E, de busjes en de slangen der vloeistofmeters.

berekening, die te voren over dezen vleugel was opgezet. Indien deze berekening onjuist was, zou dit tot uiting komen, doordat de gemeten doorbuigingen niet de verlangde symmetrie bezaten.

Een andere aanleiding voor het optreden van on-symmetrische vervormingen is gelegen in de wijze van ophanging van den vleugel. De vleugel is aan zijn 4 hoofdbeslagen opgehangen; bij belasting van den vleugel vervormt het gestel, waarin de vleugel hangt en de bodem, waarop het gestel staat. Het is dan slechts toevallig, indien de 4 ophangpunten in een plat vlak blijven liggen; in het algemeen zal dit niet het geval zijn en zullen de reacties in de ophangpunten niet symmetrisch zijn. Het blijkt, dat dan op de symmetrische vervorming een anti-symmetrische wordt gesuperponeerd. Bij de proef moest deze vervorming worden gemeten.

In een serie proeven lag het zwaartepunt der belasting achter den achterligger, zoodat bij de beslagen van den voorligger op den vleugel een neerwaartsche kracht moest worden uitgeoefend. Tot dit doel werden bij de beslagen uithouders E aangebracht, die voor den voorligger met de noodige contra-gewichten konden worden bezwaard (fig. 7 en 9).

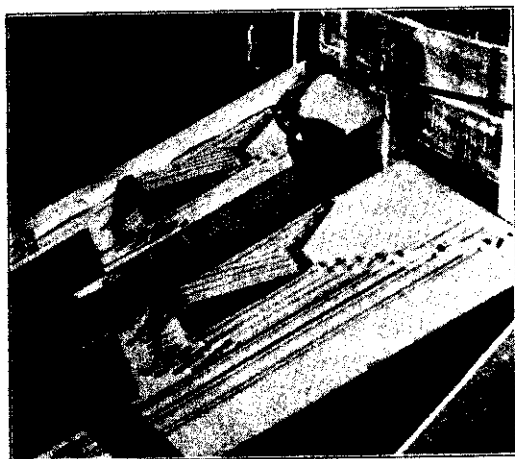


Fig. 11. De waarnemingstafel der vloeistofmeters. De minst hellende buizen geven een 4-voudige vergrooting, de steilere buizen geven 2-voudige vergrooting der verplaatsingen.

Deze inrichting bestond uit een stijf raamwerk, dat in drie punten A, B en C aan den vleugel was opgehangen en wel op zoodanige wijze, dat vervormingen van den vleugel den vorm van het raamwerk niet beïnvloedden. Als ophangpunten waren gekozen een drietal hoofdbeslagen (fig. 12). Op dit raamwerk waren Zeiss-meetklokken gemonteerd, die de verticale verplaatsing van een punt van een ligger ten opzichte van het raamwerk aangaven. Op deze wijze werden de verplaatsingen gemeten van de 4 punten onder de ophangbeslagen. (waaruit de grootte der anti-symmetrische vervorming volgt), en van de 2 punten in het midden van de liggers tusschen de beslagen (waaruit de doorbuigingspijl volgt).

Om de kanteling van den vleugel in zijn geheel ten gevolge van de vervormingen van gestel en ondergrond te meten, en tevens als controle op de boven beschreven meting der anti-symmetrische vervorming, was aan de liggers in de punten onder de hoofdbeslagen een balkje D opgehangen, waarop een hellingmeter E was geplaatst. Door middel van een micrometerschroef F werd de opgetreden verdraaiing van den hellingmeter gecompenseerd, wat mogelijk was door een zeer gevoelig waterpasinstrument. De grootte der verstelling werd door middel van een Zeiss-meetklok afgelezen. Deze hellingmeting werd dubbel

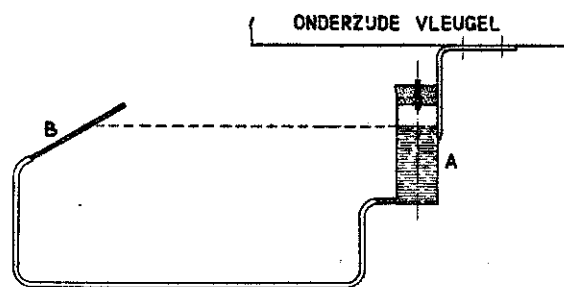


Fig. 10. De vloeistofmeters. De busjes A en de gec calibreerde buizen B zijn door een gummi slang verbonden. De gelijke vloeistofniveaus in A en B blijven gehandhaafd, ook na een verticale verplaatsing van A. Deze verplaatsing wordt bij B vergroot afgelezen.

b. De meetinrichting.

De metingen kunnen in hoofdzaak onderscheiden worden in de doorbuigingsmetingen, die in de in figuur 7 aangegeven punten verricht werden met de vloeistofmeters en het verloop der doorbuigingen langs de liggers aangaven, en in de metingen over de vervormingen van de liggers tusschen de ophangpunten.

Bij de meting met de vloeistofmeters wordt gebruik gemaakt van het gelijke niveau in 2 communiqueerende vaten, waarvan het eene aan den vleugel bevestigd is en het andere op eenigen afstand van den vleugel vast is opgesteld (fig. 10). Een verplaatsing van het busje A in verticalen zin geeft een verticale verplaatsing van het vloeistofniveau in de buis B. Omdat deze laatste onder een helling geplaatst is, wordt de verplaatsing van het vloeistofniveau in de buis vergroot afgelezen. Voor de 4 meetpunten, die het dichtst bij het midden van den vleugel liggen was de vergrooting 4-voudig, voor de overige 2-voudig. De buizen van alle 30 meetpunten zijn vereenigd op één waarnemingstafel (fig. 11).

In het midden van den vleugel was een inrichting aangebracht om de anti-symmetrische vervormingen te meten.

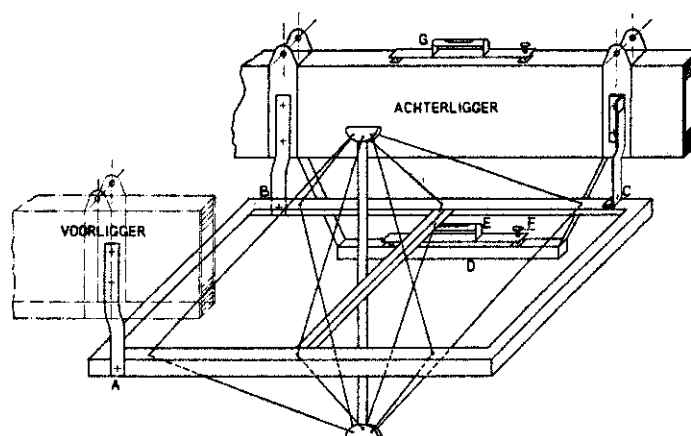


Fig. 12. HN-ABU-vleugel: het meetraam onder de vleugel-ophangpunten. Het is in de punten A, B, C zoodanig aan den vleugel opgehangen, dat het bij vervorming van den vleugel niet belast wordt. De verplaatsingen van punten van de vleugel-liggers t.o.v. dit meetraam worden gemeten door middel van op het raam gemonteerde meetklokken. De hellingmeter E op het balkje D en de hellingmeter G dienen voor de meting van de kanteling van den vleugel en voor de bepaling van de asymmetrische vervorming.

uitgevoerd, doordat in het midden bovenop de liggers een 2de hellingmeter geplaatst was.

Op figuur 13, die een indruk geeft van de opstelling der diverse instrumenten, kunnen verder enkele meetklokken worden opgemerkt, die de meting van rekken in de liggergordingen ten doel hadden.

c. De belastingsproeven.

Bij de uiteenzetting der berekeningsmethode is gewezen op het voordeel van een splitsing der belasting in een „zuiver buigend” deel en een „zuiver wringend” deel (lit. 4, punt 6a); voor beide deelen wordt de berekening afzonderlijk doorgevoerd.

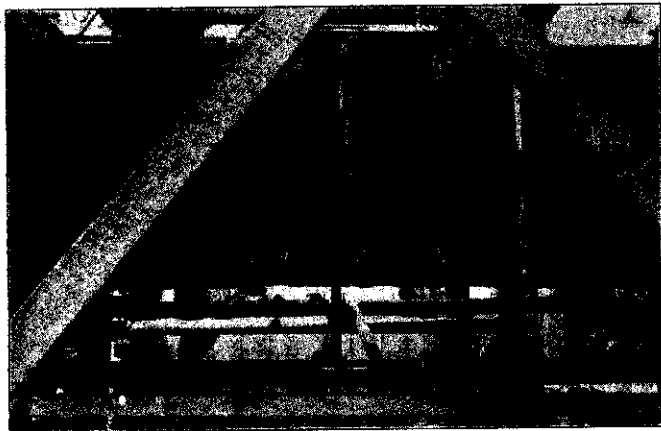


Fig. 13. HN-ABU-vleugel: opstelling van de instrumenten in het midden van den vleugel, gezien van de voorzijde. No. 5 en 6: doorbuigingsmeters, No. 8 en 9: hellingmeters, No. 3: rekmeter.

geheelen vleugel 2350 kg; langs den vleugel was zij constant per oppervlakte-eenheid. Het belastingsveelvoud (n) werd telkens met de helft der eenheidsbelasting opgevoerd tot de maximale belasting, de ontlasting ging met dezelfde tusschenstappen. De maximale belasting lag bij de proeven A op het 3-voud en bij de proeven B op het $1\frac{1}{2}$ -voud der eenheidsbelasting. Zij werd niet hoger opgevoerd wegens kans op breuk in de verbinding van de liggerstompen aan de verlengstukken der liggers. In geval A was het hoogst belaste punt de voorliggergording in het midden, de berekende hoogste spanning bedroeg hier 40 % der breukspanning; in geval B lag dit in den verticalen wand van den achterligger naast het ophangpunt, waar de berekende maximale schuifspanning de helft der breukspanning bedroeg.

De proeven verliepen zonder dat eenige beschadiging van den vleugel is opgetreden. In de bekleding werden aan de vrije bovenzijde van den vleugel onregelmatige en weinig diepe dwarsplooiën bij proef A en de onder 45° verloopende torsieplooiën bij proef B waargenomen, die na ontlasting weer verdwenen. Ook de zichtbare ribben bij de ophangpunten waren zwaar geplooid.

d. De uitkomsten van de metingen.

Na eliminatie van de verplaatsingen der meetpunten ten gevolge van vervormingen in het ophanggestel en in den ondergrond, en ten gevolge van de anti-symmetrische vervorming door ongelijkmatige zakking der ophangpunten, zijn de doorbuigingen gevonden ten opzichte van het vlak door de ophangpunten. Worden deze doorbuigingen als ordinaten uitgezet op de belasting als abscis, dan blijkt, dat in het gebied, dat bij de proef bestreken is, vervormingen en belastingen met elkaar evenredig zijn. Een geringe mate van hysteresis valt waar te nemen. De blijvende vervorming blijkt voornamelijk te zijn opgetreden ten gevolge van den langen duur der proef, wat wel volgt uit het feit, dat een zetting van ongeveer de helft der totale blijvende vervorming ontstond toen de vleugel gedurende $1\frac{1}{2}$ uur met rust gelaten werd bij een belastingsveelvoud $2\frac{1}{2}$ in proef A en bij een belastingsveelvoud 1 in proef B. Over proef B kan in dit verband nog worden opgemerkt, dat de invloed van den tijd hier zoodanig is, dat bij langeren duur der belasting de werking van het

Voor de toetsing van de berekening voor ieder dezer gevallen kunnen dan ook het best proeven gebruikt worden, waarin de zuiver buigende en de zuiver wringende belasting gescheiden zijn gehouden. De proef bij zuiver buigende belasting is gemakkelijk te verwezenlijken; zij gaf een drukpunt der belasting op ongeveer 31,5 % (proef A). De proef met een zuiver wringende belasting is niet zonder speciale inrichting voor het uitoefenen der belastende koppels uit te voeren. Daarom is in de plaats van deze proef een andere genomen, die een compromis geeft tusschen den eisch, dat een zoo groot mogelijk wringkoppel wordt uitgeoefend, en de voorwaarde, dat de belasting met ballast op den vleugel kon worden aangebracht (proef B). Het drukpunt der belasting is hierbij op ongeveer 75 % aangenomen. De belasting werd gelegd op het deel van de ribben achter den achterligger, zij was niet zoo ver naar achteren gebracht, dat kans op afbreken der ribben bestond.

De eenheidsbelasting was gerekend voor den

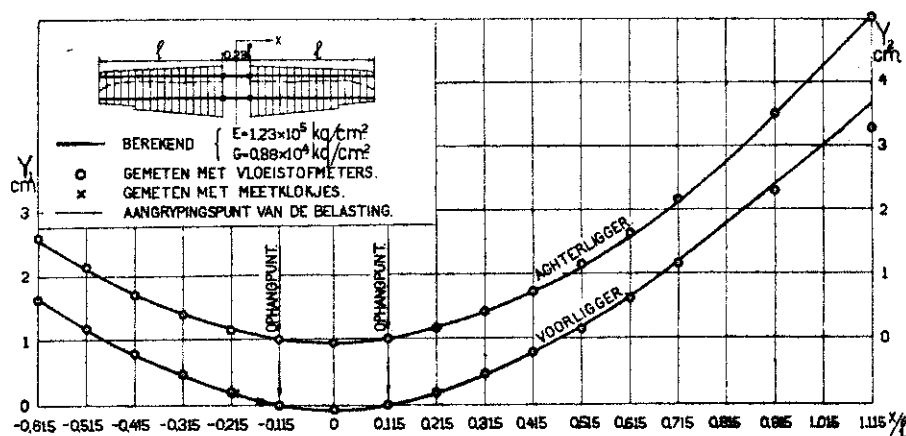


Fig. 14. HN-ABU-vleugel: de berekende elastische lijnen en gemeten doorbuigingen per eenheid van belasting in proef A, waarbij het drukpunt op 31,5 % der koorde lag, en het belastingsveelvoud n maximaal 3 bedroeg. In de berekening is aangenomen $E/G = 14$.

ribverband en van de bekleding afneemt. De doorbuigingen van den voorligger verminderden namelijk, terwijl die van den achterligger toenamen. Deze waarneming schijnt er op te wijzen, dat de bij de proef gevonden waarde van $\frac{E}{G}$ groter zal zijn, dan die welke bij werkelijke vleugelbelasting zal optreden, daar overbelastingen slechts gedurende korten tijd aanwezig zijn.

Uit de graphiek, die voor ieder punt het verband geeft tusschen doorbuiging (Y) en het belastingsveelvoud (n), is ten slotte de waarde van $\frac{dY}{dn}$ gevonden. In tabel I worden de gemiddelde doorbuigingen voor enkelvoudige belasting gegeven:

$$Y = \frac{dY}{dn}.$$

Tevens werden de berekende doorbuigingen vermeld.

In de berekening is aangenomen, dat de elasticiteitsmoduli van de liggers en van de onderbekleding gelijk zijn: $E = E_0$; verder is aangenomen, dat $\frac{E_b}{E_0}$ lineair met x verandert van de waarde 0,25 bij het ophangpunt tot de waarde 1,0 bij den tip (x = afstand van af het symmetrievlak van den vleugel). Volgens zijn voor E en voor $\frac{E}{G}$ zoodanige getallen ingevoerd, dat de overeenstemming van berekening en experiment zoo goed mogelijk werd. De gemeten en berekende doorbuigingen zijn uitgezet in de figuren 14 en 15.

Bij het belastingstype A heeft de grootte van $\frac{E}{G}$ weinig invloed omdat beide liggers vrijwel evenveel doorbuigen. Zij is in de berekening op 14 aangenomen. Aan deze proef is niet te controleren of deze aanname juist is. Daarentegen wel bij proef B, waar de grootte van G van grooten invloed is op de verhouding der

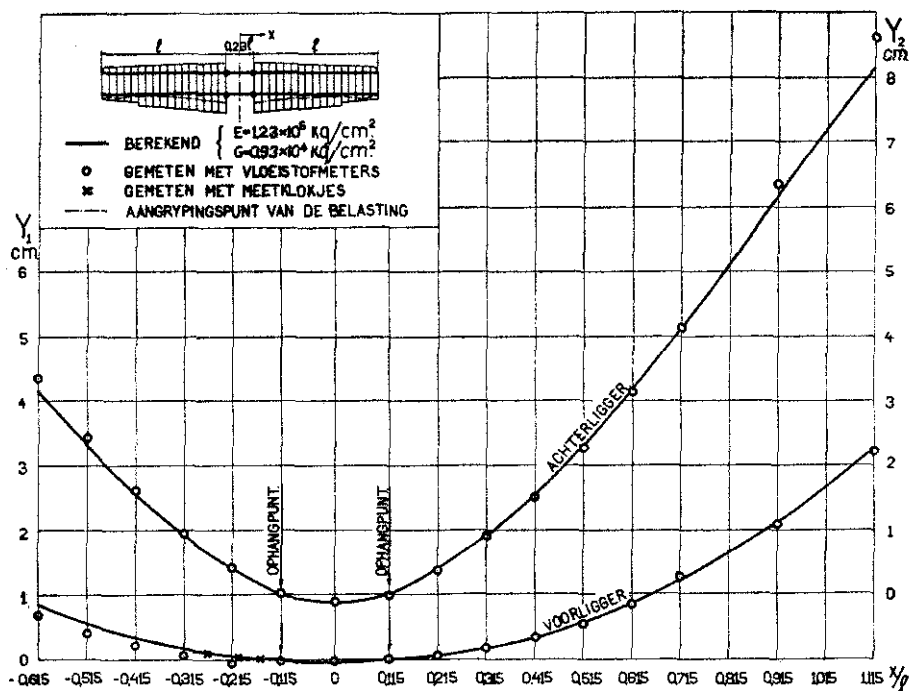


Fig. 15. HN-ABU-vleugel: berekende elastische lijnen en gemeten doorbuigingen per eenheid van belasting in proef B, waarbij het drukpunt op 75 % der koorde lag, en het belastingsveelvoud n maximaal 1,5 bedroeg. In de berekening is aangenomen $E/G = 13,2$.

doorbuigingen van voor- en achterligger. De waarde van $\frac{E}{G}$, die hier het beste resultaat geeft, bedraagt 13,2, wat dus in goede overeenstemming is met het uit de in punt 2 beschreven proeven afgeleide getal.

De overeenstemming, wat betreft de proeven A, laat alleen te wenschen over in de punten van den voorligger $x = 0,915$ l en $x = 1,115$ l (l = de afstand van ophangpunt tot vleugeltip). De metingen wijzen op een buigpunt in de elastische lijn ongeveer bij $x = 0,8$ l. Dit resultaat moet zeer onwaarschijnlijk worden geacht, zoodat de metingen hier blijkbaar niet betrouwbaar waren.

De overeenstemming bij de proeven B ontbreekt bij den voorligger alleen in de punten buiten de ophanging aan de zijde van den afgebroken vleugeltip. De afwijking wijst op een constant verschil in alle meetpunten tusschen meting en berekening. Deze afwijking kon niet worden verklaard. Het is duidelijk, dat de elastische lijn onmogelijk de meetpunten kan volgen, daar dan ter weerszijden van het ophangpunt een buigpunt aanwezig zou moeten zijn. Om het verschil nader te bestudeeren zijn de proeven herhaald, nadat de vloeistofmeters waren gecontroleerd en bovendien een inrichting was aangebracht, waarbij de doorbuigingen van den voorligger buiten het ophangpunt ook op andere wijze werden gemeten. Tot dat doel was aan het raamwerk (vergelijk punt 3b) een uithouder gemonteerd, die een drietal Zeiss-meetklokken droeg, waarmee de doorbuigingen in de punten $x = 0,155$ l, $0,205$ l en $0,265$ l bepaald werden. De hiermee gevonden doorbuigingen passen weer bij de berekende elastische lijnen, zoodat de met de vloeistofmeters bepaalde doorbuigingen zeker niet betrouwbaar kunnen worden geacht. Afgezien van deze anomalie is er een voortreffelijke overeenstemming tusschen berekening en proef.

Bij vergelijking van de doorbuigingen der bakboord- en der stuurboordzijde van den achterligger wordt alleen een afwijking gevonden bij de meetpunten $x = -0,615$ l en $x = -0,515$ l. De hier gemeten grotere doorbuiging kan beteekenen, dat het bij rib 10 aangebrachte buigend moment groter was dan dat, wat er uitgeoefend behoorde te worden; m.a.w., dat de waarde van $\frac{E}{G}$, waaruit dit eerste moment berekend is, te groot is gekozen. Het verschijnsel kan ook beteekenen, dat de aangebrachte belasting

buiten rib 10 niet onmiddellijk binnen rib 10 de verwachte spanningsverdeling gaf, omdat de verdeling der krachten niet door rib 10 zonder belangrijke vervormingen kan tot stand worden gebracht.

De eerste verklaring lijkt niet erg aannemelijk, wegens de goede overeenstemming der elastische lijnen, die elders gevonden wordt. Meer waarschijnlijk lijkt de andere verklaring, waarbij de afwijking haar plaatselijk karakter behoudt. Zekerheid daarover zou een proef kunnen geven, waarbij rib 10 tegen afschuiving zou zijn verstijfd; zulk een proef is echter niet uitgevoerd.

Bij de verder van rib 10 gelegen punten zijn de doorbuigingen practisch gelijk aan die van de bakboordzijde, zoodat hier de symmetrische vervorming verwezenlijkt schijnt te zijn. De aan de bakboordzijde van den vleugel gevonden doorbuigingen kunnen dan ook beschouwd worden als te gelden voor den symmetrischen vervormingstoestand van den complete vleugel.

Uit deze proeven mag geconcludeerd worden:

1. De berekeningsmethode voor vleugels met ribverband, gegeven in lit. 2, 3, wordt bevestigd door de metingen;
2. De waarde, die voor $\frac{E}{G}$ moet worden aangenomen, bedraagt 13 tot 14;
3. De in beide proeven gevonden waarde voor E , $1,23 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, wijst er op, dat de berekende en de werkelijke spanningen goed met elkaar zullen overeenstemmen.

4. De proeven op den vleugel van het vliegtuig PH-AIL (type FK 43).

a. De opstelling van den vleugel.

Deze vleugel is kleiner dan de vorige vleugels, omdat het totaalgewicht van het vliegtuig slechts 1050 kg bedraagt. Zijn hoofdafmetingen worden gegeven in figuur 16. Hoewel de constructie geheel met die van een F III-vleugel overeenstemt, is er typisch verschil ten gevolge van de verschillende ophanging van den romp.

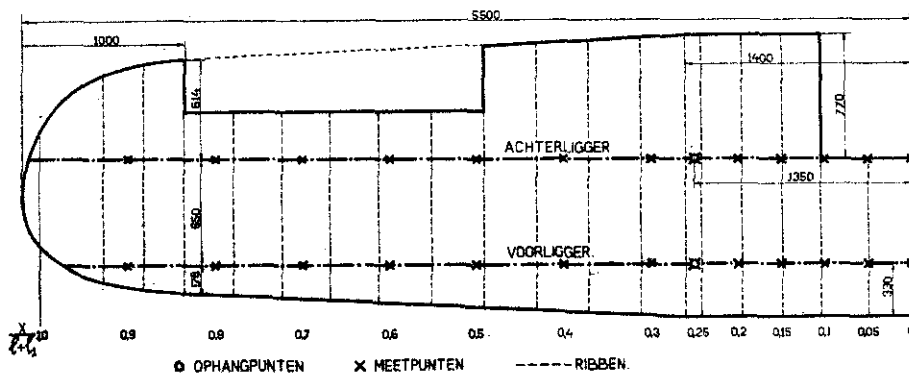


Fig. 16. PH-AIL-vleugel (type FK 43). In de punten $\frac{x}{1+l_1} = 0$ tot $0,15$ waren de vloeistofmeters voor 4-voudige vergrooting. De vloeistofmeters in $\frac{x}{1+l_1} = 0,2$ tot $0,9$ gaven 2-voudige vergrooting der doorbuigingen.

krachten uit, die ontbonden kunnen worden in een verticale en een horizontale componenten, die deze ver ligt beneden den kniklast van den ligger tusschen de ophangpunten, de werking van het ribverband practisch niet. Daarom is bij de proef en de berekeningen niet op deze omstandigheid ingegaan en wordt alleen de verticale componenten in aanmerking genomen, d.w.z. de vleugel is bij de proef omgekeerd gehangen aan zijn 4 ophangpunten.

Er is dan dit verschilpunt met den F III-vleugel, dat de ophangpunten hier zich bevinden op $0,25 (1+l_1)$ buiten het midden en bij den F III op $0,10 (1+l_1)$. ($1+l_1$ = de afstand van het vleugelmidden tot den tip).

De vleugel was aan stuurboordzijde buiten de ophangpunten totaal vernield. Er was daarom een bijzondere ophanginrichting noodig, om te verwezenlijken, dat de bakboordhelft zich juist zoo vervormde, alsof zij deel uitmaakte van een complete vleugel (symmetrisch). In figuur 18 is deze inrichting schematisch weergegeven. Ook moeten de beide liggers in het midden van den vleugel voorzien zijn van een paar extra beslagen C en D.

Bij dit systeem is er naar gestreefd den vleugel zoodanig op te hangen, dat ten gevolge van de vervormingen van het ophanggestel en van den ondergrond de vleugel in zijn geheel verplaatst, zonder dat daarbij vervormingen van den vleugel worden veroorzaakt. Bij de vorige proeven traden dergelijke vervormingen wel op, omdat de vleugels aan 4 punten waren opgehangen; deze extra-vervormingen moesten dus afzonderlijk worden gemeten en geëlimineerd om de symmetrische vervormingen bij symmetrische belasting te vinden. In het hier beschouwde geval worden de extra-vervormingen vermeden.

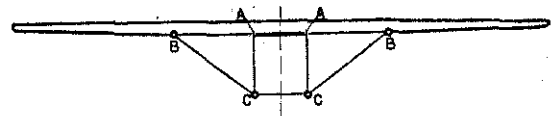


Fig. 17. PH-AIL: ophanging van den romp aan den vleugel door middel van stijlen BC. De pennen A op den romp geven bij doorbuiging van den vleugel aan dezen geleiding in verticale richting.

doordat de vleugel „statisch bepaald” is opgehangen in de 3 punten G, H, K. Bij een zekere belasting op den vleugel en op de schaal L zijn de reacties in GE, HF, en KB' ondubbelzinnig bepaald. Uit het verdere hefboomsysteem blijkt dan, dat ook de verticale reacties in de beslagen A, B, C en D ondubbelzinnig bepaald zijn, zoodat bij een gegeven instelling van E en F en bij een gegeven belasting op vleugel en schaal de reacties in de punten A, A', B, B', C en D bekend zijn.

De instellingen van E en F en de grootte van het gewicht op de schaal L moeten nu voldoen aan den symmetrie-eisch, waarop in het voorgaande reeds is gezinspeeld.

In de symmetriedoorsnede van den volledige vleugel zullen bij symmetrische belasting de dwarskracht en het torsiemoment gelijk nul zijn. De eenige mogelijke belasting is een buigend moment, dat verdeeld is over de beide liggers en de bekleding, en waarvan de grootte uit louter evenwichtsbetrekkingen volgt. Bij de proef werd nu dezelfde toestand op de volgende wijze verkregen. Door de bekleding in de middendoorsnede een verstijvingsrand te geven, is er voor gezorgd, dat de

eisch: $u_0 = u_0 = 0$ benaderd wordt. De verstijvingsranden dragen het moment in de bekleding over op de beide liggers; de verdeling van het buigend moment in de symmetriedoorsnede bekend veronderstellende, kan dus worden berekend welk moment aan de stuurboordzijde van C en D moet worden ingeleid. Door een passenden last op de schaal L te plaatsen wordt het verlangde moment in C geleverd. Als E en F zoo zijn ingesteld, dat de reacties in A en B de juiste waarden hebben, volgt uit de belasting op den vleugel en genoemde reacties het juiste buigend moment in de vleugeldoorsnede door C en D. De verankering in K, tezamen met de belasting op de schaal, zorgen voor het noodige reactiemoment. Omdat de schaallast reeds het gewenschte moment bij C geeft, geeft K het juiste moment in den achterligger bij D. Door een passende keuze van den schaallast wordt op deze wijze de bij symmetrische vervorming behorende verdeling der buigende momenten verwezenlijkt.

Bij een gegeven instelling van E en F volgen uit het evenwicht van den vleugel de reacties, die door het ophangstelsel in C en D worden uitgeoefend. De instelling van E en F wordt nu zoodanig gekozen, dat de opwaartsche reacties in C en D gelijk zijn aan de neerwaartsche belastingen resp. in A' en B'. Hiermede wordt dus bereikt, dat de dwarskracht in de liggers aan bakboordzijde van C en D nul is.

Dat bij deze instelling van E en F de in A en B uitgeoefende reacties inderdaad de juiste waarden hebben, blijkt indien het momentenevenwicht wordt beschouwd van de op den vleugel werkende krachten, resp. ten opzichte van achterligger en voorligger.

De verdeling van het buigend moment over de symmetriedoorsnede moest bij deze proef dus van te voren bekend zijn. Zij werd ontleend aan de berekening die van dezen vleugel gemaakt is. Slechts één verdeling kan juist, d.w.z. in overeenstemming met de symmetrie-eischen zijn, en bij deze verdeling alleen wordt voldaan aan den nog niet genoemden symmetrie-eisch, die aan de vervormingen gesteld is, dat nl. de raaklijnen aan de elastische lijnen der liggers in C en D evenwijdig zijn. Een onjuistheid der momentenverdeling komt dan tot uiting, doordat de hellingen der raaklijnen ongelijk zijn.

b. De meetinrichting.

De doorbuigingen werden in de op fig. 16 aangegeven punten gemeten met de in punt 3b beschreven vloeistofmeters. Hiermede werd dus het verloop der doorbuigingen langs de beide liggers gemeten. Onafhankelijk daarvan werd de

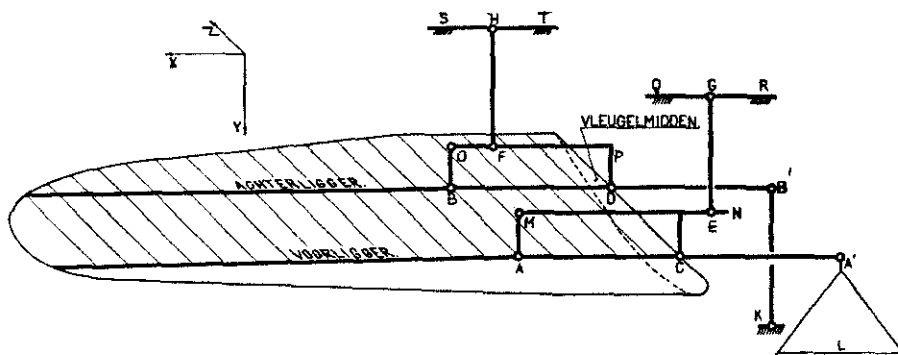


Fig. 18. Ophanging van den halven PH-AIL-vleugel bij de belastingsproeven. De punten A, A', B, B', C, D, E, F, G, H en K zijn uitgevoerd als scharnieren, die draaiing om de z-as toelaten. De punten E, F, G en H zijn in de x-richting verstelbaar. Aan de punten G, H en K is het geheel opgehangen. Door bepaalde instelling van E en F (G en H) en door juiste keuze van de belasting op de schaal in L, in verband met de vleugelbelasting, wordt bereikt, dat de halve vleugel vervormt alsof hij deel uitmaakte van een complete vleugel.

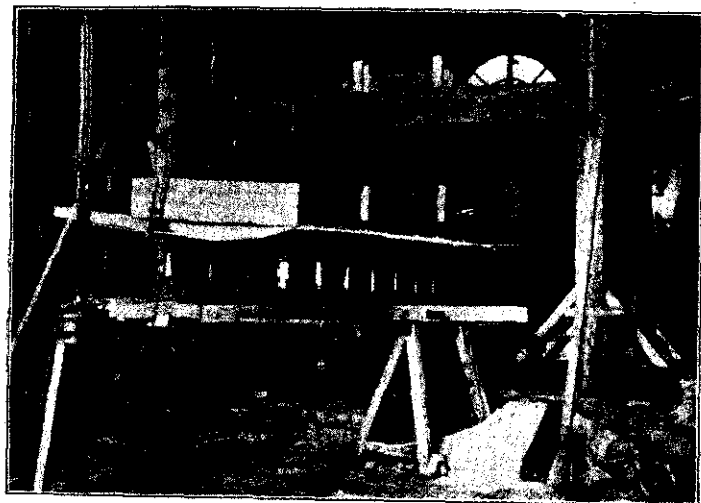


Fig. 19. PH-AIL-vleugel bij de ophanging voor proef B. Opgemerkt kunnen worden de onderdeelen van het mechanisme voor de ophanging, voor zoover boven den vleugel gelegen; verder de busjes en de slangen der vloeistofmeters en ook de kathetometer. Het rechthoekige bord bij den vleugeltip is voorzien van de punten, die door de kathetometer worden waargenomen.

doorbuiging nog gemeten in de punten $x = 0,9 (1 + l_1)$ met een kathetometer (zie fig. 19), ter controle van de vloeistofmeters.

In het midden van den vleugel was onder iederen ligger een hellingmeter geplaatst op een balkje, dat in twee punten ($x = 0$ en $x = 0,06 (1 + l_1)$) aan den ligger was opgehangen. De hellingmeters waren dezelfde als beschreven in punt 3b. Na correctie van de gemeten helling met het bedrag, dat veroorzaakt wordt door de liggervormingen tusschen de punten $x = 0$ en $x = 0,06 (1 + l_1)$, volgen de hellingen van de raaklijnen in het midden van den vleugel. Met deze beide gegevens zijn dus de eventuele asymmetrie en de draaiing van het symmetrievlak van den vleugel bekend.

c. De belastingsproeven.

Om dezelfde reden als in punt 3c uiteengezet, werden ook hier 2 series belastingsproeven uitgevoerd: A bij belastingen, die „zuivere buiging” gaven; B bij belastingen, die veel torsie gaven. Bij de eerstgenoemde proeven lag het drukpunt der belasting op ongeveer 33 % van de koorde; en bij de proevenserie B lag het op 63 %. Als eenheidsbelasting voor den geheelen vleugel is gerekend met 1000 kg (dus, omdat het eigen gewicht 140 kg bedraagt, is de eenheidslast 1,10 maal de normale belasting). De belasting werd langs den vleugel zoo verdeeld, dat zij per oppervlakte-eenheid constant was. Telkens met de helft der eenheidsbelasting werd zij opgevoerd tot de maximale belasting, de ontlasting had plaats met dezelfde tusschenstappen. De maximale belasting lag bij beide proevenseries op het 3-voud der eenheidsbelasting. In geval A was het hoogst belaste punt gelegen in den voorligger bij het ophangpunt, waar de berekende spanning 51 % der breukspanning bedroeg. Bij verdeling B bedroeg de hoogste spanning in den achterligger bij het ophangpunt 53 % der breukspanning. De grootste schuifspanning in de bekleding was hierbij 53 kg/cm².

Ook hier was de bekleding bij de buigproef onder de hoogere belastingen onregelmatig gegolfd. Bij de torsieproef werden weer regelmatige plooiën onder 45° met de liggers waargenomen; zij waren het diepst in het gebied $0,4 < \frac{x}{1 + l_1} < 0,7$. De grootste opgemeten diepte bedroeg hier 8 à 9 mm, de golflengte was omstreeks 17,5 cm. De torsieplooiing kon worden waargenomen tot dicht bij het vleugelmidden. Na ontlasting kon geen merkbare blijvende plooi vorming geconstateerd worden.

d. De uitkomsten van de metingen.

Na het opbrengen van iederen belastingstrap werd gecontroleerd of de tevoren berekende belasting op de schaal L gelijke hellingen gaf in de punten C en D. Wat hieraan nog ontbrak werd gecompenseerd door verandering van de belasting op de schaal. Een verandering van 2 kg gaf een duidelijk afleesbaar hellingenverschil, zoodat bij deze wijze van meting een zeer gevoelige weging verkregen is van de verdeling der buigende momenten over de beide liggers.

De schaalbelastingen zijn in de figuren 20 en 21 uitgezet voor de beide proevenseries als functie van het belastingsveelvoud (tabel II). Voor belastingstype A blijkt de schaalbelasting, en dus het moment in den voorligger ter plaatse $x = 0$, evenredig te zijn met de totale vleugelbelasting. Daar hier het ribverband en de bekleding een ondergeschikte betekenis hebben, was dit resultaat te verwachten. Bij een torsiebelasting daarentegen is de schaallast een maatstaf voor de werking van het ribverband. Bij geval B bestaat dan ook de mogelijkheid, dat door plooiing verminderde stijfheid van de bekleding zich doet gevoelen, doordat bij hoogere belastingen de schaallast minder snel toeneemt dan bij lagere. Uit figuur 21 blijkt, dat dit effect inderdaad aanwezig is: tot 2-voudige belasting neemt de schaallast evenredig met de vleugelbelasting toe; bij de hoogere belastingen kan een afwijking van het lineaire verloop geconstateerd worden.

De berekening geeft dezelfde schaallasten tot 2-voudige belasting, indien $\frac{E}{G}$ aangenomen wordt 14 te zijn; de bij 3-voudige belasting gemeten schaallast wordt door de berekening opgeleverd bij $\frac{E}{G} = 16$. Zooals later nog zal worden besproken kon een dergelijke vrij aanzienlijke verandering in $\frac{E}{G}$ bij verhooging van de belasting van $n = 2$ tot $n = 3$ niet afgeleid worden uit de doorbuigingsmetingen.

Uit de gemeten doorbuigingen werden, onder gebruikmaking van de gemeten helling van de liggers

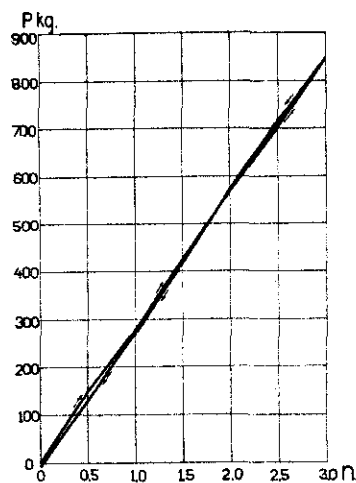


Fig. 20. PH-AIL-vleugel: de belasting P op de schaal L bij proef A als functie van het belastingsveelvoud n.

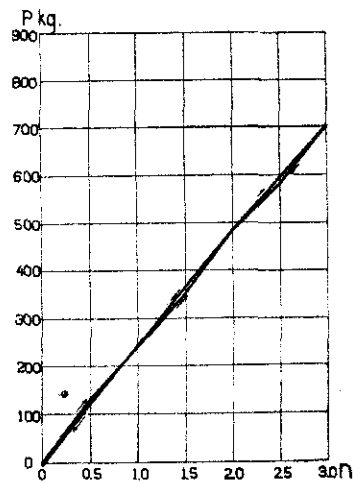


Fig. 21. PH-AIL-vleugel: de belasting P op de schaal L bij proef B als functie van het belastingsveelvoud n.

in $x = 0$, de doorbuigingen bepaald t.o.v. het vlak door de raaklijnen aan de elastische lijnen in $x = 0$. Deze doorbuigingen, uitgezet als functie van het belastingsveelvoud, geven diagrammen, die op een geringe mate van hysteresis wijzen. In geval B is bij den achterligger de blijvende vervorming groter dan bij den voorligger. Dit verschil kan verklaard worden uit de omstandigheid, dat de spanning in den achterligger hoger was, en ook uit de afnemende werking van het ribverband.

Dat het verschijnsel der blijvende vervorming in hoofdzaak zijn oorzaak vindt in den langen duur der belasting, blijkt wel uit de omstandigheid, dat, toen de belasting $n = 2\frac{1}{2}$ gedurende $1\frac{1}{2}$ uur onveranderd gelaten werd en de doorbuigingen gemeten werden aan het begin en het eind van deze periode, een merkbare zetting kon worden geconstateerd. Hetzelfde verschijnsel deed zich voor bij $n = 3$, toen het tijdsverschil der waarnemingen $\frac{3}{4}$ uur bedroeg.

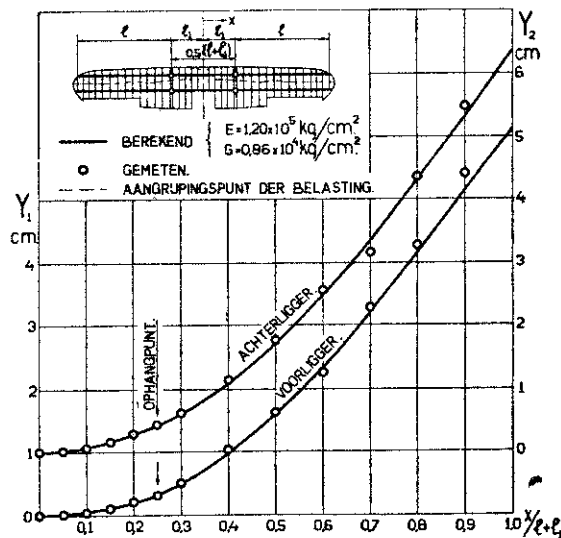


Fig. 22. PH-AIL-vleugel: berekende elastische lijnen en gemeten doorbuigingen per eenheid van belasting in proef A, waarbij het drukpunt op 33% der koorde lag, en het belastingsveelvoud maximaal 3 bedroeg. In de berekening is aangenomen $E/G = 14$.

geringe afwijking van het lineair verloop, die de meetpunten van den achterligger in geval B betrof. Boven $n = 2$ werd $\frac{dY}{dn}$ hier eenigszins grooter.

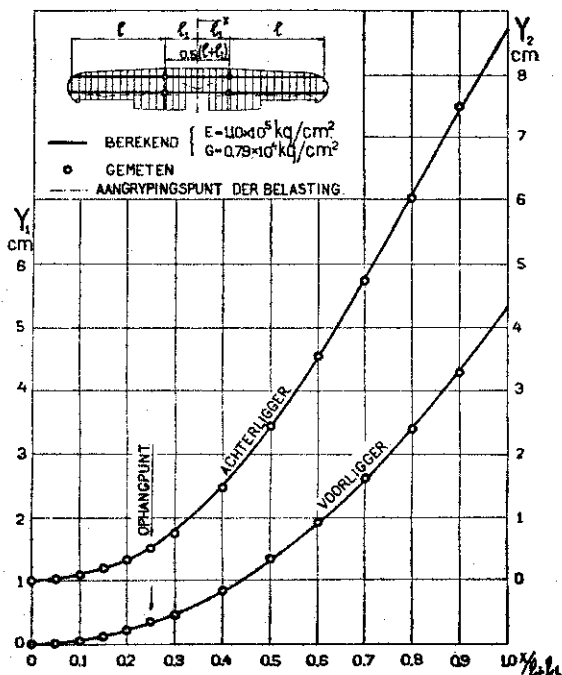
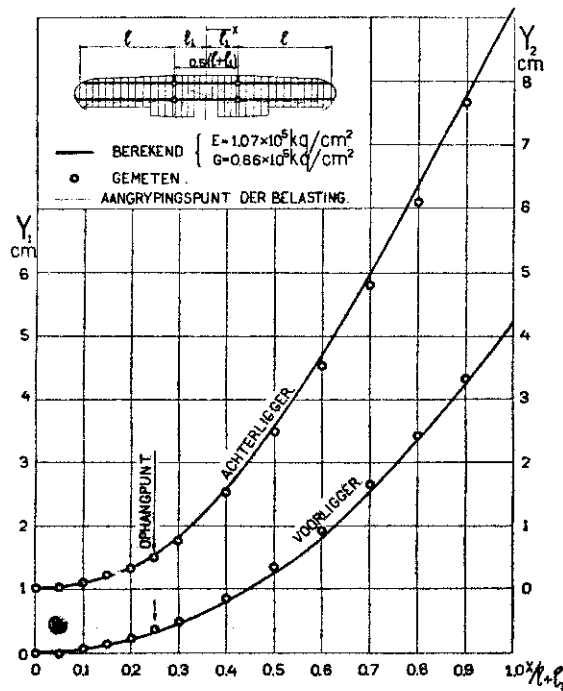


Fig. 23, 24. PH-AIL-vleugel: berekende elastische lijnen en gemeten doorbuigingen per eenheid van belasting in proef B, waarbij het drukpunt op 63% der koorde lag, en het belastingsveelvoud maximaal 3 bedroeg. In de berekening van figuur 23 is aangenomen $E/G = 14$; de meetpunten geven aan de gemiddelde verandering der doorbuiging bij toename van de belasting met de eenheidsbelasting. In de berekening van fig. 24 is aangenomen $E/G = 16$; de meetpunten geven aan $\frac{1}{3}$ deel der doorbuiging bij het belastingsveelvoud $n = 3$.

Ook de afwijking van het lineaire verloop in de belasting op de schaal zal waarschijnlijk aan den invloed van den duur der proef moeten worden toegeschreven; immers veranderden, indien de belasting ongewijzigd werd gelaten, langzamerhand de hellingen van voor- en achterligger in dezen zin, dat weer gelijke hellingen konden worden verkregen door de belasting op de schaal te verminderen; m.a.w. de werking van het ribverband nam af. Deze proef geeft daarom evenals die van punt 3 eenige aanwijzing, dat bij overbelastingen van korten duur wellicht op kleinere waarden van $\frac{E}{G}$ zal mogen worden gerekend, dan die bij de proef gevonden zijn.

Voor ieder meetpunt bleek $\frac{dY}{dn}$ praktisch constant te zijn, zoodat — afgezien van de toename der vervormingen bij langeren duur der belastingsphase ($n = 2\frac{1}{2}$ en $n = 3$) de vervormingen evenredig bleken te zijn met de belastingen. Gepaard aan de reeds besproken afwijking in den schaallast bij $n > 2$ ging evenwel bij de meting van de doorbuigingen een zeer



In tabel III worden voor de beide belastingsgevallen de gemiddelde doorbuigingen voor enkelvoudige belasting gegeven, alsmede de berekende doorbuigingen voor $\frac{E}{G} = 14$ en voor een zoodanige waarde van den elasticiteitsmodulus, dat de overeenstemming van berekening en experiment zoo goed mogelijk werd. Bovendien is de doorbuiging voor geval B nog berekend met $\frac{E}{G} = 16$. Ten opzichte van de in de berekening gemaakte aannamen over E_o en E_b geldt hier weer hetzelfde als hetgeen in punt 3d over de berekening van den F III R.R. vleugel werd opgemerkt.

In de figuren 22 en 23 zijn voor de beide belastingsgevallen de gemeten en met $\frac{E}{G} = 14$ berekende doorbuigingen weergegeven, waarbij een zeer bevredigende overeenstemming aanwezig blijkt te zijn, indien voor E resp. $1,2 \times 10^5$ en $1,1 \times 10^5$ kg/cm² wordt aangenomen.

Tot welk resultaat de berekening in geval B leidt bij $\frac{E}{G} = 16$ en $E = 1,07 \times 10^5$ kg/cm² toont fig. 24, waarin tevens de gemeten doorbuigingen bij 3-voudige belasting zijn weergegeven. Hetgeen opvalt is de betrekkelijk geringe verandering der berekende doorbuigingen. Een globale kennis van $\frac{E}{G}$ is dus al voldoende om een quantitatief vrij juist inzicht in den vervormingstoestand te krijgen. Vervolgens moet worden geconstateerd, dat de doorbuigingsmetingen als juiste waarde $\frac{E}{G} = 14$ en niet $\frac{E}{G} = 16$ aangeven, daar de afwijkingen van gemeten en berekende doorbuigingen in figuur 24 voor een kleinere waarde van $\frac{E}{G}$ pleiten.

Tot $n = 2$ kloppen de metingen over de doorbuigingen en de meting van het moment in het midden van den vleugel dus uitstekend met elkaar, uit beide volgt $\frac{E}{G} = 14$. Boven deze belasting vormt de berekening niet meer een volkomen passende schakel tusschen doorbuigingsmeting en momentenmeting. Terwijl het totale beeld van de vervormingen van den vleugel nog meer bij $\frac{E}{G} = 14$ past, is het middenmoment zoo groot alsof $\frac{E}{G} = 16$ bedroeg.

Voor de beoordeeling van deze afwijking geeft figuur 25 belangrijke aanwijzingen. Hierin is opgenomen de momentenlijn voor „zuivere wringing” (vergelijk lit. 4, punt 6a) — dus niet voor geval B, maar voor het verschil tusschen geval B en geval A — met $\frac{E}{G} = 14$ en 16, en eveneens voor den vleugel zonder ribverband ($\frac{E}{G} = \infty$). Hierbij blijkt, dat de momentenlijn voor $\frac{E}{G} = 14$ en voor $\frac{E}{G} = 16$ weinig van elkaar verschillen. Het procentueel grootste verschil treedt op in het punt $x = 0$, waar ook de momentenmeting is uitgevoerd. Indien nu op deze plaats een afwijking van bepaalde grootte is geconstateerd, weet men vervolgens ook, dat op iedere andere plaats de gelijktijdig optredende afwijking van minder beteekenis is. De meting van het moment in het vleugelmidden geeft daarom een zeer scherpe controle op de berekeningsresultaten, en dus ook op de voor $\frac{E}{G}$ aangenomen waarde.

Uit de vergelijking der momentenlijnen voor den vleugel met ribverband met die voor den vleugel zonder ribverband blijkt verder, dat de momenten tengevolge van de werking van het ribverband minstens met 75 % afnemen, en dat het betrekkelijk weinig verschil maakt welke waarde van $\frac{E}{G}$ wordt aangenomen. Het is inderdaad voor het inzicht in de sterkte van den vleugel van weinig belang of, op de plaats waar de mogelijke afwijking het grootst is, het buigend moment afneemt tot 11,8 dan wel tot 13,6 % van het buigend moment, dat bij afwezigheid van ribverband en bekleding zou optreden.

Indien dus bij de hoogste waarde van n eenerzijds de doorbuigingsmetingen op $\frac{E}{G} = 14$ en ander-

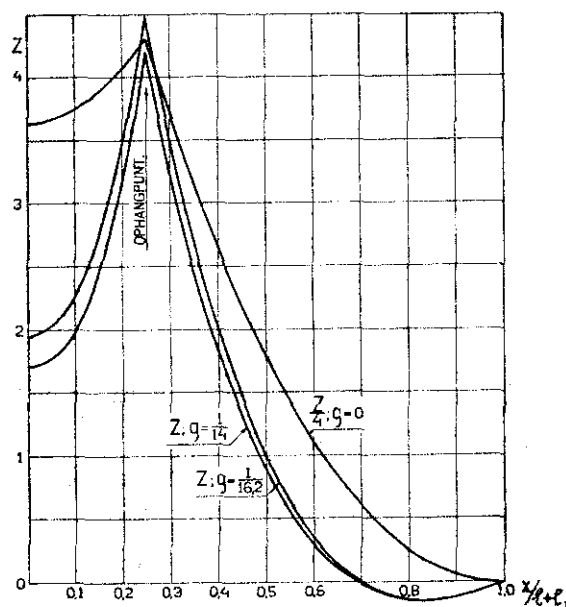


Fig. 25. PH-AIL-vleugel: de buigende momenten in de liggers bij zuiver wringende belasting, berekend voor E/G resp. 14 en 16 en voor den vleugel zonder ribverband. Voor het laatste geval is het buigend moment gedeeld door 4 weergegeven, teneinde de onderlinge vergelijking te vergemakkelijken.

zijds de momentenmeting op $\frac{E}{G} = 16$ wijzen, is dit geen verschil van beteekenis, terwijl het in verband met de onvermijdelijke meetfouten niet noodzakelijk is een conclusie te trekken ten gunste van de eene waarde en ten ongunste van de andere.

De conclusies uit deze proeven kunnen als volgt geformuleerd worden:

- 1°. De in lit. 2,3 gegeven berekeningsmethode wordt door de metingen bevestigd.
- 2°. De waarde die voor $\frac{E}{G}$ moet worden aangenomen bedraagt 14 tot 16.
- 3°. De door vergelijking van gemeten en berekende doorbuiging verkregen waarde van E bij „zuivere buiging”, $1,2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, wijst er op, dat de berekende en de werkelijke spanningen in dit belastingsgeval vrij goed met elkaar zullen overeenstemmen.
- 4°. De door vergelijking van gemeten en berekende doorbuiging verkregen waarde van E in het belastingsgeval B, $1,1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, wijst er op, dat de torsieplooiën van de bekleeding het vermogen van de bekleeding om een buigend moment op te nemen verminderen. De spanningen in de liggergordingen, voor zoover afkomstig van het buigend moment in de vleugeldoorsnede, zullen daarom grooter zijn dan de berekende, waarschijnlijk ongeveer 10 %.

5. Samenvatting der verkregen resultaten.

Uit metingen op een drietal houten vleugels met triplexbekleeding, die aan belastingsproeven zijn onderworpen, zoowel bij zuiver buigende als bij tevens wringende belastingen, is het volgende gebleken:

- 1°. De doode gang in de constructie is — indien zij al aanwezig mocht zijn — zoo gering, dat haar aanwezigheid bij de ter beschikking staande meetmethoden niet kon worden geconstateerd (punt 2c, 3d, 4d).
- 2°. De vervormingstoestanden van den vleugel in de omgeving van den breuklast en in de omgeving van den halven breuklast wijken zoo weinig van elkaar af, dat een proef bij halven breuklast voldoende inzicht verschaft over den vervormingstoestand bij den breuklast (punt 2c).
- 3°. Tot den halven breuklast nemen de vervormingen vrijwel lineair toe met de belasting (punt 3d, 4b).
- 4°. Boven den halven breuklast nemen de vervormingen sneller toe met de belasting, op zoodanige wijze, dat deze verandering gekarakteriseerd kan worden door een afname van den elasticiteitsmodulus (E), terwijl het quotient van elasticiteits- en glijdingsmodulus ($\frac{E}{G}$) constant blijft (punt 2c).
- 5°. Bij vergelijking van de uitkomsten van de metingen met de overeenkomstige grootheden, zooals zij opgeleverd worden door de in lit. (2,3) uiteengezette berekeningsmethode, blijkt dat zeer goede overeenstemming wordt gevonden, indien in de berekening over de werking van het ribverband onder wringende belastingen voor $\frac{E}{G}$ waarden worden aangenomen, die varieeren van 13 tot 16 (punt 2c, 3d, 4d).
- 6°. De verandering, die bij variatie van $\frac{E}{G}$ tusschen de grenzen 13 en 16 optreedt in de berekende buigende momenten en vervormingen, bleek van geen praktische beteekenis te zijn, zoodat voor een betrouwbare berekening een nauwkeuriger kennis van $\frac{E}{G}$ ontbeerd kan worden. Als meest waarschijnlijke waarde wordt aanbevolen $\frac{E}{G} = 14$ (punt 4d).
- 7°. Ten aanzien van de opname van het de vleugeldoorsnede belastende buigend moment geven de metingen geen voldoende aanwijzing, welk deel ervan door de bekleeding wordt opgenomen. Indien voor de waarde van den gemiddelden elasticiteitsmodulus ongeveer $1,25 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ werd gevonden, waren de veronderstellingen der berekening blijkbaar in goede overeenstemming met de feiten (punt 2c, 3d, 4d).
- 8°. Lagere waarden van E worden gevonden in de buurt van den breuklast, zoodat bij de hoogere belastingen, en de daarmee gepaard gaande zwaardere plooiingen, de bekleeding waarschijnlijk minder buigend moment opneemt dan in de berekening wordt verondersteld (punt 2c).
- 9°. Lagere waarden van E komen ook voor bij de combinatie van grootere buigende belastingen met groote torsiebelastingen, zoodat bij dit type van belasting de torsieplooiing blijkbaar de stijfheid van de bekleeding tegenover buiging minder doet zijn dan in de berekening volgens lit. (2, 3) wordt verondersteld (punt 4d).
- 10°. Indien bij de berekening der spanningen in de liggers bij de onder 8° en 9° genoemde gevallen de buigingsstijfheid der bekleeding tusschen de liggers tot ongeveer $\frac{1}{3}$ wordt teruggebracht, wordt veilig gerekend.

LITERATUUR.

1. Koning, C. The influence of the ribs and wing covering on the strength of aeroplane wings. Cinquième Congres International de la Navigation Aérienne. La Haye 1930. Tome I, p. 644—649.
2. Koning, C. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R. S. L.-Rapport V 358. Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Deel VI, blz. 139—152.
3. Van der Neut, A. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels II. R. S. L.-Rapport S 67. Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Deel VII, blz. 55—65.
4. Koning, C. en van der Neut, A. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels III. R. S. L.-Rapport S 68. Verslagen en Verhandelingen R. S. L. Deel VII, blz. 67—96.

TABEL 1.

Gemeten en berekende doorbuigingen bij F III R.R.

(fig. 14, 15)

$\frac{x}{l}$	proef A				proef B			
	meting		berekening		meting		berekening	
	Y ₁ cm	Y ₂ cm	Y ₁ cm	Y ₂ cm	Y ₁ cm	Y ₂ cm	Y ₁ cm	Y ₂ cm
— 0,615	1,63	1,59	1,64	1,56	0,69	3,35	0,85	3,15
— 0,515	1,18	1,12	1,17	1,10	0,42	2,44	0,56	2,30
— 0,415	0,79	0,70	0,77	0,72	0,22	1,62	0,34	1,56
— 0,315	0,46	0,40	0,45	0,41	0,08	0,93	0,17	0,93
— 0,265	—	—	—	—	0,095	—	—	—
— 0,215	0,195	0,145	0,192	0,174	— 0,055	0,406	0,061	0,411
— 0,205	0,178	—	—	—	0,040	—	—	—
— 0,155	0,063	—	—	—	0,018	—	—	—
— 0,115	0	0	0	0	— 0,010	0,017	0	0
0	— 0,053	— 0,052	— 0,052	— 0,056	— 0,021	— 0,118	— 0,029	— 0,116
0,115	0	0	0	0	0,010	— 0,017	0	0
0,215	0,202	0,17	0,192	0,174	0,059	0,364	0,061	0,411
0,315	0,46	0,42	0,45	0,41	0,18	0,90	0,17	0,93
0,415	0,80	0,73	0,77	0,72	0,35	1,53	0,34	1,56
0,515	1,18	1,15	1,17	1,10	0,56	2,27	0,56	2,30
0,615	1,63	1,62	1,64	1,56	0,84	3,15	0,85	3,15
0,715	2,15	2,17	2,17	2,11	1,27	4,13	1,21	4,09
0,915	3,29	3,49	3,38	3,47	2,09	6,36	2,13	6,18
1,115	4,26	5,03	4,64	5,04	3,22	8,61	3,24	8,16
E kg/cm ²			1,23 × 10 ⁵				1,23 × 10 ⁵	
G kg/cm ²			0,88 × 10 ⁴				0,93 × 10 ⁴	

TABEL II.
Schaalbelasting bij de proef op
F K 43.
(fig. 20, 21)

n	proef A P kg	proef B P kg
0	0	0
1/2	147,5	130
1	277,5	241,5
1 1/2	422,5	351
2	564	483
2 1/2	697,5	579
3	842,5	700
2 1/2	710	592
2	569	482,5
1 1/2	417,5	—
1	272,5	245
1/2	130	—
0	—6	—6

TABEL III.
Gemeten en berekende doorbuigingen bij F K 43.
(fig. 22, 23, 24)

$\frac{x}{l}$	proef A				proef B					
	meting		berekening		meting		berekening			
	Y ₁ cm	Y ₂ cm	Y ₁ cm	Y ₂ cm	Y ₁ cm	Y ₂ cm	Y ₁ cm	Y ₂ cm	Y ₁ cm	Y ₂ cm
0	0,010	0,008	0	0	0	0,006	0	0	0	0
0,05	0,012	0,018	0,012	0,018	—0,012	0,021	0,013	0,022	0,012	0,023
0,10	0,038	0,073	0,048	0,070	0,051	0,082	0,054	0,084	0,052	0,089
0,15	0,106	0,151	0,108	0,154	0,128	0,196	0,119	0,178	0,116	0,198
0,20	0,204	0,276	0,194	0,265	0,216	0,313	0,210	0,322	0,204	0,341
0,25	0,32	0,42	0,31	0,41	0,35	0,48	0,33	0,50	0,32	0,53
0,30	0,52	0,62	0,50	0,60	0,47	0,74	0,46	0,79	0,44	0,84
0,40	1,03	1,16	0,99	1,10	0,84	1,49	0,83	1,52	0,80	1,60
0,50	1,62	1,78	1,61	1,73	1,33	2,44	1,30	2,44	1,26	2,57
0,60	2,27	2,56	2,34	2,48	1,92	3,56	1,88	3,52	1,84	3,70
0,70	3,28	3,17	3,19	3,37	2,63	4,74	2,60	4,76	2,54	4,99
0,80	4,28	4,35	4,14	4,33	3,40	6,02	3,41	6,06	3,35	6,37
0,90	5,40	5,50	5,14	5,35	4,30	7,49	4,33	7,41	4,25	7,79
1,00	—	—	6,14	6,38	—	—	5,31	8,72	5,23	9,16
E kg/cm ²			1,20 × 10 ⁵				1,10 × 10 ⁵		1,07 × 10 ⁵	
G kg/cm ²			0,86 × 10 ⁴				0,79 × 10 ⁴		0,66 × 10 ⁴	

RAPPORT A 367.

Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

De kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan
een kabel gesleept wordt.

door

Ir. C. KONING en T. P. DE HAAS.

RAPPORT A. 367.

De kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig gesleept wordt.

Uittreksel.

a. Inleiding (punt 1).

Bij het gebruik van de gesleepte statische buis werden moeilijkheden ondervonden tengevolge van onstabiele slingeringen. Beschouwingen over de stabiliteit leidden tot het invoeren van het begrip „kritische snelheid”.

b. Bewegingsvergelijkingen (punt 2, 3).

Door vereenvoudigende aannamen werd het aantal vrijheidsgraden tot twee teruggebracht. (18, 19) zijn dan de bewegingsvergelijkingen voor kleine slingeringen.

c. Kritische snelheid (punt 4, 5).

Uit energetische beschouwingen volgt, dat het lichaam zeker geen onstabiele slingeringen zal uitvoeren, wanneer voldaan wordt aan de voorwaarde (25). Dit zal zeker het geval zijn, wanneer of (30) of (32) bevredigd wordt. Deze laatste voorwaarde leidt tot de kritische snelheid gegeven door (34, 35, 36). De betekenis van deze is, dat bij vliegsnelheden lager dan de kritische zeker geen onstabiele slingeringen zullen voorkomen.

d. Toepassingen (punt 6, 7).

De uitkomst voor de kritische snelheid geeft aanwijzingen door welke veranderingen van het lichaam deze grens naar boven verschoven kan worden. Toepassing hiervan op de gesleepte statische buis leidde tot bevredigende resultaten. De oorspronkelijke vorm van statische buis (fig. 4: a) voerde bij snelheden boven 180 km/h hinderlijke slingeringen uit. De nieuwe vormen (fig. 4: b, c) waren tot aan de hoogste snelheden, waarbij zij beproefd werden (resp. 450 en 300 km/h) volkomen rustig.

e. Conclusies (punt 8).

De belangrijkste conclusie is, dat het uitgevoerde onderzoek leidde tot een aanzienlijke verbetering van de stabiliteit van de gesleepte statische buis. De gevolgtrekkingen uit de theorie werden door de proeven op bevredigende wijze bevestigd.

f. Notaties.

Voor de notaties kan verwezen worden naar het overzicht aan het einde van het rapport.

RAPPORT A. 367.

La vitesse critique d'un corps remorqué par un avion.

Résumé.

a. Introduction (article 1).

En utilisant un tube statique remorqué on a rencontré des difficultés, causées par des oscillations instables. Une discussion de la stabilité conduisait à l'introduction de la notion „vitesse critique” (voir c).

b. Equations du mouvement (articles 2, 3).

Par des simplifications le nombre des degrés de liberté et par conséquent des coordonnées est réduit à deux (ξ et ϑ , voir fig. 1). Les équations du mouvement pour des petites oscillations sont (18, 19).

c. Vitesse critique (articles 4, 5).

On considère l'énergie A (24) fournie par la force extérieure P (22, 23), qui fait osciller le corps avec l'amplitude constante ξ_0 et la fréquence λ . De là on est sûr que des oscillations instables n'existeront pas, si la condition (25) est remplie pour toutes valeurs réelles de λ . De cette condition on peut déduire (30) ou (32). La dernière condition conduit à la vitesse critique, donnée par (34, 35, 36). Cette vitesse critique est la limite supérieure de la région de vitesses de vol, pour lesquelles on est sûr de ne pas rencontrer d'oscillations instables.

d. Applications (articles 6, 7).

Du résultat pour la vitesse critique on peut déduire des conclusions sur les mesures pour élever cette limite. L'application dans le cas du tube statique remorqué donnait des résultats satisfaisants. Avec la forme originale du tube statique (fig. 4: a) des oscillations instables furent observées à des vitesses supérieures à 180 km/h. Par contre les formes nouvelles (fig. 4: b, c) furent complètement tranquilles aux vitesses les plus hautes pendant les essais (respectivement 450 et 300 km/h).

e. *Conclusions (article 8).*

La conclusion la plus importante est que les recherches resultaient en une amélioration importante de la stabilité du tube statique remorqué. Les conclusions, déduites de la théorie, furent affirmées d'une manière satisfaisante par les résultats des essais.

f. *Symboles.*

Les symboles les plus importants sont les suivants:

- g = accélération de la gravité,
- m = masse du corps,
- B = quantité définie par (20),
- I = moment d'inertie autour d'une axe latérale par le centre de gravité,
- T = tension du câble,
- V_o = vitesse de vol,
- V_k = vitesse critique,
- ρ = densité de l'air,
- φ = angle entre la position d'équilibre du câble et l'axe des y (voir fig. 1),
- θ = angle entre la direction du câble en équilibre et en mouvement (voir fig. 1).

Pour les coefficients k_L , k_W , k_M et k_D , respectivement de sustentation (L), de résistance (W), de moment de tangage (M_1) et de moment amortisseur (M_2), voir la liste des symboles („Notaties”) à la fin du rapport.

REPORT A. 367.

The critical velocity of a body towed by an aeroplane.

Summary.

a. *Introduction (point 1).*

In using a static pressure tube towed by an aeroplane difficulties were caused by the occurrence of unstable oscillations. A discussion of the stability led to the introduction of the „critical velocity” (see c).

b. *Equations of motion (point 2, 3).*

By simplifying assumptions the number of the degrees of freedom and hence that of the coordinates is reduced to two (ξ and θ , see fig. 1). Now the equations of motion for small oscillations are given by (18, 19).

c. *Critical velocity (point 4, 5).*

The energy A (24) is considered, which is to be supplied by the external force P (22, 23) to make the body oscillate with constant amplitude ξ_o and frequency λ . From this result it may be derived, that no unstable oscillations will occur, if only the condition (25) is satisfied for all real values of λ . This will certainly be so, if either (30) or (32) is satisfied. The latter condition leads to the critical velocity as it is given by (34, 35, 36). The meaning of this critical velocity is, that at flight velocities below it the existence of unstable oscillations is impossible.

d. *Applications (point 6, 7).*

From the result obtained, conclusions may be drawn on the way in which the critical velocity may be increased. Application of them to the static pressure tube led to satisfactory results. In its original form (fig. 4: a) it showed unstable oscillations at velocities above 180 km/h. On the other hand the new forms (fig. 4: b, c) were completely steady up to the highest velocities at which they were tested (450 and 300 km/h respectively).

e. *Conclusions (point 8).*

The main conclusion is that the investigation led to a considerable improvement in the stability of the towed static pressure tube. The theoretical results were confirmed by the experiments.

f. *Notations.*

The principal notations are:

- g = acceleration of gravity,
- m = mass of the body,
- B = quantity defined by (20),
- I = moment of inertia of the body about a lateral axis through the centre of gravity,
- T = tension of the cable,
- V_o = flight velocity,

V_k = critical velocity,

ρ = mass density of the air,

φ = angle between the direction of the cable (undisturbed motion = position of equilibrium) and axis of y (see fig. 1),

Θ = angle between the directions of the cable in disturbed and undisturbed motion (see fig. 1).

The meaning of the coefficients k_L , k_W , k_M and k_D , respectively for lift (L), resistance (W), pitching moment (M_1) and damping moment (M_2) is indicated in the list of notations („Notaties") at the end of the report.

BERICHT A. 367.

Die kritische Geschwindigkeit eines Körpers, der vom Flugzeug geschleppt wird.

Zusammenfassung.

a. Einführung (Punkt 1).

Die vom Flugzeug geschleppte Drucksonde („statisches Rohr") gab Schwierigkeiten infolge unstabiler Schwingungen. Betrachtung der Stabilität führte zum Begriff „kritische Geschwindigkeit" (siehe c).

b. Bewegungsgleichungen (Punkt 2, 3).

Die Zahl der Freiheitsgrade und damit der Koordinate wird mittels vereinfachender Annahmen auf zwei reduziert (Koordinate ξ und ϑ , siehe Fig. 1). Die Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen sind dann (18, 19).

c. Kritische Geschwindigkeit (Punkt 4, 5).

Die Arbeit A (24) wird betrachtet, die der Körper aufnimmt, wenn er unter Einfluss einer äusseren Kraft P (22, 23) harmonische Schwingungen mit Amplitude ξ_0 und Frequenz λ ausführt. Daraus ergibt sich, dass sicher keine unstabilen Schwingungen auftreten werden, falls Bedingung (25) für alle reellen Werte von λ erfüllt ist. Dies wird gewiss der Fall sein, wenn entweder (30) oder (32) genügt wird. Die letztere Bedingung führt zur kritischen Geschwindigkeit, wie sie durch (34, 35, 36) gegeben ist. Die Bedeutung der kritischen Geschwindigkeit ist die, dass für Fluggeschwindigkeiten, niedriger als die kritische, sicher keine unstabilen Schwingungen auftreten werden.

d. Anwendungen (Punkt 6, 7).

Aus dem Ergebnis für die kritische Geschwindigkeit lässt sich ableiten in welcher Weise diese Grenze erhöht werden kann. Anwendung dieser Folgerungen auf das oben erwähnte statische Rohr führte zu befriedigenden Resultaten. Die älteste Form (Fig. 4: a) zeigte unstabile Schwingungen bei Geschwindigkeiten über 180 km/h. Die neuen Formen (Fig. 4: b, c) dagegen waren bis zu den höchsten Geschwindigkeiten bei den Versuchen (bzw. 450 und 300 km/h) ganz ruhig.

e. Schlussfolgerungen (Punkt 8).

Die wichtigste Folgerung ist die, dass die Untersuchung zu einer erheblichen Verbesserung der Stabilität der geschleppten Drucksonde führte. Die Folgerungen aus der Theorie wurden von den Versuchen in befriedigender Weise bestätigt.

f. Formelzeichen.

Die wichtigsten Formelzeichen sind die folgenden:

g = Schwerebeschleunigung,

m = Masse des Körpers,

B = Hilfsgrösse (siehe (20)),

I = Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Querachse durch den Schwerpunkt,

T = Zugkraft des Kabels,

V_0 = Fluggeschwindigkeit,

V_k = kritische Geschwindigkeit,

ρ = Massendichte der Luft,

φ = Winkel zwischen Kabelrichtung in Gleichgewicht und y -Achse (siehe Fig. 1),

Θ = Winkel zwischen Kabelrichtungen in Gleichgewicht und in Bewegung (siehe Fig. 1).

Für die Definition der Beiwerte k_L , k_W , k_M und k_D , bzw. für Auftrieb (L), Widerstand (W), Längsmoment (M_1) und Dämpfungsmoment (M_2) kann hingewiesen werden auf die Liste der Formelzeichen („Notaties") am Schlusse des Berichtes.

RAPPORT A 367.

Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart. Amsterdam.

De kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan een kabel gesleept wordt.

door

Ir. C. KONING en T. P. DE HAAS.

Overzicht.

Als vereenvoudigd stabiliteits-criterium voor een door een vliegtuig gesleept lichaam wordt de „kritische snelheid” ingevoerd. Formules ter berekening van deze snelheid worden afgeleid. Eenige hieruit volgende conclusies en toepassingen ter verbetering van de stabiliteit van de gesleepte statische buis worden kort besproken.

Indeeling.

1. Inleiding. 2. Aannamen. 3. De bewegingsvergelijkingen voor het gesleepte lichaam. a. Notaties. b. Algemeen. c. De vergelijking voor de beweging van het zwaartepunt. d. De vergelijking voor de beweging om het zwaartepunt. e. De evenwichtsvoorwaarde voor den stationairen toestand. f. De bewegingsvergelijkingen voor kleine slingeren. 4. Energetische beschouwing over de stabiliteit. 5. De „kritische snelheid”. 6. Eenige algemeene gevolgtrekkingen. 7. Toepassing op gesleepte statische buizen. 8. Conclusies. Notaties.

I. Inleiding.

Voor het nauwkeurig meten van de snelheid wordt bij vliegproeven gebruik gemaakt van een gesleepte statische buis. Deze meetinrichting komt in beginsel overeen met de gewone Pitotbuis, de uitvoeringsvorm verschilt echter in zooverre, dat de energiedruk-buis en de statische buis gescheiden zijn. Terwijl de eerste zelfrichtend aan het vliegtuig bevestigd is, wordt de tweede, eveneens zelfrichtend, aan een kabel van ongeveer 20 m lengte onder en achter het vliegtuig gesleept.

In de praktijk kwam het herhaalde malen voor, dat de statische buis verloren ging, doordat haar verbinding met den kabel losraakte of afbrak. Aanvankelijk werd dit toegeschreven aan onvoldoende sterkte van de kabelbevestiging. Echter ook na een zoodanige versterking van deze verbinding, dat hiervoor bij in normaal bedrijf te verwachten belastingen geen vrees behoefde te bestaan, werden statische buizen verloren. Bij een nadere beschouwing van de opgedane ervaring bleek, dat meerdere malen verschijnselen waren opgemerkt, die sterk wezen op het optreden van onstabiele slingeren, welke mogelijk de oorzaak van het hier besproken bezwaar konden zijn. Bij speciaal met dit doel verrichte vliegproeven werden dan ook dergelijke slingeren waargenomen.

Eenige berekeningen werden nu uitgevoerd, waarbij uitgegaan werd van de door Glauert¹⁾ ontwikkelde theorie over de stabiliteit van een door een vliegtuig gesleept lichaam. Volgens de uitkomsten van deze berekeningen zou echter de statische buis in de gebruikte uitvoering en bij de voorgekomen snelheden stabiel moeten zijn. Genoemde theorie, bij de opstelling waarvan hoofdzakelijk gedacht werd aan de stabiliteit van aan een zeer dunnen draad of kabel opgehangen antennegewichten, gaat uit van aannamen, die hierop neerkomen, dat de massa van den kabel verwaarloosd wordt. De vraag was nu of deze aannamen ook hier als geldig beschouwd mogen worden. Deze overweging leidde tot een poging om de massa van den kabel wel in rekening te brengen. Het bleek mogelijk de bewegingsvergelijkingen van het stelsel op te stellen, mits eenige andere, hier toelaatbare, vereenvoudigingen ingevoerd werden. De oplossing van de vergelijkingen en de beoordeeling van de stabiliteit van het stelsel in een gegeven geval leverden echter moeilijkheden op, die tot nu toe slechts ten deele overwonnen konden worden.

Als positief resultaat werd echter bij het onderzoek een beperkt doch eenvoudig stabiliteits-crite-

¹⁾ Glauert. H. The stability of a body towed by a light wire. R & M 1312, Aer. Res. Comm., Vol. II, 1929—'30, p. 1331.

rium gevonden. Dit criterium is in zooverre beperkt, dat het geen antwoord geeft op de vraag of een gegeven stelsel bij een bepaalde snelheid al dan niet stabiel zal zijn. Wel geeft het de „kritische snelheid” als bovengrens van het gebied van snelheden, waarbij zeker geen onstabiele slingeren zullen optreden.

Zoals in het volgende zal blijken, is het voor de behandeling van dit deel van het vraagstuk voldoende de bewegingsvergelijkingen van het gesleepte lichaam te kennen, terwijl die van den kabel buiten beschouwing gelaten kan worden. Dit geldt, zooals in punt 2 nader besproken wordt, voor zoover een enkele uitkomst, die uit de vergelijking voor den kabel afgeleid kan worden, doch overigens vrij vanzelfsprekend aandoet, hier zonder bewijs ingevoerd mag worden.

De verkregen uitkomst geeft de gelegenheid na te gaan welke factoren invloed hebben op de kritische snelheid en door welke wijzigingen deze grens naar boven verschoven kan worden. Proeven met verschillende vormen van statische buizen, die in punt 7 kort besproken zullen worden, bevestigden de langs dezen weg verkregen aanwijzingen.

Hoewel in het bovenstaande hoofdzakelijk gesproken werd over de gesleepte statische buis, zal het duidelijk zijn, dat het volgende ook betrekking heeft op andere gevallen (als: andere gesleepte instrumenten, antenne-gewichten), mits de in punt 2 te bespreken aannamen daarbij als geldig beschouwd mogen worden.

Over het aandeel, dat de beide schrijvers van dit rapport gehad hebben in de uitwerking van het vraagstuk, moge het volgende opgemerkt worden. De theoretische ontwikkeling is afkomstig van eerstgenoemden schrijver. De berekeningen, noodig voor de beoordeeling van den invloed van verschillende factoren en voor het ontwerp van nieuwe vormen van statische buizen werden grootendeels, de vliegproeven voor beoordeeling van deze laatste nagenoeg allen door den tweeden schrijver uitgevoerd. Eenige proeven bij zeer hooge snelheid werden gevlogen door den reserve eerste-luitenant vlieger L. Th. van Hoo te gem.

De bij de proeven gebruikte vliegtuigen waren hiervoor welwillend beschikbaar gesteld door de Luchtvaart-Afdeeling te Soesterberg. Gaarne brengen wij hier dank voor alle ondervonden medewerking.

2. Aannamen.

Beschouwd worden de kleine slingeren om den stationairen bewegingstoestand, die een aan een kabel gesleept lichaam in het door dit lichaam en het vliegtuig gaande verticale vlak uitvoert. Het vliegtuig beweegt zich hierbij met eenparige snelheid in een rechte lijnige horizontale baan.

Het gesleepte lichaam is zoowel symmetrisch ten opzichte van het verticale vlak als ten opzichte van een vlak, dat bij de stationaire beweging horizontaal is. Het is in zijn zwaartepunt aan den kabel bevestigd. De kabel wordt als onrekbaar en volkomen buigzaam beschouwd, zoodat hij alleen een kracht in zijn eigen richting, doch geen moment op het lichaam kan uitoefenen.

De grootte en richting van de resultante van de op het lichaam werkende luchtkrachten zijn alleen afhankelijk van de grootte van de relatieve snelheid van het zwaartepunt ten opzichte van de lucht en van den invalshoek, zijnde de hoek tusschen het boven als tweede genoemde symmetrievlak en de relatieve windrichting. Het moment van de luchtkrachten om de dwarsas door het zwaartepunt daarentegen wordt, behalve door de beide reeds aangegeven grootheden, ook beïnvloed door een hoeksnelheid om genoemde as. Het lichaam wordt verondersteld statisch stabiel te zijn. De liftcoëfficiënt ervan neemt toe bij vergrooting van den invalshoek, bij rotatie om de dwarsas treedt positieve demping op.

Naast deze aannamen van tamelijk algemeenen aard, die geen verdere toelichting verlangen, zijn er echter nog twee, waarvan een nadere bespreking gewenscht is.

Bij de stationaire beweging zal de vorm van den kabel in het algemeen een vlakke kromme zijn. In het volgende wordt nu aangenomen, dat deze kromme vervangen mag worden door een rechte, waarvan de richting dezelfde is als die van de raaklijn aan den kabel ter plaatse van het lichaam. Deze aanname lijkt op het eerste gezicht volkomen willekeurig. Hoewel de wenschelijkheid van een nadere bestudering van dit punt toegegeven moet worden, werd bij de beschouwing van verschillende gevallen de indruk verkregen, dat zij niet al te ver van de werkelijkheid afwijkt.

Een andere eigenschap van het stelsel, die hier in den vorm van een aanname ingevoerd zal worden, is de volgende. Neemt men, den toestand overigens onveranderd latende, het gesleepte lichaam weg, dan kan men den kabel een harmonische slinging laten uitvoeren. Hiertoe is het noodig aan het uiteinde van den kabel een periodische kracht loodrecht op de oorspronkelijke kabelrichting te laten werken. De arbeid, dien deze kracht moet verrichten, zal positief zijn, m.a.w. de kabel zal arbeid moeten opnemen om de beweging in stand te houden. Deze eigenschap kan afgeleid worden uit de hier niet nader te bespreken bewegingsvergelijking van den kabel, welke vergelijking werd opgesteld onder gebruikmaking van de conventionele aanname, dat de op een element van den kabel werkende luchtkracht alleen afhankelijk is van de grootte van de relatieve windsnelheid en van den relatieven invalshoek voor dit element. Het lijkt ook overigens niet onwaarschijnlijk, dat de op den kabel werkende luchtkrachten een dempenden invloed zullen hebben. Er bestaan echter aanwijzingen, dat in bijzondere gevallen een trillende kabel energie uit de lucht kan opnemen. De hier besproken aanname sluit niet in, dat de mogelijkheid van het bestaan van dergelijke gevallen ontkend wordt, doch beteekent alleen, dat deze hier buiten beschouwing gelaten worden.

3. De bewegingsvergelijkingen voor het gesleepte lichaam.

a. Notaties.

De beteekenis van de in het volgende te bezigen notaties zal aangegeven worden ter plaatse waar zij voor het eerst ingevoerd worden. Bovendien zijn zij in een overzicht aan het einde van dit rapport verzameld, zoodat het voldoende is hier alleen op eenige punten van algemeenen aard te wijzen.

Voor de op het lichaam werkende aerodynamische krachten en momenten worden coëfficiënten ingevoerd, die verkregen worden door de beschouwde grootheden door $\frac{1}{2} \rho V^2$ (voor het dempende moment door $\frac{1}{2} \rho V \dot{\vartheta}$) te deelen. Hierbij is dan ρ de massa-dichtheid van de lucht, V de relatieve snelheid van het lichaam ten opzichte van deze, $\dot{\vartheta}$ de hoeksnelheid om de dwarsas door het zwaartepunt. De coëfficiënten zijn dus, in tegenstelling met de gebruikelijke, niet dimensieloos. Zij werden hier echter zoo gekozen, omdat bij toepassingen de afmetingen van het lichaam meestal vaststaan en het dus weinig zin heeft steeds een of andere, meestal weinig zeggende, lengtemaat door alle berekeningen mee te voeren.

Differentiaal-quotienten naar den tijd worden op de gebruikelijke wijze aangegeven door een of meer punten boven de beschouwde grootheid, die naar den invalshoek door een accent.

b. Algemeen.

De in punt 2 besproken aannamen van niet-rekbaarheid en rechtlijnigheid van den kabel leiden tot een vereenvoudiging van het te behandelen vraagstuk. Immers, daar hier alleen bewegingen in het verticale vlak beschouwd zullen worden, heeft het lichaam nu slechts twee vrijheidsgraden en kan zijn beweging dus volledig beschreven worden door gebruik te maken van twee coördinaten. Als zoodanig worden gekozen: de verplaatsing ξ van het zwaartepunt in de richting loodrecht op de oorspronkelijke kabelrichting en de hoek van draaiing ϑ om de dwarsas door het zwaartepunt. Beiden worden gemeten vanaf den stationaire toestand, de richting, waarin zij positief zijn, is in fig. 1 aangegeven.

Als hulpmiddel bij de volgende berekening wordt gebruik gemaakt van een assenstelsel xy (zie fig. 1), waarvan de x -as evenwijdig is aan de vlieg-richting, terwijl de y -as in het verticale vlak ligt. In stationaire toestand maakt de kabelrichting een hoek φ met laatstgenoemde as. Voor de berekening van deze hoek kan verwezen worden naar punt 3e.

Op het lichaam werken nu als uitwendige krachten de trek van den kabel, de zwaartekracht en de luchtkrachten. Voor het bepalen van deze laatsten moeten de grootte van de relatieve snelheid V en de invalshoek α bekend zijn.

De relatieve snelheid is de resultante van de vliegsnelheid V_0 en de snelheid $\dot{\xi}$ van het zwaartepunt van het lichaam tengevolge van de slingering. Zooals uit fig. 2 blijkt zijn haar componenten v_x en v_y , resp. in de richting van de x - en y -as:

$$\begin{aligned} v_x &= V_0 + \dot{\xi} \cos \varphi \\ v_y &= -\dot{\xi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Hieruit volgt, dat de absolute waarde van de relatieve snelheid gegeven is door

$$V^2 = v_x^2 + v_y^2 = V_0^2 + 2 V_0 \dot{\xi} \cos \varphi + \dot{\xi}^2 \quad (1)$$

de hoek, die haar richting maakt met de x -as, door

$$\beta = \text{bg tg} \frac{-v_y}{v_x} = \text{bg tg} \frac{\dot{\xi} \sin \varphi}{V_0 + \dot{\xi} \cos \varphi} \quad (2)$$

Fig. 2. De relatieve snelheid V en de invalshoek α .

De hoek van het symmetrie-vlak van het lichaam met de x -as is ϑ , de invalshoek dus

$$\alpha = \vartheta + \beta = \vartheta + \text{bg tg} \frac{\dot{\xi} \sin \varphi}{V_0 + \dot{\xi} \cos \varphi} \quad (3)$$

De in (1), (2) en (3) gegeven uitkomsten gelden voor willekeurige waarden van $\dot{\xi}$. Houdt men echter rekening met het feit, dat alleen kleine slingeringen beschouwd en dus de tweede en hogere machten van deze grootheid verwaarloosd mogen worden, dan gaan zij over in:

$$V^2 = V_0^2 + 2 V_0 \dot{\xi} \cos \varphi \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\dot{\xi}}{V_0} \sin \varphi \quad (5)$$

$$\alpha = \vartheta + \frac{\dot{\xi}}{V_0} \sin \varphi \quad (6)$$

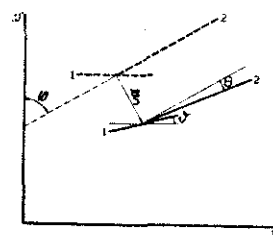
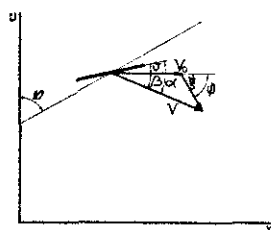


Fig. 1. Coördinaten. Getrokken: stand van het in beweging zijnde lichaam; gestippeld: evenwichtsstand. 1 = hartlijn lichaam; 2 = kabel.



c. De vergelijking voor de beweging van het zwaartepunt.

Het product van de massa m van het lichaam en de versnelling $\ddot{\xi}$ van het zwaartepunt in de ξ -richting moet gelijk zijn aan de som van de componenten van alle uitwendige krachten

$$m\ddot{\xi} = X_1 + X_2 + X_3 \quad (7)$$

Zooals hier reeds is aangeduid, bestaat deze som uit de bijdragen van drie verschillende krachten, te weten: zwaartekracht, kabeltrek en luchtkrachten.

De zwaartekracht werkt in de richting van de negatieve y -as, haar groote is mg , zoodat haar component in de ξ -richting is

$$X_1 = +mg \sin \varphi \quad (8)$$

De trek T van den kabel werkt in de richting van dezen, die echter bij het in beweging zijnde stelsel niet met de oorspronkelijke zal samenvallen. Is de hoek tusschen beide richtingen Θ , dan is de component van den kabeltrek in de ξ -richting, daar slechts kleine afwijkingen beschouwd worden

$$X_2 = +T\Theta \quad (9)$$

Streng genomen zal ook de waarde van T door de beweging beïnvloed worden. De hierdoor veroorzaakte verschillen mogen echter, daar in X_2 de trek toch alleen vermenigvuldigd met de kleine grootte Θ voorkomt, verwaarloosd en T dus als constant beschouwd worden.

De coëfficiënten van de componenten L en W van de resulterende luchtkracht resp. loodrecht op en evenwijdig aan de richting van de relatieve snelheid kunnen ingevoerd worden in den vorm $k_L a$ en k_W . Hierbij zijn k_L en k_W positieve constanten. Ter toelichting moge opgemerkt worden, dat hier alleen kleine slingeringen om den evenwichtsstand en dus ook kleine invalshoeken beschouwd worden, terwijl voorts tengevolge van de symmetrie van het lichaam k_L voor $a=0$ en k_W nul zijn.

De bovenbedoelde componenten zijn dus

$$L = k_L a \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (10)$$

$$W = k_W \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (11)$$

Zooals reeds besproken werd, maakt de relatieve windrichting een hoek β met de x -as, terwijl die tusschen deze as en de ξ -richting φ is. De hoek tusschen relatieve windrichting en ξ -richting is zodoende $(\varphi - \beta)$ (zie fig. 3) en de component van de windkracht in laatstgenoemde richting dus:

$$X_3 = -L \sin(\varphi - \beta) - W \cos(\varphi - \beta).$$

Invoering hierin van de door (10) en (11) gegeven waarden van L en W en daarna die voor V^2 , β en a uit (4), (5) en (6) leidt, wanneer ook hier weer tweede en hogere machten van de kleine grootheden verwaarloosd worden, tot

$$X_3 = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 k_W \cos \varphi - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_W (1 + \cos^2 \varphi) + k_L \sin^2 \varphi \cdot \dot{\xi} - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_L \sin \varphi \cdot \vartheta \quad (12)$$

Fig. 3. De op het lichaam werkende luchtkrachten.

De vergelijking (7) voor de beweging van het zwaartepunt gaat nu door invoering van (8), (9) en (12) over in

$$m\ddot{\xi} - mg \sin \varphi + \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_W \cos \varphi + \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_W (1 + \cos^2 \varphi) + k_L \sin^2 \varphi \cdot \dot{\xi} + \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_L \sin \varphi \cdot \vartheta - T\Theta = 0 \quad (13)$$

d. De vergelijking voor de beweging om het zwaartepunt.

Het product van het traagheidsmoment I om de dwarsas door het zwaartepunt en de hoekversnelling $\ddot{\vartheta}$ is gelijk aan het moment van de uitwendige krachten om dit punt

$$I\ddot{\vartheta} = M_1 + M_2. \quad (14)$$

De zwaartekracht en de kabeltrek grijpen beide in het zwaartepunt aan, zoodat het moment alleen veroorzaakt wordt door de luchtkrachten. Het kan beschouwd worden als bestaande uit twee deelen: het „richtende moment” M_1 en het „dempende moment” M_2 . Het eerste deel wordt gelijk genomen aan het moment, dat zou werken in het geval, dat de invalshoek dezelfde, doch de hoeksnelheid nul was; het tweede wordt als evenredig met de hoeksnelheid $\dot{\vartheta}$, doch onafhankelijk van den invalshoek aangenomen. Op grond van dezelfde overwegingen als boven voor k_L besproken werden, mag de coëfficiënt van het richtende moment in den vorm $k_M a$ ingevoerd worden. De beide momenten zijn dan

$$M_1 = -\frac{1}{2} \rho V^2 k_M a$$

$$M_2 = -\frac{1}{2} \rho V k_D \dot{\vartheta}$$

Het teeken werd hierbij zoo gekozen, dat voor normale gevallen (statisch stabiel lichaam met positieve damping) k_M en k_D positieve waarden hebben. Invoering van de door (4) en (6) gegeven waarden voor V en a levert nu, na de gebruikelijke verwaarloozingen,

$$M_1 = -\frac{1}{2} \rho V_0 k_M \sin \varphi \cdot \dot{\xi} - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M \cdot \vartheta$$

$$M_2 = -\frac{1}{2} \rho V_0 k_D \cdot \dot{\vartheta}$$

zoodat de vergelijking (14) voor de beweging van het lichaam om het zwaartepunt wordt:

$$I\ddot{\vartheta} + \frac{1}{2} \rho V_0 k_D \cdot \dot{\vartheta} + \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M \cdot \vartheta + \frac{1}{2} \rho V_0 k_M \sin \varphi \cdot \dot{\xi} = 0 \quad (15)$$

e. De evenwichtsvoorwaarde voor den stationairen toestand.

Voor den stationairen toestand is, zooals na het bovenstaande wel zonder meer duidelijk zal zijn, de voorwaarde voor het evenwicht van de krachten in de ξ -richting:

$$-mg \sin \varphi + \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_W \cos \varphi = 0 \quad (16)$$

Hieruit volgt voor de hoek φ

$$\operatorname{tg} \varphi = + \frac{\frac{1}{2} \rho V_0^2 k_W}{mg}. \quad (17)$$

f. De bewegingsvergelijkingen voor kleine slingeren.

De vergelijking (13) kan vereenvoudigd worden door er (16) van af te trekken. Wordt (15) onveranderd overgenomen, dan zijn de bewegingsvergelijkingen van het lichaam voor kleine slingeren om den stationairen toestand:

$$m \ddot{\xi} + \frac{1}{2} \rho V_0 \frac{1}{B} k_L' \sin^2 \varphi \cdot \dot{\xi} + \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_L' \sin \varphi \cdot \vartheta - T \Theta = 0 \quad (18)$$

$$I \ddot{\vartheta} + \frac{1}{2} \rho V_0 k_D \cdot \dot{\vartheta} + \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M' \cdot \vartheta + \frac{1}{2} \rho V_0 k_M' \sin \varphi \cdot \dot{\xi} = 0 \quad (19)$$

met

$$B = \frac{k_L' \sin^2 \varphi}{k_W (1 + \cos^2 \varphi) + k_L' \sin^2 \varphi} \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{2} \rho V_0^2 k_W}{mg}. \quad (21)$$

Indien niet in de eerste de term $T\Theta$ voorkwam, zou de oplossing van deze vergelijkingen geenerlei moeilijkheden opleveren. Deze term beteekent echter de koppeling met een ander deel van het stelsel, de kabel, zoodat voor het verkrijgen van bedoelde oplossing ook de beweging van dit deel bekend moet zijn, althans bepaald moet kunnen worden. In het volgende zal echter blijken, dat, ook zonder nader op deze zijde van het vraagstuk in te gaan, uit de hier gegeven vergelijkingen een belangrijk resultaat afgeleid kan worden.

4. Energetische beschouwing over de stabiliteit.

Om te komen tot een beoordeeling van de stabiliteit van de kleine slingeren van het lichaam, denke men zich inplaats van de in vergelijking (18) voorkomende component $T\Theta$ van den kabeltrek een uitwendige kracht $P = P_1 \sin \lambda t + P_2 \cos \lambda t$. Het oorspronkelijke stelsel wordt dus voorloopig vervangen door een ander, waarvan de bewegingsvergelijkingen, behoudens de genoemde term $T\Theta$, overeenkomen met (18) en (19), terwijl de beweging van dit stelsel onder invloed van de kracht P beschouwd wordt. Het lichaam zal dan een slinging met frequentie λ uitvoeren. Door een passende keuze van P_1 en P_2 kan bereikt worden, dat hierbij $\xi = \xi_0 \sin \lambda t$ is. Uit vergelijking (19) volgt nu

$$\vartheta = - \frac{(\frac{1}{2} \rho V_0 \lambda)^2 k_D k_M' \sin \varphi}{(I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M')^2 + (\frac{1}{2} \rho V_0 k_D \lambda)^2} \xi_0 \sin \lambda t + \frac{\frac{1}{2} \rho V_0 \lambda (I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M') k_M' \sin \varphi}{(I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M')^2 + (\frac{1}{2} \rho V_0 k_D \lambda)^2} \xi_0 \cos \lambda t.$$

Invoering van de waarden voor ξ en ϑ in de vergelijking (18) geeft dan voor de „componenten” P_1 en P_2 van de uitwendige kracht:

$$P_1 = -\xi_0 \lambda^2 \left\{ m + \frac{(\frac{1}{2} \rho V_0)^3 V_0 k_D k_M' k_L' \sin^2 \varphi}{(I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M')^2 + (\frac{1}{2} \rho V_0 k_D \lambda)^2} \right\} \quad (22)$$

$$P_2 = + \frac{1}{2} \rho V_0 \xi_0 \lambda k_L' \sin^2 \varphi \left\{ \frac{1}{B} + \frac{\frac{1}{2} \rho V_0^2 (I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M') k_M'}{(I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M')^2 + (\frac{1}{2} \rho V_0 k_D \lambda)^2} \right\}. \quad (23)$$

Het is duidelijk, dat, wanneer voor het beschouwde stelsel voor eenige frequentie λ deze beide grootheden nul worden, dit beteekent, dat de beweging zonder uitwendige kracht kan plaats vinden, m.a.w. een vrije harmonische slinging met de frequentie λ mogelijk is. In het algemeen zal dit niet het geval zijn, zoodat de vraag, wat dan de beteekenis van deze grootheden is, nader bezien dient te worden. Om tot een inzicht hieromtrent te komen, beschouwe men den arbeid, die door de uitwendige kracht gedurende een geheele slinging verricht moet worden. De in het tijdselement dt verrichte arbeid is $dA = P \dot{\xi} dt$, dus die gedurende een geheele periode:

$$A = \int_0^{2\pi} P \dot{\xi} dt = \int_0^{2\pi} (P_1 \sin \lambda t + P_2 \cos \lambda t) \xi_0 \lambda \cos \lambda t dt = + P_2 \xi_0 \pi. \quad (24)$$

Deze blijkt dus onafhankelijk te zijn van P_1 . Met het oog op het volgende is het gewenscht er hier de aandacht op te vestigen, dat P_2 , zooals uit (23) blijkt, een grootheid is, die onder meer van λ afhangt en evenredig is met ξ_0 .

Is nu voor alle reële positieve waarden van λ de door (24) gegeven arbeid positief, dan beteekent dit, dat slingeren met constante amplitude alleen mogelijk zijn onder opname van arbeid van bui-

tenaf. Wordt het stelsel aan zichzelf overgelaten, dan zal het geen dergelijke slingeren en zeker ook geen slingeren met toenemende amplitude kunnen uitvoeren.

Voor het in den aanvang van dit punt ingevoerde gewijzigde stelsel is hiermede de stabiliteitsvoorwaarde verkregen, dat voor alle reële positieve waarden van $\lambda^{P_2/s_0} > 0$ moet zijn.

Deze voorwaarde is voldoende, doch niet noodzakelijk. Eenerzijds is het bestaan van onstabiele slingeren onmogelijk, wanneer aan deze voorwaarde voldaan wordt, anderzijds is het echter niet zeker, dat dergelijke slingeren zullen optreden in alle gevallen, waarin zij niet bevredigd wordt. Ter toelichting van deze laatste bewering kan opgemerkt worden, dat harmonische slingeren, die als grensgeval van onstabiele beschouwd kunnen worden, alleen kunnen bestaan, wanneer niet alleen $P_2 = 0$ is, doch ook voldaan wordt aan de voorwaarde $P_1 = 0$.

Gaat men na, wat dit resultaat beteekent voor het oorspronkelijke stelsel, dus voor het aan den kabel opgehangen lichaam, dan blijkt het volgende. Zooals in punt 2 reeds besproken werd, zal bij een slinging met constante amplitude aan den kabel arbeid toegevoerd moeten worden om de beweging in stand te houden. Er behoeft dus niet gevreesd te worden, dat de kabel onder deze omstandigheden arbeid aan het lichaam zal toevoeren. Waar nu de kabel hier de functie van de uitwendige kracht in het boven besproken stelsel overgenomen heeft, beteekent dit dat ook hier zeker geen onstabiele slingeren zullen optreden, indien voldaan wordt aan de boven opgestelde voorwaarde.

Bij invoering van de waarde van P_2 uit (23) en weglating van alle factoren, die zeker positief zullen zijn, gaat zij over in:

Het aan een kabel gesleepte lichaam zal zeker geen onstabiele slingeren kunnen uitvoeren, wanneer voor alle reële waarden van λ voldaan wordt aan

$$\frac{1}{B} + \frac{\frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M' (I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M')}{(I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M')^2 + (\frac{1}{2} \rho V_0 k_D \lambda)^2} > 0 \quad (25)$$

5. De „kritische snelheid”.

De noemers van de beide in (25) voorkomende breuken zijn steeds positief. Deze voorwaarde mag dus ook geschreven worden in den vorm

$$(I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M')^2 + (\frac{1}{2} \rho V_0 k_D \lambda)^2 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 (I \lambda^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 k_M') B k_M' > 0 \quad (26)$$

Uitgeschreven naar machten van λ gaat dit over in

$$f(\lambda) = a_4 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_0 > 0 \quad (27)$$

waarin

$$\begin{aligned} a_4 &= + I^2 \\ a_2 &= + \frac{1}{4} \rho^2 V_0^2 k_D^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 I k_M' (2 - B) \\ a_0 &= + \frac{1}{4} \rho^2 V_0^4 k_M'^2 (1 - B). \end{aligned}$$

Daar, zooals uit (20) te zien is, B kleiner dan 1 is, zijn a_4 en a_0 steeds positief.

Gaat men nu na voor welke waarden van λ aan (27) voldaan wordt, dan blijkt allereerst, dat dit voor $\lambda=0$ zeker het geval is, immers

$$f(0) = + a_0 > 0.$$

$f(\lambda)$ is een continue functie van λ . Zij kan dus nu voor reële waarden van λ alleen kleiner dan 0 worden, indien de vergelijking

$$f(\lambda) = a_4 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_0 = 0 \quad (28)$$

reële wortels heeft. De wortels zijn

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 a_0 a_4}}{2 a_4}}.$$

Onder deze wortels zullen geen reële voorkomen, wanneer of $a_2 > 0$ of $(a_2^2 - 4 a_0 a_4) < 0$ is. Immers in het eerste geval zal, voorzoover niet tevens aan de tweede ongelijkheid voldaan wordt, dank zij het feit, dat $a_0 a_4$ positief is, de teller van de breuk steeds negatief, alle wortels dus zuiver imaginair zijn. In het tweede geval worden, onafhankelijk van het teken van a_2 , alle wortels complex.

Beide ongelijkheden leiden tot een stabiliteits-criterium.

Uit de eerste volgt, dat het lichaam zeker geen onstabiele slingeren kan uitvoeren, wanneer, zooals bij invoering van de bij (27) gegeven waarde van a_2 blijkt,

$$a_2 = \frac{1}{4} \rho^2 V_0^2 k_D^2 - \frac{1}{2} \rho V_0^2 I k_M' (2 - B) > 0 \quad (29)$$

is. Daar B steeds positief is (zie (20)), zal a_2 steeds grooter zijn dan $(\frac{1}{4} \rho^2 V_0^2 k_D^2 - \rho V_0^2 I k_M')$. Zodoende zal zeker voldaan zijn aan voorwaarde (29), wanneer deze laatste uitdrukking grooter dan nul is of wel

$$I k_M' < \frac{1}{4} \rho k_D^2 \quad (30)$$

In deze voorwaarde komt V_0 niet voor, hetgeen beteekent, dat, wanneer er aan voldaan wordt, bij geen enkele snelheid onstabiele slingeren kunnen voorkomen. Zooals in punt 6 nog nader besproken zal worden, bleek dit criterium tot nu toe voor praktische toepassing van weinig waarde te zijn.

Van meer praktisch belang is hetgeen uit de tweede voorwaarde

$$a_2^2 - 4 a_0 a_4 < 0 \quad (31)$$

volgt. Voert men hierin de bij (27) gegeven waarden van a_1 , a_2 en a_0 in, dan gaat zij, na weglating van de positieve factor $\rho^2 V_0^4$ over in

$$F(V_0) = \frac{1}{4} \rho k_D^2 - \frac{1}{2} I k_M' (2-B)^2 - I^2 k_M'^2 (1-B) < 0 \quad (32)$$

Zooals uit (20) en (21) volgt, is B en daarmee ook de hier te beschouwen vorm een functie van V_0 . Dit wijst op de mogelijkheid, dat het gesleepte lichaam voor sommige waarden van V_0 wel, voor andere daarentegen niet aan voorwaarde (32) zal voldoen. Voor het eerste gebied van snelheden is het dan zeker, dat het geen onstabiele slingeren kan uitvoeren, voor het tweede gebied bestaat die zekerheid niet.

Om na te gaan of dit inderdaad voorkomt, moet het verloop van $F(V_0)$ met V_0 nader beschouwd worden, waarbij de gedachtengang dezelfde is als boven bij de bespreking van $f(\lambda)$.

Voor $V_0=0$ is ook $B=0$ en dus

$$F(0) = + \frac{1}{16} \rho k_D^2 (\rho k_D^2 - 8 I k_M').$$

In het geval, dat deze waarde positief is, wordt voldaan aan het criterium (30), zoodat het verder buiten beschouwing kan blijven.

Is zij daarentegen negatief, dan beteekent dit, dat voor $V_0=0$ voldaan wordt aan de voorwaarde (32). Onstabiele slingeren bij eenige andere waarde van V_0 , bijvoorbeeld V_1 , zullen alleen dan voor kunnen komen, wanneer hiervoor $F(V_1) > 0$ is. Tusschen $V_0=0$ en $V_0=V_1$ moet dan echter een waarde van V_0 liggen, die voldoet aan de vergelijking

$$F(V_0) = \frac{1}{4} \rho k_D^2 - \frac{1}{2} I k_M' (2-B)^2 - I^2 k_M'^2 (1-B) = \frac{1}{4} I^2 k_M'^2 B^2 + \frac{1}{4} \rho k_D^2 I k_M' B + \frac{1}{16} \rho k_D^2 (\rho k_D^2 - 8 I k_M') = 0 \quad (33)$$

Oplossing van deze naar B geeft, daar alleen een positieve wortel hier beteekenis heeft

$$B_k = \frac{-\rho k_D^2 + 2 k_D \sqrt{2 \rho I k_M'}}{2 I k_M'} \quad (34)$$

Uit (20) en (21) volgen nu voor de bijbehorende waarde van φ en V :

$$\sin^2 \varphi_k = \frac{2 B_k k_W}{(1-B_k) k_L' + B_k k_W} \quad (35)$$

$$V_k^2 = \frac{2 m g \tan \varphi_k}{\rho k_W} \quad (36)$$

Resumeerend kan gezegd worden, dat B_k en daarmee ook V_k de toestand aangeeft, waarbij de waarde van $F(V_0)$ van negatief in positief overgaat. V_k vormt zodoende de grens tusschen het gebied van lagere snelheden, waarbij wel en dat van hogere, waarbij niet aan voorwaarde (31) voldaan wordt. Voor deze waarde van de snelheid werd daarom de benaming „kritische snelheid” ingevoerd. Bij snelheden V_0 kleiner dan V_k zullen, zooals uit de beteekenis van voorwaarde (31) volgt, zeker geen onstabiele slingeren voorkomen. Bij snelheden boven V_k kunnen zij wel, doch behoeven zij niet noodzakelijk op te treden. De grenssnelheid, waarbij zij inderdaad beginnen, kan dus wel grooter, doch zeker niet kleiner zijn dan V_k .

6. Eenige algemeene gevolgtrekkingen.

Bij de tot nu toe beschouwde toepassingen van de theorie bleek het criterium (30) een zoo hoge eisch te stellen, dat het praktisch onmogelijk was eraan te voldoen. Dit hangt samen met het feit, dat steeds een zekere mate van statische stabiliteit gewenscht is.

Betere resultaten leverde het gebruik van het tweede criterium op. Dit bood de gelegenheid na te gaan welken invloed verschillende factoren hebben op de kritische snelheid en ook deze grootheid voor verschillende vormen onderling te vergelijken.

Wat het eerste betreft, kan hier het volgende gezegd worden.

Zooals uit de in (34) t/m (36) gegeven uitkomst onmiddellijk afgelezen kan worden, zullen onder overigens onveranderde omstandigheden, een vermeerdering van het gewicht (mg) en van de demping (k_D) en een vermindering van de lifttoename (k_L') de kritische snelheid V_k vergrootten. Ter toelichting moge hierbij opgemerkt worden, dat een toename van B_k φ_k vergroot en daarmee ook V_k verhoogd.

De invloed van de overige factoren kan niet op zoo eenvoudige wijze uit de formules gezien worden. Uit de uitgevoerde berekeningen volgde, dat in het beschouwde gebied met toenemend traagheidsmoment (I) en statische stabiliteit (k_M') de waarde van V_k afnam. Over den invloed van den weerstand (k_W) kan weinig algemeen gezegd worden, daar φ_k met dezen toeneemt en dus in de in (36) gegeven breuk hierbij zoowel de teller als de noemer grooter worden. Uit een berekening voor een speciaal geval bleek, in dat geval, toename van den weerstand een afname van V_k ten gevolge te hebben, de invloed was echter niet van overwegend belang. Tenslotte gaf, eveneens voor een speciaal geval, vermindering van de dichtheid (ρ) een verhooging van V_k , de bijbehorende stuwdruk ($\frac{1}{2} \rho V_k^2$) nam echter af.

De maatregelen, waardoor een verhooging van de kritische snelheid verkregen kan worden, bleken dus te zijn: vergrootten van gewicht (mg) en demping (k_D), verminderen van lifttoename met invalshoek (k_L'), traagheidsmoment (I) en statische stabiliteit (k_M'). Deze conclusie is,

voorzover zij de drie eerstgenoemde grootheden betreft, algemeen geldig. Voor de beide laatstgenoemden geldt zij voorloopig slechts voor het vrij uitgebreide gebied, waarbinnen de praktisch bruikbare vormen van statische buizen vallen. Voor gevallen, die hier ver buiten liggen, zal de juistheid van bovenstaande uitspraak nader door berekeningen gecontroleerd moeten worden.

De waarden van k_L' , k_M' , en k_D zijn bij lichamen als de beschouwde statische buizen hoofdzakelijk afhankelijk van de grootte van het staartvlak en, voor de beide laatste coëfficiënten, van den afstand ervan tot aan het zwaartepunt. Het blijkt dus gewenscht te zijn het oppervlak van het staartvlak klein, de staartlengte groot te maken.

7. Toepassing op gesleepte statische buizen.

Van de in het voorgaande besproken theorie werd een vruchtbaar gebruik gemaakt bij de ontwikkeling van de gesleepte statische buis in de richting van grootere dynamische stabiliteit.

De vroeger gebruikte vorm van statische buis is in fig. 4 met *a* aangegeven. Hij vertoonde verschillende kenmerken, als groot staartvlak, groot traagheidsmoment, betrekkelijk gering gewicht, die als oorzaken van lage kritische snelheid, dus als ongewenscht, beschouwd moeten worden.

Met verschillende gewijzigde vormen, waarbij de in punt 6 besproken maatregelen in meerdere of mindere mate toegepast waren, werden vliegproeven uitgevoerd. De tusschenvormen en de daarmee verkregen resultaten zullen hier niet nader besproken worden, met uitzondering van één geval, dat den invloed van het traagheidsmoment op duidelijke wijze demonstreerde. Hierbij werd een statische buis gebruikt, waarvan het traagheidsmoment door het verschuiven van loopgewichten veranderd kon worden.

Met klein traagheidsmoment werden nu tot aan de hoogste snelheid bij deze proef (ong. 180 km/h), geen slingeringen waargenomen. Bij een volgende proef met groot traagheidsmoment traden daarentegen reeds bij lagere snelheid heftige slingeringen op.

De ontwikkeling leidde ten slotte tot de statische buizen, die in fig. 4 met *b* en *c* aangegeven zijn. Zij verschillen alleen in de afmetingen van het midden-deel, dat in beide gevallen massief is. De eerste vorm (*b*) voldeed zeer goed, doch bleek in het gebruik door zijn groote gewicht te onhandig. Voor normaal bedrijf werd daarom de tweede (*c*) ingevoerd.

De waarden van de verschillende gegevens, zooals zij in de berekening van de kritische snelheid voor de drie hier besproken typen ingevoerd werden, benevens deze snelheid zelve, zijn in Tabel I gegeven. De aerodynamische coëfficiënten, behalve k_D , voor de statische buis *a* werden afgeleid uit de resultaten

van metingen in den windtunnel, de overigen werden op grond van deze uitkomsten en ander beschikbaar materiaal geschat.

De resultaten, die met de drie vormen van statische buizen bij vliegproeven en in het bedrijf verkregen werden, waren de volgende. De oorspronkelijke statische buis (*a*) vertoonde hinderlijke slingeringen bij snelheden hoger dan ongeveer 180 km/h (= 50 m/sec). De statische buis *b* daarentegen bleef tot de hoogste snelheid, waarbij zij beproefd werd (ongeveer 450 km/h = 125 m/sec) volkomen rustig. Ook op het gedrag van de statische buis *c*, die sedert eenige jaren voortdurend gebruikt wordt bij snelheden tot 300 km/h (= 83 m/sec), valt niets aan te merken.

Houdt men rekening met de in punt 5 besproken betekenis van de kritische snelheid als onderste grens van het gebied, waarin onstabiele slingeringen kunnen, doch niet noodzakelijk behoeven voor te komen, dan kan de overeenstemming tusschen theorie en experiment bevredigend genoemd worden.

TABEL I.

Statische buis		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
mg	kg	1.445	4.092	2.274
I	kg.m.sec ²	0.00331	0.00345	0.00293
k_L'	m ²	0.0103	0.0029	0.0029
k_W'	m ²	0.0063	0.0080	0.0063
k_M'	m ³	0.00424	0.00172	0.00172
k_D	m ⁴	0.00106	0.00061	0.00061
ρ	kg m ⁻⁴ sec ²	0.125	0.125	0.125
V_k	m.sec ⁻¹	41	96	75

8. Conclusies.

- 1°. Uitgaande van de in punt 2 besproken aannamen kunnen voor het aan een kabel gesleepte lichaam twee stabiliteitscriteria afgeleid worden. Beide zijn voldoende doch niet noodzakelijk en hebben betrekking op de omstandigheden, waaronder zeker geen onstabiele slingeringen zullen voorkomen (punt 4, 5).

- 2°. Het eerste criterium geeft aan, dat, wanneer voldaan wordt aan de ongelijkheid (30), onstabiele slingeren bij alle snelheden onmogelijk zijn (punt 5).
- 3°. Het tweede criterium leidt tot de kritische snelheid V_k , die met behulp van de formules (34) t/m (36) berekend kan worden. Deze kritische snelheid vormt de bovenste grens van het snelheidsgebied, waarin zeker geen onstabiele slingeren zullen voorkomen (punt 5).
- 4°. Bij de tot nu toe beschouwde toepassingen bleek het onder 2°. genoemde criterium een zoo hoge eisch te stellen, dat het praktisch onmogelijk was hieraan te voldoen (punt 6).
- 5°. De kritische snelheid V_k kan steeds verhoogd worden door vergroting van het gewicht (mg) en van de demping (k_D) en door vermindering van de lifttoename met den invalshoek (k_L') (punt 6).
- 6°. In het tot nu toe beschouwde gebied leidt vergroting van de statische stabiliteit (k_M') en van het traagheidsmoment (I) tot vermindering van de kritische snelheid (punt 6).
- 7°. Door gebruik te maken van de aanwijzingen, die door de theorie geleverd werden, kon de dynamische stabiliteit van de gesleepte statische buis belangrijk verbeterd worden. De overeenstemming tusschen de bij proeven met verschillende vormen verkregen resultaten en de berekende waarden kan zeer bevredigend genoemd worden (punt 7).

Notaties.

a_0, a_2, a_4	= hulpgrootheden (zie punt 5 (27)).
g	= versnelling van de zwaartekracht.
k_D, k_L, k_M, k_W	= coëfficiënten (zie resp. M_2, L, M_1, W).
m	= massa van het lichaam.
t	= tijd.
v_x, v_y	= componenten van de relatieve snelheid V .
x, y	= hulpcoördinaten (zie fig. 1).
A	= arbeid, verricht door de uitwendige kracht P (zie punt 4).
B	= hulpgrootheid (zie punt 3f (20)).
I	= traagheidsmoment van het lichaam om de dwarsas door het zwaartepunt.
$L = k_L \frac{1}{2} \rho V^2$	= lift, component van de luchtkracht loodrecht op de relatieve snelheid (zie fig. 3).
$M_1 = -k_M \frac{1}{2} \rho V^2$	= richtend moment (zie punt 3d).
$M_2 = -k_D \frac{1}{2} \rho V \dot{\theta}$	= dempend moment (zie punt 3d).
P	= uitwendige kracht (voor indices zie punt 4).
T	= trek van den kabel.
V	= relatieve snelheid van het lichaam ten opzichte van de lucht.
V_0	= vliegsnelheid.
V_k	= kritische snelheid (zie punt 5).
$W = k_W \frac{1}{2} \rho V^2$	= weerstand, component van de luchtkracht evenwijdig aan de relatieve snelheid (zie fig. 3).
X	= component van de uitwendige kracht in de ξ -richting (voor indices zie punt 3c).
α	= invalshoek van het lichaam (zie fig. 2).
β	= hoek tusschen relatieve snelheid en x -as (zie fig. 2).
θ	= hoek van draaiing om de dwarsas door het zwaartepunt (zie fig. 1).
λ	= frequentie.
ρ	= massa-dichtheid van de lucht.
φ	= hoek tusschen kabelrichting in evenwichtstoestand en y -as (zie fig. 1).
ξ	= verplaatsing van het zwaartepunt van het lichaam uit den evenwichtsstand loodrecht op de oorspronkelijke kabelrichting (zie fig. 1).
ξ_0	= amplitude van de gedwongen slingering (zie punt 4).
Θ	= hoek tusschen de oorspronkelijke kabelrichting en die bij in beweging zijnd lichaam (zie fig. 1).

De index k beteekent, dat de grootheid betrekking heeft op de kritische snelheid.

Differentiaal-quotienten naar den tijd worden door punten boven de grootheid, die naar den invalshoek door een accent aangegeven.

RAPPORT A 529

Opstelling van een snelheidsmeter bij een vliegtuigvleugel

door

Ir. A. G. VON BAUMHAUER

REPORT A. 529.

Placing a Pitot-static head near a wing.

Summary.

Lepresles' experiments show a region of small interference lying above the trailing edge of an aerofoil (fig. 1). During measurements made in the windchannel of the RSL Amsterdam, a region of no interference ($v_1 = v_0$) was found, at 13% of the chord before the trailing edge ($x_1 = 0.13$) and between 0.034—0.10 above the model.

In flight the interference was not zero there ($v_1/v_0 = 1.405 - 0.97$ or $s = 4.5 - -3$). At the point $x_1 = 0.083$, $z = 0.083$, the interference was zero over a great range of speeds ($k_L = 0.2 - 0.7$). Fig. 3 shows the interference in dependence of lift, $s = f(c_a)$.

Comparing with calculations for the ideal liquid by Wieselsberger one may conclude for these types of aerofoil that the point of zero interference shifts to the rear, when the Reynolds' number increases (fig. 4).

There are insufficient experimental data available for making definite conclusions for the explanation of these phenomena.

The results of the experiments are shown in the tables.

RAPPORT A. 529.

L'endroit propre au montage d'une antenne aérodynamique près d'une aile.

Les expériences exécutées par M. Lapresle montrent qu'une région d'interférence relativement petit se trouve au dessus du bord de fuite.

D'après des essais au tunnel du RSL, Amsterdam, un point d'interférence zéro ($v_1 = v_0$) se trouvait à 13% de la profondeur de l'aile, avant le bord de fuite ($x_1 = 0.13$) et entre 3,4 et 10% au dessus de l'aile.

Les essais en vol montraient qu'à cet endroit il y avait une interférence ($v_1/v_0 = 1.045$ à 0.97 ou $s = + 4.5$ à $- 3$). Dans un endroit à 8.3% avant le bord de fuite ($x_1 = 0.083$, $z = 0.083$) l'interférence se trouvait être zéro pour un grand écart de vitesses ($c_z = 0,4$ à $1,4$). Fig. 3 montre la relation entre interférence et portance, $s = f(c_a)$.

La comparaison avec les calculs de la liquide idéale par Wieselsberger semble permettre de dire que le point d'interférence zéro se déplace en arrière lorsque le nombre de Reynolds augmente (fig. 4). Il nous manquent des données expérimentales pour pouvoir tirer des conclusions par rapport aux suppositions faites pour expliquer ces phénomènes. Les résultats des essais se trouvent dans les tableaux.

BERICHT A. 529.

Aufstellung eines Staegerätes bei einer Flugzeugtragfläche.

Lapresles Messungen ergaben ein Gebiet geringer Störung über der Hinterkante eines Profils. (Fig. 1).

Bei Messungen im Windkanal des RSL Amsterdam wurde eine störungsfreie Stelle gefunden, bei verschiedenen Anstellwinkeln, welche auf 13% der Flügeltiefe vor der Hinterkante lag ($x_1 = 0.13$), auf etwa 3,4 bis 10% über der Fläche.

Im Fluge wurde an dieser Stelle wohl Störung gemessen ($v_1/v_0 = 1.045$ bis 0.97 oder $s = + 4.5$ bis $- 3$). An einer anderen Stelle ($x_1 = 8.3$, $z = 8.3$) wurde keine Störung gemessen in einem grossen Geschwindigkeitsbereich ($c_a = 0,40$ bis $1,4$). Fig. 3 zeigt den Zusammenhang zwischen Störung und Auftrieb, $s = f(c_a)$.

Beim Vergleich mit Rechnungen von Wieselsberger scheint man schliessen zu können dass für diese Flügelschnitte mit wachsender Reynoldsen Zahl das Gebiet kleinster Störung sich weiter nach Hinten rückt. Es gibt zu wenig Versuchsergebnisse um die gemachten Ansätze prüfen zu können.

Die Ergebnisse wurden in den Tabellen zusammengefasst. Über die Aufstellung des Pitot-Rohrs wird bemerkt, dass bei niedriger Aufstellung diese nahe zum kritischen Anstellwinkel in das Störungsgebiet kommen kann, und damit als Warnung gegen zu hohem Anstellwinkel benutzt werden kann.

RAPPORT A 529

Opstelling van een snelheidsmeter bij een vliegtuigvleugel

door

Ir. A. G. VON BAUMHAUER

1. Overzicht.

Teneinde in het vliegtuig de snelheid te bepalen ten opzichte van de lucht waarin het zich voortbeweegt, dat is de z.g. vliegsnelheid, moet men trachten den snelheidsmeter op te stellen in een punt waar de plaatselijke snelheid weinig afwijkt van de vliegsnelheid of anders gezegd: waar de storing veroorzaakt door nabijheid van vliegtuigdeelen zoo gering mogelijk is.

Uitkomsten van verschillende proeven, in het bijzonder die van Lapresle, wezen erop dat zich boven het achterste deel van den vleugel een gebied bevindt, waar de storing bij verschillende invalshoeken zeer gering is (lit. 1*), figuur 1).

Bij proeven verricht aan modellen in den windtunnel van den R.S.L. en aan vliegtuigen, is in dit gebied gezocht naar storingsvrije punten.

Bij het vliegtuig is een punt geschikt voor de opstelling van den snelheidsmeter gevonden. Daar bleek n.l. over een groot gebied van invalshoeken de storing praktisch gelijk nul te zijn. Dit punt bevindt zich op geringe hoogte boven het vleugeloppervlak (zie fig. 4, RSL 3 b). Bij de modelproeven lag het gebied van geringe storing meer naar voren dan op ware grootte.

Van deze gelegenheid wordt gebruik gemaakt om dank uit te spreken aan de Koninklijke Luchtvaart Maatschappij, die bij deze proeven haar medewerking verleende.

Ook aan de Luchtvaart Afdeeling te Soesterberg zijn wij oprechten dank verschuldigd, in het bijzonder aan luit. W. van Gemeren, die het laboratorium-vliegtuig (type F 2) bestuurde.

2. Doel van dit onderzoek.

Het bepalen van een gebied bij een vliegtuig-vleugel geschikt voor de opstelling van een snelheidsmeter, d.w.z. een gebied waar de storing, veroorzaakt door het vliegtuig, zoo gering mogelijk is.

3. Beschouwing.

De gebruikelijke vliegtuigsnelheidsmeters bestaan uit twee deelen: een aanwijzer op het instrumentenbord in het stuurhuis en een daarmee verbonden antenne, die in den luchtstroom is opgesteld. Bij de manometrische snelheidsmeters dient als antenne de Pitot-statische buis of de Venturi-buis, welke als een „voelhoorn” in den luchtstroom staat.

Bij het kiezen van de plaats voor den snelheidsmeter of wel voor de antenne daarvan, moet op verschillende omstandigheden worden gelet. In de eerste plaats moet ervoor worden gezorgd, dat de antenne buiten wervelgebieden of grenslagen blijft; ook mag deze niet worden opgesteld in den straal van de luchtschroef, waar de snelheid meestal grooter, soms kleiner is dan in de ongestoorde strooming.

Het ideale punt voor opstelling van de antenne zou moeten voldoen aan twee eischen:

- a. de plaatselijke snelheid is daar, afgezien van de richting, gelijk aan de vliegsnelheid (storing gelijk nul).
- b. de richting van de strooming ten opzichte van het vliegtuig is constant, onafhankelijk van den invalshoek.

Mocht dit niet, of ook niet bij benadering, kunnen worden verkregen, dan zou met een matige verandering van de stroomingsrichting en met een groote storing der snelheid kunnen worden gewerkt. Deze storing zou echter, althans bij benadering, onafhankelijk van den invalshoek moeten zijn. Dan zou men een aanwijzer met gecorrigeerde schaal kunnen toepassen. Indien de storing echter wel met den invalshoek zou varieren, dan zouden er bij verandering van de lading en dus ook van het vliegtuig-gewicht miswijzingen moeten optreden.

Immers zou men dan bij één bepaalde vliegsnelheid, in verband met de verandering van de lading,

*) Voor literatuuropgaven, z e achteraan.

kunnen vliegen met verschillende invalshoeken, waarbij, zooals werd ondersteld, verschillende correcties zouden behooren. Hiervan zouden dus miswijzingen het gevolg zijn.

Teneinde instrumenten te kunnen toepassen, waarvan de schaal niet voor elk vliegtuigtype zou moeten verschillen en welke op zichzelf kunnen worden geijkt, is het gewenscht een meetpunt te zoeken, dat aan de eischen genoemd onder a. en b. voldoet.

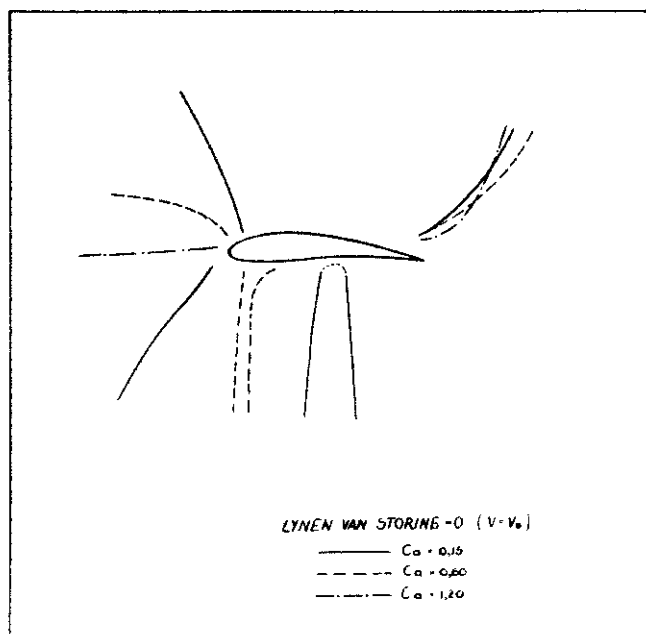


Fig. 1. Lijnen van storing gelijk nul ($v = v_0$), model-metingen van Lapresie in lucht aan een Joukovsky-profiel. Schaalgetal van Reynolds $Re = 2.5 \times 10^5$.

Zooals uit de hieronder beschreven metingen volgt is dit ook gelukt. De proeven van Lapresle wezen erop, dat er zich een gebied van geringe storing bevindt boven het achterste deel van den vleugel, en even daarachter.

Vóór den vleugel zijn wel punten aan te wijzen waar de storing weinig varieert met den invalshoek; daar is echter de verandering in de relatieve stroomrichting aanzienlijk.

Boven het achterste deel van den vleugel is de richting van den luchtstroom vrijwel evenwijdig aan het vleugel-oppervlak, over een groot gebied van invalshoeken. Bij de gebruikelijke aërodynamische antennes (Pitot-statische buizen) leveren richtingsafwijkingen tot 10 graden praktisch geen miswijzing, zoodat deze zonder bezwaar vast opgesteld kunnen worden boven het achterste deel van den vleugel, (bij onze metingen steeds evenwijdig aan de bovenzijde van den vleugel).¹⁾

4. De metingen.

a. algemeen.

De metingen zijn verricht in de jaren 1932 tot 1934, wanneer zich daartoe de gelegenheid voordeed. Aan het model en aan het laboratorium-vliegtuig hadden slechts weinig metingen plaats, omdat reeds

spoedig een gebied werd gevonden waar de storing praktisch nul was, overeenkomstig de bovengenoemde eischen a. en b.

Bij de verkeersvliegtuigen had het onderzoek plaats wanneer voor andere doeleinden toch moest worden gemeten. In verband hiermede kon als regel bij één vlucht slechts de storing in één punt worden onderzocht. De metingen zijn daarom minder volledig en minder systematisch dan men zou wenschen.

Bij de metingen wordt bepaald in hoeverre in een bepaald punt, het smetpunt, de plaatselijke snelheid v_1 afwijkt van de ongestoorde snelheid (vliegsnelheid) v_0 .

De plaats der meetpunten wordt gegeven als in figuur 2. De hoogte z is de lengte van de loodlijn uit het meetpunt op het oppervlak van den vleugel neergelaten; x_1 is de langsafmeting, dat is de afstand van het voetpunt van deze loodlijn tot aan den achterrand, gemeten langs de bovenzijde van den vleugel.

Deze twee coördinaten worden uitgedrukt in procenten van de plaatselijke koorde (t).

De zijdelingsche afmeting y wordt gemeten vanaf het midden van het model of van het vliegtuig. Deze coördinaat wordt uitgedrukt in procenten van de lengte (of vlucht) van den vleugel (b).

De storing s is uitgedrukt in procenten van de ongestoorde snelheid

$$s = 100 \cdot \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \quad (1)$$

Als een voorbeeld kan worden vermeld dat bij het vliegtuig type F 18 gemeten werd in een punt dat 13.5% van de koorde vóór den achterrand lag ($x_1 = 13.5$), en op 7.3% boven den vleugel ($z = 7.3$). De afstand uit het midden was 20.8% van de vlucht ($y = 20.8$).

Bij een groote vliegsnelheid was de snelheid in het meetpunt 2% kleiner dan de vliegsnelheid ($s = -2$). Bij een kleine snelheid was de storing + 9%.

¹⁾ Het onderzoek beperkt zich tot die invalshoeken, waarbij geen loslating der strooming van de vleugel-bovenzijde optreedt (ondercritisch).

Bij dit onderzoek is buiten beschouwing gelaten een andere methode om te komen tot een juiste snelheidsaanwijzing, nl. de aerodynamische compensatie van de storing bij het meetpunt b.v. met behulp van een stuwring om de buis op een geschikten afstand achter de statische openingen, of wel op andere wijzen, zooals met een hulpvleugeltje.

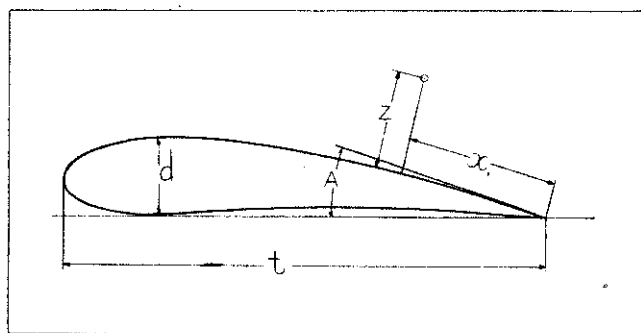


Fig. 2. Coördinaten.

De storing verandert als regel met den invalshoek. Bij benadering blijkt er een lineair verband te bestaan tusschen storing en draagfactor of liftcoëfficiënt c_a (fig. 3).²⁾

b. meetmethode.

Zoowel in den windtunnel als aan het vliegtuig is de manometrische methode van snelheidsmeting toegepast (lit. 2).

Deze methode leent zich goed voor de aflezing op den afstand; de antenne is gering van afmeting, ze heeft geen bewegende deelen, zooals bij molenmeters voorkomen.

Bij de manometrische methode wordt gebruik gemaakt van een stuwbuis die met zijn open zijde recht tegen den luchtstroom in is opgesteld en van een statische buis. In de eerste komt de lucht tot rust, waardoor de luchtdruk verhoogd wordt met den zoogenaamden stuwdruk.³⁾ Met de stuwbuis wordt gemeten de z.g. energiedruk (p_e) die dus gelijk is aan de statische druk (p) plus de stuwdruk (q).

$$p_e = p + q \quad (2)$$

De statische buis welke van voren is afgerond, is aan den omtrek voorzien van gaten of zaagsneden, waardoor de statische druk van de er langs stroomende lucht naar het inwendige wordt overgebracht.

Een manometer, die eenerzijds met de stuwbuis anderzijds met de statische buis wordt verbonden, meet het verschil tusschen energiedruk en statische druk, dat is de stuwdruk, zooals uit vergelijking 2) volgt.

$$q = p_e - p \quad (2a)$$

Langs een stroomlijn, welke buiten grenslagen (wrijvingslagen) of schroefstralen verloopt, is er praktisch geen arbeidsverlies, zoodat daarvoor geldt de wet van Bernoulli (bij niet te groote snelheden kan de samendrukbaarheid van de lucht worden verwaarloosd). In een punt dicht bij het vliegtuig (indice 1) is de energiedruk (p_{e1}) dus gelijk aan die in een punt op grooten afstand van het vliegtuig, in de ongestoorde strooming (indice 0), zoodat

$$p_{e0} = p_{e1} \quad (3)$$

$$\text{of:} \quad p_0 + q_0 = p_1 + q_1 \quad (4)$$

De stuwdruk in het meetpunt is dan

$$q_1 = q_0 + p_0 - p_1 \quad (4a)$$

Direct of indirect werden bepaald: de stuwdruk q_1 in het meetpunt en de stuwdruk q_0 der ongestoorde strooming. Daar de stuwdrukken evenredig zijn met de kwadraten der snelheden (zie noot 3)

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{v_1^2}{v_0^2} \quad (5)$$

$$\text{is:} \quad \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{q_1}{q_0}} \quad (5a)$$

zoodat hieruit met vergelijking 1) de storing s kan worden gevonden.

c. metingen aan het model.

Er is gemeten boven het achterste deel van den vleugel van een model van het Fokkervliegtuig type F 8. De plaatselijke koorde was 325 mm, de snelheid van den windstroom was 17 m/sec en 23.5 m/sec. Het schaalgetal van Reynolds 3.9 resp. 5.3×10^5 . Er werd gemeten bij drie invalshoeken, waarbij volgens andere metingen de draagfactor c_a lag tusschen 0.225 en 1.05. De stuwdruk van den luchtstroom (q_0) werd bij de proeven constant gehouden. Deze werd op de gebruikelijke wijze bepaald uit de aanwijzing van den tunnelmanometer. Vast aan het model werd een kleine Pitot-statische buis⁴⁾ opgesteld, welke vervaardigd was in het Aerodynamische Instituut van de Technische Hoogeschool te Aaken. Met behulp van deze manometrische antenne, waarvan de diameter slechts 1.9 mm bedraagt, werd in het meetpunt bepaald de afwijking in statische druk, waartoe een gevoelige manometer aan de ééne zijde verbonden was met een statische aanboring van den windtunnel, anderzijds met de statische openingen van de antenne. Deze leverde $p_0 - p_1$, zoodat volgens vergelijking 4a), de stuwdruk in het meetpunt kan worden berekend.

Er werd gemeten in eenige punten op twee loodlijnen, de eene op 13% vóór den achterrand, de andere op 30% vóór den achterrand (tabel 4a en 4b). Het eerste punt was gekozen omdat naar aan-

²⁾ draagfactor = $\frac{\text{vleugelbelasting}}{\text{stuwdruk}}$, $c_a = \frac{Q}{q}$ waarin onder de vleugelbelasting (Q) wordt verstaan de gemiddelde druk

op den vleugel als quotiënt van vliegtuiggewicht (G) en vleugeloppervlak (F). $Q = \frac{G}{F}$.

³⁾ Bij niet te groote snelheden is de grootte van den stuwdruk gelijk aan de grootte van het arbeidsvermogen van beweging van de eenheid van volume.

$q = \frac{1}{2} \rho v^2$, waarin ρ de massa der volume-eenheid, v de betrekkelijke snelheid.

⁴⁾ Een antenne, waarbij stuwbuis en statische buis zijn gecombineerd.

leiding van voorloopige metingen vermoed werd dat daar de storing gering zou zijn (tabel 2). De waarde van 30% kwam overeen met de plaats waar destijds de aerodynamische antenne bij sommige verkeersvliegtuigen was opgesteld.

Hierbij bleek dat de storing weinig varieert met de hoogte, $z = 3.4, 9.4, 14.1$ resp. 18.4 procent van de koorde.

Opgemerkt kan worden, dat het eerste punt vermoedelijk bij grotere c_a -waarden wel in de grenslaag of het gebied van loslating zou komen te vallen, waarbij dan afwijkingen kunnen optreden. Op ware grootte was dit het geval bij $c_a = 1.5$ en $z = 8.3$. (tabel 7).

STORING.

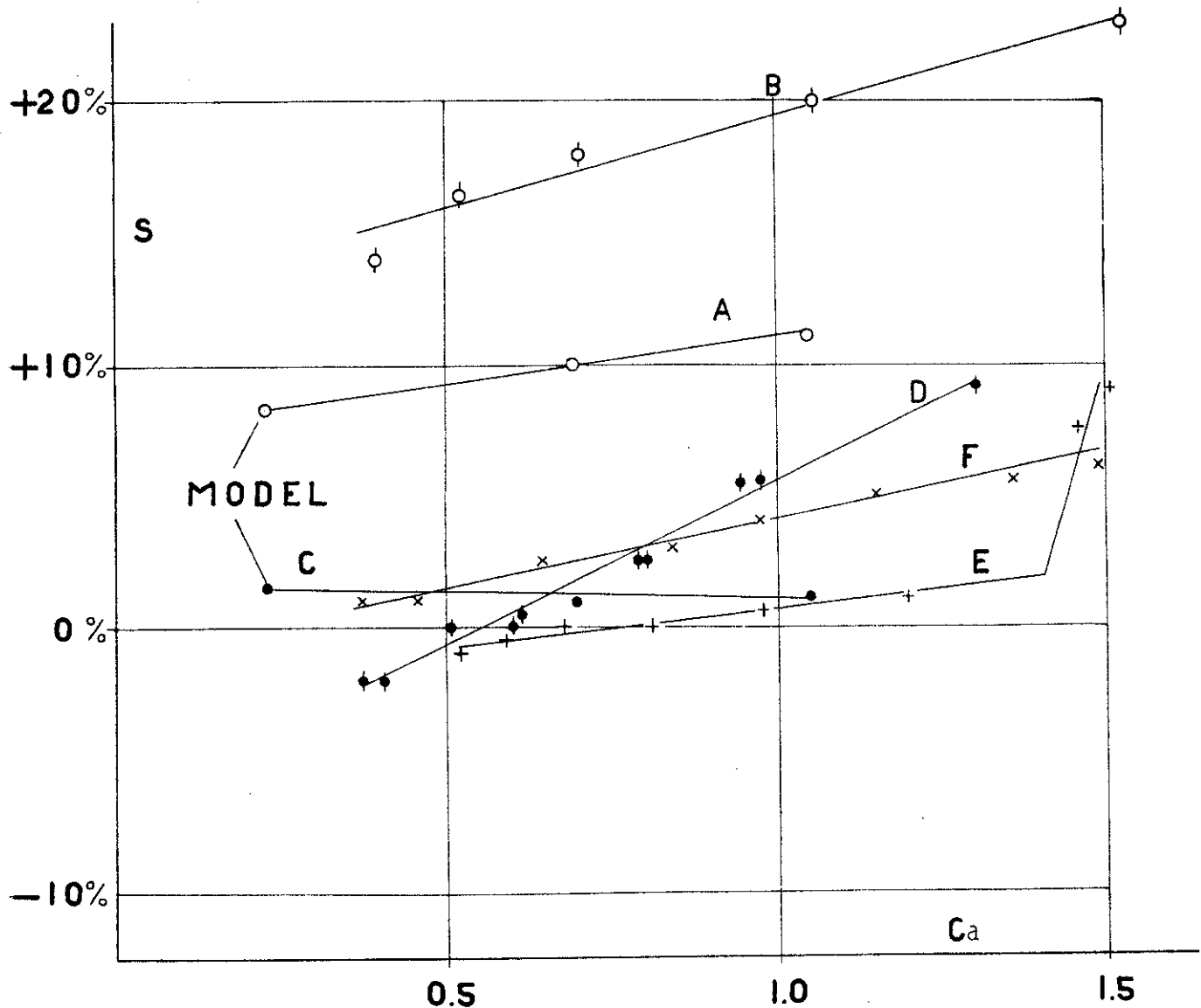


Fig. 3. Verband tusschen storing en draagfactor (lift-coëfficiënt).

A	model $x_1 = 30$	vergelijk tabel 4b.
B	vliegtuig $x_1 = 29$	" " 3.
C	model $x_1 = 13$	" " 4a.
D	vliegtuig $x_1 = 13\frac{1}{2}$	" " 5.
E	vliegtuig $x_1 = 8\frac{1}{3}, z = 8\frac{1}{3}$	" " 6 en 7.
F	vliegtuig $x_1 = 9, z = 15\frac{3}{4}$	" " 8.

In de punten van de loodlijn $x_1 = 13$ waren alle storingen kleiner dan 1%. De uitkomsten zijn verzameld in tabel 4a.

Met $x_1 = 30$ was $s = 8\frac{1}{2}, 11$ resp. 11, voor $c_a = 0.225, 0.70$ resp. 1.05, in het punt met $z = 9.4$. De storingen lopen weinig uiteen, ze zijn vrij groot. Deze waarden zijn o.a. opgenomen in fig. 3 A, waarin eveneens zijn weergegeven de uitkomsten van de vliegproef voor het overeenkomstige meetpunt, waarbij groter storingen werden gemeten (B).

d. metingen aan vliegtuigen.

Er zijn metingen uitgevoerd aan verschillende Fokker vliegtuigen met vrijdragende vleugels. De profielen bij de meetplaatsen zijn niet precies gelijkvormig, doch toonen wel een groote overeenkomst. In

tabel 1 zijn eenige hoofdmaten daarvan aangegeven. Voor de betekenis van de relatieve dikte $\left(\frac{d}{t}\right)$ en de hoek A kan worden verwezen naar figuur 2. In deze tabel zijn eveneens de maten van het profiel van het F 8 model vermeld.

Het Laboratorium-vliegtuig van den R.S.L. van het type F 2 is een één-motorig vliegtuig. Hierbij kon de antenne geplaatst worden op slechts 15% van de vleugellengte uit het midden, zonder dat er gevaar voor bestond dat deze in de schroefstraal kwam. (lit. 4).

Bij de vliegtuigen van het type F 12 en F 18 werd gemeten in punten boven de rechtere vleugelhelft op een zelfde afstand uit het midden als zich de aerodynamische antenne van den boordsnelheidsmeter bevindt d.i. 19.6 resp. 20.8% van de vleugellengte uit het midden. Dit punt ligt zeer dicht bij de schroefstraal van den zijmotor, hetgeen bleek bij een lage opstelling van de stuwbuis. In de motorvlucht werd dan de drukaanwijzing te hoog en onrustig.

De stuwdruk, zoowel van de ongestoorde strooming als in het meetpunt, wordt bepaald als verschil van energiedruk en de desbetreffende statische druk, overeenkomstig vergelijking 2).

$$q_0 = p_e - p_0, \quad q_1 = p_e - p_1 \quad 2a, 2b)$$

De energie-druk p_e werd verkregen met behulp van een stuwbuis welke bij de vliegtuigen van het type F 12 en F 18 boven den vleugel is opgesteld, evenals de vaste statische buis evenwijdig aan de bovenzijde van den vleugel. Bij het laboratorium-vliegtuig werd gebruik gemaakt van een stuwbuis, welke zich door windvanen volgens de strooming kon richten.

De statische druk van de ongestoorde strooming wordt bepaald met de onder het vliegtuig gesleepte statische buis (lit. 3, fig. 4). Blijkens controle-metingen is de afstand tot het vliegtuig voldoende groot om den storenden invloed van het vliegtuig te kunnen verwaarlozen. (lit. 2).

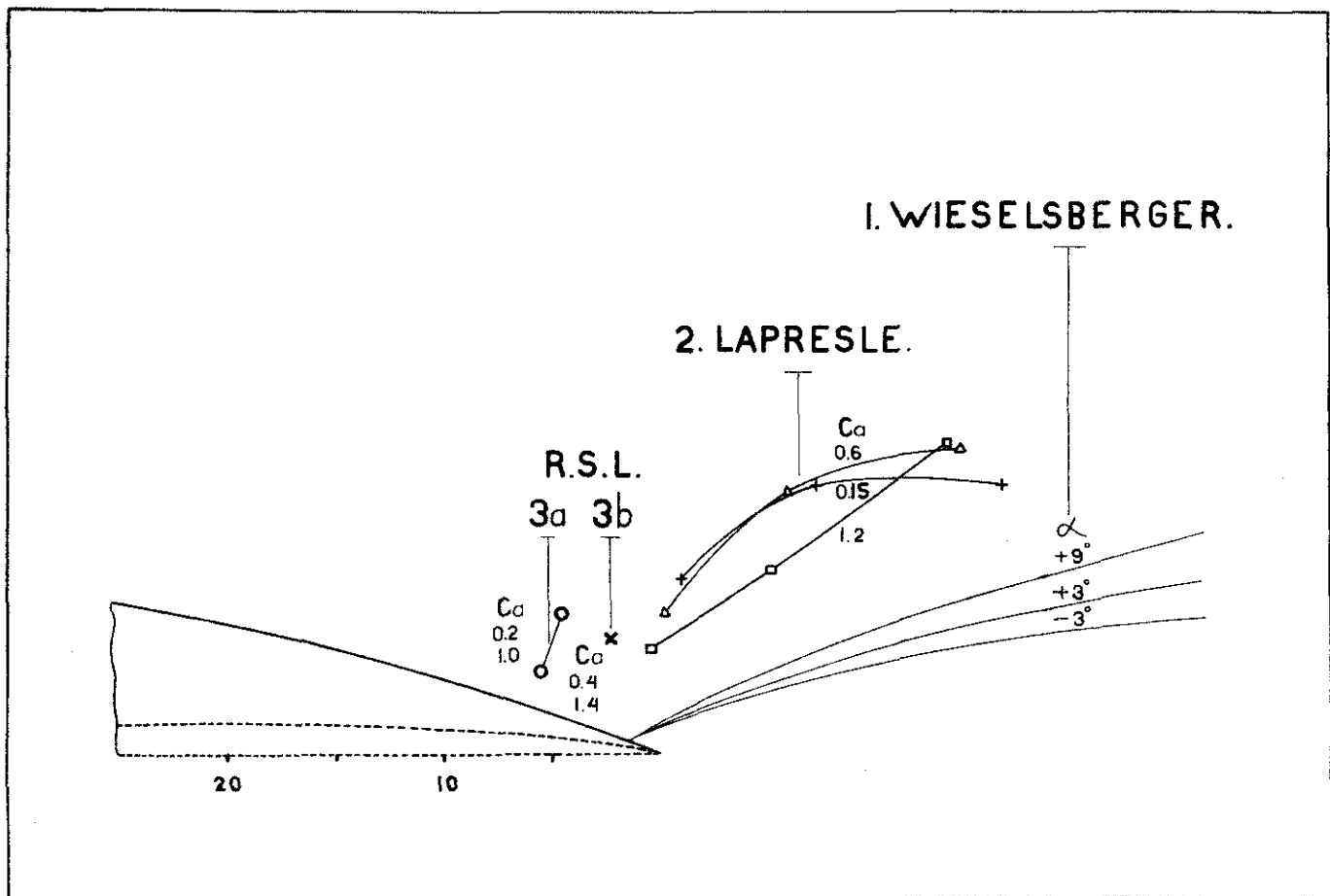


Fig. 4. Lijnen van storing gelijk nul ($v=v_0$) bij het achterste deel van den vleugel.
 1. Wieselsberger, ideale vloeistof ($q = \text{const}$, $\nu = 0$) gladde afstrooming aan den achterrand.
 2. Modelmetingen van Lapresle.
 3. R.S.L.-metingen.

a. model, $Re = 5,3 \times 10^6$,

b. vliegtuig $Re = 40 \times 10^6$ tot 160×10^6 .

De statische druk in het meetpunt werd bepaald met een statische buis voorzien van zaagsneden. Bij deze proeven zorgde de bestuurder ervoor dat volgens den boord-snelheidsmeter de stuwdruk constant werd gehouden, terwijl q_0 en q_1 werden gemeten door de ééne zijde van een nauwkeurigen meter te verbinden achtereenvolgens met de gesleepte en met de op den vleugel opgestelde statische buis. De andere zijde van dezen meter was steeds op de stuwbuis aangesloten.

De uitkomsten der metingen zijn verzameld in de tabellen 2 tot 8, waarin de grootte der storingen zijn vermeld met de daarbij behorende Ca -waarden. Eenige der meetseries zijn in figuur 3 geteekend, waarin ter vergelijking de uitkomsten van eenige modelmetingen zijn opgenomen. Het verband tusschen storing en draagfactor blijkt bij benadering te kunnen worden weergegeven door een rechte lijn. Een uitzondering levert de storing welke gevonden werd bij de maximale draagfactor (serie E, tabel 5). Daarbij was de storing plotseling aanzienlijk groter. Dit kan worden verklaard door het optreden van loslating van de hoofdstrooming van de bovenzijde van den vleugel. De statische buis bevond zich dan in een gebied van onderdruk. Indien de stuwbus zich eveneens in dit gebied had bevonden, zou de energie-druk en daarmee de aangewezen stuwdruk ook sterk zijn verminderd. Deze discontinue daling van de aangewezen snelheid kan een nuttige waarschuwing vormen tegen het „overtrekken” van het vliegtuig.

e. Vergelijking der uitkomsten.

In overeenkomst met de metingen van anderen en berekeningen van Wieselsberger voor de ideale vloeistof, is gevonden, dat er bij den enkelvoudigen vleugel punten zijn van geringe storing. In punten welke meer naar voren gelegen zijn wordt een te hoge snelheid gevonden (storing positief) en meer naar achteren een te lage snelheid. Bij het model is zoowel bij $x_1 = 30$ als bij $x_1 = 13$ een geringere storing gevonden dan op ware grootte, zooals blijkt door vergelijking der lijnen A en B, resp. C en D in fig. 3.

Het punt van storing gelijk nul ligt bij het model op $x_1 = 13$, op ware grootte bij $x_1 = 8\frac{1}{3}$.

De invloed van de hoogte boven den vleugel is gering bij $x_1 = 30$. Bij $x_1 = 8.3$ neemt waarschijnlijk de storing wel merkbaar met de hoogte toe.

In figuur 4 zijn de gebieden van storing gelijk nul geteekend. Hierin zijn aangeduid met:

1. de lijnen berekend door Wieselsberger voor een Joukovsky profiel, met gladde afstrooming aan den achterrand (lit. 5).
2. de lijnen afgeleid uit de waarnemingen gepubliceerd door Lapresle (lit. 1), van metingen in lucht bij een schaalgetal van Reynolds van $Re = 2.5 \times 10^5$.
3. R.S.L. metingen, over een groot gebied van invalshoeken.

a. model, $Re = 5.3 \times 10^5$.

b. vliegtuig, $Re = 40 \times 10^5$ tot 160×10^5 .

Het lijkt aannemelijk, dat het feit dat het gebied van kleinste storing bij een klein getal van Reynolds het meest naar voren ligt, samenhangt met de vergroting in invalshoek, die noodig is om in lucht dezelfde draagfactor Ca te verkrijgen als in het berekende geval. Er is onvoldoende experimenteel materiaal beschikbaar om nauwkeuriger vergelijkingen te treffen.

Literatuur-opgaven.

1. A. Lapresle. Bulletin Technique Nr. 43, Novembre 1927, Service Technique et Industrielle de l'Aéronautique. Contribution à l'étude expérimentale du champ aérodynamique d'un profil sustentateur.
2. H. J. vander Maas. Deel V, bladz. 60, Verslagen en Verhandelingen van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart (V. & V., R.S.L.) 1929.
3. C. Koning en T. P. de Haas. Deel VII, bladz. 123 V. & V., R.S.L., 1934. De kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan een kabel gesleept wordt.
4. Rapport A. 19, Deel I, V. & V., R.S.L., 1921, bladz. 78. Onderzoek van een model van het Fokker F. 2-vliegtuig.
5. C. Wieselsberger. Nr. 17 Reports Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University, Vol. II, 1926, p. 115.

TABEL 1
Afmetingen der profielen bij de meetplaats.
Zie figuur 2.

		Max. relatieve dikte $100 \frac{d}{t}$	Hoek A in graden
Model	F. 8	17,4	18,6
Vliegtuig	F. 12	16,2	17,0
"	F. 18	16,6	18,3
"	F. 2	18,2	17,3

In de tabellen 2 tot 8 wordt de storing s gegeven, zooals deze bij verschillende c_a -waarden in verschillende punten werd gevonden.

TABEL 2
Modelproeven; $y=20$ (Jan. '32).

x_1	$\begin{matrix} c_a \\ z \end{matrix}$	0.29	0.60	0.92
0	9.0	$-5\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{2}$	-5
0	14.2	$-2\frac{1}{2}$	-3	$-3\frac{1}{2}$
25	3.5	$+5\frac{1}{2}$	$+6\frac{1}{2}$	$+6\frac{1}{2}$

TABEL 3
Type F 12; $x_1=29$, $z=9,2$, $13,8$ en $18,2$;
 $y=19,6$ (22 April '32).

c_a	0.396	0.52	0.705	1.06	1.53
s	+14	+16.5	+18	+20	+23

TABEL 4a en 4b
Modelproeven $y=20$ (Juli '32).

x_1	$\begin{matrix} c_a \\ z \end{matrix}$	0.225	0.70	1.05
13	3.4	$-\frac{1}{2}$	0	0
13	6.6	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
13	10.0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
x_1	$\begin{matrix} c_a \\ z \end{matrix}$	0.225	0.70	1.05
30	3.4	+10	$+12\frac{1}{2}$	$+13\frac{1}{2}$
30	9.4	$+8\frac{1}{2}$	+11	+11
30	14.1	+8	$+10\frac{1}{2}$	+11
30	18.4	+7	$+9\frac{1}{2}$	+10

TABEL 5
Type F 18; $x_1=13,5$; $z=7,3$; $y=20,8$ (26 Sept. '32).

c_a	0.375	0.405	0.405	0.500	0.60	0.61	0.59	0.79	0.805	0.98	0.95	1.305
s	-2	$-1\frac{1}{2}$	-2	0	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$	$+5\frac{1}{2}$	$+5\frac{1}{2}$	+9

TABEL 6
Type F 2; $x_1=8\frac{1}{3}$; $z=8\frac{1}{3}$; $y=15$
(15 Nov. '32).

c_a	0.4 — 1.4
s	0 — 0

TABEL 7
Type F 2; $x_1=8\frac{1}{3}$; $z=8\frac{1}{3}$; $y=15$ (18 Mei '33).

c_a	0.52	0.59	0.68	0.81	0.98	1.20	1.47	1.51
s	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	+1	$+7\frac{1}{2}$	+9

TABEL 8
Type F 12; $x_1=9$; $z=15\frac{3}{4}$; $y=19,6$ (8 Sept. '34).

c_a	0.37	0.46	0.64	0.84	0.98	1.15	1.36	1.49
s	+1	+1	$+2\frac{1}{2}$	+3	+4	+5	$+5\frac{1}{2}$	+6

RAPPORT A 511.

Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart Amsterdam.

**De aerodynamische eigenschappen van schroeven bij verandering van
bladbreedte en (of) aantal bladen**

door

Ir. C. KONING.

RAPPORT A. 511.

De aerodynamische eigenschappen van schroeven bij verandering van bladbreedte en (of) aantal bladen.

Uittreksel.

a. Inleiding (punt 1).

Een omrekeningsmethode wordt gegeven, die ten doel heeft om, wanneer de aerodynamische eigenschappen van een schroef bekend zijn, die voor een andere schroef te berekenen, van de voorgaande alleen verschillend in bladbreedte en (of) aantal bladen.

b. Omrekeningsmethode (punt 2).

Bij de afleiding van de omrekeningsmethode wordt uitgegaan van de schroeventheorie, zooals deze door Glauert (lit. 1) gegeven is. Begonnen wordt met de beschouwing van twee overeenkomstige elementen van beide schroeven bij gelijken invalshoek en relatieve snelheid (zie fig. 1). Voor deze elementen zijn dan de betrekkingen tusschen de overeenkomstige waarden van V/nD , trekkracht dT en moment dQ resp. gegeven door (12), (4) en (5). Deze uitkomsten gelden niet exact voor de geheele schroef, aan dit bezwaar wordt tegemoet gekomen door invoering van de constanten C en C' . Dit leidt tot de uitkomsten gegeven in punt 2f.

c. Toepassing op experimenteele resultaten (punt 3).

De methode werd toegepast op experimenteele resultaten voor een aantal series onderling vergelijkbare schroeven met ten deele sterk uiteenlopende waarde van Bc (product van aantal bladen en bladbreedte). De uitkomsten voor alle schroeven van een serie werden hierbij omgerekend naar één waarde van Bc . Voor de constanten werd steeds $C = C' = 1$ aangenomen. De overeenstemming tusschen de berekende en de direct gemeten waarden was bevredigend (zie fig. 2 t/m 5).

d. Conclusies (punt 4).

De omrekeningsmethode levert voor schroeven van het gebruikelijke type resultaten op, die voldoende nauwkeurig zijn voor het gebruik in technische berekeningen.

e. Notaties.

De gebezigde notaties komen overeen met die van Glauert (lit. 1). De indices I en II hebben resp. betrekking op de schroef, waarvan de eigenschappen bekend en die, waarvoor zij berekend moeten worden. p is de verhouding tusschen het product van aantal bladen en bladbreedte voor beide schroeven (zie (1)).

RAPPORT A. 511.

Les caractéristiques aérodynamiques d'hélices, la largeur et (ou) le nombre des pales étant changés.

Résumé.

a. Introduction (article 1).

Une méthode est décrite pour calculer les caractéristiques aérodynamiques d'une hélice, celles-ci étant données pour une autre hélice ne différant de la première qu'en largeur et (ou) nombre des pales.

b. Méthode de calcul (article 2).

La méthode est fondée sur la théorie de l'hélice, donnée par Glauert (lit. 1). On commence à comparer deux éléments des hélices, l'angle d'attaque et la vitesse relative étant les mêmes dans les deux cas (voir fig. 1). Les relations entre les valeurs correspondantes de V/nD , de la traction dT et du couple dQ pour les éléments sont données par (12), (4) et (5). Ces résultats ne sont pas exactement valables pour l'hélice entière, mais cette difficulté a été évitée par l'introduction des constantes C et C' . Ainsi les résultats, donnés dans l'article 2f, furent obtenus.

c. Application à des résultats expérimentaux (article 3).

La méthode fut appliquée à des résultats expérimentaux pour un nombre de séries d'hélices. En chaque série les hélices ne différaient qu'en nombre et largeur des pales, les différences en Bc (produit de ces deux quantités) étant grandes parfois. Pour toutes les hélices d'une série les résultats furent réduits à une valeur de Bc . Pour les constantes on a toujours substitué $C = C' = 1$. La concordance entre les valeurs calculées et celles mesurées directement était satisfaisante (voir fig. 2 jusqu'à 5).

d. *Conclusions (article 4).*

Pour des hélices d'une forme conventionnelle la méthode donne des résultats assez corrects de les pouvoir utiliser dans des calculs techniques.

e. *Symboles.*

Les symboles sont identiques à ceux de Glauert (lit. 1). Les indices I et II se rapportent à l'hélice, dont les caractéristiques sont données ou celle, dont on veut les calculer. p est le rapport entre les valeurs du produit du nombre et de la largeur des pales des deux hélices (voir (1)).

REPORT A. 511.

The aerodynamical properties of airscrews, the blade width and (or) number of blades being changed.

Summary.

a. *Introduction (point 1).*

A method is given to calculate the aerodynamical properties of an airscrew for the case, in which they are known for another one, differing from the first mentioned only in blade width and (or) number of blades.

b. *Method of calculation (point 2).*

The method is based on the airscrew theory as it is given by Glauert (lit. 1). First of all two corresponding elements of both propellers are considered at equal angle of incidence and equal relative velocity (see fig. 1). The relations between the corresponding values of V/nD , thrust dT and torque dQ are given by (12), (4) and (5) respectively. Taken exactly these results are not valid for the whole airscrew, a difficulty which has been allowed for by the introduction of the constants C and C' . This leads to the results given in point 2f.

c. *Application to experimental results (point 3).*

The method was applied to experimental results for some series of propellers. The airscrews of each series were comparable, differing in Bc (product of number of blades and blade width) only, the differences in this quantity being partly great. For each series the results were reduced to one value of Bc . The constants C and C' were taken to be unity. The agreement between the calculated results and those measured directly was satisfactory (see fig. 2 till 5).

d. *Conclusions (point 4).*

For propellers of usual form the method gives results sufficiently accurate to be used in technical calculations.

e. *Symbols.*

The symbols are those used by Glauert (lit. 1). The suffices I and II indicate respectively, whether the quantity considered relates to the airscrew the properties of which are known or to that for which they are to be calculated. p is the ratio between the product Bc of the number of blades and the blade width for both propellers (see (1)).

BERICHT A. 511.

Die aerodynamischen Eigenschaften von Schraubenpropellern bei Aenderung der Breite und (oder) Zahl der Flügel.

Zusammenfassung.

a. *Einführung (Punkt 1).*

Ein Verfahren wird angegeben zur Berechnung der aerodynamischen Eigenschaften eines Propellers, wenn diese Eigenschaften für einen anderen gegeben sind, der sich von dem erstgenannten nur in Breite und (oder) Zahl der Flügel unterscheidet.

b. *Berechnungsverfahren (Punkt 2).*

Zur Ableitung des Verfahrens wird ausgegangen von der Theorie des Schraubenpropellers in der von Glauert (Lit. 1) gegebenen Form. Angefangen wird mit der Betrachtung zweier ähnlicher Elemente der beiden Schrauben bei gleichem Anstellwinkel und gleicher relativer Geschwindigkeit (siehe Fig. 1).

Die Beziehungen zwischen den entsprechenden Werten von V/nD , des Schubes dT und des Drehmoments dQ sind bezw. in (12), (4) und (5) gegeben. Diese Resultate sind nicht exact gültig für den ganzen Propeller, zur Beseitigung dieser Schwierigkeit werden die Konstanten C und C' eingeführt. In dieser Weise bekommt man die in Punkt 2f gegebenen Resultate.

c. *Anwendung auf experimentelle Resultate (Punkt 3).*

Das Verfahren wurde angewandt auf die Resultate einer Anzahl Versuchsreihen mit Propellern, die nur Unterschiede in Bc (Produkt von Zahl und Breite der Flügel) zeigten. Innerhalb dieser Reihen kamen teilweise grosse Unterschiede in Bc vor. Für jede Reihe wurden die Resultate auf einen Wert von Bc reduziert. Die Konstanten C und C' wurden dabei stets gleich eins angenommen. Die Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den direkt gemessenen Werten war befriedigend (siehe Fig. 2 bis 5).

d. *Schlussfolgerungen (Punkt 4).*

Das Verfahren gibt für Schraubenpropeller üblicher Form Resultate, die genau genug sind, um sie für technische Berechnungen zu gebrauchen.

e. *Formelzeichen.*

Die benutzten Formelzeichen stimmen mit denen von Glauert (Lit. 1) überein. Die Zeiger I und II geben bzw. den Propeller an, dessen Eigenschaften gegeben sind und den Propeller, dessen Eigenschaften berechnet werden sollen. p ist das Verhältnis der Werte des Produktes Bc beider Propeller.

RAPPORT A 511.

Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart Amsterdam.

De aerodynamische eigenschappen van schroeven bij verandering van bladbreedte en (of) aantal bladen

door

Ir. C. KONING. ¹⁾

In deeling.

1. Inleiding. 2. Afleiding van de omrekeningsmethode. a. Overzicht. b. Notaties. c. De grootheden V/nD , dT en dQ voor een element. d. De waarde van V/nD voor de geheele schroef. e. De coëfficiënten k_T , k_Q en η voor de geheele schroef. f. Samenvatting van de omrekeningsformules. 3 Toepassing van de omrekeningsmethode op experimentele gegevens. a. Algemeen. b. Mogelijke oorzaken van verschillen tusschen gemeten en berekende uitkomsten. c. Schroeven met verschillende bladbreedte. d. Schroeven met verschillende bladbreedte en verschillend aantal bladen. e. Schroeven met verloopenden spoed. 4. Conclusies.

1. Inleiding.

Het berekenen van de prestaties van een vliegtuig kan, zooals de ervaring heeft geleerd, alleen dan betrouwbare resultaten opleveren, wanneer de aerodynamische eigenschappen van de te gebruiken schroef (of schroeven) met voldoende nauwkeurigheid bekend zijn. Het door berekening bepalen van deze eigenschappen voor een gegeven schroef is mogelijk, echter tijdrovend, zoodat men zal trachten zooveel mogelijk gebruik te maken van beschikbare experimentele gegevens. Deze kunnen echter niet altijd rechtstreeks ontleend worden aan de bestaande literatuur. Voor de meest gebruikelijke typen van schroeven zijn weliswaar betrouwbare uitkomsten van proeven gepubliceerd, die, wat spoed (bladverstelling) en V/nD betreft, het geheele benodigde gebied omvatten, doch meestal slechts met tweebladige schroeven met één bepaalde bladbreedte uitgevoerd werden. De vraag doet zich dan voor of, en zoo ja op welke wijze, uit deze resultaten de eigenschappen afgeleid kunnen worden voor een schroef, die van de gegevene alleen verschilt in bladbreedte en (of) aantal bladen.

De meest voor de hand liggende en aanvankelijk gevolgde weg is hier uit metingsgegevens voor overigens gelijke schroeven met verschillende bladbreedten en aantallen bladen zuiver empirische omrekeningsfactoren af te leiden. De vraag in hoeverre deze ook bij andere typen van schroeven gebruikt mogen worden, blijft hierbij echter onbeantwoord. Het is daarom beter gebruik te maken van een omrekeningsmethode, die gebaseerd is op de theorie van de schroef. Een dergelijke methode wordt in het volgende ontwikkeld (punt 2). Bij de afleiding zal blijken (zie punt 2d), dat zij niet geheel vrij gehouden kan worden van empirische gegevens. In de omrekeningsformules komen daardoor twee constanten voor, waarvan de waarden voorloopig onbekend zijn. Zoowel om deze waarden te bepalen, als om een indruk te krijgen van de bruikbaarheid van de omrekeningsmethode, werd zij toegepast op experimentele resultaten voor een aantal stellen onderling vergelijkbare schroeven (punt 3). Hierbij bleek, dat voor een zeer omvangrijk gebied bedoelde constanten steeds dezelfde waarden hadden (zie ook punt 4).

Op een beperking van het toepassingsgebied van de omrekeningsmethode in den hier gegeven vorm dient gewezen te worden. Daar zij gebaseerd is op de theorie van de lichtbelaste stuwschroef, mag zij dus niet zonder meer toegepast worden op schroeven, die niet als zoodanig beschouwd mogen worden. Beslissend is hiervoor de grootte van de toename van de snelheid in het vlak van de schroef tengevolge van de door deze op de lucht (c.q. het water) uitgeoefende krachten. Mag deze toename, vergeleken bij de oorspronkelijke doorstroomsnelheid, als klein beschouwd worden, dan geldt de schroef

¹⁾ De in punt 3 besproken gegevens werden uitgewerkt door J. Bellaar Spruyt en Ir. H. A. W. Bakx gedurende den tijd, dat zij als volontair voor de R. S. L. werkzaam waren.

als „lichtbelast”, anders als „zwaarbelast”. Terwijl normale vliegtuigschroeven over het geheele praktisch van belang zijnde gebied van V/nD tot de lichtbelaste gerekend mogen worden, is dit voor scheepsschroeven niet het geval. Pogingen om de omrekeningsmethode zoodanig aan te vullen, dat zij ook voor zwaarbelaste schroeven toegepast mag worden, leidden tot nu toe niet tot bevredigende resultaten.

2. Afleiding van de omrekeningsmethode.

a. Overzicht.

De omrekeningsmethode is bedoeld om de oplossing te geven van het volgende, boven reeds aangeduide, vraagstuk:

Gegeven zijn twee schroeven, die alleen in bladbreedte en (of) aantal bladen verschillen. Alle overige gegevens, die voor de aerodynamische eigenschappen van belang zijn, als spoed-diameter-verhouding, c.q. spoedverloop, profieleigenschappen en omtreksvorm van de bladen, zijn voor beide dezelfde. Bekend zijn voor de eene schroef trek-coëfficiënt, momenten-coëfficiënt en nuttig effect als functie van V/nD . Gevraagd deze grootheden voor de andere schroef te berekenen.

Ter vereenvoudiging van de redeneering wordt in het volgende aangenomen, dat ook de middel-lijnen van beide schroeven gelijk zijn. Dit geeft echter geen beperking, daar, uitgedrukt in coëfficiënten, de aerodynamische eigenschappen van gelijkvormige schroeven dezelfde zijn, voor zoover althans mogelijk schaafeffect buiten beschouwing gelaten wordt.

Bij de afleiding van de omrekeningsmethode wordt uitgegaan van de theorie van de lichtbelaste stuwschroef, zooals deze door Gla u e r t gegeven is. In het volgende zal de theorie in dezen vorm kortweg met den naam „schroeven-theorie” aangeduid worden. Onder verwijzing naar de bestaande literatuur (lit. 1, 2)²⁾ zullen haar aannamen en uitwerking hier bekend verondersteld worden.

Om te beginnen worden nu de overeenkomstige, d.w.z. op denzelfden afstand uit het hart gelegen, bladelementen vergeleken bij een zoodanigen toestand, dat voor beide zoowel de invalshoek als de relatieve snelheid ten opzichte van de lucht dezelfde zijn. Deze toestand kan voor ieder stel elementen, op zichzelf beschouwd, steeds verwezenlijkt worden door passende keuze van de omtreks- en voorwaartsche snelheid. Uitgaande van een gegeven toestand voor de eene schroef kunnen deze snelheden voor de andere berekend worden, waaruit dan de waarde van V/nD voor deze laatste volgt. Tusschen de bijdragen, die het beschouwde element voor beide schroeven in trek en moment levert, bestaan dan eenvoudige betrekkingen (punt 2c).

Na deze beschouwing over een element volgt de overgang op de geheele schroef. Hierbij blijkt, dat, streng genomen, de voor het element verkregen uitkomsten in het algemeen niet geldig zijn voor de geheele schroef. Aan dit bezwaar werd tegemoet gekomen door invoering van de empirische constanten C en C' , waarna dan gevonden wordt op welke wijze V/nD (punt 2d) en trek, moment en nuttig effect (punt 2e) veranderen bij overgang van de eene schroef op de andere.

b. Notaties.

Teneinde de afleiding van de omrekeningsmethode zoo goed mogelijk te doen aansluiten aan een bestaande verhandeling over schroeventheorie, zijn hier de door Gla u e r t (lit. 1) gebezigde notaties overgenomen. Zij wijken in een enkel punt af van de bij de R. S. L. gebruikelijke. Aan het einde van het rapport zijn zij in een overzicht verzameld.

Grootheden, die betrekking hebben op de schroef, waarvan de aerodynamische eigenschappen bekend zijn, krijgen den index I; die voor de schroef, waarvoor deze berekend moeten worden, den index II. Is de waarde van een grootheid in beide gevallen dezelfde, dan blijft de index achterwege, evenals in formules, die een meer algemeene beteekenis hebben en waarin geen grootheden naast elkaar voorkomen, die betrekking hebben op beide schroeven.

De verhouding tusschen het product van aantal bladen en bladbreedte voor beide schroeven wordt aangegeven met p , dus

$$B_{II} c_{II} = p B_I c_I \quad (1)$$

c. De grootheden V/nD , dT en dQ voor een element.

Onder „element van de schroef” wordt hier verstaan het deel van de schroefbladen gelegen tusschen de cilinders met straal r en $r+dr$. Het bestaat dus uit de elementen van alle bladen. Een-voudigheidshalve is in fig. 1 voor iedere schroef slechts het element van één blad aangegeven. Uit de aanname, dat voor het beschouwde element van beide schroeven zoowel de invalshoek α als de relatieve snelheid W dezelfde waarde hebben, volgt onmiddellijk, daar ook de spoedhoek θ dezelfde is:

1° zoowel de axiale als de tangentiale component van de relatieve snelheid zijn gelijk;

2° de richting van de op het element van één blad werkende kracht is dezelfde;

3° de grootte van deze kracht is evenredig met de bladbreedte c .

Zooals uit de schroeventheorie bekend is, zijn de onder 1° genoemde componenten niet gelijk aan de voorwaartsche snelheid V en de omtrekssnelheid $r\Omega$ van het element ten opzichte van de lucht op grooten afstand vóór de schroef. Deze laatsten moeten resp. met $(1+a)$ en $(1-a')$ vermenig-

²⁾ De aanwijzingen lit. verwijzen naar de literatuuropgave aan het einde van dit rapport.

vuldigd worden, teneinde rekening te houden met het feit, dat de beweging van de lucht door de door de schroef uitgeoefende krachten beïnvloed wordt. Zodoende volgt uit 1°:

$$V_I(1+a_I) = V_{II}(1+a_{II}) \quad (2)$$

$$r\Omega_I(1-a_I') = r\Omega_{II}(1-a_{II}') \quad (3)$$

Uit 2° en 3° samen volgt, dat niet alleen de grootte van de op een bladelement werkende kracht, doch ook de componenten van deze in axiale en tangentiale richting evenredig zijn met c .

Neemt men alle bladelementen, waaruit het beschouwde element van de schroef bestaat, samen en houdt men rekening met (1), dan blijkt, dat tusschen de bijdragen in trek en moment geleverd door dit element voor beide schroeven de betrekkingen bestaan:

$$dT_{II} = p dT_I \quad (4)$$

$$dQ_{II} = p dQ_I \quad (5)$$

Naast het door (2) gegeven verband tusschen V en a voor beide schroeven, kan nu nog een tweede betrekking tusschen deze grootheden gevonden worden. De trek dT van het element

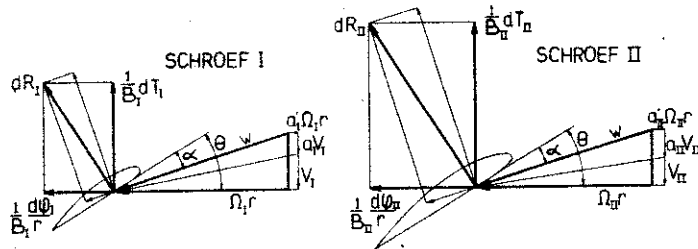


Fig. 1. Overeenkomstige elementen van de bladen van de schroeven I en II.

van de schroef is namelijk gelijk aan de toename van de hoeveelheid van beweging van de lucht, die per tijdseenheid door den tusschen r en $r+dr$ gelegen ring van den schroefcirkel stroomt. De massa van de per tijdseenheid doorgestroomde lucht is $\rho 2\pi r dr V(1+a)$, de snelheidstoename op zeer grooten afstand achter de schroef, zooals de theorie van de lichtbelaste schroef leert, $2aV$. Zodoende is:

$$dT = 4\pi r \rho V^2(1+a) a dr \quad (6)$$

Onder gebruikmaking van (4) en bij weglating van hier niet ter zake doende factoren volgt hieruit:

$$p V_I^2(1+a_I) a_I = V_{II}^2(1+a_{II}) a_{II}. \quad (7)$$

De vergelijkingen (2) en (7) kunnen nu naar V_{II} en a_{II} worden opgelost, dit levert voor V_{II} :

$$V_{II} = \{1 - (p-1)a_I\} V_I. \quad (8)$$

Op analoge wijze wordt naast (3) als tweede betrekking voor Ω en a' gevonden.

$$p V_I \Omega_I(1+a_I) a_I' = V_{II} \Omega_{II}(1+a_{II}) a_{II}', \quad (9)$$

waaruit, in combinatie met (2) en (3), afgeleid kan worden

$$\Omega_{II} = \Omega_I \{1 + (p-1)a_I'\}. \quad (10)$$

Tusschen het toerental per seconde n en de hoeksnelheid Ω van de schroef bestaat de betrekking

$$\Omega = 2\pi n. \quad (11)$$

Zodoende volgt uit (8) en (10) als waarde van $V_{/nD}$ voor het element van schroef II:

$$(V_{/nD})_{II} = \frac{1 - (p-1)a_I}{1 + (p-1)a_I'} (V_{/nD})_I. \quad (12)$$

De grootte van de door het element van schroef II geleverde bijdragen in trek en moment dT_{II} en dQ_{II} zijn door (4) en (5) gegeven, terwijl a_I en a_I' op bekende wijze uit dT_I en dQ_I berekend kunnen worden.

d. De waarde van $V_{/nD}$ voor de geheele schroef.

De in het vorige punt voor een element afgeleide uitkomst kan slechts in een bijzonder geval, en wel dat, waarin a_I en a_I' voor alle elementen dezelfde waarde hebben, onmiddellijk toegepast worden voor een geheele schroef. Immers alleen dan zal, zooals uit (12) blijkt, voor alle elementen éézelfde waarde van $(V_{/nD})_{II}$ gevonden worden, die nu ook voor de geheele schroef geldt.

Voor een willekeurige schroef is de overgang van het element naar de geheele schroef minder eenvoudig. Voor het oogenblik veronderstellende, dat dT_I en dQ_I voor ieder element bekend zijn, kunnen, voor ieder element afzonderlijk, a_I en a_I' berekend en daarna $(V_{/nD})_{II}$ bepaald worden. In het algemeen zal deze berekening echter leiden tot uitkomsten voor deze laatste grootheid, die, bij één waarde van $(V_{/nD})_I$, niet voor alle elementen dezelfde zijn. Dit beteekent een toestand, die mechanisch niet te verwezenlijken is. Bovendien zal zich meestal het bijkomstige bezwaar voordoen, dat in tegenstelling met de bovengemaakte veronderstelling de verdeling van T_I en Q_I over de straal niet bekend is.

Deze bezwaren worden nu op de volgende wijze ontgaan. Inplaats van de in (12) voorkomende grootheden a_I en a_I' worden Ca_I en $C'a_I'$ ingevoerd, zoodat de omrekeningsformule voor $V_{/nD}$ voor de geheele schroef wordt:

$$(V_{/nD})_{II} = \frac{1 - (p-1)Ca_I}{1 + (p-1)C'a_I'} (V_{/nD})_I \quad (13)$$

Hierin zijn dan a_I en a_I' de waarden, die voor deze grootheden uit trek en moment van de geheele schroef berekend worden, onder aanname dat zij over den geheelen schroefcirkel constant zijn.

C en C' zijn constanten, die in beginsel afhankelijk zijn van den vorm van de schroef en door toepassing van de omrekeningsmethode op uitkomsten van proeven bepaald moeten worden.

Ter rechtvaardiging van deze gang van zaken kan hier het volgende opgemerkt worden. De ideale schroef volgens Froude heeft over den geheelen schroefcirkel een constante waarde van a. De gebruikelijke schroeven geven vrij hoge waarden van het nuttig effect, hetgeen er op wijst, dat zij niet al te ver verwijderd zijn van dit ideaal en bijgevolg a niet al te zeer van een gemiddelde waarde zal afwijken. De invloed van dergelijke afwijkingen wordt dan bovendien in meerdere of mindere mate gecompenseerd door de invoering van de constante C. Over het verloop van a' bestaat minder zekerheid. Deze grootte is echter klein en in de berekening van ondergeschikt belang, zoodat mogelijke afwijkingen van het gemiddelde weinig invloed zullen hebben. Overigens kan de toelaatbaarheid der ingevoerde aanname het beste beoordeeld worden door de omrekeningsmethode aan experimentele uitkomsten te toetsen (zie punt 3). De in (13) voorkomende grootheden a en a' worden als volgt berekend.

Uit de uitdrukking (6) voor de trek van het element volgt door integratie over den straal en onder aanname dat a constant is:

$$T = \int_0^{D/2} dT = 4\pi \rho V^2 (1+a) a \int_0^{D/2} r dr = \frac{1}{2} \pi \rho V^2 D^2 (1+a) a$$

of na invoering van de trekcoëfficiënt k_T :

$$k_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{V}{nD} \right)^2 (1+a) a.$$

Opgelost naar a levert dit

$$a = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\pi} k_T \left(\frac{V}{nD} \right)^2} \right\}. \quad (14)$$

Op soortgelijke wijze wordt voor a' gevonden:

$$Q = \int_0^{D/2} dQ = 4\pi \rho \Omega V (1+a) a' \int_0^{D/2} r^3 dr = \frac{1}{16} \pi \rho \Omega V D^4 (1+a) a'$$

$$k_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5} = \frac{1}{8} \pi^2 \frac{V}{nD} (1+a) a'$$

$$a' = \frac{8 n D}{\pi^2 V} \frac{k_Q}{1+a}. \quad (15)$$

e. De coëfficiënten k_T , k_Q en η voor de geheele schroef.

Voor de berekening van de coëfficiënten wordt nu aangenomen, dat voor overeenkomstige toestanden van de beide schroeven naast (13) ook de verdere in punt 2c voor het element afgeleide betrekkingen gelden. Hierin wordt dan weer a_I vervangen door $C a_I$ en a_I' door $C' a_I'$. Voor trek en moment volgt nu onmiddellijk uit (4) en (5):

$$T_{II} = p T_I \quad (16)$$

$$Q_{II} = p Q_I. \quad (17)$$

Bij de bepaling van de coëfficiënten moet er op gelet worden, dat bij overeenkomstige toestanden het toerental van de beide schroeven verschillend is. Rekening houdende met de boven besproken vervanging van a_I' door $C' a_I'$, wordt met behulp van (10) en (11) als toerental van schroef II gevonden:

$$n_{II} = n_I \{ 1 + (p-1) C' a_I' \}.$$

Als trek- en momentencoëfficiënt volgen dus uit (16) en (17):

$$k_{TII} = \frac{T_{II}}{\rho n_{II}^2 D^4} = \frac{p}{\{ 1 + (p-1) C' a_I' \}^2} k_{TI} \quad (18)$$

$$k_{QII} = \frac{Q_{II}}{\rho n_{II}^2 D^5} = \frac{p}{\{ 1 + (p-1) C' a_I' \}^2} k_{QI}. \quad (19)$$

Volgens definitie is het nuttig effect:

$$\eta = \frac{TV}{2\pi Qn} = \frac{1}{2\pi} \frac{k_T V}{k_Q n D}.$$

Invoering van (13), (18) en (19) hierin levert voor schroef II:

$$\eta_{II} = \frac{1}{2\pi} \frac{k_{TII}}{k_{QII}} \left(\frac{V}{nD} \right)_{II} = \frac{1}{2\pi} \frac{k_{TI}}{k_{QI}} \left(\frac{V}{nD} \right)_I \frac{1 - (p-1) C a_I}{1 + (p-1) C' a_I'} = \frac{1 - (p-1) C a_I}{1 + (p-1) C' a_I'} \eta_I \quad (20)$$

f. Samenvatting van de omrekeningsformules.

Wanneer de aerodynamische eigenschappen van schroef I als functie van V/nD bekend zijn, kunnen die van schroef II, welke van de voorgaande alleen in bladbreedte en (of) aantal bladen verschilt, berekend worden met behulp van de omrekeningsformules:

$$(V/nD)_{II} = A_1 (V/nD)_I$$

$$k_{TII} = A_2 k_{TI}$$

$$k_{QII} = A_2 k_{QI}$$

$$\eta_{II} = A_1 \eta_I$$

waarin

$$A_1 = \frac{1 - (p-1)C_{aI}}{1 + (p-1)C'_{a'I}}$$

$$A_2 = \frac{p}{\{1 + (p-1)C'_{a'I}\}^2}$$

$$a_I = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\pi} k_{TI} (nD/V)_I^2} \right\}$$

$$a_I' = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{nD}{V} \right)_I \frac{k_{QI}}{1 + a_I}$$

$$p = \frac{B_{II} c_{II}}{B_I c_I}.$$

C en C' zijn constanten, d.w.z. van V/nD onafhankelijke grootheden, die empirisch bepaald moeten worden. In het volgende zal echter blijken, dat, voor een groot gebied van gebruikelijke schroeven (zie punt 4), voor beide de waarde 1 aangenomen mag worden.

3. Toepassing van de omrekeningsmethode op experimentele gegevens.

a. Algemeen.

De in punt 2f gegeven omrekeningsformules werden toegepast op de uitkomsten van Amerikaanse en Engelsche proeven (lit. 4, 5). Deze bestonden uit metingen met groepen van onderling vergelijkbare schroefmodellen. Met „vergelijkbare schroeven” worden hier schroeven bedoeld, die alleen in bladbreedte en (of) aantal bladen verschillen. Uit iedere groep werd nu één schroef (of eenige schroeven met eenzelfde waarde van Bc) gekozen en uit de metingsuitkomsten van alle anderen de eigenschappen van eerstgenoemde berekend. Vergelijking van de berekende met de direct gemeten uitkomsten maakt het dan mogelijk de toelaatbaarheid van de omrekeningsmethode en de juistheid van de voor C en C' gekozen waarden te beoordelen.

Bij alle berekeningen werd $C=C'=1$ aangenomen. Gezien de omvangrijkheid van het materiaal, kunnen niet alle uitkomsten hier volledig gegeven worden. Naast een korte beschrijving van de schroeven, waarvoor de berekeningen uitgevoerd werden, zullen daarom slechts een beperkt aantal typische voorbeelden besproken worden.

b. Mogelijke oorzaken van verschillen tusschen gemeten en berekende uitkomsten.

Versillen tusschen de berekende en de gemeten waarden kunnen eenerzijds het gevolg zijn van experimentele onnauwkeurigheden, anderzijds kan hun oorzaak liggen in de bij de afleiding van de omrekeningsmethode ingevoerde aannamen.

Zowel de gegevens, waarvan bij de omrekening wordt uitgegaan als die, welke voor vergelijking gebruikt worden, zijn uitkomsten van metingen, zoodat hun nauwkeurigheid uit den aard der zaak beperkt is. Naast de metingsnauwkeurigheid in engeren zin, d.w.z. die, waarmede krachten, snelheden en toerentallen gemeten kunnen worden, moeten hier nog andere punten genoemd worden. De schroeven, waarmede de proeven uitgevoerd werden, heeten slechts in bladbreedte en (of) aantal bladen te verschillen. Daarnaast kunnen echter nog verschillen, b.v. in profielvorm en spoed, bestaan, die invloed op de eigenschappen van de schroef hebben. Dergelijke verschillen kunnen het gevolg zijn van de afwerking van de modellen, van de vervorming door centrifugaal- en luchtkrachten en, wanneer modellen gebruikt worden, die uit losse bladen opgebouwd zijn, van de instelling van deze. Ten slotte komt dan nog de invloed van eventuele op de metingsuitkomsten aangebrachte correcties, als die voor een abnormaal groote naaf (zie punt 3d) en voor beïnvloeding van de tunnelsnelheid door de werking van de schroef.

De oorzaken van afwijkingen, waarvoor de omrekeningsmethode verantwoordelijk gesteld moet worden, kunnen zoowel voortspuiten uit de aannamen van deze methode in engeren zin, als uit die van de schroeventheorie, waaruit zij is afgeleid en uit de keuze van de waarden voor de constanten C en C'. Na het voorgaande lijkt het niet noodig hierop nader in te gaan. Alleen één punt, dat de principiële zijde van de vraag naar de toepasbaarheid van de omrekeningsmethode in het geval van verschillend aantal bladen raakt, moet nader besproken worden.

Streng genomen geldt de schroeventheorie in den hier gebruikten vorm alleen voor schroeven met een oneindig groot aantal bladen. Bij eindig aantal bladen treedt het z.g. „tip-effect” op (zie lit. 3). Dit heeft een afname van de circulatie aan het uiteinde van de bladen en hierdoor ook van de trek van de schroef (bij vaste waarde van V/nD) tengevolge. Dit effect zal groter zijn, naarmate onder overigens gelijke omstandigheden het aantal bladen kleiner is en regelmatig met dit aantal verlopen.

c. Schroeven met verschillende bladbreedte.

De omrekeningsmethode werd het eerst toegepast op de uitkomsten voor een groep tweebladige schroeven, gegeven door D u r a n d (lit. 4). Deze schroeven, die hier, als in de oorspronkelijke publicatie, aangegeven zullen worden met de letters K, M, C en L, hadden constanten meetkundigen spoed en een spoed-diameter verhouding P/D van 0.7. De verhouding van de maximum-bladbreedte en de schroefmiddellijn was achtereenvolgens 0.066⁵(K), 0.077(M), 0.083⁵(C) en 0.100(L), zoodat de waarde van $(B_c/D)_{\max}$ van 0.133 tot 0.200 liep. Uit die van de schroeven K, M en L werden de eigenschappen berekend voor een schroef met $(B_c/D)_{\max}=0.167$, die dus overeenkwam met schroef C.

De resultaten van de berekening zijn in fig. 2 uitgezet op V/nD . De metingsuitkomsten voor schroef C, die dus dienen voor vergelijking met de berekende waarden, zijn met een getrokken lijn, die voor de overige schroeven met een stippellijn aangegeven.

De berekende waarden zijn alleen als punten gegeven, waarbij de teekens overeenkomen met die voor de schroef, waaruit zij afgeleid zijn. Hoewel niet noodig voor vergelijking, werden de oorspronkelijke metingsresultaten voor de schroeven K, M en L hier opgenomen om een indruk te geven van de grootte van de verschillen, die het gevolg zijn van de omrekening. De waarden voor het nuttig effect zijn weggelaten, omdat deze slechts een onoverzichtelijk beeld geven, daar de oorspronkelijke krommen reeds nagenoeg samenvallen. Bovendien zal, wanneer de overeenstemming voor k_T en k_Q behoorlijk is, dit ook voor η als hieruit afgeleide grootheid het geval moeten zijn.

Bij beschouwing van fig. 2 blijkt, dat de overeenstemming tusschen de berekende en de direct gemeten waarden bevredigend genoemd kan worden. De afwijkingen, die voorkomen, maken den indruk niet groter te zijn dan wat als experimenteele spreiding verwacht kan worden.

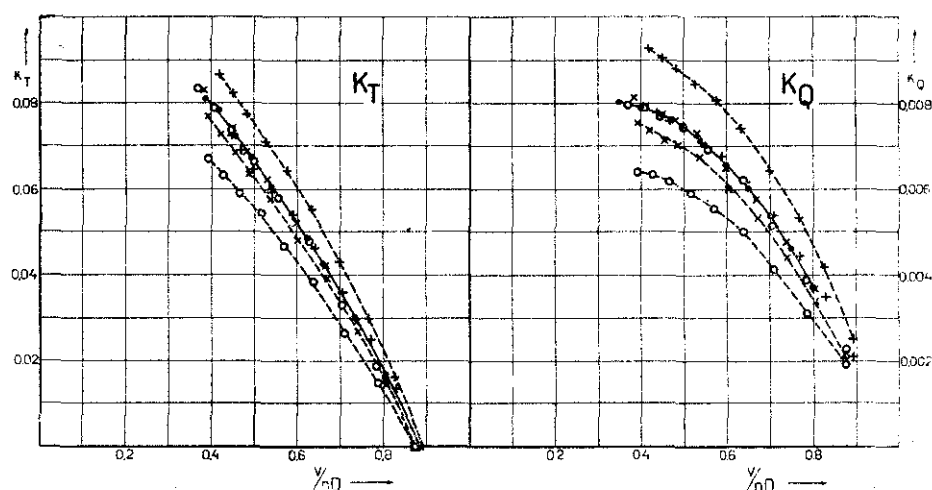


Fig. 2. Trekcoëfficiënt k_T en momente coëfficiënt k_Q voor 2-bladige schroeven met constanten spoed.

Gemeten waarden:

- — — — ○ : schroef K.
- × — — — × : schroef M.
- + — — — + : schroef L.
- — — — ● : schroef C.

Berekende waarden:

- : uit schroef K.
- × : uit schroef M.
- + : uit schroef L.

d. Schroeven met verschillende bladbreedte en verschillend aantal bladen.

Voor beoordeeling van de vraag in hoeverre de omrekeningsmethode ook gebruikt mag worden voor schroeven met verschillend aantal bladen, werd gebruik gemaakt van het uitvoerige materiaal gegeven door Fage c.s. (lit. 5). Dit omvat metingsresultaten voor een groot aantal schroeven met constanten meetkundigen spoed en daarnaast een aantal gevallen met verloopenden spoed. Alleen de eerstgenoemden zullen in dit punt besproken worden, de anderen in het volgende.

De gebruikte schroeven werden opgebouwd uit losse bladen, die aan een naaf van abnormaal groote middellijn bevestigd werden. Voor de invloed van deze op de trek werd een correctie aangebracht.

Voor spoed-diameter-verhoudingen P/D van 0.5 en 1.0 werden schroefbladen van 4 verschillende breedten gebruikt, waaruit een aantal 2-, 3-, 4-, en 6-bladige schroeven opgebouwd werden.

De oorspronkelijke notatie zal hier aangehouden worden, hierbij beteekenen a , b , c en d bladen met een verhouding tusschen maximum-breedte en schroefmiddellijn $(c/D)_{\max}$ van resp. 0.123, 0.082, 0.0615 en 0.041, terwijl een bijgevoegd getal het aantal bladen aangeeft, Zoo bestaat b.v. de schroef $b(3)$ uit 3 bladen met $(c/D)_{\max}=0.082$. De waarde van $(B_c/D)_{\max}$ loopt hier van 0.082 tot 0.328, terwijl er vier verschillende schroeven zijn, waarvoor deze grootheid 0.246 is.

Voor spoed-diameter-verhoudingen P/D van 0.3, 0.7 en 1.5 werden alleen 2- en 4-bladige schroeven, opgebouwd uit bladen b , onderzocht.

Op al deze gevallen werd met bevredigend resultaat de omrekeningsmethode toegepast. Alleen de uitkomsten voor $P/D = 1.0$ zullen hier als typisch voorbeeld gegeven worden.

Zooals boven reeds gezegd, zijn er vier schroeven, namelijk $a(2)$, $b(3)$, $c(4)$ en $d(6)$, waarvoor $(B_c/D)_{\max} = 0.246$ is. De verschillen tusschen de uitkomsten voor deze schroeven zijn hier van belang, omdat zij een aanwijzing geven welke mate van overeenstemming tusschen gemeten en berekende waarden hoogstens verwacht mag worden. Volgens de schroeventheorie in den hier gebruikten vorm zijn deze vier schroeven volkomen gelijkwaardig en zouden dus als resultaat van de metingen vier samenvallende krommen gevonden moeten worden. Zooals uit het in punt 3b besprokene volgt, kan tipeffect de oorzaak zijn, dat dit niet het geval is en een regelmatig verloop van de krommen met het aantal bladen tengevolge hebben. Bij beschouwing van de metingsresultaten (zie fig. 3 voor de schroeven $a(2)$, $b(3)$ en $c(4)$) blijkt nu, dat er weliswaar niet onbelangrijke

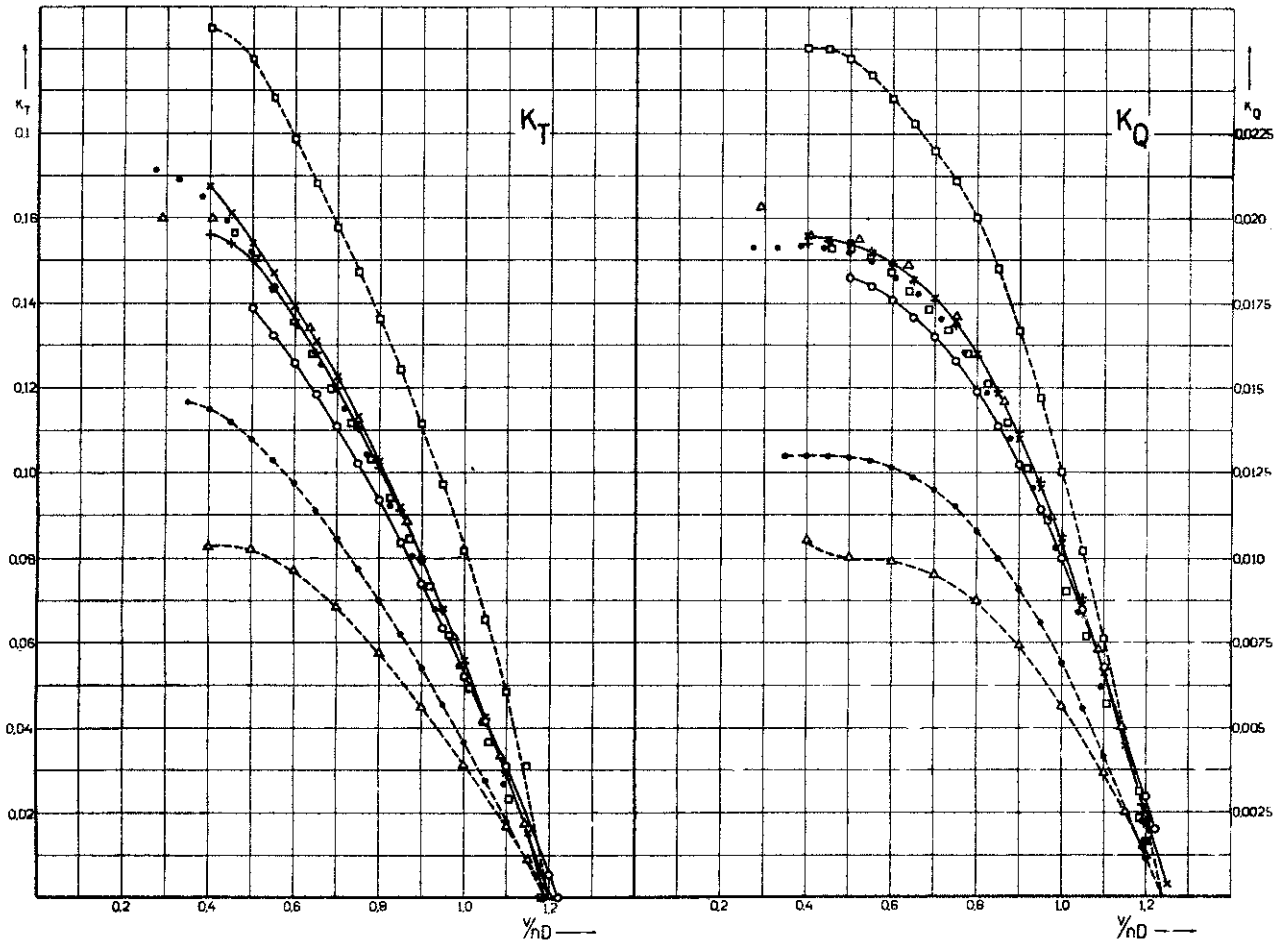


Fig. 3. Trekcoëfficiënt k_T en momentencoëfficiënt k_Q voor 2-, 3- en 4-bladige schroeven met constanten speed.

Gemeten waarden:

- — — □ : schroef $b(4)$.
- — — ● : schroef $b(2)$.
- △ — — △ : schroef $c(2)$.
- — — ○ : schroef $a(2)$.
- × — — × : schroef $b(3)$.
- + — — + : schroef $c(4)$.

Berekende waarden:

- : uit schroef $b(4)$.
- : uit schroef $b(2)$.
- △ : uit schroef $c(2)$.

verschillen bestaan, doch een regelmaat is niet aanwezig. De k_T -waarden voor $a(2)$ zijn lager dan die voor $b(3)$ en $c(4)$. Bij hoge waarden van V/nD vallen die voor de beide laatste praktisch samen, terwijl bij lagere waarden van deze grootte de resultaten voor $c(4)$ tusschen die van de beide anderen in liggen. Dit mag beschouwd worden als een aanwijzing, dat, zoo tipeffect hier al een rol speelt, de invloed van experimenteele onnauwkeurigheden toch overheerscht.

Voor alle schroeven met a -, b - en c -bladen wordt, zooals te verwachten was, k_T nul in de omgeving van één bepaalde waarde van V/nD . Ook voor de schroeven met d -bladen is dit het geval, de waarde van V/nD is hierbij echter een andere. Met het oog op deze onregelmatigheid, die aan afwerkingsonnauwkeurigheden of aan schaafeffect geweten moet worden, zullen beide groepen afzonderlijk beschouwd worden.

Voor beide groepen werden de resultaten omgerekend naar $(B_c/D)_{\max} = 0.246$. Voor de eerste moeten de uitkomsten van de berekening dus vergeleken worden met de metingsresultaten voor de schroeven $a(2)$, $b(3)$ en $c(4)$, voor de laatste met die van schroef $d(6)$.

In fig 3 en 4 zijn de uitkomsten op de in het punt 3c besproken wijze uitgezet. Fig. 3 toont voor de schroeven met a -, b - en c -bladen een spreiding van de punten, die weliswaar wat grooter is dan in het vroeger beschouwde geval, doch, met het oog op de boven besproken waarschijnlijk

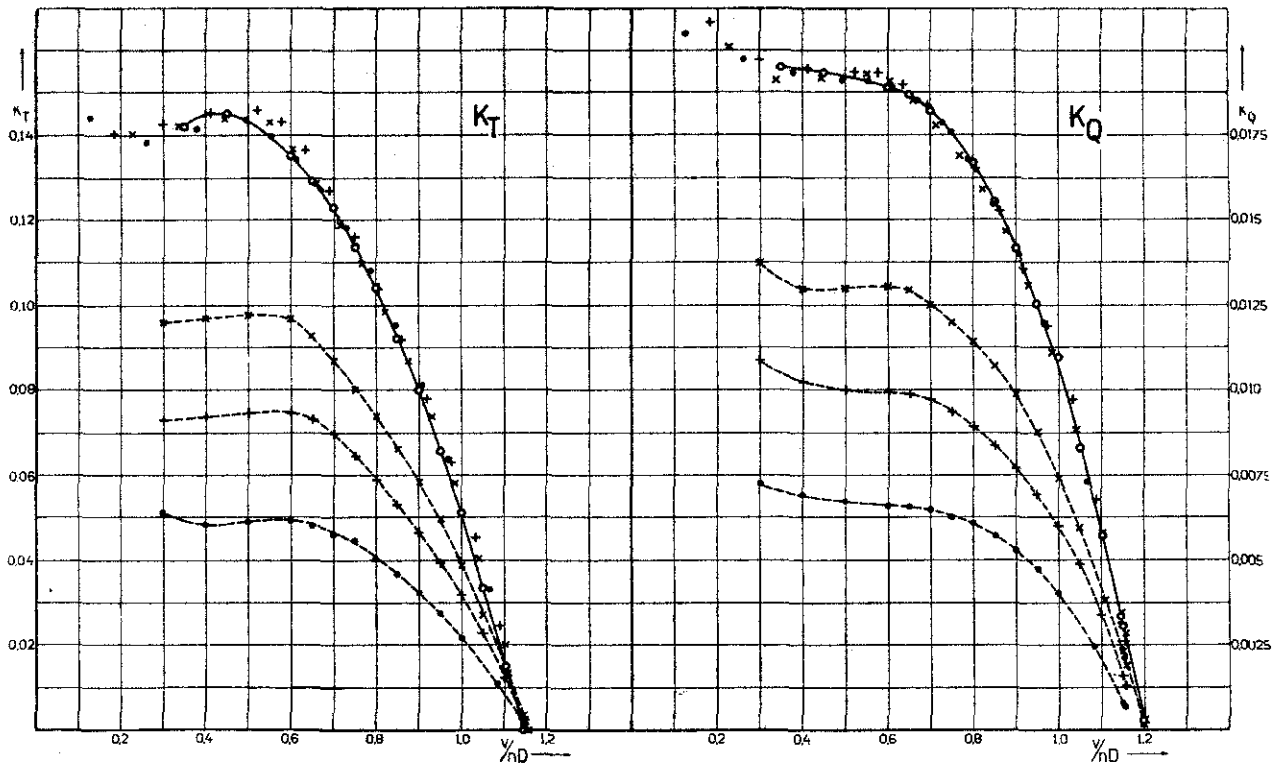


Fig. 4. Trekcoëfficient k_T en momentencoëfficient k_Q voor 2-, 3-, 4- en 6-bladige schroeven met constanten speed.

Gemeten waarden:
 ● — — ● : schroef $d(2)$,
 + — — + : schroef $d(3)$,
 × — — × : schroef $d(4)$,
 ○ — — ○ : schroef $d(6)$.

Berekende waarden:
 ● : uit schroef $d(2)$,
 + : uit schroef $d(3)$,
 × : uit schroef $d(4)$.

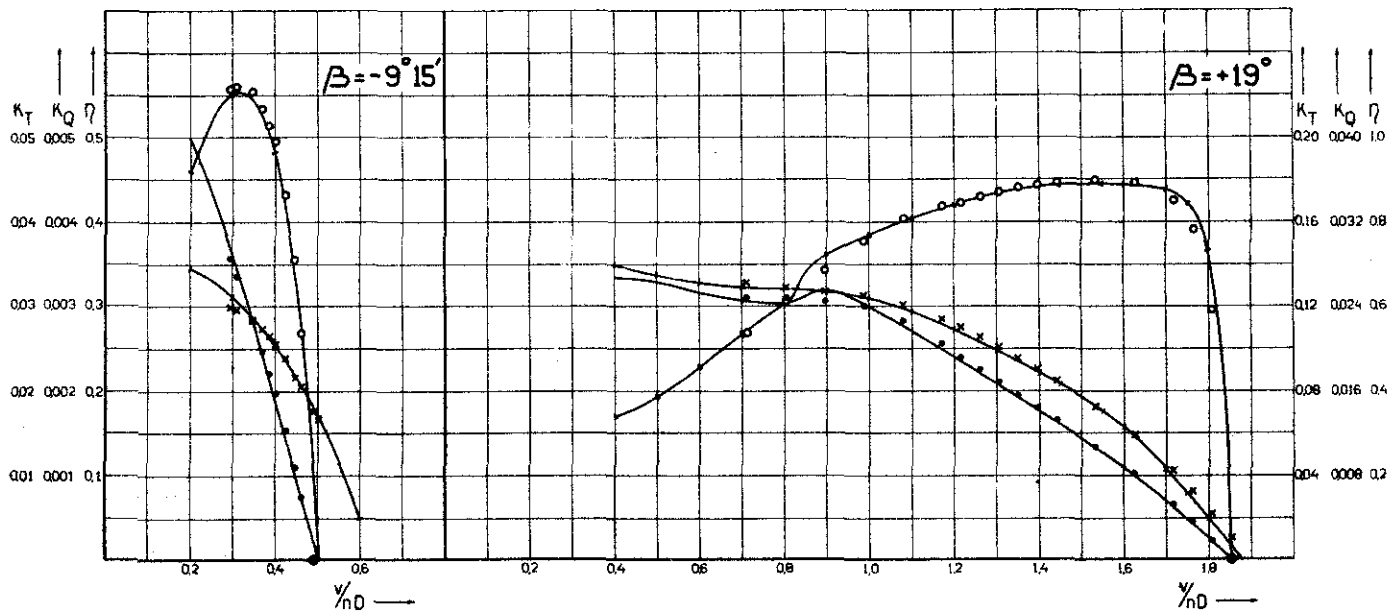


Fig. 5. Trekcoëfficient k_T , momentencoëfficient k_Q en nuttig effect η voor 2- en 4-bladige schroeven met verloopenden speed.

Gemeten waarden:
 ● — — ● : k_T ,
 | — — | : k_Q ,
 || — — || : η .

Berekende waarden:
 ● : k_T ,
 × : k_Q ,
 ○ : η .

vrij groote experimenteele onnauwkeurigheid, toch wel toelaatbaar lijkt. Bij de in fig. 4 gegeven uitkomsten voor de schroeven met d -bladen is de overeenstemming tusschen gemeten en berekende resultaten bevredigend. Dit is van belang, omdat bij deze schroeven zeer groote verschillen in aantal bladen bestaan, zoodat er uit blijkt, dat hier het tipeffect toepassing van de omrekeningsmethode niet in den weg staat.

In de overige hier niet nader besproken gevallen vertoonden de uitkomsten een soortgelijk karakter. Dit leidde tot de conclusie, dat, voor schroeven van het hier beschouwde type, de omrekeningsmethode ook toegepast mag worden bij verandering van het aantal bladen of groote wijzigingen in B_c . Zij levert dan resultaten op van voldoende nauwkeurigheid om hen in technische berekeningen te mogen gebruiken.

e. Schroeven met verlopenden spoed en verschillend aantal bladen.

De in punt 3c en d besproken uitkomsten hadden betrekking op schroeven met constanten meetkundigen spoed. De mogelijkheid bestaat, dat bij schroeven met verlopenden spoed de invloed van het niet constant zijn van a (vergelijk punt 2d) zich ernstiger zal doen gevoelen en de bruikbaarheid van de omrekeningsmethode zal beïnvloeden. Het was dus van belang dergelijke gevallen nader te beschouwen.

Het in het vorige punt besproken onderzoek van Fage c.s. (lit. 5) levert hiervoor bruikbaar materiaal. Hierbij werden namelijk ook metingen uitgevoerd met een aantal 2- en 4-bladige schroeven met ten deele sterk veranderlijken spoed. Deze werden verkregen door bij schroeven, waarvan de spoed aanvankelijk constant en $P/D=0.7$ was, de bladen in hun geheel te draaien. Dit werd uitgevoerd voor de schroeven $b(2)$ en $b(4)$, de verdraaiingshoek β liep hierbij van $-9^\circ 15'$ tot $+19^\circ$. Voor iederen verdraaiingshoek werden dus twee schroeven onderzocht, die gelijke bladbreedte hadden en alleen in aantal bladen verschilden.

Ook in deze gevallen waren de resultaten, verkregen door de eigenschappen van de 2-bladige schroeven te berekenen uit die van de 4-bladige, bevredigend. Als voorbeeld zijn hier in fig. 5 de uitkomsten voor de twee uiterste gevallen, namelijk voor $\beta = -9^\circ 15'$ en $\beta = +19^\circ$ gegeven. In het eerste geval verliep de verhouding meetkundige spoed tot middellijn P/D van 0.487 voor $r/D=0.15$ tot 0.230 voor $r/D=0.45$, in het tweede van 1.377 tot 1.819 voor dezelfde afstanden uit het hart. De figuren wijken hierin zooverre van de voorgaande af, dat de waarden van k_T en k_Q voor één stel schroeven in één grafiek vereenigd zijn, waarin ook die voor η opgenomen zijn. Bovendien zijn hier de metingsresultaten voor de 4-bladige schroeven, die het uitgangsmateriaal voor de berekening vormden, weggelaten. Er moge op gewezen worden, dat ook hier de overeenstemming tusschen gemeten en berekende waarden behoorlijk is, niettegenstaande het feit, dat eerstgenoemden afkomstig zijn van 2-bladige, de anderen van 4-bladige schroeven.

4. Conclusies.

- a. De omrekeningsmethode, afgeleid in punt 2, leverde, met $C=C'=1$, voor een omvangrijk gebied van normale luchtschroeven bevredigende resultaten op.
- b. Dit gebied omvatte:
 - 1°. 2-bladige schroeven met constanten spoed, $P/D=0.7$, $(B_c/D)_{\max}$ van 0.133 tot 0.200 (punt 3c);
 - 2°. 2-, 3- en 4-bladige schroeven met constanten spoed, $P/D=0.5$ en 1.0, $(B_c/D)_{\max}$ van 0.123 tot 0.328 (punt 3d);
 - 3°. 2-, 3-, 4- en 6-bladige schroeven met constanten spoed, P/D 0.5 en 1.0, $(B_c/D)_{\max}$ van 0.082 tot 0.246 (punt 3d);
 - 4°. 2- en 4-bladige schroeven met constanten spoed, P/D 0.3, 0.7 en 1.5, $(B_c/D)_{\max}$ 0.164 en 0.328 (punt 3d);
 - 5°. 2- en 4-bladige schroeven met ten deele sterk verlopenden spoed, $(B_c/D)_{\max}$ 0.164 en 0.328 (punt 3e).

In al deze gevallen hadden de schroeven blad- en profielvormen, die als normaal aangemerkt kunnen worden.
- c. De overeenstemming tusschen direct gemeten en volgens de omrekeningsmethode berekende waarden bleek voldoende nauwkeurig te zijn om de uitkomsten van genoemde methode in technische berekeningen te mogen gebruiken.
- d. De indruk werd verkregen, dat bij overgang op een schroef met een ander aantal bladen, tipeffect de toepassing van de omrekeningsmethode geen ernstige bezwaren in den weg legt.
- e. De verkregen uitkomsten wettigen het vermoeden, dat de omrekeningsmethode ook toegepast mag worden voor andere schroeven, mits deze niet al te zeer van de boven onder b. aangegevene afwijken.

Notaties.

- a = axiale instroomfactor (zie punt 2c),
 a' = tangentielle instroomfactor (zie punt 2c),
 c = koorde van bladelement,
 $k_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4}$ = trekcoefficient,
 $k_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5}$ = momentencoefficient,
 n = toerental,
 $p = \frac{B_{II} c_{II}}{B_I c_I}$ = verhouding van „totale” bladbreedte,
 r = straal = afstand v. h. element tot hart v. d. schroef,
 A_1, A_2 = grootheden gedefinieerd in punt 2f,
 B = aantal bladen,
 C, C' = constanten (zie punt 2d),
 D = middellijn v. d. schroef,
 P = meetkundige spoed v. d. schroef,
 Q = moment,
 T = trekkracht,
 V = voorwaartsche snelheid v. d. schroef t.o.v. de lucht op grooten afstand ervoor.
 W = relatieve snelheid ter plaatse v. h. element (zie fig. 1),
 α = invalshoek v. h. element (zie fig. 1),
 η = nuttig effect v. d. schroef,
 ρ = massa-dichtheid v. d. lucht,
 θ = spoedhoek v. h. element (zie fig. 1),
 Ω = hoeksnelheid v. d. schroef.

De indices I en II geven resp. aan of de grootheid betrekking heeft op de schroef, waarvan de eigenschappen bekend zijn dan wel op die, waarvoor zij berekend moeten worden

LITERATUUR.

1. Glauert H. The elements of aerofoil and airscrew theory (Cambridge 1926).
 2. Glauert H. An aerodynamic theory of the airscrew. R.M. 786. Adv. Comm. f. Aeron. Techn. Report 1921-'22. Vol I, p. 238.
 3. Prandtl L. Zusatz zu: Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. z. Göttingen. Math.-phys. Kl. 1919, S. 193, ook in Prandtl-Betz. Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. (Göttingen 1927).
 4. Durand W. F. Tests on thirteen navy type model propellers. Report 237. Nat. Adv. Comm. f. Aeron. An. Report 1926, p. 153.
 5. Page A., Lock C. N. H., Howard R. G. and Bateman H. Experiments with a family of airscrews. Part I. R. M. 829. Adv. Comm. f. Aeron. Techn. Report 1922-'23. Vol I, p. 174.
-

RAPPORT B. 80.

Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

**Bestudeering van het geluid in vliegtuigen en de middelen om
dit te verminderen**

door

Dr. Ir. E. B. WOLFF en Ir. S. WYNIA.

RAPPORT B. 80.

Mise à l'étude de l'intensité du son dans les aéroplanes et les moyens pour la réduire.

Pour mesurer l'intensité du son dans les cabines des avions, le RSL choisit en 1929 l'instrument de Barkhausen. Les résultats montrent que la méthode de mesure dans laquelle on prend comme chiffre de comparaison l'intensité maximum d'un son qui est encore masqué par le bruit à mesurer est meilleure que celle dans laquelle on tâche de régler jusqu'à égalité d'intensité. La relation des chiffres trouvés avec les unités usuelles n'est pas bien connue. Un tableau et une graphique donnent quelques résultats.

REPORT B. 80.

A study on the noise in aeroplanes and the means to diminish it.

In order to measure the noise in aeroplanes the RSL choose in 1929 the Barkhausen sound-meter. Testing results showed that the masking method gave better figures, than it was possible to obtain with the equal loudness method. The relation of the numbers indicated by the Barkhausen meter to the usual units is not known exactly. A table and figure give some results.

BERICHT B. 80.

Studierung und Mittel den Lärm in Flugzeugen zu verringern.

Zur Messung der Schallstärke in Flugzeugen wurde in 1929 beim RSL der Geräuschmesser nach Barkhausen gewählt. Versuche zeigten, dass die Anwendung des Verdeckungs Verfahrens zu besseren Resultaten führte als durch Vergleich der Schallstärke. Das Verhältnis zu den üblichen Einheiten ist nicht genau bekannt. In einem Zahlentafel und Bild werden die Resultaten von einigen Messungen dargestellt.

RAPPORT B. 80.

Bestudeering van het geluid in vliegtuigen en de middelen om dit te verminderen.

Voor de meting van geluidsterkte in vliegtuigen werd in 1929 door den RSL een geluidsmeter volgens Barkhausen aangeschaft. Proeven toonden aan dat met dit instrument bij toepassing van de maskeeringsmethode meer constante resultaten verkregen werden, dan bij toepassing der gelijke sterktemethode. Het verband met de gebruikelijke eenheden is niet nauwkeurig bekend. Een tabel en grafiek geven enkele metingsresultaten.

RAPPORT B. 80.

Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Bestudeering van het geluid in vliegtuigen en de middelen om dit te verminderen

door

Dr. Ir. E. B. WOLFF en Ir S. WYNIA.

In *De Ingenieur* van 21 April 1933 is onder de „Korte technische berichten” een referaat opgenomen van een interessant artikel over bovengenoemd onderwerp, dat in de *Elektrische Nachrichten Technik* verschenen is. Daar dit onderwerp, nu het reizen per vliegtuig toeneemt, een groot aantal lezers zal interesseeren dan vroeger, lijkt het niet overbodig in het kort mee te deelen, wat op dit gebied in ons land wordt gedaan.

De studie van het geluid in het algemeen is in verschillende landen aangevat, zoowel met het doel om den aard van het geluid te analyseeren, als om de doorlaatbaarheid van bouwmaterialen voor geluid te bepalen en daardoor middelen te vinden om den overlast door overmatig geluid te verminderen.

In de eerste groep kunnen ook gerekend worden de studies over de voortplanting van het geluid, de terugkaatsing ervan, de nagalm in lokalen, enz.

Over de tweede groep werd kortgeleden voor den Bond van Materialenkennis een interessante voordracht gehouden door ir. A. Dubois.¹⁾

De apparaten voor de bestudeering van het geluid kunnen op verschillenden grondslag zijn opgebouwd. Men heeft toestellen, waarmee het acoustisch spectrum kan worden bepaald en de sterkte van het geluid van elk der golflengten wordt vastgelegd. Anderen vergelijken het waargenomen geluid met een geluidsbron van een bepaalde intensiteit en toonhoogte, terwijl ten slotte een methode kan worden toegepast, waarbij bepaald wordt bij welke intensiteit van het geluid van een bepaalde geluidsbron men deze nog juist wel of juist niet door het te meten geluid heen kan waarnemen.²⁾

Toen bij den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart de wenschelijkheid was gebleken om metingen te doen van het geluid in vliegtuigen (begin 1929), werd nagegaan welk apparaat voor dit doel het best geschikt zou zijn. De overwegingen, die bij de aanschaffing van dit apparaat golden, waren de volgende:

Het toestel moest gemakkelijk transportabel zijn, eenvoudig in bediening, niet gevoelig voor schokken en trillingen en moest ons in staat stellen om ook met groote tusschenpoozen vergelijkbare resultaten te verkrijgen. Verder mocht in verband met het beperkte budget van den R.S.L. de prijs niet te hoog zijn.

Na bestudeering der literatuur viel de keus op de door de firma Siemens & Halske in den handel gebrachte „Geräuschmesser nach Barkhausen”.



Fig. 1. Meettoestel systeem Barkhausen.

¹⁾ Ir. A. Dubois. Enkele beschouwingen over de methoden ter bestudeering van de acoustische eigenschappen van bouwmaterialen, gepubliceerd in het tijdschrift: *Bouwstoffen*.

²⁾ Voor een volledige beschrijving van de bestaande apparaten kan o.m. verwezen worden naar: H. Steuding. Messung mechanischer Schwingungen.

Het apparaat is geheel ondergebracht in een draagbaar kastje (fig. 1) en bestaat uit een op een bepaalde toonhoogte afgestelden electrischen geluidgever (zoemer), die door den stroom van een gewoon droog element wordt gevoed. Door inschakeling van weerstanden is de intensiteit van het geluid, dat in een bijgevoegde telefoon gehoord kan worden, regelbaar.

Men kan nu op twee manieren met dit toestel werken; men kan n.l. trachten de geluidsterkte van den zoemer, die met een der ooren wordt waargenomen, gelijk te maken aan het te meten geluid (gelijke sterkte-methode) of deze geluidsterkte zoo regelen, dat men den zoemer juist niet of juist wel waarneemt (maskeeringsmethode).

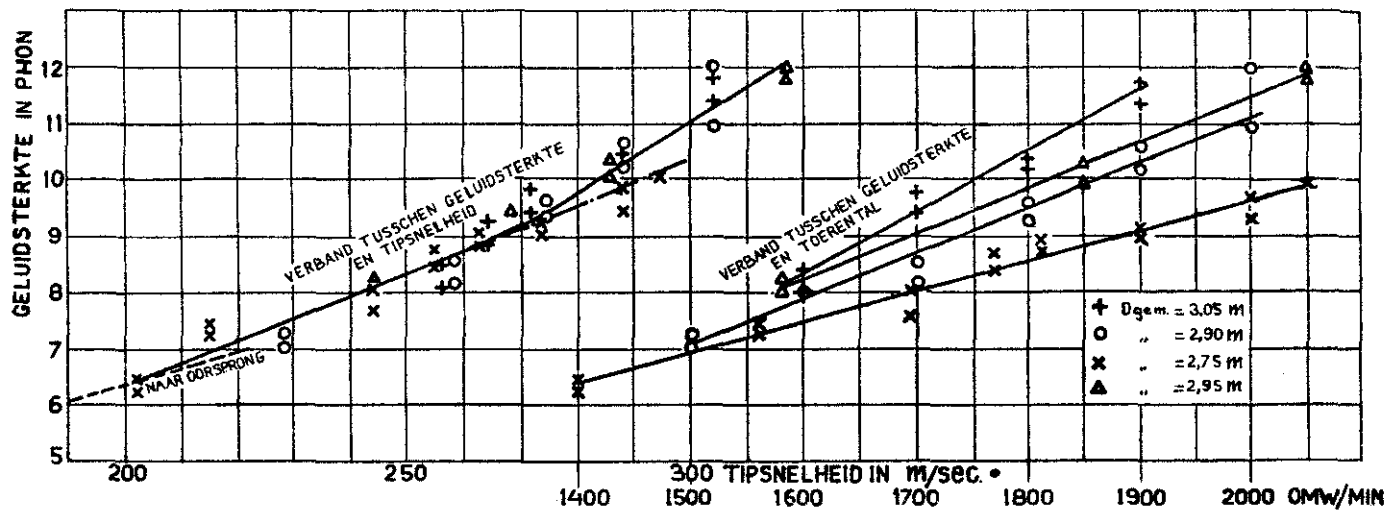


Fig. 2. Metingsresultaten.

De laatste methode bleek de beste resultaten op te leveren; bij verschillende in het laboratorium genomen proeven, waarbij door 2 waarnemers onafhankelijk van elkaar de geluidsintensiteit werd bepaald van een luchtschroef, waarvan de draaisnelheid nauwkeurig te regelen was, bleken de uitkomsten goed overeen te komen. Hierbij moet natuurlijk in acht worden genomen, dat het geluid, dat een luchtschroef veroorzaakt, van zeer gecompliceerden aard is en de nauwkeurigheid, die gewenscht wordt, niet overdreven mag worden. Verder moet rekening gehouden worden met het feit, dat de aanwijzing, die men met deze methode vindt, niet dezelfde is als die, welke met de methode, waarbij op gelijke geluidsterkte wordt aangestuurd, gevonden wordt. Daar men hier te doen heeft met een verschijnsel, waarvan de studie nog in het beginstadium is en waarbij men voorloopig tevreden is als het in de kajuit van een vliegtuig waargenomen geluid vergelijkenderwijs een flink stuk in intensiteit wordt teruggebracht, kan met de verkregen nauwkeurigheid genoeg worden genomen.

Een enkel woord moge nog gezegd worden over de eenheid van geluidsintensiteit. Toen de geluidsmeter in 1929 werd aangeschaft, was men internationaal nog niet tot overeenstemming gekomen over deze eenheid. Barkhausen³⁾ heeft zijn apparaat gebaseerd op de eigenschap, dat ons oor zoodanig gebouwd is, dat met toenemende geluidsterkte de waargenomen prikkel ongeveer toeneemt overeenkomstig de logarithme van de geluidsintensiteit (Wet van Weber-Fechner).

Uitgaande van de grenswaarde van het waarneembare geluid, welke als nulpunt van de schaal dient, werd door hem als schaalwaarde gekozen de logarithme met grondtal 2 van de verhouding tussen de gemeten geluidsintensiteit en deze grenswaarde. De zoo gedefinieerde eenheid werd Phon genoemd. Een geluid duizendmaal sterker dan de drempelwaarde was dus 9,97 Phon, daar $\log_2 1000 = 9,97$ bij een grondtal 2. Sindsdien is men in Amerika en Engeland en heden ook in Duitschland tot een andere schaalwaarde gekomen, waarbij het grondtal van de logarithme: 10 is; het principe is echter hetzelfde gebleven. De op het oogenblik meest gebruikte eenheid is de Decibel ($1/10$ Bel), waarbij als drempelwaarde een geluidsdruk van 10^{-3} dyn/cm² is genomen.

Men kan door een eenvoudige omrekening getallen, uitgedrukt in de Phon van Barkhausen of in de nieuwe Deutsche Phon (drempelwaarde $\sqrt{10} \times 10^{-4}$ dyn/cm²), omrekenen in Decibel, waarbij rekening is gehouden met een gemiddelde toonhoogte van 1000 Hz.

Sinds 1929 zijn door den R.S.L. een aantal geluidsmetingen onder verschillende omstandigheden in vliegtuigen van de K.L.M. verricht bij verschillend toerental van de schroeven, open en gesloten ramen, verschillende plaats van den waarnemer in de kajuit en verschillende inwendige bekleding van de kajuit.

Het is bij deze en bij in het buitenland genomen analoge proeven⁴⁾ gebleken, dat het voor het verminderen van het geluid van het grootste belang is, dat het lawaai in de eerste plaats aan de bron wordt aangetast.

Wijzigingen in den opbouw van den wand van de kajuit of in de inwendige aankleding, hoewel

³⁾ Ein neuer Schallmesser für die Praxis. Zeitschrift für technische Physik. 1926, p. 599.

⁴⁾ Zie voordracht dr. Davis. Journal Royal Aeronautical Society, 1931, p. 676 en verder Some of the factors which effect the measurement of sound absorption Journal of Research. Bureau of Standards. Aug. 1932, p. 175.

van groot belang, hebben secundaire beteekenis. Verder moet men komen tot gesloten vensters, waarbij dus de ventilatie op andere wijze dan door open ramen, moet plaats vinden. Het geluid wordt in hoofdzaak veroorzaakt door:

- 1°. den uitlaat der motoren,
- 2°. het geraas, veroorzaakt door de bewegende deelen, in het bijzonder de kleppen der motoren,
- 3°. het schroefgeluid.

Het door den uitlaat veroorzaakte geluid kan voor een groot deel worden geëlimineerd door geschikten vorm, lengte en plaatsing van uitlaatbuizen, het onder 2° genoemde geluid is bij de nieuwere motoren sterk verminderd.

Het geluid, dat door de luchtschroef wordt veroorzaakt, en in de kajuit wordt waargenomen, hangt voornamelijk samen met de snelheid van de schroeftippen en de plaats van het vlak der schroeven ten opzichte van de kajuit: de tipsnelheid van de schroeven kan worden verminderd door gebruik te maken van een kleineren schroefdiameter bij eenzelfde toerental, van motoren met reductie van het schroeftoerental of door schroeven met in de lucht verstelbaren spoed te nemen. Uit den aard der zaak hangt de keuze van de schroefsoort samen met allerlei andere factoren, zoodat in vele gevallen de wensch naar geluidsreductie op den achtergrond komt. Er is echter reden aan te nemen, dat bij volgende vliegtuigtypen meer aandacht aan dit deel van de geluidsproductie zal worden gegeven.

Zooals boven gezegd werd, komt de doorlaatbaarheid van den kajuitswand voor geluid op de tweede plaats bij het beschouwen van dit vraagstuk. De hoeveelheid geluid, die in de kajuit doordringt, kan echter verminderd worden door een geschikte keuze van materialen, waaruit de wanden opgebouwd worden en door de ramen gesloten te houden. In de laatst uitgevoerde typen van vliegtuigen wordt op verschillende wijze getracht verbetering te verkrijgen. Bij de vliegproeven zal door geluidsmeting nagegaan worden, of men op den goeden weg is en wat wij nog verder moeten nastreven.

Ten laatste vormt de aard van de bekleding aan den binnenwand van de kajuit, de opvulling der ruimte met stoelen, personen, enz. een factor, waar op het oogenblik nog niet veel aan te doen is.

Alvorens eenige metingsresultaten te vermelden, moet nogmaals de aandacht erop gevestigd worden, dat de metingen, die bij den R.S.L. geschieden en die uitsluitend ten doel hadden vergelijkende waarden voor de praktijk te verschaffen, uitgevoerd werden met de maskeeringsmethode; de verkregen uitkomsten zijn dus niet zonder meer vergelijkbaar met die, welke door de gelijke sterktemethode, die veelal bij nauwkeurige metingen wordt toegepast, worden verkregen. In de gevallen, waarmee wij te doen hebben, schijnt de gelijke sterktemethode ongeveer 20—30 Decibel hogere waarden te geven, waarbij dit getal natuurlijk sterk afhankelijk is van den aard van het geluid.

Tenslotte mogen eenige vergelijkende cijfers van metingsresultaten, welke in 3-motorige vliegtuigen in de kajuit werden bepaald, gegeven worden.

Uit deze tabel en uit de bijgevoegde graphische voorstelling (fig. 2) blijkt, dat voor eenzelfde vliegtuig het geluid sterker wordt naarmate de tipsnelheid van de schroef toeneemt; uit de grafiek zou afgeleid kunnen worden, dat het verband tusschen geluid en tipsnelheid rechtlijnig is en de lijn een knik vertoont bij ongeveer 270 m tipsnelheid. Het aantal waarnemingen is echter nog onvoldoende om dit met eenige zekerheid te kunnen vaststellen. Het verband tusschen geluid en toerental van den motor schijnt eveneens lineair te zijn, zooals in de grafiek tot uiting komt.

Het ligt in de bedoeling te trachten zoowel door verdere metingen, als door theoretische beschouwingen, onze kennis op dit gebied te vergrooten.

Uit het voorgaande moge echter blijken dat het met betrekkelijk eenvoudige middelen reeds mogelijk is op dit gebied voor de praktijk belangrijke gegevens te verzamelen.

Vliegtuig en motor	Schroeven	Omw/min	Tipsnelh. der schroeven m/sec	Geluid gem. in oude Phon maskeerings- methode
F. 8 Jupiter	2—bl. diam. 3,20 m	1650	276	8—8,5
F. 8 Wright	2—bl. diam. 3,15 m	1650	272	8
F. 12 Wasp	3—bl. diam. 2,59 m	1750	237	7,7
F. 12 Wasp	2—bl. „ 2,80 m	1750	256	8,5
F. 12 Wasp	2—bl. „ 2,90 m	1750	266	9,0
F. 12 Wasp	2—bl. „ 3,05 m	1750	280	9,7
F. 18 Wasp	3—bl. „ 2,59 m	1750	237	8,5
F. 18 Wasp	2—bl. „ 2,80 m	1750	256	9,6