VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN
VAN HET
NATIONAAL LUCHTVAARTLABORATORIUM AMSTERDAM

(Voortzetting van de reeks publicaties door den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart)

DEEL VIII — 1939

VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN
VAN HET
NATIONAAL LUCHTVAARTLABORATORIUM AMSTERDAM

(Voortzetting van de reeks publicaties door den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart)

DEEL VIII — 1939

INLEIDING.

Sinds de voltooiing van Deel VII van de Verslagen en Verhandelingen van den Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart in December 1934, konden slechts weinig rapporten voor publicatie gereed gemaakt worden. De snelle ontwikkeling van de luchtvaarttechniek was aanleiding dat steeds meer opdrachten voor onderzoek en voor daarmede samenhangende werkzaamheden aan onze organisatie werden gegeven en dat deze veelal op zoo korten termijn moesten worden voltooid, dat geen tijd overbleef voor het verzamelen in een publicatie van gedeelten, die van algemeen belang konden worden geacht.

In 1937 werd de Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, die een zuivere Rijksinstelling was, omgezet in de Stichting „Nationaal Luchtvaartlaboratorium", een organisatie, die bestuurd wordt door afgevaardigden van de betreffende Departementen van Algemeen Bestuur en van de particuliere belanghebbenden. Het Bestuur is samengesteld als volgt:

Ir. J. **Blackstone**, voorzitter, tevens gedelegeerde van het bestuur, benoemd door den Minister van Waterstaat,

Vice-Admiraal **A. Vos**, onder-voorzitter, benoemd door den Minister van Defensie,

Generaal-Majoor **P. W. Best**, benoemd door den Minister van Defensie,

Kolonel titulair der Artillerie KNIL Ir. **H. J. W. Verniers van der Loeff**, benoemd door den Minister van Koloniën,

Dr. **W. L. Groeneveld Meijer**, benoemd door den Minister van Economische Zaken.

Mr. **H. J. Smidt**, benoemd door den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen,

Dr. Ir. **M. Ch. Damme**, benoemd door den Minister van Binnenlandsche Zaken.

J. E. van Tijen, benoemd door de Vereeniging van Nederlandsche Vliegtuigfabrikanten,

S. F. W. Koolhoven, benoemd door de Vereeniging van Nederlandsche Vliegtuigfabrikanten,

G. Spit, benoemd door de N.V. Koninklijke Luchtvaart Maatschappij voor Nederland en Koloniën,

E. S. Enthoven, benoemd door de N.V. Koninklijke Nederlandsch-Indische Luchtvaart Maatschappij,

H. F. C. Holtz, benoemd door de Koninklijke Nederlandsche Vereeniging voor Luchtvaart,

C. J. P. Zaalberg, benoemd door den Minister van Waterstaat uit een voordracht van de Nijverheidsorganisatie TNO.

Het Bestuur wordt bijgestaan door een „Wetenschappelijke Commissie", bestaande uit:

Prof. Dr. Ir. **F. K. Th. van Iterson**, voorzitter,

Prof. Ir. **D. Dresden**, onder-voorzitter,

Prof. Dr. Ir. **W. F. Brandsma**,

Prof. Dr. **J. M. Burgers**,

Dr. **H. G. Cannegieter**.

Het personeel bestond op 1 Juli 1939 uit 80 personen, waarvan 22 met Hoogeschool-opleiding.

De uitkomsten der onderzoekingen en contrôlewerkzaamheden zijn vermeld in rapporten, die in den regel aan de opdrachtgevers of de belanghebbenden werden toegezonden. Van 1 Januari 1935 tot 1 Juli 1939 zijn de hierna genoemde aantallen rapporten opgesteld:

Vliegtuigen Afdeeling. V.	437	rapporten
Aerodynamische Afdeeling. A. . .	229	„
Sterkte Afdeeling. S.	100	„
Materialen Afdeeling. M.	139	„

Van deze rapporten bevat dit Deel VIII de navolgende: V 737, V 834, V 1032, V 1165, A 544, A 557, A 558, A 589, A 635, A 649, A 676, A 730, S 82, S 100 en S 156. De rapporten

A 544, A 558, V 834, V 1032 en S 82 werden eerst opgenomen in „De Ingenieur". In het genoemde *tijdsverloop zijn buitendien gepubliceerd:*

Koning, C. Influence of the propeller on other parts of the airplane structure. (Durand, Aerodynamic Theory, Vol. IV)

Koning, C. Beschouwingen over bij explosies optredende verschijnselen I. (Luchtmacht 6, 1937, blz. 249)

van Ewijk, L. J. G. The penetration of steel by soft solder and other molten metals at temperatures up to 400° C (The Journal of The Institute of Metals, Vol. LVI, 1935, blz. 241)

van Ewijk, L. J. G. Corrosie-bestendigheid van lichte legeeringen; anodische oxydatie; keuring der corrosie-bestendigheid. (De Ingenieur No. 33, 1938)

van der Maas, H. J. Segelflugschulung im Windenschleppflug in Niederland. (Mitteilungsblatt Nr. 4 der Internationalen Studienkommission für den motorlosen Flug (Istus) Aug. 1935, S. 29)

van der Maas, H. J. Etwas über die Messung von Flugeigenschaften. (Mitteilungsblatt Nr. 7 der Internationalen Studienkommission für den motorlosen Flug (Istus) April 1939, S. 16)

van der Maas, H. J. Enkele opmerkingen over de vliegtechnische ontwikkeling van militaire vliegtuigen. (Marineblad 1937)
Reisindrukken uit Amerika. (Het Vliegveld, Maart 1938).

De in dit deel opgenomen rapporten A 544, V 737 en V 834 zijn dadelijk na het gereedkomen afzonderlijk aan sommige belanghebbenden toegezonden. Verder zijn de volgende technische mededeelingen in het afgeloopen tijdsverloop rondgezonden:

V 885. Standaardwaarden.

V 1020. De grondslagen, de inrichting en het gebruik van moderne motorgrafieken.

V 1076. Bepaling van den meest gunstigen stand van de organen van de richtingsbesturing.

V 1090. Tropische standaardatmosfeer.

V 1136. De herleiding van aanwijzing van stuwdruksnelheidsmeters naar werkelijke snelheid met inachtname van de samendrukbaarheid van de lucht.

Aan belanghebbenden kan, voor zoover beschikbaar, op aanvraag een exemplaar dezer mededeelingen worden toegezonden.

De Directeur,
Dr. ir. E. B. WOLFF.

Amsterdam, October 1939.

ERRATA.

Rapport A 544.

Op blz. 7 staat in Tabel II als diameter van den tunnel te Warschau vermeld 2,05. Dit moet zijn 2,50. De bijbehoorende waarde van Re_{max} moet zijn: $1{,}6 \times 10^6$.

Rapport V 834.

Op blz. 30, 2de kolom, regel 4 van onder: II moet zijn III.

Op blz. 32, 1ste kolom, regel 9: $c_1 = 0{,}5\ 10^3$ moet zijn $c_1 = 0{,}5.\ 10^{-3}$.

Op blz. 32, 2de kolom moet in de tabel vóór alle voor de correcties gegeven getallen een minusteeken toegevoegd worden.

Op blz. 33, 4de regel voor het literatuur overzicht: K_1 moet zijn k'.

Rapport V 1032.

Op blz. 43, 2de kolom, regel 25: blz. A. 58 moet zijn blz. 41.

Op blz. 45, 2de kolom, regel 15 en 17 van onder: blz. A. 63 moet zijn blz. 46.

Op blz. 46, 1ste kolom, regel 23: $\frac{dq}{d}$ moet zijn $\frac{dq}{dt}$.

Op blz. 46, 1ste kolom, regel 14 van onder: blz. A. 62 moet zijn blz. 45.

Rapport S 82.

Op blz. 55, 1ste kolom, laatste regel: fig. 6 moet zijn fig. 4.

Op blz. 60, 2de kolom, regel 27: $(z_{h2})_{12}$ moet zijn $(z'_{h2})_{12}$.

Rapport A 557.

Op blz. 110 c_a bij de horizontale as van fig. 1 te plaatsen.

Rapport S 156.

Op blz. 188, 5de literatuur verwijzing: deel VII moet zijn deel VI.

INHOUD.

TABLE DES MATIÈRES.

CONTENTS.

INHALT.

Rapport A. 544.

De technische beteekenis van groote windtunnels

door

dr. ir. E. B. WOLFF en ir. C. KONING.

Rapport A. 544: L'importance technique de grandes souffleries.

Report A. 544: The technical importance of large wind-tunnels.

Bericht A. 544: Der technische Wert groszer Windkanäle.

RAPPORT A. 544.

De technische beteekenis van groote windtunnels.

Uittreksel.

Een overzicht wordt gegeven van de factoren, die de ontwikkeling van den windtunnel beheerschen. Achtereenvolgens worden de beteekenis van het Reynolds'sche getal, van de afmetingen van den tunnel en van de windsnelheid besproken (punt 2, 3, 5). Nagegaan wordt aan welke eischen een tunnel in dit opzicht moet voldoen (punt 4, 5).

Het blijkt praktisch niet mogelijk voor alle proeven éénzelfde soort van tunnel te gebruiken. De groote meerderheid der voorkomende proeven kan echter in een installatie van het gebruikelijke type en van matige afmetingen uitgevoerd worden. Daarnaast zijn voor sommige proeven speciale tunnels noodig, hetzij van zeer groote afmetingen, hetzij op andere wijze ingericht om zeer hooge waarden van het Reynolds'sche getal te bereiken (punt 6).

Aan de hand van eenige voorbeelden en een overzicht van de in het buitenland bestaande tunnels worden de verschillende soorten van tunnels besproken (punt 6).

Aansluitend bij het voorafgaande wordt nagegaan wat voor een onderzoekingsinstituut van beperkten omvang als de RSL de meest gewenschte windtunnel-uitrusting is (punt 7).

RAPPORT A. 544.

L'importance technique de grandes souffleries.

Résumé.

Les éléments, gouvernant l'applicabilité d'une soufflerie pour des recherches aéronautiques (nombre de Reynolds, dimensions, vitesse) sont discutés.

Un aperçu est donné des espèces de souffleries existant aujourd'hui et des recherches, qu'on peut faire dans celles ci. Le fait est signalé, que, sans doute, on a besoin de souffleries spéciales (souffleries à surpression ou aux dimensions très grandes) pour certaines recherches, mais que, dans la plupart des cas, une soufflerie de dimensions modérées suffit, étant d'ailleurs la plus économique.

REPORT A. 544.

The technical importance of large windtunnels.

Summary.

The factors, governing the suitability of a windtunnel for aeronautical research (Reynolds number, dimensions and velocity), are discussed.

A survey is given of the existing kinds of windtunnels and of the experiments for which they may be used. Attention is drawn to the fact, that though certain groups of experiments ask for special tunnels (compressed air and full scale tunnels), for most of the work a tunnel of moderate dimensions will suffice and is most economical.

BERICHT A. 544.

Der technische Wert groszer Windkanäle.

Zusammenfassung.

Die Faktoren, von denen die Brauchbarkeit eines Windkanals für Luftfahrtuntersuchungen abhängt (Kennzahl, Abmessungen, Geschwindigkeit), werden erörtert.

Eine Uebersicht wird gegeben von den heute bestehenden Windkanalarten und von den Versuchen, zu denen sie benutzt werden können. Hingewiesen wird darauf, dasz man zwar für einige Gruppen von Untersuchungen spezielle Windkanäle (Hochdruckwindkanäle, sehr grosze Windkanäle) braucht, aber dasz für weitaus die meisten Versuche ein Kanal von mäszigen Abmessungen genügt und auch am wirtschaftlichsten ist.

De technische beteekenis van groote windtunnels

door

dr. ir. E. B. WOLFF en ir. C. KONING.

Rapport A 544. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Ten einde een indruk te geven van haar beteekenis, worden de thans voor luchtvaartonderzoekingen in gebruik zijnde soorten van windtunnels in algemeene trekken besproken. De overwegingen, die geleid hebben tot haar ontwikkeling, en de onderzoekingen, waarvoor zij gebruikt kunnen worden, worden hierbij kort aangegeven. De keuze van windtunnels voor den Rijksstudiedienst wordt verklaard.

1. *Inleiding.*

Naast theoretisch onderzoek en proeven met vliegtuigen in de vlucht, is in de luchtvaart het modelonderzoek een van de belangrijkste hulpmiddelen bij het oplossen van de tallooze aerodynamische vraagstukken, die zich bij de ontwikkeling van dezen nieuwen tak van de techniek voordoen. De vooruitgang van de luchtvaarttechniek stelde aan dit onderzoek steeds hoogere eischen met het gevolg, dat zich uit de aanvankelijk gebruikte primitieve apparaten de moderne windtunnel ontwikkelde. Deze ontwikkeling is nog niet tot een einde gekomen, zooals onder meer blijkt uit de berichten over het bouwen van tunnels met steeds grootere afmetingen in het buitenland. Door deze berichten wordt echter vaak de onjuiste indruk gewekt, dat kleinere tunnels als verouderd beschouwd moeten worden, terwijl deze daarentegen, ook bij het moderne onderzoek, een belangrijke plaats zijn blijven innemen.

Het lijkt daarom gewenscht hier in algemeene trekken een overzicht te geven van de overwegingen, die een rol gespeeld hebben bij de ontwikkeling van de windtunnel, de verschillende soorten, die als gevolg hiervan ontstaan zijn, en den aard van de onderzoekingen, waarvoor zij gebruikt kunnen worden. Hoewel in windtunnels ook proeven op andere technische gebieden (windkracht op gebouwen, luchtweerstand van treinen, auto's en schepen, eigenschappen van profielen voor scheepsschroeven en van turbineschoepen) uitgevoerd worden, zullen zij hier hoofdzakelijk van luchtvaartstandpunt beschouwd worden. Voor andere gevallen gelden echter soortgelijke overwegingen.

De voor- en nadeelen, verbonden aan modelonderzoek in het algemeen, mogen bekend verondersteld worden, zoodat het niet noodig is er hier in bijzonderheden op in te gaan. Waar echter bij de ontwikkeling van de hulpmiddelen voor dit onderzoek getracht wordt de nadeelen zooveel mogelijk weg te nemen, zonder te veel van de voordeelen op te offeren, is toch een korte aanduiding ervan gewenscht.

Als een der belangrijkste voordeelen dient de besparing aan tijd en geld genoemd te worden, die verkregen wordt door de proeven met een model in plaats van met het ware-grootte-vliegtuig uit te voeren. Daarnaast moeten echter vermeld worden: de mogelijkheid van proeven, die aan het vliegtuig òf in het geheel niet òf slechts met groot gevaar uitgevoerd zouden kunnen worden; de eenvoudige wijze, waarop het model of de omstandigheden, waaronder dit onderzocht wordt, gewijzigd kunnen worden; de betere waarnemingsmogelijkheden.

De belangrijkste bezwaren, die hier tegenover staan, zijn:

a. de onzekerheid omtrent de te verwachten overeenstemming tusschen de uitkomsten van de modelproef en de overeenkomstige eigenschappen van het ware-grootte-vliegtuig (punt 2 t/m 4);

b. de praktische moeilijkheden, verbonden aan het werken met modellen op kleine schaal, als het te klein worden van onderdeelen, die van belang zijn (punt 5a);

c. in uitzonderingsgevallen het feit, dat de proef niet bij de op ware-grootte voorkomende snelheid uitgevoerd kan worden (punt 5b).

Het onder *a* genoemde bezwaar is hoofdzakelijk een gevolg van het verschil in Reynolds'getal bij de proef en bij de ware-grootte-uitvoering. De mate, waarin het zich zal doen gevoelen, is, behalve van den aard van de proef, afhankelijk van dit verschil en dus van de door de tunnelafmetingen begrensde grootte van het model en van de bij de proef bereikbare windsnelheid tezamen.

2. *De beteekenis van het Reynolds'sche getal.*

Uit de uitkomsten van een modelproef moeten de gevraagde eigenschappen van het ware-grootte-vliegtuig met voldoende zekerheid en nauwkeurigheid afgeleid kunnen worden. Of dit inderdaad mogelijk is, hangt, zooals boven reeds werd aangeduid, in de allereerste plaats van de waarde van het getal van Reynolds in de beide gevallen af.

Zooals bekend verondersteld mag worden, is dit Reynolds'sche getal *Re* het product van de relatieve snelheid *V* en een karakteristieke lengte *l* van het lichaam (b.v. bij een vleugel de gemiddelde koorde), gedeeld door den kinematischen wrijvingscoëfficiënt ν van de lucht. Ziet men voor het oogenblik af van speciale tunnels, waarin de waarde van ν veranderd kan worden (zie punt 6b), dan volgt uit deze definitie, dat de bij een modelproef bereikbare waarde van *Re* afhankelijk is van de grootste windsnelheid en van de afmetingen van de tunnel.

Zijn model en ware-grootte-vliegtuig gelijkvormig en heeft voor beide *Re* dezelfde waarde, dan zullen ook de stroomingen gelijkvormig zijn. De uitkomsten van de modelproef zullen dan zonder meer de eigenschappen van het ware-grootte-vliegtuig leveren.

Is daarentegen de waarde van *Re* niet gelijk voor beide gevallen, dan bestaat geen zekerheid, dat de stroomingen gelijkvormig zullen zijn. Als gevolg hiervan kunnen verschillen in de aerodynamische eigenschappen van model en ware-grootte-vliegtuig bestaan, die met den naam „schaaleffect" aangeduid plegen te worden. Toch behoudt ook dan de modelproef vaak haar waarde. Op grond van de verkregen ervaring en van inzicht in de oorzaken van het schaaleffect is het namelijk in zeer vele gevallen mogelijk te voorspellen, dat dit effect verwaarloosd mag worden of aan te geven op welke wijze de verkregen resultaten ervoor gecorrigeerd kunnen worden. Voorwaarde hiervoor is echter, dat het Reynolds'sche getal bij de modelproef niet onder een zekere, van den aard van het onderzoek afhankelijke, grens ligt.

3. *De oorzaken van het schaaleffect.*

Gaat men na, wat de mechanische beteekenis is van het Reynolds'sche getal, dan blijkt dit een maat te zijn voor de verhouding tusschen de traagheids- en wrijvingskrachten voor ieder deeltje van de bewegende lucht. Schaaleffect is dus het gevolg van de door een wijziging in deze verhouding teweeggebrachte verandering van de strooming. Hoe deze verandering zal zijn, is een vraag, die in haar meest algemeenen vorm niet beantwoord kan worden.

Alle voor de luchtvaart-aerodynamica van belang zijnde vraagstukken vallen echter binnen het gebied, waar de z.g. grenslaag-theorie geldt. Volgens deze theorie, die haar ontstaan dankt aan PRANDTL en mede door andere onderzoekers verder uitgewerkt is (*lit.* 1 t/m 4), blijft de directe invloed van de wrijving beperkt tot de „grenslaag", zijnde een dunne laag lucht, die onmiddellijk langs het lichaam stroomt. Buiten de grenslaag gedraagt de lucht zich als een wrijvingslooze vloeistof. Het karakter van de strooming in dit „buitengebied" wordt echter mede bepaald door hetgeen zich in de grenslaag afspeelt, zoodat ook hier de invloed van de wrijving, zij het indirect, zich doet gevoelen. De door de bewegende lucht op een lichaam uitgeoefende kracht kan gesplitst worden in twee deelen, waarvan het eerste het gevolg is van de in de richting van de normaal van het oppervlak werkende drukken (lift, geinduceerde weerstand, vormweerstand), terwijl het tweede veroorzaakt wordt door de in de richting van het oppervlak werkende wrijvingskrachten (wrijvingsweerstand). Terwijl de drukverdeeling alleen afhankelijk is van de strooming in het buitengebied, worden de wrijvingskrachten bepaald door die in de grenslaag. Volgens het bovenstaande wordt dus het eerste deel van de kracht (resultante van de normaalkrachten) indirect, het tweede deel (resultante van de tangentiaalkrachten) direct door de strooming in de grenslaag beinvloed.

De door de grenslaagtheorie ingevoerde splitsing van het geheele stroomingsveld in twee gebieden brengt ook voor beschouwingen over het schaaleffect belangrijke voordeelen mee. Immers alleen in de grenslaag heeft de wrijving een direkten invloed op de beweging. Schaaleffect is, zooals boven aangegeven werd, het gevolg van een verandering in de verhouding tusschen wrijvings- en traagheidskrachten. De invloed van een dergelijke verandering zal zich dus ook alleen in de grenslaag direct doen gevoelen, m.a.w. de eigenlijke oorzaak van het schaaleffect ligt in de grenslaag. De hier optredende veranderingen kunnen een wijziging van de strooming in het buitengebied tengevolge hebben. De invloed van beide tezamen geeft dan de verandering in de aerodynamische eigenschappen van het lichaam, dus het schaaleffect.

De vraag, hoe het schaaleffect in een gegeven geval zal zijn, valt zoodoende, ietwat vereenvoudigd voorgesteld, uiteen in twee andere. De eerste heeft dan betrekking op de verandering van de strooming in de grenslaag bij een wijziging van *Re*, de tweede op den invloed, die deze verandering heeft op de strooming in het buitengebied. Bij den huidigen stand van de wetenschap is het nog niet mogelijk deze beide vragen kwantitatief te beantwoorden. Wel is echter voldoende over dit onderwerp bekend om, mede steunende op de verkregen ervaring, in vele gevallen te beslissen of de uitkomsten van een modelproef, uitgevoerd bij een lagere waarde van *Re*, geldig zijn voor ware-grootte en welke correctie voor schaaleffect hier eventueel aangebracht moet worden. Zoo blijken er tal van gevallen te zijn, waarin, mits de modelproef bij een voldoend hooge waarde van *Re* uitgevoerd wordt, aangenomen mag worden, dat de strooming in het buitengebied onafhankelijk is van deze grootheid. De drukverdeeling op het lichaam en dus ook het deel van de resulteerende windkracht, dat hierdoor bepaald is, vertoont dan geen schaaleffect. Daarnaast is de wrijvingsweerstand wel afhankelijk van de waarde van *Re*, doch hiervoor kan op eenvoudige wijze met voldoende nauwkeurigheid een correctie aangebracht worden.

4. *De bij modelproeven aan het Reynolds'sche getal te stellen eischen.*

Op grond van de in het voorgaande punt geschetste overwegingen en van de ervaring, opgedaan bij vergelijking van de uitkomsten van ware-grootte- en windtunnelproeven, is het mogelijk bij benadering de minimumwaarde van het Reynolds'sche getal aan te geven, waarbij een modelproef uitgevoerd moet worden. Uit den aard der zaak is deze grens afhankelijk van de eigenschappen, die bepaald moeten worden, en van de gewenschte nauwkeurigheid. Hoewel het niet mogelijk is, scherpe grenzen te trekken, kunnen, wat den hier bedoelden eisch betreft, de meest voorkomende onderzoekingen in eenige groepen verdeeld worden. Tabel I geeft een overzicht, waarbij deze groepen gerangschikt zijn naar toenemende waarde van het gewenschte Reynolds'sche getal. Tevens is hierbij onderscheid gemaakt tusschen die gevallen, waarin een nauwkeurige overeenstemming tusschen model- en ware-grootte-uitkomsten verlangd wordt („nauwkeurig") en die, waarbij men met een meer globale overeenkomst tevreden is („globaal"). Daar het niet noodig is hier een volledige indeeling te geven, zijn de verschillende groepen alleen door eenige typische voorbeelden aangeduid.

De tot groep *a* en *b* behoorende onderzoekingen kunnen zonder bezwaar uitgevoerd worden bij betrekkelijk lage waarden van het Reynolds'sche getal. De in de windtunnel van den R.S.L. bereikbare waarden (voor normale vleugel- en vliegtuigmodellen ten hoogste $0{,}4 \times 10^6$) bleken hiervoor in het algemeen voldoende te zijn.

Voor groep *c* is uit den aard der zaak de waarde van het Reynolds'sche getal voor het beschouwde onderdeel belangrijk lager dan voor den vleugel. Dit kan in sommige gevallen bij waarden van *Re* als bovengenoemde aanleiding geven tot moeilijkheden.

Ook bij tot groep *d* behoorende metingen werden in de R.S.L.-tunnel in verschillende gevallen resultaten verkregen, die een bevredigende overeenstemming met de ware-grootte-uitkomsten vertoonden. Toch is voor dergelijke onderzoekingen een hoogere waarde van *Re* dan thans bereikt kan worden gewenscht om met voldoende zekerheid een nauwkeurige overeenstemming tusschen de voor schaaleffect gecorrigeerde tunnel-resultaten en ware-grootte eigenschappen te mogen verwachten. Op grond van hetgeen over de oorzaken van het schaaleffect bekend is, Tabel I. *Onderzoekingen in de windtunnel, gerangschikt naar de minimum-waarde van het Reynolds'sche getal, waarbij een modelproef toelaatbaar is.*

Groep	Gewenschte overeenstemming tusschen model en ware-grootte: nauwkeurig.	Gewenschte overeenstemming tusschen model en ware-grootte: globaal.
	omvat onderzoekingen over:	
a	krachten op lichamen met niet in de stroomingsrichting liggende scherpe randen;	karakter van de strooming voor de meest voorkomende lichamen;
b	lift en moment van vleugels, vliegtuigen en afzonderlijke staartvlakken; invloed van de schroef (of schroeven) op bovengenoemde eigenschappen;	weerstand van de in de vorige kolom genoemde lichamen; onderlinge invloed van de hoofddeelen van het vliegtuig; invloed van de verstoring van de strooming door kleinere onderdeelen;
c	werking van schroeven en stuurvlakken aan het complete vliegtuig;	
d	weerstand van vleugels, vliegtuigen en stroomlijnvormige lichamen; onderlinge invloed van de hoofddeelen van het vliegtuig; invloed van de verstoring van de strooming door kleinere onderdeelen;	maximum-lift-coëfficiënt van vleugels en vliegtuigen; aerodynamische eigenschappen van vleugels en vliegtuigen in de omgeving van den kritischen invalshoek;
e	maximum-lift-coëfficiënt van vleugels en vliegtuigen; aerodynamische eigenschappen van vleugels en vliegtuigen in de omgeving van den kritischen invalshoek; bijzonderheden van het schaaleffect bij ook op ware grootte voorkomende waarden van *Re*.	

moet als laagste waarde van *Re*, waarbij dit mogelijk is, ongeveer 1.5×10^6 aangenomen worden. Een dergelijke waarde wordt hiervoor ook aangegeven door onderzoekers, die zich speciaal met dit vraagstuk hebben bezig gehouden (zie o.m. *lit.* 5).

De in groep *e* aangegeven onderzoekingen kunnen slechts uitgevoerd worden bij waarden van het Reynolds'sche getal, die ongeveer gelijk zijn aan die van ware-grootte.

Over de practische beteekenis van de boven besproken groepen van onderzoekingen kan het volgende gezegd worden. Verreweg de meeste door de practijk gestelde vragen kunnen beantwoord worden door metingen, die tot de groepen *a* t/m *d* behooren. Een groot deel hiervan valt onder *a* t/m *c*. Gezien het streven naar verbetering van de prestaties en vergrooting van de economie van het vliegtuig, zijn echter ook de onder *d* genoemde van veel belang. Van algemeen standpunt bezien zijn ook de tot *e* gerekende onderzoekingen belangrijk. Erkend dient echter te worden, dat haar directe praktische beteekenis geringer is dan die van de overige. Hierbij moet bovendien opgemerkt worden, dat onderzoekingen op dit gebied een belangrijken invloed van den turbulentiegraad van den windstroom op den maximum-lift-coëfficiënt aangetoond hebben. Dit maakt het twijfelachtig of, zelfs wanneer de waarde van *Re* in beide gevallen dezelfde is, de bij een modelproef gevonden maximum-lift-coëfficiënt nauwkeurig overeen zal komen met dien voor het ware-grootte-vliegtuig (*lit.* 6 t/m. 8).

5. *De verdere invloed van de afmetingen van de tunnel en van de bereikbare windsnelheid.*

a. Afmetingen.

Behalve door haar invloed op het Reynolds'sche getal zijn de afmetingen van de tunnel ook in ander opzicht van beteekenis.

In de eerste plaats kan het practische voordeelen meebrengen om, wanneer het gaat om de eigenschappen van een bestaand vliegtuig of om den invloed van eenvoudige wijzigingen hieraan, het vliegtuig zelf als „model" te bezigen. Dit leidde, zooals in punt 6*c* nader besproken zal worden, tot den bouw van eenige tunnels van zoodanige afmetingen, dat er óf een compleet vliegtuig óf het belangrijkste deel ervan (romp met motor, schroef en middendeel van den vleugel) op ware grootte in onderzocht kan worden.

Ook wanneer men van deze mogelijkheid afziet en zich dus beperkt tot het onderzoek van modellen op verkleinde schaal en van betrekkelijk kleine onderdeelen op ware-grootte, kunnen de beperkte afmetingen van een tunnel aanleiding geven tot bezwaren. In de R.S.L.-tunnel, die een middellijn heeft van 1.60 m, werden in sommige gevallen de volgende moeilijkheden ondervonden:

a. de details van de modellen werden te klein;

b. de verschillen in de te meten krachten waren te gering;

c. de motoren voor het aandrijven van de modelschroeven konden niet in het model ingebouwd worden;

d. het onderzoek van ware-grootte-onderdeelen boven beperkte afmetingen was niet mogelijk.

Ter toelichting van deze punten diene het volgende:

ad a. Kleine onderdeelen kunnen de strooming om de hoofddeelen van het vliegtuig en daarmee ook de hierop werkende krachten beinvloeden. Typische voorbeelden hiervan zijn: uitsteeksels aan vleugel en romp, details van den motorinbouw. Is te verwachten, dat deze invloed belangrijk zal zijn, dan moeten deze onderdeelen aan het

Tabel II. *Eenige algemeene gegevens over windtunnels.*

Groep	Naam	Afmetingen v. d. tunneldoorsnede in m	Max. snelheid in m/sec	Max. druk in at	Re_{max}	Vermogen in pk	Bouwkosten	Jaar van in bedrijfstelling
Hooge-druktunnels.	N.P.L. compressed-air-tunnel	ϕ 1.83	27.5	25	11.2×10^6	500	—	1932
	N.A.C.A. variable density tunnel	ϕ 1.53	21.5	20	5.9×10^6	270	—	1e uitv.: 1923 2e uitv.: 1928
Ware-grootte-tunnels.	N.A.C.A. 30′×60′ ..	9.1×18.3	53	1	8.6×10^6	8000	$ 980.000	1931
	Chalais-Meudon	8×16	50	1	7.1×10^6	6000	frs. 13.000.000[1])	in aanbouw
	R.A.E. 24′	ϕ 7.3	54	1	3.5×10^6	2000	£ 80.000	1935
	N.A.C.A. 20′	ϕ 6.1	49	1	2.7×10^6	2000	—	1927
Middelmatige tunnels.	Galcit	ϕ 3.05	83	1	2.2×10^6	750	$ 90.000	1931
	Zürich	2.1×3.0	83	1	2.2×10^6	550	frs. 140.000 [2])	1935
	Issy	ϕ 3.0	80	1	2.1×10^6	1000	—	1923 (?)
	N.P.L. 7′×9′ (2 stuks)	2.1×2.8	64	1	1.6×10^6	375	£ 6.500 (p. st.)	1933
	Warschau	ϕ 2.05	70	1	1.3×10^6	500	—	1928 (?)
	Göttingen	ϕ 2.25	60	1	1.2×10^6	540	—	1917
	N.A.C.A. 7′×10′ ..	2.1×3.05	36	1	1.0×10^6	200	—	1930
Kleine tunnels.	R. S. L............	ϕ 1.6	30	1	0.4×10^6	50	—	1918

Tabel III. *De waarde van het Reynold'sche getal voor eenige hedendaagsche vliegtuigen.*

Vliegtuig	*Re* bij minimum-snelheid	*Re* bij maximum-snelheid
Fokker F 36	12.2×10^6	23.5×10^6
Douglas DC 2	6.8×10^6	16.3×10^6
Pander S 4	5.6×10^6	19.1×10^6
Fokker D XVI	2.2×10^6	6.7×10^6
Fokker C V D	2.3×10^6	6.0×10^6
Koolhoven F K 43	2.8×10^6	5.6×10^6

model behoorlijk nagemaakt worden. Er kunnen zich gevallen voordoen, waarin dit, door de kleine schaal, waarop het model uitgevoerd moet worden, niet mogelijk is.

ad b. Bij het onderzoek van vliegtuigmodellen met aangedreven schroef kan het voorkomen, dat het verschil tusschen de krachten op het model met en zonder schroef te klein is om hieruit met voldoende nauwkeurigheid de eigenschappen van de schroef te kunnen bepalen. Soortgelijke moeilijkheden kunnen zich ook voordoen bij het onderzoek naar den invloed van betrekkelijk kleine veranderingen aan een vliegtuigmodel.

ad c. Bij het onderzoek van vliegtuigmodellen met aangedreven schroeven wordt gebruik gemaakt van speciaal voor dit doel gebouwde, zeer kleine electromotoren. Deze moeten in het model ingebouwd kunnen worden, zonder den uitwendigen vorm ervan te veel te verstoren. Bij modellen, die in de R.S.L.-tunnel onderzocht kunnen worden, is dit wel mogelijk voor den romp, echter niet voor de motorgondels.

ad d. Ook bij het onderzoek van betrekkelijk kleine vliegtuigonderdeelen, als b.v. wielen, landingsgestellen, drijvers, op ware-grootte stelt de beperkte afmeting van den windstroom spoedig grenzen.

[1]) Fransch. [2]) Zwitsersch.

b. Windsnelheid.

In de in punt 2 t/m 4 gegeven bespreking over de te verwachten overeenstemming tusschen de uitkomsten van de modelproef en de eigenschappen van het ware-grootte-vliegtuig werd alleen aandacht besteed aan het Reynolds'sche getal. Dit sloot stilzwijgend de veronderstelling in, dat in beide gevallen de snelheid voldoende ver onder de geluidsnelheid ligt om den invloed van de samendrukbaarheid van de lucht te mogen verwaarloozen. Is dit niet het geval, dan moet bovendien de voorwaarde gesteld worden, dat de verhouding tusschen de relatieve snelheid van het lichaam en de voortplantingssnelheid van het geluid in de lucht dezelfde moet zijn. Practisch komt dit hierop neer, dat de snelheid bij de modelproef en op ware-grootte dezelfde moet zijn.

De tot nu toe bereikte vliegsnelheden blijven ver onder de boven aangegeven grens. Bij het onderzoek van vliegtuigen en hun vaste onderdeelen behoeft dus voorloopig nog geen rekening gehouden te worden met den invloed van de samendrukbaarheid van de lucht. Zoodoende is daarbij, van dit standpunt bezien, de windsnelheid bij de modelproef volkomen willekeurig. Bij schroeven daarentegen kan de relatieve snelheid aan de uiteinden van de bladen („tipsnelheid") de geluidsnelheid bereiken of zelfs overschrijden. Zoolang bij het onderzoek naar den invloed hiervan gebruik gemaakt kan worden van schroefmodellen is het voldoende, dat de snelheid in de windtunnel ongeveer gelijk is aan de vliegsnelheid. Bij verder gaande onderzoekingen, b.v. over de eigenschappen van de voor dergelijke schroeven te gebruiken profielen, moeten echter de proeven uitgevoerd kunnen worden bij tunnelsnelheden, die tot boven de geluidsnelheid komen. Ook op ander gebied kunnen dergelijke proeven noodig zijn (vliegtuigbommen, andere projectielen, turbineschoepen).

Andere gevallen, waarbij een hooge windsnelheid in de tunnel op zichzelf (d.w.z. afgezien van den invloed, dien zij heeft op het Reynolds'sche getal) van belang is, komen betrekkelijk zelden voor. Als voorbeelden kunnen genoemd worden: onderzoek van snelheidsmeters en andere instrumenten, waarvan de werking afhankelijk is van de windsnelheid, onderzoekingen over koelwerking. Dergelijke proeven zullen echter meestal uitgevoerd kunnen worden in speciaal voor dit doel ontworpen installaties, die eenvoudiger en kleiner kunnen zijn dan een gewone windtunnel.

6. *De in het buitenland in gebruik of in aanbouw zijnde windtunnels.*

a. Algemeen (*lit.* 9 t/m. 11).

Om een indruk te geven van de wijze, waarop overwegingen als de bovenstaande de ontwikkeling van de tunnels in het buitenland beinvloed hebben, zijn in Tabel II eenige gegevens over een aantal tunnels verzameld. Deze opgave is, wat de twee eerste groepen betreft, volledig, in de beide andere ontbreken een aantal tunnels, waarover geen voldoende gegevens bekend zijn, die hier verder van geen belang zijn of die bestemd zijn voor onderzoekingen van zeer specialen aard (zie punt 6f).

Als Reynolds'getal *Re* is in Tabel II de grootste waarde aangegeven, die in de beschouwde tunnel met een normaal vleugelmodel bereikt kan worden. Hierbij werd aangenomen, dat de vleugel een breedte-verhouding 6 heeft en dat de vleugelbreedte gelijk is aan $^3/_4$ van de grootste afmeting van de tunneldoorsnede. Voor vergelijking zijn in Tabel III de waarden van het Reynolds'sche getal voor eenige hedendaagsche vliegtuigen bij grootste en kleinste vliegsnelheid gegeven.

Over de gegevens in Tabel II dient nog het volgende opgemerkt te worden.

In het algemeen zijn zij uit de literatuur overgenomen. Zij zijn echter aangevuld met enkele gegevens, b.v. de bouwkosten, die ontleend zijn aan hierover door buitenlandsche onderzoekers verstrekte inlichtingen.

Als vermogen van de tunnelinstallatie wordt in publicaties soms het nominale, soms het bij overbelasting bereikbare vermogen opgegeven. De hiervoor in Tabel II voorkomende waarden zijn daardoor niet voldoende nauwkeurig om er een beoordeeling van het rendement van de verschillende tunnels op te mogen baseeren. Zij zijn slechts bedoeld om een algemeenen indruk te geven van het bij verschillende tunneltypen benoodigde vermogen.

De opgegeven bouwkosten zijn die van de tunnel zonder het gebouw, waarin deze opgesteld is, doch met inbegrip van de machine-installatie. Het is niet zeker, in hoeverre de prijs van de verschillende apparaten, die tot de uitrusting van de tunnel behooren, er in is inbegrepen. Overigens zijn zij natuurlijk in hooge mate afhankelijk van de plaatselijke omstandigheden en van het tijdstip, waarop de installatie gebouwd werd.

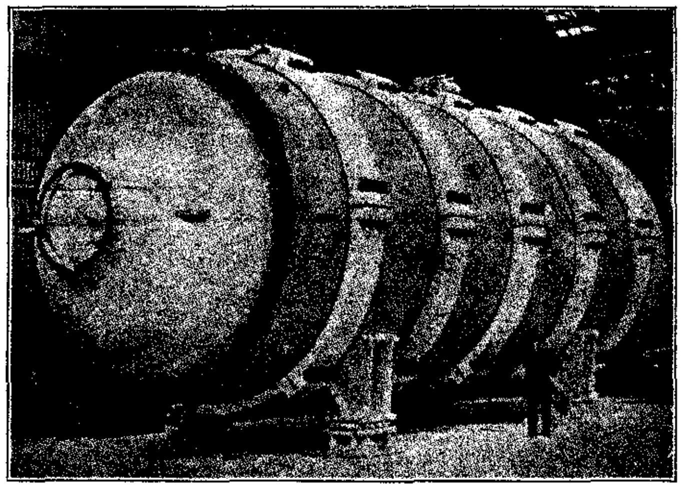


Fig. 1. De hooge-druk-tunnel van het National Physical Laboratory te Teddington (Engeland). De tunnel is geheel opgesloten in een ketel, die bestand is tegen een inwendigen overdruk van 25 at (zie fig. 2).

b. Hooge-druk-tunnels (*lit.* 12, 13).

De hooge-druk-tunnels (1e groep in Tabel II) zijn typische voorbeelden van installaties, waarbij er naar gestreefd is een zoo groot mogelijke waarde van het Reynolds'sche getal te bereiken. Dit wordt hier verkregen door de proeven uit te voeren in lucht onder hoogen druk (tot 25 at.) Daar de kinematische wrijvingscoëfficiënt ν omgekeerd evenredig is met den druk van de lucht, kunnen op deze wijze met betrekkelijk kleine modellen en bij matige windsnelheid toch zeer hooge waarden van *Re* verkregen worden. Hiertoe is het echter noodig, dat de geheele windtunnel, tezamen met alle meetapparaten, opgesteld wordt in een „ketel", die bestand is tegen den te gebruiken hoogen druk.

Fig. 1 en 2 geven een buitenaanzicht en een doorsnede van de „compressed-air-tunnel" van het National Physical Laboratory (N.P.L.) te Teddington (Engeland) (*lit.* 12). In de doorsnede is goed te zien, hoe de eigenlijke tunnel, die alleen in details van een gewone verschilt (vergelijk b.v. fig. 8), in den ketel is ondergebracht, terwijl fig. 1 een indruk geeft van de zware constructie van dezen.

Het voordeel van zeer groote waarden van *Re* wordt echter bij de hooge-druk-tunnel verkregen ten koste van tal van nadeelen. De aanschaffings- en bedrijfskosten zijn hooger dan die van een gewone tunnel van redelijke afmetingen. Het uitvoeren der proeven is tijdroovend doordat voor iedere metingsserie de ketel opnieuw onder

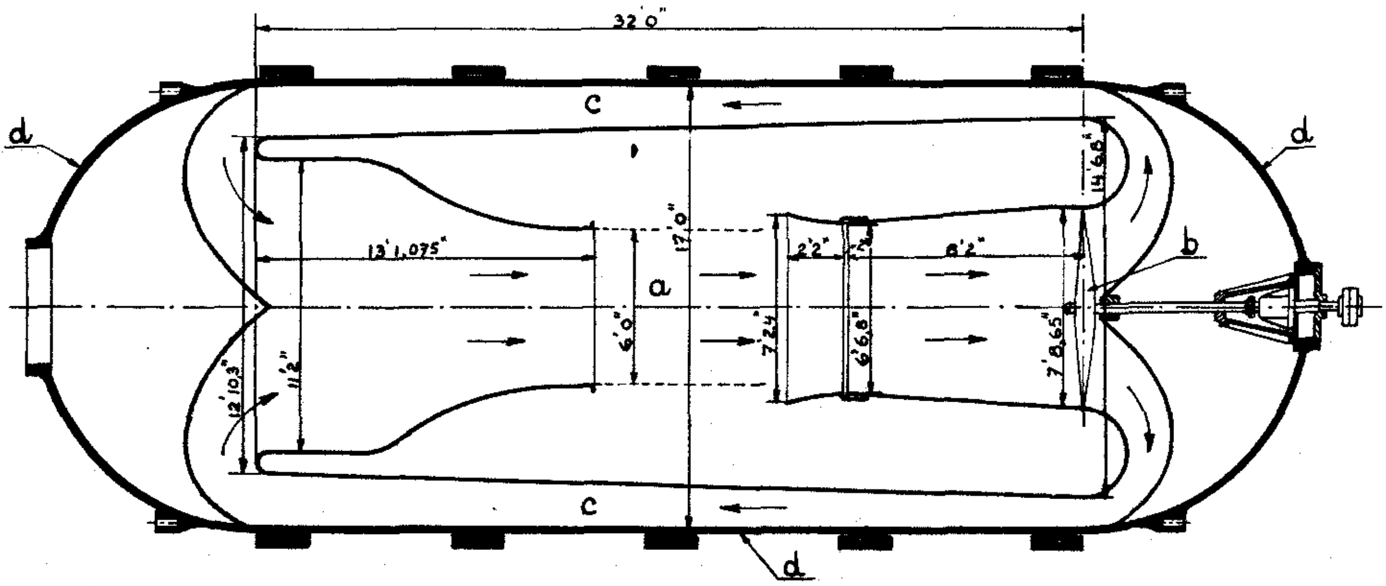


Fig. 2. De hooge-druk-tunnel te Teddington. *a*: meetplaats (d.w.z. plaats, waar de modellen in den windstroom worden opgehangen); *b*: ventilatorschroef; *c*: ringvormig omloopkanaal; *d*: ketel, waarin de tunnel is opgesloten. De pijlen geven de stroomingsrichting van de lucht aan.

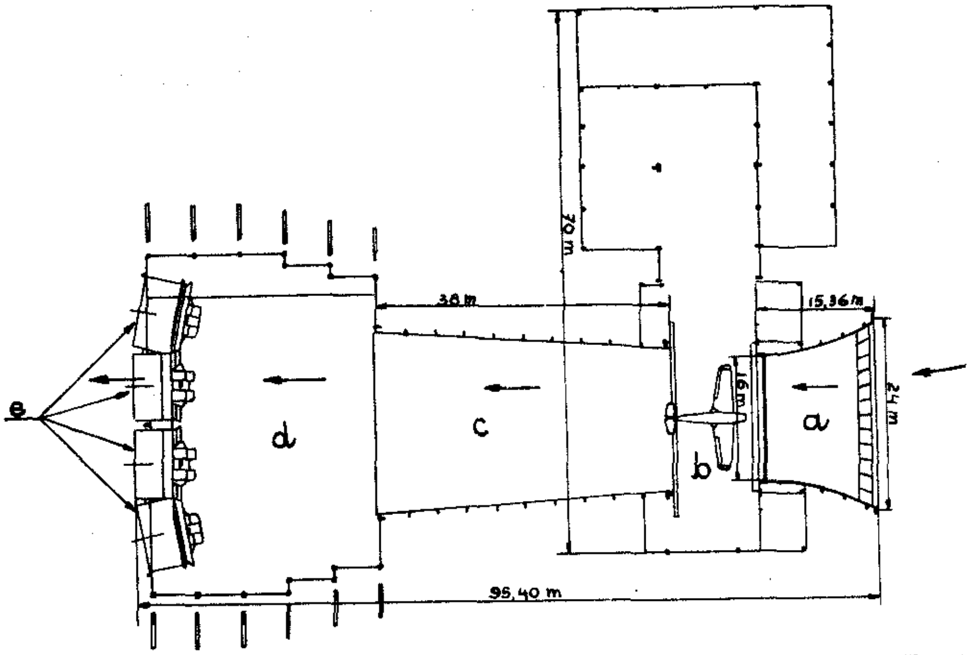


Fig. 3. De ware-grootte-tunnel van den Service technique de l'aéronautique te Chalais-Meudon (Frankrijk). *a*: zuigmond; *b*: meetplaats met vliegtuig; *c*: diffusor; *d*: aanzuigkamer; *e*: ventilatorschroeven met electromotoren (6 stuks, zie fig. 6). De pijlen geven de stroomingsrichting van de lucht aan.

druk gebracht moet worden (voor de Amerikaansche „variable density tunnel" is de tijd hiervoor ongeveer 70 minuten). De noodzakelijkheid de tunnel op te stellen in een ketel, die weerstand kan bieden aan hoogen druk, maakt, dat haar afmetingen en daarmee ook die van de modellen beperkt moeten blijven, hetgeen alle in punt 5a besproken bezwaren meebrengt. Bovendien verlangt deze wijze van opstellen het gebruik van speciale apparaten voor het meten van de krachten, beperkt zij de waarnemingsmogelijkheden en maakt zij de montage van de modellen moeilijker. Ten slotte zijn, ten gevolge van de groote dichtheid van de lucht, de op de modellen werkende krachten relatief groot. Aan de modellen moeten dus, wat de sterkte betreft, speciale eischen gesteld worden; zoo schijnt b.v. het gebruik van houten vleugelmodellen buitengesloten te zijn.

Een en ander maakt, dat de hooge-druk-tunnel het aangewezen hulpmiddel is voor modelproeven, waarbij een zeer hooge waarde van het Reynolds'sche getal noodzakelijk is (groep *e* in punt 4), doch ook alleen voor dergelijke proeven geschikt is. Voor proeven, die ook bij een lagere waarde van *Re* uitgevoerd kunnen worden (groep

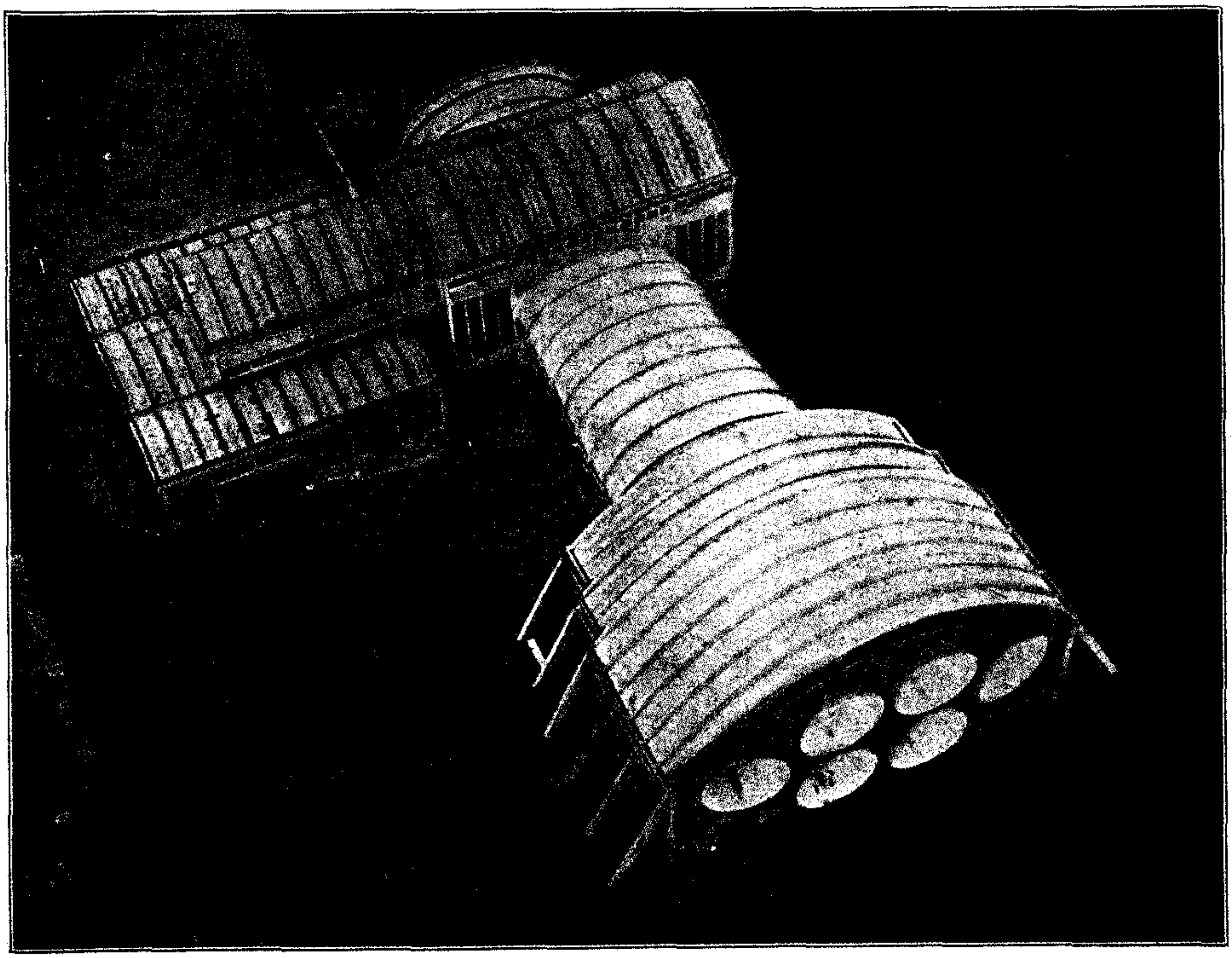


Fig. 4. De ware-grootte-tunnel te Chalais-Meudon. Luchtfoto van de geheele tunnel, gezien van de achterzijde.

a t/m *d* in punt 4) is zij te oneconomisch en ook overigens minder bruikbaar.

Betreffende de in de thans bestaande installaties bereikbare waarden van *Re* dient opgemerkt te worden, dat, zooals uit vergelijking van Tabel II en III blijkt, zij wel ongeveer gelijk zijn aan de bij hedendaagsche vliegtuigen voorkomende, doch in sommige gevallen reeds door laatstgenoemde overtroffen worden.

c. Ware-grootte-tunnels (*lit.* 14 t/m. 17).

Een andere groep van tunnels, waarin hooge waarden van het Reynolds'sche getal bereikt kunnen worden, zijn de z.g. ware-grootte-tunnels (2e groep in Tabel II). Terwijl echter de hooge-druk-tunnels ontstaan zijn als gevolg van het streven bij modelproeven deze grootheid zooveel mogelijk op te voeren, waren de overwegingen, die geleid hebben tot den bouw van de hier te bespreken tunnels, grootendeels van anderen aard. Zooals in punt 5a reeds in het kort aangegeven werd, biedt het namelijk praktische voordeelen om bij sommige onderzoekingen een ware-grootte-vliegtuig (of de belangrijkste deelen ervan) inplaats van een model te gebruiken. De eerste tunnel van deze soort, de N.A.C.A. 20 ft-tunnel te Langley Field bij Washington, was dan ook, zooals de karakteristieke naam „propeller research tunnel" reeds aangeeft, hoofdzakelijk bestemd voor onderzoekingen over de werking van ware-grootte-schroeven en haar invloed op de er achter liggende deelen van het vliegtuig. Bij latere, nog grootere uitvoeringen (N.A.C.A.-full scale tunnel te Langley Field; tunnel van de Service technique de l'aéronautique te Chalais-Meudon bij Parijs) werd hoofdzakelijk aan dit denkbeeld vastgehouden, doch bovendien de eisch gesteld, dat een niet al te groot vliegtuig in zijn geheel moest kunnen worden onderzocht.

Om een indruk te geven tot wat voor installaties men op deze wijze komt, zijn in fig. 3 t/m 6 een aantal afbeeldingen gegeven van het nieuwste op dit gebied, de in aanbouw zijnde tunnel te Chalais-Meudon. Deze tunnel komt, afgezien van haar afmetingen en bijzonderheden, die hiermee samenhangen, in algemeene trekken overeen met een gewone tunnel zonder omloop. Een bijzonderheid is echter, dat zij in de open lucht is opgesteld. Het kan zijn, dat dit alleen een gevolg is van economische overwegingen, mogelijk is echter ook, dat het geschied is om ventilatiemoeilijkheden te ontgaan. In dergelijke tunnels worden namelijk de schroeven van het te onderzoeken vliegtuig op normale wijze door vliegtuigmotoren aangedreven. Hierdoor wordt de lucht met CO verontreinigd, hetgeen bij tunnels met omloop of in een gebouw opgestelde tunnels een intensieve verversching van de lucht noodzakelijk

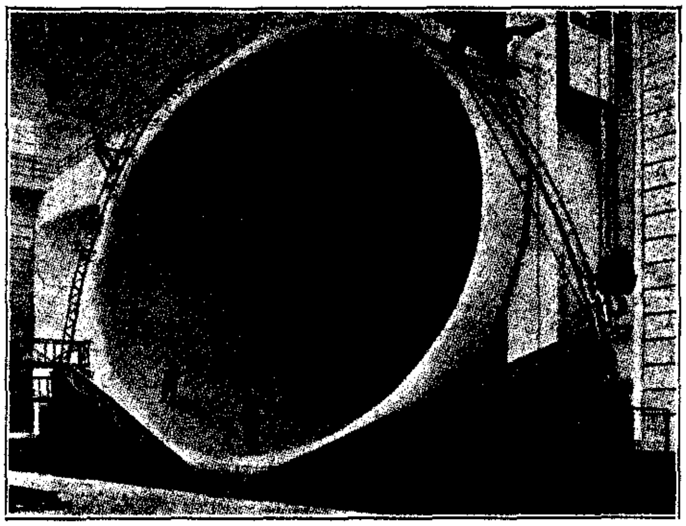


Fig. 5. De ware-grootte-tunnel te Chalais-Meudon. De voorste opening van de diffusor (*c* in fig. 3), gezien vanuit de meetkamer.

Fig. 6. De ware-grootte-tunnel te Chalais-Meudon. De achterwand van de aanzuigkamer met de openingen, waarin de ventilatorschroeven met haar electromotoren geplaatst zullen worden (zie *d* en *e* in fig. 3).

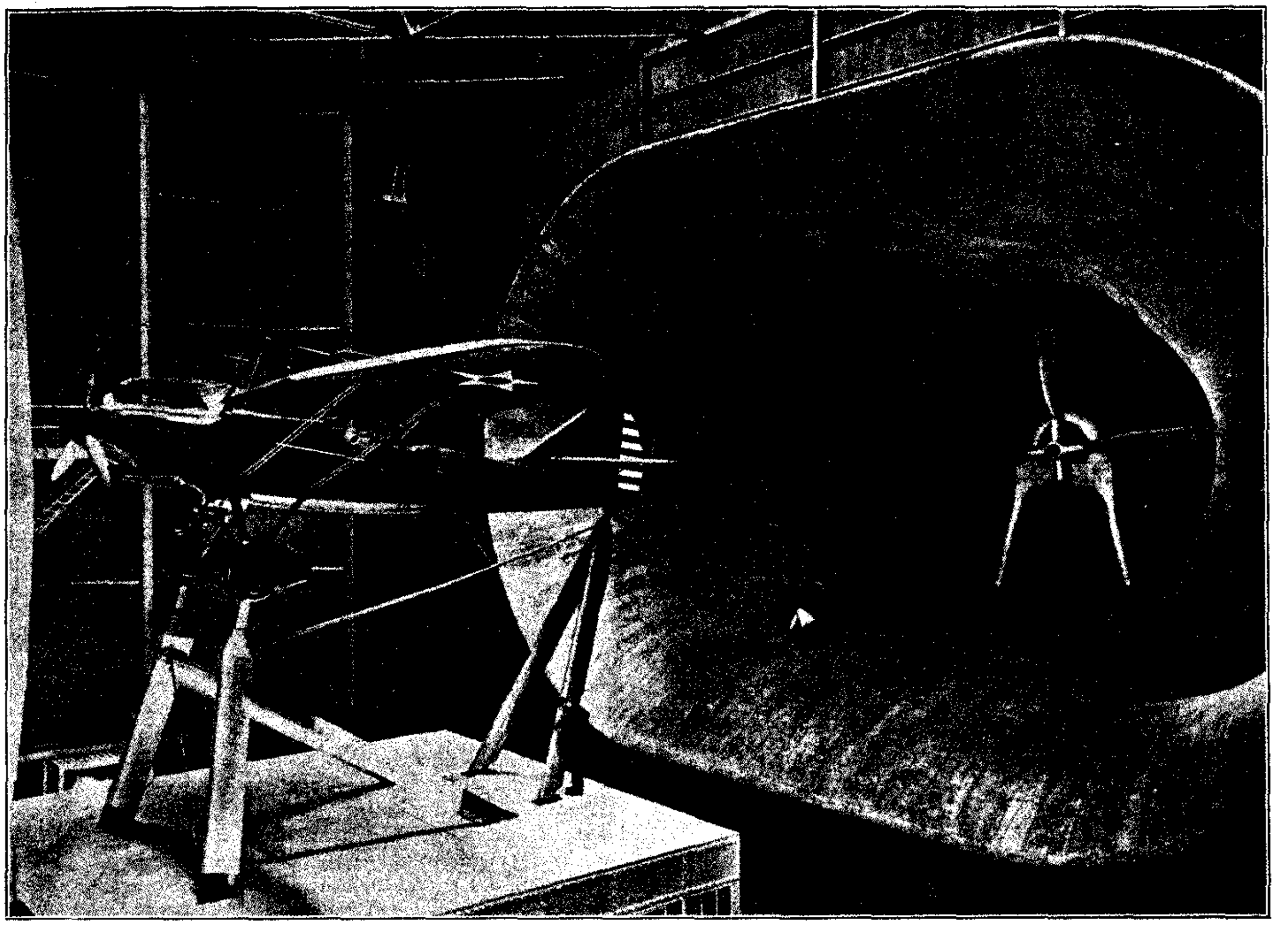


Fig. 7. De ware-grootte-tunnel van het National Advisory Committee for Aeronautics te Langley Field (Amerika). De meetruimte met een er in opgesteld ware-grootte-vliegtuig.

maakt. Een bezwaar van deze opstelling in de open lucht lijkt echter de invloed, dien de natuurlijke wind kan hebben op de regelmatigheid van de tunnelstrooming.

Ook als bouwwerk is deze tunnel, die geheel in gewapend beton uitgevoerd is, zeer belangwekkend. Voor bijzonderheden kan verwezen worden naar een publicatie, waarin deze uitvoerig behandeld worden (*lit.* 15).

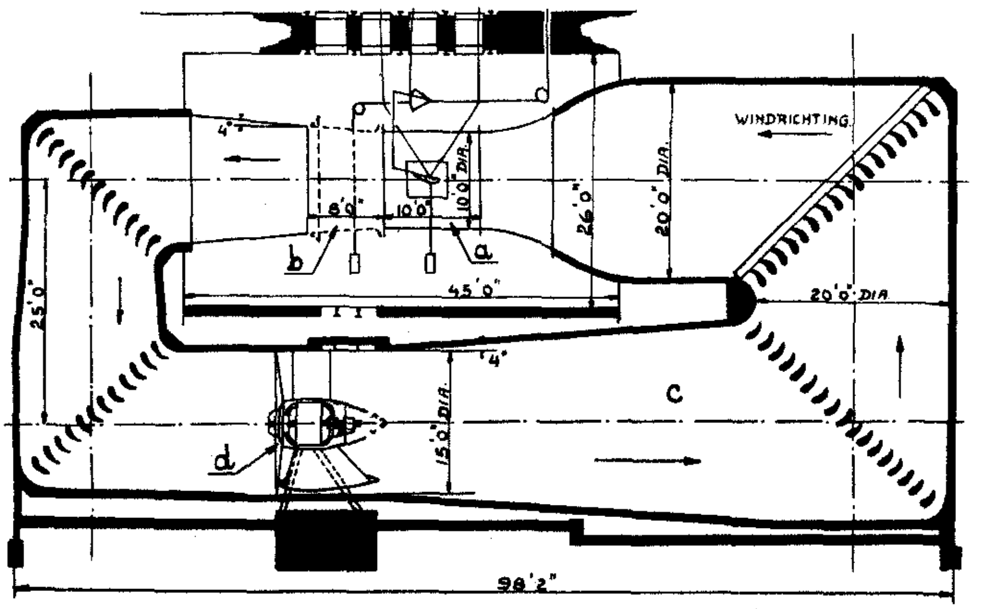


Fig. 8. De windtunnel van het California Institute of Technology te Pasadena (Amerika). *a*: meetplaats voor werken met gesloten tunnel; *b*: idem met vrijstraal (gestippeld deel van wand weggenomen); *c*: omloopkanaal; *d*: ventilatorschroef met motor. De pijlen geven de stroomingsrichting van de lucht aan.

De hier besproken tunnel is nog niet in bedrijf. Om toch een indruk te geven van de wijze, waarop een compleet vliegtuig voor onderzoek in een dergelijke tunnel opgesteld wordt, is als fig. 7 een afbeelding gegeven van het inwendige van de N.A.C.A. full-scale-tunnel.

Zooals uit het bovenstaande moge blijken, bestaat er een groep van belangrijke onderzoekingen, die alleen in een ware-grootte-tunnel uitgevoerd kan worden. Maar, evenals dit bij de hooge-druk-tunnel het geval bleek te zijn, brengen ook hier de eigenaardigheden van het speciale tunneltype haar bezwaren mede, waardoor dit voor andere onderzoekingen ongeschikt is. Deze bezwaren zijn hier weliswaar minder talrijk, zij wegen echter des te zwaarder.

In de eerste plaats zijn de bouw- en bedrijfskosten van een ware-grootte-tunnel zeer hoog. Wat de laatste betreft, geeft het benoodigde vermogen (zie Tabel II) een indruk. Het feit, dat zeer groote modellen gebruikt kunnen worden, (en om behoorlijke waarden van *Re* te bereiken ook noodzakelijk zijn), is een voordeel zoolang bestaande vliegtuigen als zoodanig gebezigd kunnen worden. Is dit niet het geval, dan slaat dit voordeel om in een belangrijk nadeel. Immers voor het onderzoek van een ontworpen, dus nog niet bestaand, vliegtuig zou dit vliegtuig zelf, of een zeer groot model ervan, eerst gebouwd moeten worden, voordat de proeven uitgevoerd kunnen worden. Hierdoor zou een belangrijk deel van de voordeelen, verbonden aan modelonderzoek in den eigenlijken zin, vervallen.

d. Middelmatige tunnels (*lit.* 18 t/m. 24).

De hooge-druk-tunnel en de ware-grootte-tunnel zijn, zooals in het voorgaande besproken werd, minder geschikt voor algemeen onderzoekingswerk. Hiervoor worden dan ook algemeen tunnels gebruikt van het type, dat in Tabel II als middelmatige tunnel aangeduid wordt. Bij deze tunnels loopt de in normale gevallen bereikbare waarde van Re van 10^6 tot ruim 2×10^6, de middellijn of grootste afmeting van de doorsnede van 2 tot 3 m, de grootste windsnelheid van rond 40 tot 80 m/sec.

Als modern en typisch voorbeeld van een dergelijke tunnel kan die van het California Institute of Technology te Pasadena („Galcit-tunnel") (*lit.* 18) genoemd worden, waarvan in fig. 8 een doorsnede-teekening gegeven is. Deze tunnel komt in hoofdzaken overeen met de oudere en meer bekende in Göttingen, waaruit zij is afgeleid; het belangrijkste verschil bestaat daarin, dat zoowel de afmetingen als de windsnelheid vergroot zijn. Zooals bij alle nieuwere middelmatige tunnels het geval is, wordt de lucht, na de plaats, waar de modellen opgesteld worden („meetplaats"), gepasseerd te zijn, door een gesloten kanaal weer teruggevoerd („tunnel met omloop"). Dit geeft voordeelen, zoowel wat de regelmatigheid van de strooming als wat het energieverbruik betreft. Bovendien is hierdoor de druk in den windstroom op de meetplaats gelijk aan dien van de buitenlucht, zoodat de tunnel niet op deze plaats òf zelf luchtdicht moet zijn òf omgeven moet worden door een luchtdichte kamer, zooals dit bij tunnels zonder omloop het geval is.

De middelmatige tunnels hebben het nadeel niet bruikbaar te zijn voor sommige proeven, die in een hooge-druk-tunnel of een ware-grootte-tunnel wel uitgevoerd kunnen worden. Daartegenover staat echter, dat zij voor nagenoeg alle verdere tunnelonderzoekingen veel beter geschikt zijn. Gaat men aan de hand van het in punt 4 en 5 besprokene na, wat zooal binnen dit gebied valt, dan blijkt dit het overgroote deel van alle proeven, die voor het luchtvaartonderzoek van belang zijn, te omvatten.

Wat Reynolds' getal betreft, kunnen in een dergelijke tunnel, voorzoover er althans waarden van Re van ong. 1.5×10^6 in bereikt kunnen worden, alle onderzoekingen uitgevoerd worden, die bij de in punt 4 gegeven indeeling tot de groepen *a* t/m *d* behooren. Alleen de tot groep *e* gerekende vallen hierbuiten, zoodat hiervoor òf een hooge-druk-tunnel òf een ware-grootte-tunnel met groote snelheid gebruikt moet worden. Onderzoekingen aan ware-grootte-vliegtuigen of hun hoofddeelen zijn natuurlijk buitengesloten, maar overigens worden de in punt 5a besproken bezwaren, die zich bij kleine tunnels kunnen voordoen, hier voor een groot deel ondervangen door de betrekkelijk groote afmetingen van de tunnel. Zooals reeds in punt 5b besproken werd, is de bereikbare snelheid op zichzelf meestal van ondergeschikt belang. Voor onderzoekingen bij zeer hooge snelheid, d.w.z. in de omgeving van de geluidsnelheid, zal toch steeds gebruik gemaakt moeten worden van een speciale tunnel (zie punt 6f).

e. Kleine tunnels (*lit.* 25).

Kleine tunnels, waaronder hier verstaan worden tunnels, waarin slechts waarden van Re kleiner dan 10^6 bereikt kunnen worden, werden vroeger algemeen gebruikt. Hierbij is gebleken, dat zij voor vele onderzoekingen zeer goed bruikbaar zijn, hetgeen door de meer dan 15-jarige ervaring met de R.S.L. tunnel bevestigd wordt. Toch brengen zij eenige bezwaren mede. De lage waarde van het Reynoldssche getal heeft tengevolge, dat bij sommige onderzoekingen geen voldoende zekerheid bestaat, dat de resultaten van de modelproef nauwkeurig de eigenschappen van het ware-grootte-vliegtuig zullen leveren (zie punt 4). Daarnaast maken, zooals in punt 5a besproken werd, de kleine afmetingen van de tunnel het uitvoeren van sommige proeven onmogelijk. Deze beide bezwaren hadden tengevolge, dat men, niettegenstaande de hoogere bouw- en bedrijfskosten, thans algemeen de voorkeur geeft aan middelmatige tunnels. Nieuwe kleine tunnels worden nog slechts gebouwd voor speciale onderzoekingen, onderwijsdoeleinden en eigen onderzoek door fabrieken. De bestaande worden echter, naast de grootere, gebruikt voor het uitvoeren van onderzoekingen, waarbij een hooge waarde van het Reynolds'sche getal geen vereischte is en kleine modellen gebezigd kunnen worden.

f. Installaties voor speciale onderzoekingen (*lit.* 26 t/m. 32).

In het voorgaande zijn verschillende typen van windtunnels besproken, die alle gebruikt worden voor wat men het gewone aerodynamische onderzoek zou kunnen noemen. Met een enkel woord zullen hier ten slotte eenige installaties aangeduid worden, die gebezigd worden voor meer speciale onderzoekingen.

Voor proeven bij snelheden in de omgeving van de geluidssnelheid, werden tot voor kort alleen vrij kleine en betrekkelijk eenvoudige inrichtingen gebezigd, waarbij gebruik gemaakt werd van in of uit een reservoir stroomende lucht. Hierbij wordt òf de instroomende lucht eenvoudig door het kanaal geleid, waarin het model is opgesteld, òf door injectorwerking verdere lucht aangezogen. Aan de Technische Hochschule te Zürich is echter onlangs een nieuwe installatie voor dergelijke onderzoekingen in bedrijf gesteld, die in beginsel geheel overeenkomt met een gewone tunnel. De afmetingen zijn echter veel kleiner, terwijl de ventilatorschroef voor het in beweging brengen van de lucht vervangen is door een axiaal-ventilator met veranderlijk aantal trappen. Deze ventilator wordt aangedreven door een motor van 1000 pk. Voorloopig worden de modellen opgesteld in een vrijen straal van 0.6 m middellijn. Het is echter de bedoeling later te werken met een geheel gesloten kanaal, dat op de meetplaats een doorsnede heeft van 0.4×0.4 m en waarin, met het oog op energie-besparing, de druk van de lucht verminderd kan worden onder de atmosferische. Verwacht wordt, dat dan snelheden tot 680 m/sec, dus ongeveer tweemaal de geluidssnelheid, bereikt kunnen worden.

Ook onderzoekingen over de bewegingen, die een vliegtuig kan uitvoeren, gaven aanleiding tot den bouw van speciale tunnels. Bij den belangrijken en gevaarlijken bewegingstoestand, die gewoonlijk met den, uit het Engelsch overgenomen, naam „spin" aangeduid wordt, voert het vliegtuig een draaiïng uit om een as, die ongeveer evenwijdig is aan zijn bewegingsrichting. Metingen over den invloed van deze rotatie op de aerodynamische eigenschappen kunnen wel in een gewone tunnel met horizontale windrichting uitgevoerd worden, de wisselende component van de zwaartekracht geeft dan echter aanleiding tot practische moeilijkheden. Om dit bezwaar te ontgaan, werden in Engeland en Amerika voor dergelijke onderzoekingen verticale tunnels gebouwd.

In de Engelsche is, in tegenstelling met de Amerikaansche, de luchtstroom naar boven gericht. Hierdoor kunnen in deze tunnel niet alleen metingen als de bovenbedoelde uitgevoerd worden, doch kan ook de beweging van vrijvliegende modellen onderzocht worden. Deze vallen tegen den wind in, doch kunnen door een juiste regeling van de windsnelheid op nagenoeg constante hoogte gehouden worden. Hierdoor is het mogelijk de beweging in alle bijzonderheden te bestudeeren. Men gaat hierbij zelfs zoo ver, dat tijdens de proef de roeren door een in het model aangebrachten automaat versteld en zoodoende de invloed hiervan op de beweging nagegaan kan worden.

Ten slotte kan als speciale tunnel nog die vermeld worden, welke in Amerika gebruikt wordt voor het uitvoeren van proeven over ijsafzetting. Dit is een kleine tunnel (middellijn 0.15 m), die tegen warmtetoevoer van buiten geïsoleerd, doch overigens van normale uitvoering is. De lucht wordt gekoeld door koelvloeistof, die door in het omloopkanaal aangebrachte holle schoepen stroomt.

7. *De meest gewenschte tunneluitrusting voor een dienst als de R.S.L.*

Wil men alle voorkomende tunnelproeven kunnen uitvoeren, dan kan niet volstaan worden met één tunnel of eenige tunnels van hetzelfde type. In landen als Amerika, Engeland en Frankrijk [1]), waar hiervoor voldoende geldmiddelen beschikbaar zijn en de omvang van de industrie het bestaan van een groot aantal tunnels rechtvaardigt, worden dan ook verschillende soorten tunnels naast elkaar gebruikt.

Beschikt men daarentegen, zooals hier te lande, over geringere middelen, dan moet men zich in dit opzicht beperken. Nagegaan moet dan worden, wat noodig en voldoende is om onder de gegeven omstandigheden de voorkomende vragen zooveel mogelijk te kunnen beantwoorden en hoe dit op de meest economische wijze kan geschieden. Zooals na het voorgaande duidelijk zal zijn, is, hoewel ook de kleine tunnel voor vele onderzoekingen bruikbaar is, de middelmatige hiervoor het meest geschikte type. Het is dan ook de bedoeling om naast de bestaande kleine tunnel van den R.S.L. een middelmatige te bouwen. Op deze wijze wordt dan de beschikking verkregen over een tunneluitrusting, die het mogelijk maakt, de overgroote meerderheid van proeven, die voor kunnen komen, uit te voeren. Het bezwaar, dat ook dan nog sommige proeven niet mogelijk zijn, is minder ernstig dan op het eerste gezicht lijkt. In de eerste plaats worden door de buitenlandsche instellingen, die beschikken over de hulpmiddelen voor speciale onderzoekingen, in vele gevallen de uitkomsten hiervan gepubliceerd. Hierdoor bestaat b.v. een omvangrijke en steeds aangroeiende literatuur over metingen bij groote waarde van het Reynolds'sche getal, metingen bij zeer hooge snelheid en proeven met ware-grootte-schroeven. Dit materiaal omvat natuurlijk niet alle gevallen, die zich kunnen voordoen, doch maakt het wel minder noodzakelijk om zelf te beschikken over een inrichting voor het uitvoeren van dergelijke proeven. Bovendien bestaat de mogelijkheid om speciale proeven in een buitenlandsche windtunnel te laten uitvoeren. Deze mogelijkheid is echter beperkt tengevolge van de sterke bezetting van deze tunnels. Ook kunnen in sommige gevallen ware-grootte-proeven een nuttige aanvulling van tunnelproeven vormen.

8. *Samenvatting.*

a. De windtunnel is, naast proeven met vliegtuigen in de vlucht en theoretisch onderzoek, een der belangrijkste hulpmiddelen bij het aerodynamische onderzoek, dat voor een verdere ontwikkeling van de luchtvaarttechniek noodig is.

b. De bruikbaarheid van een windtunnel wordt hierbij hoofdzakelijk bepaald door de waarde van het Reynolds'sche getal, die er in bereikt kan worden en door haar afmetingen (punt 2 t/m 5).

c. De waarde van het Reynolds'sche getal bij de modelproef bepaalt de mate waarin en de nauwkeurigheid waarmede uit de bij deze proef verkregen resultaten de eigenschappen van het ware-grootte-vliegtuig afgeleid kunnen worden (punt 2 t/m 4).

d. Bij sommige onderzoekingen moet de waarde van het Reynolds'sche getal ongeveer gelijk zijn aan die voor het ware-grootte-vliegtuig, bij vele andere is dit niet noodig. Bij deze laatste moet echter wel het Reynolds'sche getal bij de modelproef grooter zijn dan een minimumwaarde, die afhankelijk is van den aard van de proef en van de gewenschte nauwkeurigheid. Bij verreweg de meeste en tevens practisch belangrijkste proeven is deze minimumwaarde van Re kleiner dan of ongeveer gelijk aan 1.5×10^6 (punt 4).

e. Het kan practische voordeelen bieden bij windtunnelproeven een ware-grootte-vliegtuig of de belangrijkste deelen ervan (b.v. romp met schroef) als „model" te gebruiken. Dit verlangt een windtunnel van zeer groote afmetingen. Overigens kunnen de beperkte afmetingen van een tunnel ook bij andere proeven bezwaren opleveren of deze onmogelijk maken (punt 5a).

f. De windsnelheid bij de modelproef is, op zichzelf genomen, meestal van weinig belang. Alleen voor het bepalen van de aerodynamische eigenschappen van lichamen bij snelheden, die ongeveer gelijk aan of grooter dan de geluidssnelheid zijn, zijn zeer hooge snelheden noodzakelijk (punt 5b).

g. Het is practisch onmogelijk alle soorten van modelproeven in één type van tunnel uit te voeren. Naast de „middelmatige tunnels", die voor de meest voorkomende onderzoekingen gebezigd worden, ontstonden dan ook twee andere typen, de „hooge-druk-tunnels" en de „ware-grootte-tunnels" (punt 6).

h. Hooge-druk-tunnels en ware-grootte-tunnels zijn noodig, resp. voor onderzoekingen bij zeer hooge waarden van het Reynolds'sche getal en voor tunnelproeven met ware-grootte-vliegtuigen of de belangrijkste deelen ervan. Voor ander werk zijn zij echter te oneconomisch en geven zij ook andere bezwaren (punt 6 b, c).

i. Middelmatige tunnels kunnen niet alleen gebezigd worden voor nagenoeg alle onderzoekingen, die niet tot de onder *h* genoemde speciale groepen behooren, doch zijn hiervoor ook het meest geschikt. Deze onderzoekingen omvatten verreweg de meeste proeven, die voor de practijk van direct belang zijn (punt 6d).

j. Naast de bovengenoemde worden nog verschillende andere tunnel-typen gebruikt voor speciale onderzoekingen (punt 6f).

[1]) Over Duitschland en Italië zijn op het oogenblik onvoldoende gegevens bekend. Vermoed wordt echter, dat daar soortgelijke toestanden bestaan.

LITERATUUROPGAVE

Onderstaande literatuuropgave mag geenszins als een volledige beschouwd worden. Zij geeft, naast eenige publicaties van meer algemeenen aard alleen die, welke in verband met het bovenstaande van rechtstreeksch belang zijn.

De grenslaag en haar invloed op schaaleffect.

1. De in de literatuuropgave van R.S.L.-rapport A 426 genoemde publicaties. *De Ingenieur* 1934, blz. W. 69 *en* Versl. en Verh. R.S.L., Deel VII, 1934, blz. 50.
2. ZAHM A. F. and ROSS C. A. Bibliography on skin friction and boundary flow. Library of the Congress, Division of Aeronautics. (Washington, 1932).
3. PRANDTL L. and TIETJENS O. Hydro- und Aeromechanik. Bnd. II, Kap. V. (Berlin, 1931).
4. KARMAN TH. VON. Turbulence and skin friction. *Journal of the Aeronautical Sciences.* Vol. I, 1934, p. 1.
5. KARMAN TH. VON and MILLIKAN C. B. The use of the windtunnel in connection with aircraft-design problems. *Trans. A.S.M.E.* Vol. 56, 1934, p. 151.
6. KARMAN TH. VON and MILLIKAN C. B. A theoretical investigation of the maximum-lift coefficient. *Journal of Applied Mechanics.* Vol. 2, 1935, p. A 21.
7. MILLIKAN C. B. and KLEIN A. L. The effect of turbulence. *Aircraft Engineering.* Vol. 5. 1933, p. 169.
8. MILLIKAN C. B. Further experiments on the variation of the maximum-lift coefficient with turbulence and REYNOLDS' number. *Trans. A.S.M.E.* Vol. 56, 1934, p. 815.

Overzichten van verschillende tunneltypen.

9. Zie 3, Kap. VIII C.
10. PRANDTL L. Herstellung einwandfreier Luftströme (Windkanäle), in: WIEN u. HARMS. Handbuch der Experimentalphysik, Bnd 4, Teil 2. (Leipzig 1932).
11. TOUSSAINT A. and JACOBS E. Experimental methods-Windtunnels, in: DURAND. Aerodynamic Theory, Vol. III. (Berlin 1935).

Beschrijvingen van windtunnels.

12. RELF E. F. The compressed-air wind tunnel of the National Physical Laboratory. *Engineering*, Vol. 132, 1931, p. 428.

13. JACOBS E. N. and ABBOTT I. H. The N.A.C.A. variable-density tunnel. N.A.C.A. Report 416, 1932.
14. DE FRANCE S. J. The N.A.C.A. full-scale wind tunnel. N.A.C.A. Report 459, 1933.
15. MAREC G. LE. La grande soufflerie aérodynamique de Chalais-Meudon. Génie Civil, 1934.
16. WOOD R. Mc K. The new windtunnels of the Royal Aircraft Establishment. *Engineering*, Vol. 132, 1931, p. 563.
17. WEICK F. E. and WOOD D. H. The twenty-foot propeller research tunnel of the N.A.C.A. N.A.C.A. Report 300, 1928.
18. MILLIKAN C. B. and KLEIN A. L. Description and calibration of 10-foot windtunnel at California Institut of Technology. *Trans. A.S.M.E.* (Aeron. Eng.) 1932—'33.
19. ACKERET J. Der neue Windkanal des Instituts für Aerodynamik an der E.T.H. Zürich. *Schweizer Aero-Revue* 1935, S. 107.
20. ROBERT. Une soufflerie aérodynamique de 1000 H.P. *L'Aéronautique*, 1923, p. 32.
21. COLLAR A. R. The N.P.L. open jet windtunnel. *R. & M.* 1569, 1934.
22. —. Die aerodynamische Versuchsanstalt in Warschau. *Zeitschr. f. Flugt. u. Motorluftsch.* 1928, S 119.
23. PRANDTL L. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I. Lief., 1921, S 8.
24. HARRIS T. A. The 7 by 10 foot windtunnel of the N.A.C.A. N.A.C.A. report 412. 1931.
25. —. De windtunnelinstallatie van den Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart. Versl. en Verh. R.S.L., Deel I, 1921, blz. 15.
26. BUSEMANN A. Profilmessungen bei Geschwindigkeiten nahe der Schallgeschwindigheit. *Jahrb. W.G.L.* 1928, S. 95.
27. STACK J. The N.A.C.A. high-speed wind tunnel and tests of six propeller sections. N.A.C.A. Report 463, 1933.
28. BAILEY A. and WOOD S. A. High speed induced windtunnel. *R. & M.* 1468, 1932.
29. ACKERET J. Der Ueberschallkanal. *Schweizer Aero-Revue* 1935, S 112.
30. WENZINGER C. J. and HARRIS T. A. The vertical windtunnel of the N.A.C.A. N.A.C.A. Report 387, 1931.
31. WIMPERIS H. E. New methods of research. *Aircraft Engineering*, Vol. 4, 1932, p. 151.
32. KNIGHT M. and CLAY W. C. Refrigerated windtunnel tests on surface coatings for preventing ice formation. N.A.C.A. T.N. 339, 1930.

Afkortingen:

Jahrbuch W.G.L.	= Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e.V.
N.A.C.A. Report	= Report of the National Advisory Committee for Aeronautics (Amerika).
N.A.C.A. T.N.	= Technical Note of the National Advisory Committee for Aeronautics (Amerika).
R. & M.	= Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Committee (Engeland).
Trans. A.S.M.E.	= Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.
Versl. en Verh. R.S.L.	= Verslagen en Verhandelingen van den Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Rapport A. 558.

Een vraagstuk uit de waarschijnlijkheidsrekening, betrekking hebbende op het voorkomen van bedrijfsstoringen

door

ir. C. KONING.

Rapport A. 558: Un problème de calcul des probabilités.

Report A. 558: A problem of probability.

Bericht A. 558: Ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Overgedrukt uit het Weekblad „De Ingenieur" 1936 no. 16. Algemeen gedeelte.

RAPPORT A. 558.

Een vraagstuk uit de waarschijnlijkheidsrekening.

Uittreksel.

Bij beschouwingen over bedrijfsstoringen kan het volgende vraagstuk van belang zijn: gegeven de gemiddelde tijd t_g tusschen twee storingen, gevraagd de waarschijnlijkheid $W(t)$ van het voorkomen van een storing gedurende een tijdsinterval van den duur t. Aangetoond wordt, dat, indien de storingen onderling onafhankelijk zijn, de gevraagde waarschijnlijkheid gegeven wordt door (6).

RAPPORT A. 558.

Un problème de calcul des probabilités.

Résumé.

En discutant des avaries de moteur le problème suivant peut être important: l'espace de temps moyen t_g entre deux pannes étant donné, quelle est la probabilité $W(t)$ d'une panne pendant un espace de temps de longueur t? Il est démontré, que, les pannes étant indépendantes, la probabilité demandée est donnée par (6).

REPORT 558.

A problem of probability.

Summary.

In discussing the possibilities of engine failure the following problem may be of interest: the mean time interval t_g between two failures being given, what is the probability $W(t)$ of a breakdown occurring during a time interval of length t? It is shown that if the failures are supposed to be independant, $W(t)$ is given by (6).

BERICHT A. 558.

Ein Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zusammenfassung.

Bei Betrachtung der Wahrscheinlichkeit von Betriebsstörungen begegnet man bisweilen folgendes Problem: der mittlere Zeitraum t_g zwischen zwei Störungen ist bekannt, die Wahrscheinlichkeit $W(t)$ einer Störung während eines Zeitintervalls von der Dauer t wird gefragt. Es wird bewiesen, dass, wenn die Störungen unabhängig sind, die Wahrscheinlichkeit $W(t)$ von (6) gegeben wird.

Een vraagstuk uit de waarschijnlijkheidsrekening, betrekking hebbende op het voorkomen van bedrijfsstoringen

door

ir. C. KONING.

Rapport A. 558. Rijks-Studiedienst voor de Luchtvaart, Amsterdam.

Beschouwd wordt de waarschijnlijkheid van het optreden, gedurende een *willekeurig gekozen tijdsinterval*, van een zich voortdurend en onregelmatig herhalend verschijnsel. De betrekking, die bestaat tusschen deze waarschijnlijkheid en den „gemiddelden tijd per verschijnsel" wordt afgeleid. De verkregen uitkomst wordt vergeleken met die van een eenvoudiger berekeningsmethode, welke men somtijds aantreft bij beschouwingen over de waarschijnlijkheid van bedrijfsstoringen en die, consequent doorgevoerd, tot onjuiste resultaten blijkt te kunnen leiden.

1. *Inleiding.*

Bij beschouwingen over de waarschijnlijkheid van het voorkomen van bedrijfsstoringen ontmoet men somtijds de volgende redeneering:

Uit het bekende aantal storingen A gedurende een zekeren, voldoend langen, bedrijfstijd T volgt, als quotient van deze beiden, de „gemiddelde tijd per storing" t_g. De waarschijnlijkheid van het optreden van een storing gedurende één tijdseenheid is dan $W(1) = 1/t_g$, terwijl zij voor een tijdsduur van t eenheden $W(t) = t/t_g$ is.

Op het eerste gezicht lijkt deze gedachtengang plausibel. Bij nadere beschouwing blijkt zij echter tot paradoxale resultaten te leiden. Stelt men namelijk t gelijk aan t_g, dus beschouwt men een bedrijfstijd in duur gelijk aan den gemiddelden tijd per storing, dan wordt als waarschijnlijkheid van een storing $W(t_g) = 1$ gevonden Voor zoover hieraan een beteekenis toegekend mag worden, beduidt dit echter, dat in ieder tijdvak van t_g eenheden met een aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid een storing te verwachten is. Anderzijds sluiten het uitgangsgegeven, dat de *gemiddelde* tijd per storing t_g is en de, niet expliciet uitgesproken, veronderstelling, dat de storingen onregelmatig optreden, in, dat naast storingsvrije tijdvakken korter dan t_g andere zullen voorkomen, die langer zijn.

In het onderstaande wordt nagegaan, wat de juiste wijze is om het aangeduide vraagstuk op te lossen en waar de fout in de bovenstaande redeneering schuilt. Daarbij worden, onder verwijzing naar de bestaande literatuur [1]), de beteekenis van het begrip „waarschijnlijkheid" en de elementaire regels der waarschijnlijkheidsrekening bekend verondersteld. Twee bewijzen, die in den tekst niet strikt noodzakelijk zijn, worden ter wille van de overzichtelijkheid in afzonderlijke bijlagen gegeven.

Met nadruk zij erop gewezen, dat hier alleen de wiskundige zijde van het vraagstuk beschouwd wordt. De vraag, of de verkregen uitkomsten al dan niet op bepaalde technische problemen toegepast mogen worden, blijft dus onbesproken. Zij zal voor ieder geval afzonderlijk nader onder het oog gezien dienen te worden. Daarbij zal men, evenals trouwens bij iedere praktische toepassing van een langs theoretischen weg verkregen resultaat, moeten nagaan of de omstandigheden, waaronder het werkelijke verschijnsel zich voordoet, voldoende overeenkomen met de veronderstellingen, waarvan de theorie uitgaat. Bovendien zal men moeten overwegen of het beschikbare materiaal omvangrijk en betrouwbaar genoeg is om er een bruikbare waarde van t_g uit af te leiden.

2. *Veronderstellingen.*

Beschouwd wordt het optreden van een verschijnsel, dat zich voortdurend, doch volkomen onregelmatig en onafhankelijk herhaalt. Iedere regelmaat in dit optreden en onderlinge beïnvloeding der opvolgende verschijnselen zijn dus uitgesloten. Bovendien zal de waarschijnlijkheid, dat het zich voordoet, op geenerlei wijze met den tijd veranderen.

De tijdsduur van het verschijnsel wordt gelijk nul aangenomen. Indien het mogelijk is, dat twee verschijnselen samenvallen, d.w.z. op hetzelfde tijdstip optreden, zullen deze als één verschijnsel worden beschouwd.

Ter toelichting diene het volgende. Bij een machine

---

[1]) Zie o.m.

Czuber E.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bnd. I (Leipzig u. Berlin 1914).

Zernike F.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, in Geiger und Scheel. Handbuch der Physik, Bnd. III (Berlin 1927).

Von Mises R.: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit (Wien 1928).

Vooral op laatstgenoemde verhandeling zij hier gewezen, omdat hierin uitgegaan wordt van een definitie van het begrip waarschijnlijkheid, die beter dan de klassieke past bij uit de techniek voortkomende vraagstukken op dit gebied.

kan zich een bedrijfsstoring voordoen, die het gevolg is van slijtage of vervuiling van een bepaald onderdeel. Bij een voorkomende storing zal hierin voorzien worden, zoodat onmiddellijk daarna de kans op een storing door deze oorzaak belangrijk afgenomen en dus ook de waarschijnlijkheid van een storing in het algemeen kleiner geworden is. De storingen zijn dan in zekeren zin onderling afhankelijk, zij beïnvloeden elkaar. Ook kan de kans op storingen tengevolge van ouderdomsgebreken van een werktuig met den tijd toenemen. Zoowel het een als het ander wordt door de bovengegeven veronderstellingen nadrukkelijk uitgeschakeld.

Aan de voorwaarde: tijdsduur van het verschijnsel gelijk nul, kan, ook wanneer dit in werkelijkheid niet het geval is, voldaan worden, door alleen op het begin ervan te letten en den tijd, gedurende welken het optreedt, niet mee te rekenen in den bedrijfstijd.

3. *Definities.*

Alvorens over te gaan tot een bespreking van het vraagstuk is het gewenscht de in de inleiding reeds aangeduide begrippen scherper te omschrijven. Tevens zal daarbij nog een andere grootheid, die in het volgende noodig is, gedefinieerd worden.

Onder „waarschijnlijkheid voor den tijdsduur t" $W(t)$ wordt verstaan de waarschijnlijkheid van het minstens éénmaal optreden van het verschijnsel gedurende een willekeurig tijdsinterval ($\tau_0 \leqq \tau < \tau_0 + t$), waarvan de duur t tijdseenheden bedraagt. Volgens de in punt 2 besproken veronderstellingen is de waarde van $W(t)$ voor ieder geval alleen afhankelijk van die van t, dus van den duur van het interval, en heeft het tijdstip, waarop dit begint (τ_0), er geen invloed op. Overigens mag natuurlijk verwacht worden, dat zij van geval tot geval verschillend zal zijn. In het volgende zal blijken, dat dit alleen tot uiting komt door een invloed van den hieronder nog nader te bespreken gemiddelden tijd per verschijnsel t_g.

Naast de waarschijnlijkheid $W(t)$ staat die van het niet-optreden van het verschijnsel gedurende den tijd t. Ter onderscheiding van eerstgenoemde zal deze met het symbool $W_n(t)$ aangeduid worden. Deze twee waarschijnlijkheden vullen elkaar aan, voor iedere waarde van t geldt dus de betrekking:

$$W(t) + W_n(t) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De „gemiddelde tijd per verschijnsel" t_g is gelijk aan een zeer langen waarnemingstijd, gedeeld door het aantal malen, dat het verschijnsel zich gedurende dien tijd voordoet. Streng genomen behoort t_g gedefinieerd te worden als de grenswaarde, waartoe bovengenoemde verhouding nadert bij steeds toenemenden waarnemingstijd.

4. *De waarschijnlijkheid $W(t)$.*

De betrekking, die bestaat tusschen de waarschijnlijkheden voor intervallen van verschillenden duur, kan het eenvoudigst gevonden worden door gebruik te maken van de waarschijnlijkheid van het niet-optreden van het verschijnsel.

Neemt men aan, dat $W(t)$, en daarmee ook $W_n(t)$, voor een bepaalde waarde van t bekend is en beschouwt men een interval mt, waarbij m een positief geheel getal is, dan is de waarschijnlijkheid, dat het verschijnsel zich gedurende dit interval niet zal voordoen:

$$W_n(mt) = \left\{W_n(t)\right\}^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Immers, het gaat hier om de waarschijnlijkheid van iets, waarvan het voorkomen in opvolgende gevallen gevraagd wordt. Zoowel voor t als voor mt geldt betrekking (1), zoodat uit deze en (2) tezamen voor de waarschijnlijkheid van het minstens éénmaal optreden van het verschijnsel in het interval mt volgt:

$$W(mt) = 1 - \left\{1 - W(t)\right\}^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Deze uitkomst werd hier afgeleid voor positieve geheele waarden van m. Op eenvoudige wijze kan aangetoond worden (zie bijlage I), dat zij ook geldt, wanneer m een positieve rationeele breuk is, d.w.z. een breuk, waarvan teller en noemer geheele getallen zijn. Zonder nader in te gaan op de vraag, of dit, streng wiskundig beschouwd, zonder meer toelaatbaar is, zal hier nog een stap verder gegaan worden, door aan te nemen dat (3) het verband tusschen $W(t)$ en $W(mt)$ voor iedere positieve waarde van m geeft.

Zooals in bijlage II aangetoond wordt, is de algemeene vorm van de functie $W(t)$, die aan deze vergelijking voldoet:

$$W(t) = 1 - e^{\alpha t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hierin is, algemeen genomen, α een willekeurige constante. De gevraagde waarschijnlijkheid $W(t)$ zal ook dezen vorm moeten hebben, waarbij dan echter aan α een waarde toegekend moet worden, die, zooals in het volgende zal blijken, alleen afhankelijk is van den gemiddelden tijd per verschijnsel.

5. *Het verband tusschen de waarschijnlijkheid $W(t)$ en den gemiddelden tijd t_g.*

Om dit verband te vinden, beschouwe men een zeer langen waarnemingstijd T en verdeele dezen in N intervallen van gelijken duur. De lengte van ieder interval is dan $t = T/N$, zoodat op grond van (4) de waarschijnlijkheid, dat in een dergelijk interval zich het verschijnsel één of meer malen zal voordoen, is:

$$W(t) = W\left(\frac{T}{N}\right) = 1 - e^{\alpha \frac{T}{N}}.$$

Dit beteekent echter niet anders [2]) dan dat, wanneer het aantal intervallen slechts voldoende groot is, hierbij ongeveer $NW\left(\frac{T}{N}\right)$ zullen voorkomen, waarin het verschijnsel minstens éénmaal optreedt en ongeveer $N\left\{1 - W\left(\frac{T}{N}\right)\right\}$, waarbij dit niet het geval is. Wordt N oneindig groot, dan nadert de verhouding tusschen beide aantallen tot de uit de aangegeven bedragen volgende. In het algemeen kan dus het aantal intervallen met verschijnsel gesteld worden op $NW\left(\frac{T}{N}\right) + N_1$. Onder deze zijn er, waarin het verschijnsel zich meer dan éénmaal voordoet. Het aantal verschijnselen gedurende den tijd T is daardoor grooter dan genoemd aantal intervallen. Stelt men het verschil tusschen beide voor door A_1, dan wordt het totaal aantal verschijnselen:

$$A = NW\left(\frac{T}{N}\right) + N_1 + A_1 = N\left(1 - e^{\alpha \frac{T}{N}}\right) + N_1 + A_1.$$

Voor den gemiddelden tijd per verschijnsel, zooals deze in punt 3 gedefinieerd is, volgt hieruit:

$$\frac{1}{tg} = \frac{A}{T} = \frac{N}{T}\left(1 - e^{\alpha \frac{T}{N}}\right) + \frac{N_1}{T} + \frac{A_1}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Laat men nu, bij gelijkblijvenden T, N onbepaald toenemen, dus verdeelt men den waarnemingstijd in steeds kleinere intervallen, dan nadert de in (5) gegeven uitdrukking tot een grenswaarde. Hierbij zullen zoowel N_1 als A_1 nul worden. Het eerste volgt onmiddellijk uit de boven aangeduide beteekenis van het begrip waarschijnlijkheid.

Om het tweede in te zien heeft men te bedenken, dat bij afnemenden duur der intervallen steeds meer verschijnselen, die aanvankelijk met meerdere binnen één interval vielen, over verschillende verdeeld zullen worden. Wordt deze duur tenslotte oneindig klein, dan zal per interval hoogstens één verschijnsel voorkomen.

De grenswaarde van de eerste term in het rechterlid van (5) kan verkregen worden door $T/N = t$ te stellen,

[2]) Vergelijk b.v. het eerste hoofdstuk van de in noot 1 genoemde publicatie van Von Mises.

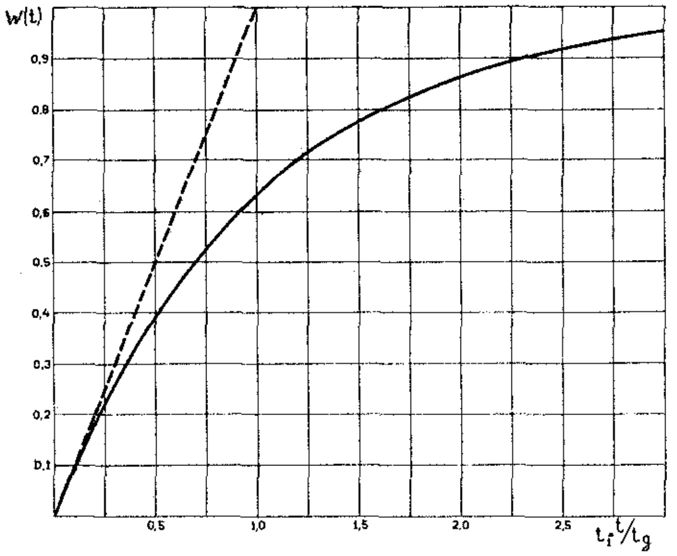


Fig. 1. De waarschijnlijkheid $W(t)$

——— $W(t) = 1 — e^{—t/tg}$

— — — $W(t) = t/tg$ (onjuist).

deze grootheid tot nul te laten naderen en daarbij op de gebruikelijke wijze de limiet te bepalen van de breuk, die het karakter 0/0 blijkt te hebben,:

$$\lim_{N=\infty} \frac{N}{T}\left(1 - e^{\alpha \frac{T}{N}}\right) = \lim_{t=0} \frac{1 - e^{\alpha t}}{t} = \lim_{t=0} \frac{1 - 1 - \alpha t \ldots}{t} = -\alpha$$

(5) wordt dus, wanneer N tot oneindig nadert:

$$1/t_g = -\alpha$$

Hiermede is de waarde van α bepaald. Invoering ervan in (4) geeft de gevraagde betrekking tusschen de waarschijnlijkheid $W(t)$, den duur t van het interval, waarvoor deze geldt, en den gemiddelden tijd per verschijnsel t_g:

$$W(t) = 1 - e^{-t/t_g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

6. *Bespreking van het verkregen resultaat.*

Als uitkomst werd boven de betrekking (6) gevonden, die het eenvoudige verband geeft, dat blijkt te bestaan tusschen de waarschijnlijkheid $W(t)$ en den gemiddelden tijd per verschijnsel t_g. Alleen laatstgenoemde grootheid behoeft bekend te zijn om voor een interval van iederen *willekeurigen tijdsduur t de waarschijnlijkheid* van het minstens éénmaal optreden van het verschijnsel te kunnen bepalen. Deze waarschijnlijkheid is alleen afhankelijk van de waarde van $t_1 = t/t_g$. Wanneer de duur van het interval niet in willekeurige tijdseenheden doch in t_g uitgedrukt wordt, is de waarschijnlijkheid steeds gegeven door dezelfde functie, die dus eens voor al berekend kan worden.

Deze functie is voor een aantal waarden van t_1 in tabel I gegeven en in fig. 1 uitgezet. In deze laatste is tevens het verloop van $W(t)$ aangegeven, zooals dit uit de in de in-

Tabel I.

De waarschijnlijkheid $W(t_1)$.

$W(t_1) = 1 - e^{-t_1}$; $t_1 = t/t_g$.

t_1	$W(t_1)$	t_1	$W(t_1)$	t_1	$W(t_1)$	t_1	$W(t_1)$
0	0	0,55	0,423	1,1	0,667	2,1	0,876
0,05	0,049	0,60	0,451	1,2	0,699	2,2	0,889
0,10	0,095	0,65	0,478	1,3	0,727	2,3	0,900
0,15	0,139	0,70	0,503	1,4	0,753	2,4	0,909
0,20	0,181	0,75	0,528	1,5	0,777	2,5	0,918
0,25	0,221	0,80	0,551	1,6	0,798	2,6	0,926
0,30	0,259	0,85	0,573	1,7	0,817	2,7	0,933
0,35	0,295	0,90	0,593	1,8	0,835	2,8	0,939
0,40	0,330	0,95	0,613	1,9	0,850	2,9	0,945
0,45	0,362	1,00	0,632	2,0	0,865	3,0	0,950
0,50	0,393						

leiding geschetste wijze van berekenen volgt. Het blijkt, dat voor kleine waarden van t_1 de uitkomsten van de twee methoden elkaar ongeveer dekken. Bij grootere waarden bestaat er echter een belangrijk, met t_1 toenemend, verschil tusschen beide. De op de onjuiste wijze bepaalde waarden van $W(t)$ nemen lineair met t_1 toe om *bij $t_1 = 1$ de waarde 1 te bereiken.* Bij de volgens (6) berekende uitkomsten daarentegen neemt de toename geleidelijk af met t_1, met het gevolg, dat zij ook bij $t_1 = 1$ en bij grootere waarden van deze veranderlijke onder de eenheid blijven om tenslotte asymptotisch tot deze grens te naderen.

De vraag moet nu nog beantwoord worden, waarin de onjuistheid van de in de inleiding aangegeven gedachtengang schuilt en of en in hoeverre de daaruit volgende methode in sommige gevallen toch bruikbaar is. Het antwoord op het eerste deel van deze vraag is, dat, zooals uit (3) of (6) blijkt, het niet toelaatbaar is voor willekeurig groote waarden van t aan te nemen, dat $W(t)$ evenredig is met den tijdsduur van het beschouwde interval. Voor het beantwoorden van het tweede deel is het noodig de in (6) gegeven uitkomst te ontwikkelen in een machtreeks naar t/t_g:

$$W(t) = t/t_g - \tfrac{1}{2}(t/t_g)^2 + \text{hoogere machten van } t/t_g \;\ldots\ldots \quad (7)$$

Is nu t/t_g zeer klein, dan mogen de tweede en hoogere machten ervan verwaarloosd worden. Zooals gemakkelijk in te zien is, leidt dit tot de hier bedoelde berekeningsmethode. Deze geeft dus een benaderingsoplossing, die alleen gebezigd mag worden in gevallen, waarin de duur van het beschouwde interval klein is vergeleken bij den gemiddelden tijd per verschijnsel. Is dit niet het geval, dan is haar gebruik niet toelaatbaar en leidt zij tot de in de inleiding besproken paradoxale resultaten.

7. *Conclusies.*

a. Voor verschijnselen, die, wat onregelmatigheid en onafhankelijkheid betreft, voldoen aan de in punt 2 besproken voorwaarden, geldt het volgende:

De waarschijnlijkheid, dat een verschijnsel zich gedurende een willekeurig gekozen tijdsinterval minstens éénmaal zal voordoen, is:

$$W(t) = 1 - e^{-t/t_g}.$$

Hierin is t de duur van het beschouwde interval en t_g de gemiddelde tijd per verschijnsel in den in punt 3 aangegeven zin.

b. De in de inleiding geschetste methode, waarbij de onder *a* bedoelde waarschijnlijkheid gelijk gesteld wordt aan het quotient van t en t_g, mag alleen toegepast worden, wanneer dit quotient zeer klein, het beschouwde interval vergeleken bij den gemiddelden tijd per verschijnsel dus zeer kort is. Is dit niet het geval, dan leidt zij tot onjuiste, te groote waarden voor $W(t)$.

Belangrijkste notaties.

- e = grondgetal van de natuurlijke logarithmen (= 2,718 . . . .).
- t = duur van het beschouwde tijdsinterval, uitgedrukt in willekeurige tijdseenheden.
- t_g = gemiddelde tijd per verschijnsel (zie punt 3).
- t_1 = duur van het beschouwde tijdsinterval, uitgedrukt in t_g als eenheid.
- A = aantal verschijnselen gedurende den waarnemingstijd T.
- N = aantal intervallen, waarin de waarnemingstijd T verdeeld wordt.
- T = duur van den waarnemingstijd.
- $W(t)$ = waarschijnlijkheid van het minstens éénmaal optreden van het verschijnsel gedurende een tijdsinterval, waarvan de duur t is.
- $W_n(t)$ = waarschijnlijkheid van het niet-optreden van het verschijnsel gedurende het bij $W(t)$ bedoelde tijdsinterval.
- τ = tijd als loopende veranderlijke.

De beteekenis der overige symbolen is op de plaats, waar zij voor het eerst verschijnen, toegelicht. Dit geldt ook voor de bovenstaande voor zoover voorzien van een hier niet besproken index.

Bijlage I.

De waarschijnlijkheid $W(mt)$ voor meer algemeene waarden van m.

Volgens de in punt 4 gegeven afleiding geldt de betrekking

$$W(mt) = 1 - \{1 - W(t)\}^m \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

voor geheele positieve waarden van m en willekeurige waarden van t. Wordt nu voor laatstgenoemde grootheid t/q ingevoerd en m vervangen door het eveneens geheele getal q, dan krijgt zij den vorm:

$$W(t) = 1 - \{1 - W(t/q)\}^q$$

Bij oplossing naar $W(t/q)$ volgt hieruit:

$$W(t/q) = 1 - \{1 - W(t)\}^{1/q}$$

Hierin mag men t weer vervangen door pt:

$$W\left(\frac{p}{q}t\right) = 1 - \{1 - W(pt)\}^{1/q} \ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

Indien p een geheel getal is, volgt echter uit (3):

$$W(pt) = 1 - \{1 - W(t)\}^p$$

Invoering hiervan in (3*a*) geeft dan:

$$W\left(\frac{p}{q}t\right) = 1 - \{1 - W(t)\}^{p/q} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3b)$$

waarmede dus bewezen is, dat (3) ook geldt, wanneer m een positieve rationeele breuk is.

Bijlage II.

De algemeene vorm van de functie $W(t)$.

Zooals in punt 4 besproken is, moet de functie $W(t)$ voor alle reëele positieve waarden van m en t voldoen aan de vergelijking:

$$W(mt) = 1 - \{1 - W(t)\}^m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wordt hierin ingevoerd:

$$W(t) = 1 - f(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3c)$$

dan gaat zij over in:

$$f(mt) = \{f(t)\}^m$$

waaruit dan, door nogmaals een nieuwe onbekende functie in te voeren door de substitutie:

$$f(t) = e^{F(t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3d)$$

volgt:

$$F(mt) = mF(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3e)$$

Het is onmiddellijk in te zien, dat:

$$F(t) = t$$

een oplossing van deze laatste vergelijking is. De vraag doet zich echter voor, of een meer algemeene oplossing bestaat. Teneinde deze vraag te kunnen beantwoorden zij deze oplossing voorgesteld door:

$$F(t) = t\,F_1(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3f)$$

Invoering hiervan in (3*e*) leidt tot:

$$mt\,F_1(mt) = mtF_1(t)$$

m.a.w. $F_1(mt)$ moet voldoen aan:

$$F_1(mt) = F_1(t).$$

Dit zal het geval moeten zijn voor alle reëele positieve waarden van m en t. $F_1(t)$ kan dus niet anders dan een, overigens willekeurige, constante zijn. Wordt hiervoor

$$F_1(t) = \alpha$$

aangenomen, dan volgt hieruit met behulp van (3*f*), (3*d*) en (3*c*):

$$W(t) = 1 - e^{\alpha t}$$

als algemeene oplossing van vergelijking (3).

Rapport V. 834.

Correctie voor stuwing en wrijving op thermometeraanwijzingen

door

dr. ir. H. J. VAN DER MAAS en ir. S. WYNIA.

Overgedrukt uit het Weekblad „De Ingenieur" 1938 nos. 35 en 36. Algemeen gedeelte.

RAPPORT V 834.

Correctie voor stuwing en wrijving op thermometer-aanwijzingen.

Uittreksel.

Onderzocht wordt de correctie, die op de aanwijzing van een in een luchtstroom opgestelden thermometer moet worden aangebracht wegens de temperatuursverhoogingen, die worden veroorzaakt:

1e. door de adiabatische compressie van de lucht in punten van verkleinde stroomsnelheid;

2e. door de in de grenslaag aan het thermometeroppervlak vrijkomende wrijvingswarmte.

Op grond van theoretische overwegingen (Hoofdstuk II), die onvolledig zijn, daar het geval der turbulente grenslaag niet voor berekening toegankelijk is, komt men tot een correctieformule:

$$\triangle \theta_a = -c_1 v^2 = -c \frac{\rho_0}{\rho} q$$

Deze formule wordt voor een thermometer van bepaald type (NZI) door het experiment bevestigd (Hoofdstuk IV), waarbij moet worden genomen:

$$c = 0{,}008 \frac{^\circ C\ m^2}{kg}$$

Men kan voor dezen thermometer de formule ook schrijven:

$$\triangle \theta = -3{,}86.10^{-5} \frac{\rho_0}{\rho} v_q^2$$

($\triangle \theta$ in °C, v_q in km/h).

De max. stuwdruk, die bij de metingen werd bereikt, bedraagt ca. 600 kg/m².

De experimenteele gegevens zijn uit vliegproeven verkregen, d.w.z. gebruikt zijn de temperatuursmetingen, verkregen tijdens de horizontale snelheidsvluchten, die bij prestatiemetingen aan vliegtuigen werden uitgevoerd. De methode is beschreven in hoofdstuk III, terwijl in een aanhang een analoge methode beschreven wordt om de miswijzing, die gevolg is van de traagheid, te onderzoeken.

Summary.

In this report the correction has been investigated, which should be applied to the indication of a thermometer placed in a current of air and due to the increase of the temperature caused by:

1°. the adiabatic compression of the air in points of decreased air speed,

2°. the heat produced by friction in the boundary layer on the surface of the thermometer.

On account of theoretical considerations, which are incomplete since the calculation fails for the case of a turbulent boundary layer, the following formula for correction has been obtained:

$$\triangle \theta_a = -c_1 v^2 = -c \frac{\rho_0}{\rho} q.$$

For a thermometer of a certain type (NZI) this formula has been verified experimentally, giving for c a value of

$$c = 0{,}008 \frac{^\circ C\ m^2}{kg}$$

For this thermometer the formula may also be written as:

$$\triangle \theta = -3{,}86 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \cdot v_q^2$$

($\triangle \theta$ in °C, v_q in km/h)

The maximum indicated impact pressure reached in the experiments amounts to about 600 kg/m². The experimental data have been obtained by flight tests; i.e. only those measurements of temperature have been used obtained at level flights during full scale performance-tests on airplanes. The method has been described in Chapter III. In the appendix a similar method has been given to find the error in the indication due to time lag (thermal inertia). This last investigation has not yet been finished.

Résumé.

Il s'agit de l'examination de la correction de l'indication d'un thermomètre, placé dans un courant d'air, et qu'il faut appliquer en conséquence de l'élévation de température causée:

1°. par la compression adiabatique de l'air aux points de vitesse réduite,

2°. par la chaleur de frottement se dégageant dans la couche limite à la surface du thermomètre.

A cause de considérations théoriques, mais incomplètes, le cas de la couche limite turbulente ne se prêtant pas à la calculation, on obtient comme formule de correction:

$$\triangle \theta_a = -c_1 v^2 = c \frac{\rho_0}{\rho} q.$$

Cette formule est justifiée, pour un thermomètre du type NZI, par l'expériment quand on prend:

$$c = 0{,}008 \frac{^\circ C\ m^2}{kg}.$$

Pour ce thermomètre on peut transformer la formule dans la suivante:

$$\triangle \theta = -3{,}86 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} v_q^2$$

($\triangle \theta$ en °C, v_q en km/h)

La valeur maximale de la pression dynamique qu'on a obtenu s'élève à environ 600 $\frac{kg}{m^2}$. Les données expérimentales ont été acquises par des essais de vol, c.à.d. qu'on s'est servi des mesures de température obtenus pendant des vols en palier nécessaires pour la contrôle de la performance d'avions. La méthode a été décrite dans la Chap. III. Dans un appendice on trouve la description d'une méthode analogue pour l'examination de l'erreur résultant de l'inertie thermique. Ces dernières recherches ne sont pas encore terminées.

Zusammenfassung.

Es handelt sich um die Korrektion auf die Anzeige eines, in einem Luftstrom aufgestellten, Thermometers, wegen der Temperaturerhöhungen infolge:

1°. der adiabatischen Verdichtung der Luft in Punkten mit verkleinerter Strömungsgeschwindigkeit,

2°. der Reibungswärme, die in der Grenzschicht an der Oberfläche des Thermometers frei wird.

Auf Grund theoretischer Überlegungen (Kapitel II), welche noch unvollständig sind, weil der Fall der turbulenten Grenzschicht nicht der Berechnung zugänglich ist, kommt man auf eine Korrektionsformel,

$$\triangle \theta_a = -c_1 v^2 = -c \frac{\rho_0}{\rho} q$$

Diese Formel ist für ein Thermometer bestimmter Art (NZI) experimentell bestätigt worden mit:

$$c = 0{,}008 \frac{^\circ C\ m^2}{kg}$$

Für dieses Thermometer kann man die Formel auch schreiben:

$$\triangle \theta = -3{,}86 \cdot 10^{-5} \frac{\rho_0}{\rho} v_q^2$$

($\triangle \theta$ in °C, v_q in km/h)

Der gröszte Staudruck der während der Messungen erreicht wurde, beträgt ungefähr 600 kg/m².

Die experimentellen Angaben sind erzielt mittels Flugversuche, d.h. verwendet sind die Temperaturmessungen, welche gemacht wurden während horizontalen Geschwindigkeitsflügen, welche statt fanden bei Leistungsmessungen an Flugzeuge.

Das Verfahren wird beschrieben in Kapitel III. In einem Appendix wird eine analoge Methode beschrieben für die Feststellung der Fehler infolge der thermischen Trägheit. Diese letzte Arbeit ist noch nicht abgeschlossen.

Correctie voor stuwing en wrijving op thermometeraanwijzingen

door

dr. ir. H. J. VAN DER MAAS en ir. S. WYNIA.

Rapport V 834 van het Nationaal Luchtvaart-Laboratorium te Amsterdam.

INDEELING. I. Inleiding. II. Bespreking der wegens stuwing en wrijving aan te brengen correcties. III. Experimenteel onderzoek. IV. Uitwerking der resultaten. V. Samenvatting. VI. Aanhangsel: Opmerkingen over de traagheid van thermometers.

In een luchtstroom opgestelde thermometers vertoonen een miswijzing. Deze miswijzing blijkt in goede benadering onafhankelijk van de luchtdichtheid, en evenredig met het quadraat van de stroomsnelheid te zijn. De waarde der correctieconstante kan met behulp van proeven in vliegtuigen worden bepaald.

NOTATIES.

v = werkelijke stroomsnelheid;
v_q = stuwsnelheid;
v_w = werkelijke vliegsnelheid;
p = druk;
q = stuwdruk;
ρ = dichtheid;
ρ_o = dichtheid op 0 m in standaardatmosfeer;
c_p = soortelijke warmte bij constanten druk;
c_v = soortelijke warmte bij constant volume;
$K = \frac{c_p}{c_v}$
g = versnelling van de zwaartekracht;
R = gasconstante;
T = absolute temperatuur;
A = mechanisch aequivalent van de warmte-eenheid;
μ = viscositeit;
λ = warmtegeleidingscoëfficiënt;
θ = temperatuur;
θ_a = thermometeraanwijzing, instrumentaal gecorrigeerd;
H = hoogte;
m = massa.

I. Inleiding.

Om uitkomsten, verkregen uit waarnemingen tijdens vliegproeven, volledig vast te leggen, zullen gewoonlijk de bijbehoorende buitenluchttemperaturen, vaak zelfs tot op enkele tienden °C. nauwkeurig, bekend moeten zijn.

Deze temperatuur moet dan ook bij vrijwel alle proeven mede bepaald worden. Dit geschiedt bij het N.L.L. met z.g. afstandsthermometers.

Deze thermometers bestaan uit een meestal kwik bevattend reservoir, dat door een lange buigzame capillair verbonden is met een aanwijzend instrument. Dit laatste is in de bestuurdersruimte opgesteld, het meetlichaam bevindt zich in den luchtstroom buiten het vliegtuig. Een zonnescherm zorgt voor afscherming van de directe zonnestraling. Fig. 1 geeft een afbeelding van een tweetal volgens dit principe geconstrueerde thermometers. Het eenig verschil is gelegen in den vorm van het zonnescherm.

Natuurlijk kunnen in plaats van kwikthermometers ook electrische, b.v. weerstandsthermometers, voor de temperatuurmeting gebruikt worden. Beide systemen vertoonen typische voor- en nadeelen. Het voornaamste voordeel van electrische thermometers, tegenover kwikthermometers, is hun gewoonlijk belangrijk kleinere traagheid; de nadeelen zijn in de eerste plaats verbonden aan den voor nauwkeurige metingen noodzakelijken gevoeligen galvanometer, die voor gebruik in een vliegtuig geschikt moet zijn. Het is niet de bedoeling hierop verder in te gaan. Een gedeeltelijke overgang op electrische thermometers voor temperatuurmeting tijdens vliegproeven wordt op het oogenblik door het N.L.L. overwogen. In dit rapport komen uitsluitend de beide reeds genoemde en tot nu toe zeer gebruikelijke afstands-kwikthermometers ter sprake.

De moeilijkheid is, dat de aanwijzing van dergelijke thermometers door verschillende oorzaken onder omstandigheden zeer aanmerkelijk kan verschillen van de gezochte werkelijke buitenluchttemperatuur.

In de eerste plaats treden natuurlijk instrumentale fouten op, die door een ijking gevonden kunnen worden. Wij willen er reeds hier op wijzen, dat de daartoe aan te brengen correctie, die geen enkele moeilijkheid oplevert, geheel buiten beschouwing zal worden gelaten, zoodat overal, waar in het vervolg over thermometeraanwijzing wordt gesproken, de instrumentale correctie geacht wordt reeds te zijn aangebracht.

Een tweede fout wordt veroorzaakt door de veranderde stroomsnelheid in de directe nabijheid van het meetlichaam. Zelfs wanneer geen zonnescherm (dat de stroomvorm en stroomsnelheid sterk beïnvloedt) aangebracht zou zijn, bevindt zich toch in ieder geval aan het oppervlak van het

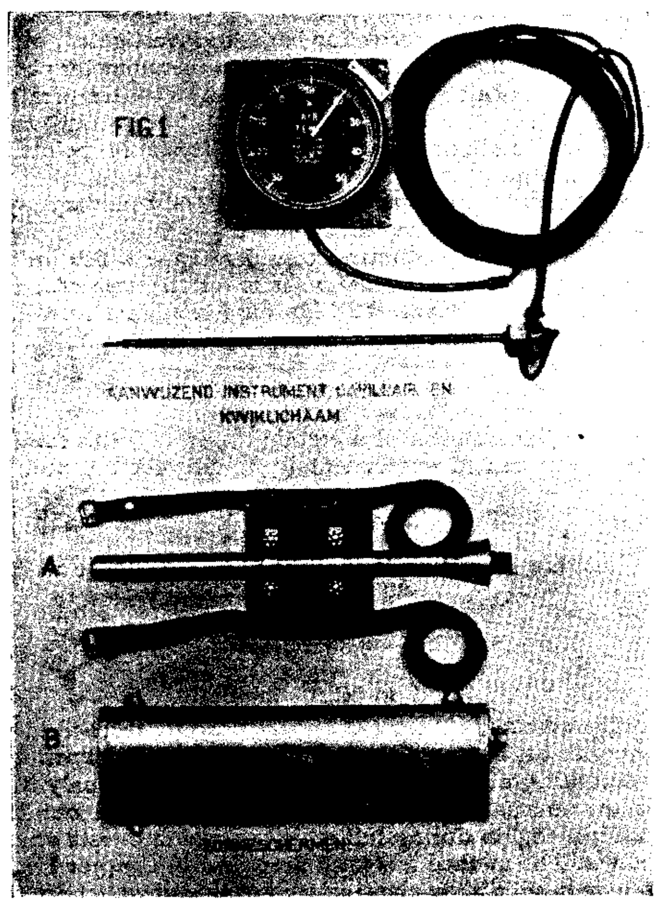


Fig. 1. Afstandsthermometer.

meetlichaam minstens één stuwpunt. Daar overal, waar (strikt genomen: in een *potentiaal*-strooming) de stroomsnelheid verminderd is, volgens de wet van BERNOUILLI een verhoogde druk optreedt, is aan iedere snelheidsvermindering een bij benadering adiabatische compressie en dus temperatuursverhooging verbonden. Deze kan bij grootere *snelheidsveranderingen enkele graden* Celsius bedragen.

Verder vormt zich aan het oppervlak van het meetlichaam een grenslaag, waarbinnen de inwendige wrijving (viscositeit) van de lucht een merkbare rol gaat spelen. Daar de door de wrijving aan de strooming onttrokken energie in warmte wordt omgezet, treedt in de grenslaag aan het meetlichaam een eveneens verhoogde temperatuur op, speciaal in die punten, waar buiten de grenslaag de stroomsnelheid groot is. De voor de beide laatstgenoemde effecten, veroorzaakt door „stuwing" en „wrijving", op de aanwijzing *van den thermometer aan te brengen* correcties, die reeds van verschillende zijden, ook door het N.L.L. (L.1., rapport A. 322) [1]) werden onderzocht, zullen in deze verhandeling volgens een nieuwe methode bepaald worden.

Naast de hierboven genoemde fouten moet nog op een laatste belangrijke foutenbron gewezen worden, die door de traagheid wordt gevormd. De kwikthermometers van het beschreven type hebben een vrij groote warmtecapaciteit, waardoor in verband met den beperkten warmteovergang, bij veranderde temperatuur van de omgeving de thermometeraanwijzing *„achter blijft"*.

Over deze traagheidsfout zullen in een aanhang eenige opmerkingen worden gemaakt.

Samenvattend moeten op iedere thermometeraanwijzing (naast de reeds toegepaste instrumentale correctie) een drietal correcties worden aangebracht.

1. Een correctie wegens stuwing.
2. Een correctie wegens wrijving.
3. Een correctie wegens traagheid.

Tot slot vermelden wij, dat alle in dit rapport opgenomen metingen verricht zijn met één der beide in fig. 1 afgebeelde afstandsthermometers. Deze zijn van het fabrikaat Negretti en Zambra, zij zullen worden onderscheiden door de aanduidingen:

Afstandsthermometers type NZI = Negretti en Zambra afstandsthermometer met „oud" type zonnescherm, fig. 1A.

Afstandsthermometers type NZII = Negretti en Zambra afstandsthermometer met „nieuw" type zonnescherm, fig. 1B.

II. Bespreking van de correctie wegens stuwing en wrijving.

§ 1. *Algemeen.*

Speciaal het aan stuwing, d.i. snelheidsvermindering, in een luchtstrooming verbonden temperatuureffect is reeds lang bekend. De eerste onderzoekingen op dit gebied zijn uitgevoerd door KELVIN en JOULE, die een goede overeenstemming tusschen theorie en experiment konden aantoonen. Sindsdien hebben verschillende onderzoekers zich met min of meer gelijksoortige vraagstukken bezig gehouden. Wij vermelden hier het werk van POHLHAUSEN (L. 2), EDMOND BRUN c.s. (L. 3) en oudere onderzoekingen door het N.L.L. (L. 1), ons hiermee beperkend tot die publicaties, waarvan in deze verhandeling gebruik gemaakt zal worden.

Voor een uitvoerig historisch overzicht kunnen wij trouwens verwijzen naar het in de literatuurlijst onder n°. 3 genoemde werk van E. BRUN. Alle ons bekende experimenten zijn in een opzicht onvolledig, daar de rol van de luchtdichtheid niet werd nagegaan. In het algemeen toch zal het optredend temperatuurseffect, behalve van de snelheidsverdeeling, ook hiervan afhankelijk kunnen zijn. Bij laboratoriummetingen en bij windtunnelmetingen stuit het onderzoek van de rol van de luchtdichtheid op moeilijkheden, waaraan men kan ontkomen, wanneer men er in slaagt een methode te vinden, die gebruik maakt van vliegproeven.

Een dergelijke methode is door het N.L.L. ontwikkeld, waarmee een aanvulling verkregen is van het op dit gebied uitgevoerde onderzoek. Alvorens echter op deze methode nader in te gaan, is het gewenscht de te verwachten effecten van het standpunt der theorie te beschouwen, waarbij de beschouwingen speciaal gericht zullen zijn op het vaststellen van voor de praktijk noodzakelijke geschikte *correctieformules* voor thermometer-aanwijzingen.

§ 2. *Temperatuursverandering verbonden aan stuwing.*

Een deel van de hieronder volgende eenvoudige beschouwingen is, wat het werk van het N.L.L. betreft, reeds gedeeltelijk in oudere rapporten opgenomen (L. 1). Aangezien met den invloed van de luchtdichtheid daarbij geen rekening werd gehouden, herhalen wij deze uiteenzettingen hier in vollediger vorm.

De vergelijking van BERNOUILLI voor gassen, de compressibiliteit in aanmerking genomen, luidt in de onderstelling, dat:

a. de strooming stationnair en rotatievrij is;
b. de inwendige wrijving mag worden verwaarloosd;
c. geen uitwendige krachten werken;
d. alle samendrukkingen adiabatisch geschieden, waarbij druk en dichtheid verbonden zijn door de bekende formule der ideale gassen: $\frac{p}{\rho^K} = \text{const.}$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{K}{K-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{K}{K-1}\frac{p_2}{\rho_2} \tag{1}$$

De indices 1 en 2 duiden op twee willekeurige punten 1 en 2 van het stroomveld.

Voor ideale gassen is bovendien:

$$\frac{p}{\rho} = g\,R\,T \qquad\qquad c_p - c_v = \frac{R}{A} \tag{2}$$

Uit de vergelijkingen (1) en (2) leidt men af:

$$T_2 - T_1 = \frac{K-1}{K}\cdot\frac{v_1^2 - v_2^2}{2gR} = \frac{1}{2g\,A\,c_p}(v_1^2 - v_2^2) \tag{3}$$

Deze uitdrukking kan ook direct worden gevonden uit de energievergelijking:

$$\tfrac{1}{2}\,m\,(v_1^2 - v_2^2) = A.mg.c_p\,(T_2 - T_1)$$

die aangeeft, dat de verdwenen kinetische energie volledig in warmte is omgezet.

Men vindt dus, dat de temperatuursverhooging door de stuwing uitsluitend van de snelheidsverdeeling, en niet van de dichtheid, afhangt.

Men kan een thermometer zoo construeeren, dat zijn kwikreservoir zich practisch geheel in een stuwpunt bevindt, b.v. door de afmetingen van dit reservoir zoo klein mogelijk te houden en het in het middelpunt van een cirkelvormige vlakke schijf, die loodrecht op de stroomrichting is opgesteld, aan te brengen. Voor een dergelijken „stuwpuntsthermometer" wordt de correctie wegens stuwing direct door (3): met $v_2 = 0$, geleverd; bovendien treedt in de directe omgeving van het kwikreservoir nagenoeg geen strooming op, waardoor de invloed van de wrijving onmerkbaar wordt en de correctie hiervoor vervalt. (Zie de rapporten A. 322, A. 342 en A. 479).

Bij de in vliegtuigen gebruikelijke thermometertypen spelen echter zoowel stuwing als wrijving een rol.

§ 3. *Temperatuursverandering verbonden aan wrijving.*

De correctie, die wegens de in de grenslaag van het thermometerlichaam ontwikkelde wrijvingswarmte moet worden aangebracht, kan slechts in een enkel vereenvoudigd geval bij benadering berekend worden. In het algemeen zal deze grenslaag gedeeltelijk laminair en gedeeltelijk turbulent zijn. In een turbulente grenslaag is de snelheidsverdeeling onregelmatig, waardoor de door de vrijkomende wrijvingswarmte veroorzaakte temperatuurs-

[1]) L = Literatuurlijst.

verdeeling niet voor eenvoudige berekening toegankelijk is.

Voor het geval van een stationnaire potentiaal-strooming langs een vlakken wand met laminaire grenslaag is door POHLHAUSEN (L. 2) berekend, bij welk temperatuursverschil tusschen den wand en het gas (of vloeistof) de warmte-uitwisseling nul is. Het blijkt, dat dit temperatuursverschil kan worden geschreven in den vorm

$$\triangle T = \frac{1}{8}\beta \frac{v^2}{gA\,c_p} \tag{4}$$

β mag hier als een uitsluitend van den aard van het gas afhankelijke constante worden beschouwd.

Voor lucht is ongeveer: $\beta = 3{,}6$.

Men kan de hiermee verkregen formule:

$$\triangle T = 0{,}45\,\frac{v^2}{gA\,c_p} \tag{5}$$

toepassen op een „plaat-thermometer", d.i. een thermometer, waarvan het kwikreservoir als een dunne vlakke plaat is uitgevoerd, waarbij men ermee rekening moet houden, dat een laminaire grenslaag bij de afleiding ondersteld is.

Uit de formule (5) volgt, dat ook de temperatuursverandering door de wrijving niet van de dichtheid afhangt, doch alleen van het kwadraat van de snelheid.

§ 4. Met $g = 9{,}81\,\frac{m}{sec^2}$; $A = 427\,\frac{kgm}{Cal}$; $c_p = 0{,}241\,\frac{Cal}{kg\,°C}$ worden de theoretisch afgeleide *correctie*formules voor de beide extreme gevallen:

1. stuwpuntsthermometer (alleen stuwing, verwaarloosbare wrijving), volgens (3):

$$\triangle_1\theta = -\,.\,0{,}5\,.\,10^{-3}.\,v^2.\left(\triangle\theta \text{ in } °C,\ v \text{ in } \frac{m}{sec}\right) \tag{6}$$

2. Plaatthermometer (alleen wrijving, verwaarloosbare stuwing) met laminaire grenslaag, volgens (5):

$$\triangle_2\theta = -0{,}45\,.\,10^{-3}\,.\,v^2\left(\triangle\theta \text{ in } °C,\ v \text{ in } \frac{m}{sec}\right) \tag{7}$$

waarin v de ongestoorde stroomsnelheid is.

Hierin moet nog worden toegevoegd

2a. Plaatthermometer met turbulente grenslaag:

$$\triangle_3\theta = \text{onbekend}$$

$\triangle_1\theta$ en $\triangle_2\theta$ blijken nagenoeg even groot te zijn; op grond van laboratorium-metingen (E. BRUN, L. 3) mag verwacht worden, dat ook $\triangle_3\theta$ van dezelfde grootte-orde is.

Bij een thermometer van willekeurige constructie zullen de 3 hierboven afzonderlijk beschouwde effecten in het algemeen gezamenlijk optreden. Het ligt nu voor de hand op grond van de voor $\triangle_1\theta$ en $\triangle_2\theta$ gevonden formules, met behulp van het experiment te onderzoeken of de totale correctie eveneens voldoende nauwkeurig evenredig met het kwadraat van de snelheid — waarvoor dan de werkelijke vliegsnelheid (v_w) te nemen is — kan worden gesteld. Het blijft echter de vraag, of de correctieformule, die in dit geval kan worden geschreven:

$$\triangle\theta = -c_1\,v_w^{\,2} = -c\,\frac{\rho_0}{\rho}\,q \tag{8}$$

mag worden geëxtrapoleerd buiten het gebied, waar zij experimenteel bevestigd is.

Voor den thermometer van het type NZI is het onderzoek volledig uitgevoerd (zie hoofdstuk IV), waarbij blijkt, dat tot stuwdrukken van 600 $\frac{kg}{m^2}$ de miswijzing inderdaad in goede benadering met een formule van het type (8) kan worden gerekend.

§ 5. Het is van belang aan de hierboven gegeven beschouwingen een opmerking toe te voegen, die verband houdt met de practische toepassing der correctieformule.

In de formule treedt de ongestoorde werkelijke stroomsnelheid v_w op, waarmee natuurlijk bedoeld is: de stroomsnelheid in een punt, waar hij *door den thermometer* niet gestoord is.

Wanneer nu echter de thermometer in een bepaald punt aan een vliegtuig bevestigd is, dan zijn er twee verstoringsoorzaken; in de eerste plaats het vliegtuig, en ten tweede de thermometer; het is de vraag, welke snelheid voor v_w in de formule ingevuld moet worden.

Men kan deze moeilijkheid grootendeels opheffen door de thermometer in een punt aan te brengen, waar de stroomsnelheid zoo goed mogelijk gelijk is aan de vliegsnelheid, en dan voor v_w ook de werkelijke vliegsnelheid invullen.

Is hiervoor echter niet zorg gedragen, dan zal men een fout maken, wanneer in de correctieformule de vliegsnelheid wordt ingevuld.

Wij willen trachten de grootte-orde van deze fout vast te stellen, daarbij aannemend, dat de correctieformule van den vorm (8) is.

Hiertoe zij:

v_w = de werkelijke vliegsnelheid;
v_t = de stroomsnelheid in de omgeving van de thermometer, echter in een punt, waar de verstoring door den thermometer zèlf nog mag worden verwaarloosd;
q_t = $\frac{1}{2}\rho\,v_t^{\,2}$;
θ = de werkelijke luchttemperatuur;
θ_t = de werkelijke temperatuur in het punt, waar v_t genomen werd;
θ_a = de aanwijzing van den thermometer.

Volgens (8) mogen we nu schrijven:

$$\theta_t - \theta_a = -c\,\frac{\rho_0}{\rho}\,q_t \tag{9}$$

Verder wijkt nu θ_t af van θ, omdat aan *iedere* snelheidsverandering een adiabatische compressie gepaard gaat. Dat deze snelheidsverandering op grooter schaal door het vliegtuig wordt veroorzaakt, doet hieraan niets af. Men heeft dan ook op grond van (3)

$$\theta - \theta_t = -\frac{1}{2\,g\,A\,c_p}\left(v_w^{\,2} - v_t^{\,2}\right)$$

$$= -c'\,\frac{\rho_0}{\rho}\,(q - q_t) \tag{10}$$

en dus wordt de gezochte totale correctie volgens (9) en (10)

$$\triangle\theta = \theta - \theta_a = -c'\,\frac{\rho_0}{\rho}\,q - (c - c')\,\frac{\rho_0}{\rho}q_t \tag{11}$$

Directe, doch feitelijk foutieve, toepassing van (8) zou opleveren:

$$\triangle\theta = -c\,\frac{\rho_0}{\rho}\,q$$

Nu verschilt c practisch nooit veel van c' (omdat de correctieconstanten voor wrijving alleen en stuwing alleen nagenoeg gelijk zijn, zie (6) en (7)), zoodat verwacht mag worden, dat ook de correctieconstante voor een combinatie van beide effecten ongeveer van dezelfde grootte zal zijn, hetgeen ook het geval blijkt.

Een vrij extreme onderstelling is b.v. $\frac{4}{5}\,c = c'$.

Daarmee wordt (11)

$$\triangle\theta = -\frac{4}{5}\,c\,\frac{\rho_0}{\rho}\,q - \frac{1}{5}\,c\,\frac{\rho_0}{\rho}\,q_t.$$

De bij directe toepassing van (8) gemaakte fout is dus wanneer wij b.v. aannemen, dat q_t tusschen de grenzen 0 en $2q$ ligt, hoogstens 20%. Het blijft natuurlijk gewenscht, speciaal voor nauwkeurige metingen, een doelmatige opstelling van den thermometer zorgvuldig te kiezen.

II. Experimenteel onderzoek.

§ 1. De uit te voeren proeven moeten niet alleen de waarde van de in de correctieformule optredende constante opleveren, maar ook de vorm van die formule en speciaal de *afhankelijkheid van de luchtdichtheid*, moet gecontroleerd worden.

Vooral het laatste is bij door verschillende onderzoekers uitgevoerde proeven niet geschied, die om deze reden aanvulling behoeven. Alvorens in te gaan op de door het N.L.L. gevolgde experimenteele methode, die van vliegproeven gebruik maakt, willen wij de reeds vroeger verkregen uitkomsten, afgeleid uit windtunnel-metingen, even recapituleeren, waarbij wij voor een uitvoeriger beschrijving naar het desbetreffende rapport A. 484 (L. 1) moeten verwijzen.

Bij deze proeven is de aanwijzing van den thermometer vergeleken met de aanwijzing van een stuwpuntsthermometer, waarop de theoretische correctie (6) aangebracht was.

De afhankelijkheid van de luchtdichtheid kon hierbij *niet* worden bekeken.

Voor den afstandsthermometer type NZI werd de uitkomst gevonden:

$$\triangle\,\theta = -0{,}010\;q \quad \left(\triangle\,\theta \text{ in } {}^\circ\text{C},\; q \text{ in } \frac{kg}{m^2}\right)$$

hetgeen in de formule (8) zou beteekenen:

$$c = 0{,}010 \cdot \frac{{}^\circ\text{C}\; m^2}{kg}$$

§ 2. Wanneer men het gestelde doel met vliegproeven bereiken wil, stuit men op één ernstige moeilijkheid. Deze hangt samen met de belangrijke traagheid van de gebruikelijke thermometers, die een niet voldoende nauwkeurig bekende fout in de aanwijzing veroorzaakt. Men kan deze fout trachten te elimineeren, door uitsluitend gedurende langeren tijd stationnaire thermometer-aanwijzingen te gebruiken, die op zullen treden, wanneer men tijdens de vlucht in één isotherme laag van de atmosfeer blijft. Dit brengt het nadeel mee, dat men zich bindt aan omstandigheden, die men niet in de hand heeft, n.l. een regelmatige atmosferische toestand tijdens de vlucht. Waarbij nog komt, dat zelfs in de gunstigste gevallen de structuur van de atmosfeer nooit geheel regelmatig is.

Nu kan men twee methoden overwegen, die tot bruikbare resultaten kunnen leiden:

1. Een directe methode, waarbij men zoo *gunstig* mogelijk atmosferische omstandigheden afwacht, om dan met een speciaal voor het gestelde doel ontwikkelde apparatuur (b.v. stuwpuntsthermometer als basis-instrument; zie de hiervoor aangehaalde windtunnelproeven) zoo nauwkeurig mogelijke metingen te doen.

2. Een methode, waarbij men betrouwbare uitkomsten tracht te verkrijgen uitsluitend uit bij elkaar behoorende aflezingen van den te onderzoeken thermometer, den snelheids- en hoogte-meter. Hiervoor is dus geen speciale apparatuur noodig, zooals echter zal blijken zijn goede resultaten alleen mogelijk, wanneer een *omvangrijk* meetmateriaal beschikbaar is. Dit kan tijdens een *groot aantal* willekeurige vluchten verzameld zijn.

Door het N.L.L. werd de laatste methode gekozen, die het voordeel heeft gemakkelijk uitvoerbaar te zijn, terwijl de betrouwbaarheid van de uitkomst altijd kan worden verbeterd door stelselmatige uitbreiding van het materiaal. Men ontkomt op deze wijze ook aan de moeilijkheden, die verbonden zijn aan de constructie van een geschikte speciale apparatuur.

De vereischte metingen werden gedaan tijdens de regelmatig door het N.L.L. aan verschillende toestellen uitgevoerde prestatiemetingen. Bij deze proeven geschiedt de temperatuurbepaling steeds met één der afstandsthermometers, type NZI of NZII (gewoonlijk den eersten), zoodat speciaal voor de NZI gedurende langeren tijd een uitvoerig materiaal bijeen gebracht kon worden.

§ 3. De hiervoor bedoelde door het N.L.L. toegepaste werkwijze kan door de navolgende uiteenzetting nader worden toegelicht.

Tijdens prestatiemetingen worden horizontale snelheidsvluchten met verschillende, constante snelheden uitgevoerd, b.v. voor het vastleggen van het verband tusschen snelheid en toerental. Wanneer een dergelijke serie vluchten uitgevoerd is in **één isotherme laag van de atmosfeer** dan kunnen de hierbij mede afgelezen thermometeraanwijzingen, mits er tijdens de vluchten zorg voor gedragen is, dat deze aflezingen uitsluitend geschieden, nadat de aanwijzing *stationnair* was geworden [2], voor het gestelde doel gebruikt worden.

Men kan dan immers uit het verband tusschen snelheid, hoogte en thermometeraanwijzing de toelaatbaarheid der veronderstelde correctieformule (8) en, wanneer deze bevestigd wordt, ook de waarde der constante bepalen.

Daar het niet mogelijk is, tijdens de vlucht te controleeren of men in één isotherme laag blijft vliegen, hetgeen slechts onder zeer gunstige atmosferische omstandigheden het geval zal kunnen zijn, moeten alle verkregen metingen *achteraf* geschift worden, hetgeen geschiedt aan de hand van het navolgende criterium.

De tijdens de vluchten, op gelijke hoogte met verschillende op zichzelf constante stuwsnelheden, verkregen aflezingen vertoonen een regelmatige toename bij grootere stuwdrukken. Wanneer een reeks van *minstens* 3 waarnemingen aan dit criterium voldoet, is het aannemelijk, dat de betreffende vlucht althans bij benadering onder de geëischte omstandigheden werd uitgevoerd.

Het is in dit verband wel van belang erop te wijzen, dat, daar de vluchten met verschillende toestellen worden uitgevoerd, kleine afwijkingen ontstaan kunnen door een verschillende plaatsing van den thermometer aan het vliegtuig, ook al is deze steeds zoo gunstig mogelijk gekozen (zie ook hoofdstuk I, 5).

IV. Uitwerking der resultaten.

Het materiaal, opgenomen in de niet-gepubliceerde rapporten V. 660, V. 718, V. 771 en V. 1051 blijkt tenslotte een negental reeksen en waarnemingen te bevatten, die aan het gestelde criterium (hoofdstuk III, 3) voldoen.

Deze gegevens zijn overgenomen en uitgewerkt in de aan het eind van dit artikel vermelde tabel. Fig. 2 geeft de bijbehoorende grafieken. Alle waarnemingen zijn uitgevoerd met den thermometer, type NZI, behalve de twee laatste, aan rapport V. 1051 ontleende reeksen, die verkregen zijn met een thermometer, type NZII.

Uit de bovengenoemde grafieken, die de thermometeraanwijzing aangeven als functie van den stuwdruk, is $\left(\frac{d\,\theta_a}{dq}\right)_H$ afgeleid.

Volgens (8) zou:

$$\left(\frac{d\,\theta_a}{dq}\right)_H = c\,\frac{\rho_o}{\rho_H} \text{ moeten zijn.}$$

De onderstaande tabel geeft een overzicht van het resultaat:

Rapport en proefnemingen	Stuwdruk in mm water	Vlieghoogte in SA [3] volgens) druk	Vlieghoogte in SA [3] volgens) dichtheid	Waarden van $\left(\frac{d\,\theta_a}{dq}\right)_H = c\,\frac{\rho_o}{\rho_H}$	
V. 660	205—595	380	375	0,0083	Thermometer NZI
V. 718	130—325	1670	1690	0,0096	
V. 771—I	150—260	5070	5040	0,0135	
V. 771—II	95—320	3590	3550	0,0145	
V. 771—IV	95—230	5070	5040	0,0143	
V. 771—V	95—305	3620	3570	0,0123	
V. 771—VI	95—315	2590	2430	0,0105	
V. 1051	150—600	3200	—	0,00965	Thermometer NZ II
V. 1051	250—600	1000	—	0,00675	

[2]) Aan het laatste is bij alle prestatiemetingen uitgevoerd na een bepaalden datum, zeer bijzondere aandacht geschonken.

[3]) SA = Standaardatmosfeer.

Vervolgens zijn in de grafiek fig. 2*b* de gevonden waarden van $\left(\frac{d\,\theta_a}{dq}\right)_H$ uitgezet als functie van de hoogte.

In deze grafiek is ook de lijn geteekend, die wordt verkregen door in (8) voor c de waarde 0,008 $\frac{°C m^2}{kg}$ te substitueeren overeenkomend met $c_1 = 0{,}5\ 10^3\ \frac{°C\ sec^2}{m^2}$.

De 7 voor den thermometer NZI experimenteel gevonden punten blijken, op één enkele na, met betrekkelijk kleine spreiding om deze lijn te liggen. De uit de tunnelproeven verkregen waarde $c = 0{,}010\ \frac{°C\,m^2}{kg}$ (Hoofdstuk III, 1) is iets grooter: echter zijn deze metingen alle verricht bij kleinere snelheden (tot 30 m/sec.).

Hoewel uitbreiding van het beschikbare experimenteele materiaal nog zeer gewenscht is, mag hieruit de conclusie worden getrokken, dat de op de thermometeraanwijzing aan te brengen correctie van stuwing en wrijving althans voor een thermometer van dit type, inderdaad in goede benadering in den vorm (8) kan worden geschreven. Voor dezen afstandsthermometer (type NZI) moet daarbij worden genomen $c = 0{,}008\ \frac{°C\,m^2}{kg}$ of $c_1 = 0{,}5\ 10^{-3}\ \frac{°C\,sec^2}{m^2}$. De correctie valt omgeveer samen met de theoretisch bepaalde correctie voor den stuwpuntsthermometer.

De beide voor den thermometer type NZ II gevonden punten zijn natuurlijk onvoldoende om tot een behoorlijk gefundeerde conclusie te komen. Het lijkt echter waarschijnlijk, dat de waarde der correctieconstante van dezen thermometer kleiner gekozen moet worden, b.v. $c = 0{,}0065°\ C\,m^2/kg$.

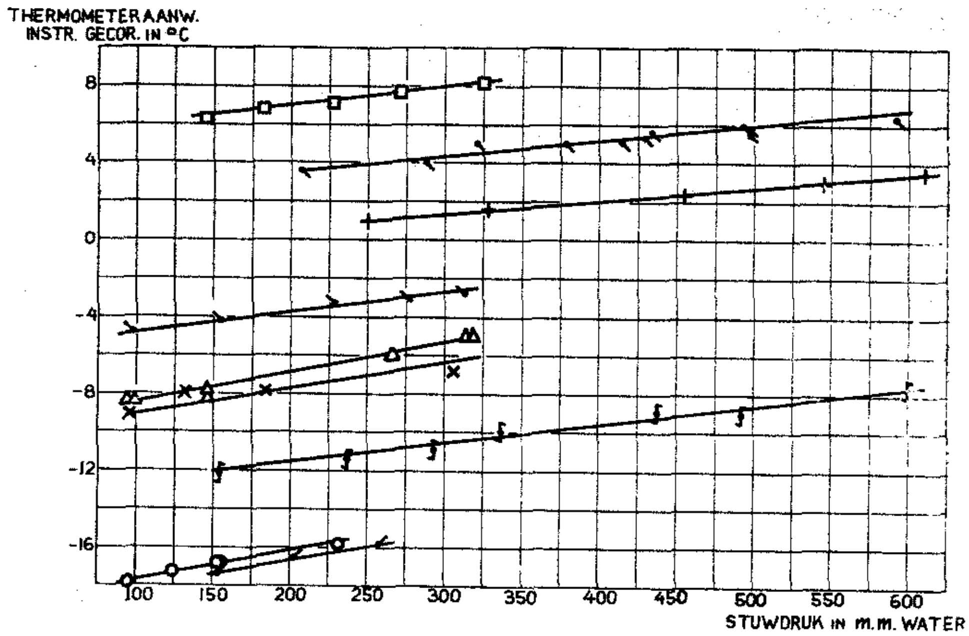


Fig. 2a. Instrumentaal gecorrigeerde thermometeraanwijzing als functie van den stuwdruk.

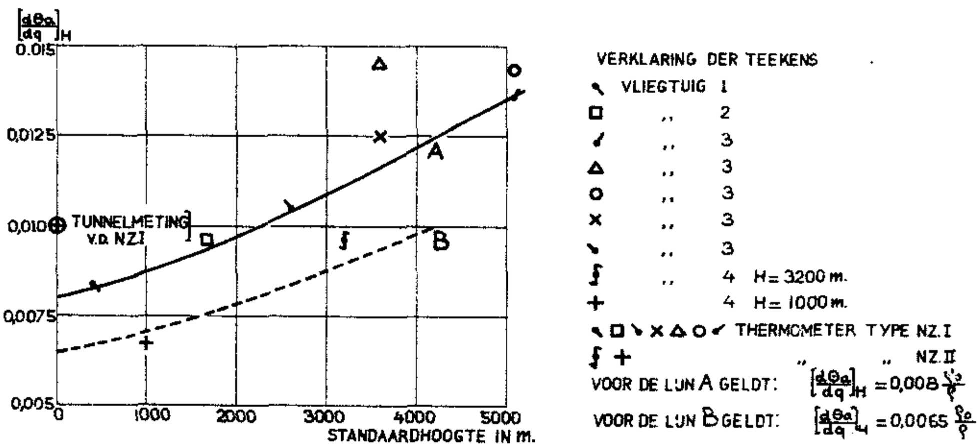


Fig. 2b. $\left[\frac{d\,\theta a}{dq}\right]_H$ als functie van de hoogte in de standaardatmosfeer.

De nauwkeurighied der resultaten is, zooals overigens reeds opgemerkt werd, wegens de vele mogelijke storingen en foutenbronnen, nauw verbonden aan het aantal geschikte meetresultaten.

Met de beschreven methode mag echter een goede nauwkeurigheid, zooals uit de hierboven uitgewerkte gevallen blijkt, bereikbaar geacht worden.

V. Samenvatting.

Beschreven wordt een methode om een gedeeltelijk op grond van theoretische beschouwingen opgestelden correctieterm voor stuwing en wrijving op vliegtuigthermometeraanwijzingen door waarnemingen verricht tijdens vliegproeven te controleeren en de waarde der constante te bepalen.

Men vindt:

$$\triangle\,\theta_a = -c\ \frac{\rho_o}{\rho}\ q$$

waarbij voor den thermometer van het type NZI

$$c = 0{,}008\ \frac{°C\ m^2}{kg}$$

Dit kan, voor het practisch gebruik, ook worden geschreven:

$$\triangle\,\theta_a = -3{,}86.10^{-5}\,\frac{\rho_o}{\rho}\,v_q^{\,2}$$

v_q = *stuw*snelheid in km/h.

Men verkrijgt hiermee b.v. de onderstaande getallen:

	Correctie in °C			
Stuwsnelheid $\frac{km}{h}$	100	200	300	400
hoogte: 0 m	0,39	1,54	3,48	6,17
,, 3000 m	0,52	2,08	4,68	8,32
,, 6000 m	0,72	2,87	6,45	11,5
,, 9000 m	1,01	4,06	9,12	16,2

Voor een goede nauwkeurigheid is een omvangrijk waarnemingsmateriaal noodzakelijk. De verkregen resultaten lijken betrouwbaar.

VI. Aanhangsel.

Traagheid van thermometers.

De thermometeraanwijzing θ_a geeft de gemiddelde kwiktemperatuur. Wanneer de temperatuur van de omgeving (θ) hiervan verschilt, zal de aanwijzing veranderen. In eerste benadering mag worden aangenomen, dat de verandering der aanwijzing per tijdseenheid evenredig is met het momentane temperatuursverschil met de omgeving, dus:

$$\frac{d\,\theta_a}{dt} = k \, . \, (\theta - \theta_a)$$

of:

$$\triangle\,\theta = \frac{1}{k}\,\frac{d\,\theta_a}{dt}$$

De waarde van k hangt zeker ook af van de stroomsnelheid van de lucht, waarin de thermometer is opgesteld, speciaal bij kleinere stroomsnelheden.

De hierin optredende correctieconstante $k' = \frac{1}{k}$ kan ook uit waarnemingen tijdens vliegproeven worden verkregen. Daartoe wordt eerst door horizontale snelheidsvluchten de temperatuursverdeeling in de atmosfeer vastgesteld. Ook nu moet weer de eisch gesteld worden, dat de temperatuursverdeeling uiterst gelijkmatig is, zoodat bovengenoemde horizontale vluchten tevens in een isotherme laag verloopen, waardoor hierbij de traagheidsfout geëlimineerd kan worden. Vervolgens wordt een stijg- of duikvlucht uitgevoerd; uit het hierbij vast te stellen verband tusschen tijd, hoogte en thermometeraanwijzing kan, daar de werkelijke temperatuursverdeeling met de hoogte bekend is, de waarde der correctieconstante worden gevonden.

Het is hierbij gewenscht dit heele complex vluchten met één zelfde werkelijke snelheid uit te voeren, om de correctie wegens stuwing en wrijving uit de berekening te houden. Alleen wanneer deze correctie nauwkeurig bekend is, kan deze maatregel overbodig geacht worden. Deze methode stelt aan de atmosferische gesteldheid zeer hooge eischen ook in verband met den tijd gedurende welken deze constand moet blijven.

Het op dit gebied verrichte onderzoek is op het oogenblik nog onvolledig. Het zal worden voortgezet met de bedoeling hierover later zoo mogelijk nadere gegevens te publiceeren.

De niet precies bekende afhankelijkheid van K_1 van de snelheid en daarmee ook van de plaats in of bij het vliegtuig, waarin de thermometer is opgesteld, vormt voor dit onderzoek een storenden factor.

LITERATUUROVERZICHT.

1. Rapporten van het N.L.L.:
   - A. 322. De aanwijzing van thermometers in bewegende lucht I. (2-4-'32). Gepubliceerd in *De Ingenieur* 29-12-'32, n°. 45.
   - A. 479. De aanwijzing van thermometers in bewegende lucht II. (20-4-'34).
   - A. 484. De aanwijzing van thermometers in bewegende lucht III. (16-4-'34).
   - V. 675. Vliegproeven betreffende de aanwijzing van afstandsthermometers (13-3-'34).

   De laatste drie rapporten zijn niet gepubliceerd.

   Andere publicaties:
2. Pohlhausen: Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik.* Band I, 1921, S. 115.
3. Edmund Brun. Phénomènes thermiques provoqués par le déplacement relatif d'un solide dans un fluide. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n°. 63, 1935 en *Publications scientifiques et techniques*, n°. 112, 1937 (ontvangen na afsluiting van dit rapport).

[4]) Naar *instrumentale* miswijzing gecorrigeerd.

[5]) Alleen de metingen dd. 24-11-'33 zijn naar eenzelfde hoogte gecorrigeerd. Bij de andere metingen was dit niet noodig, daar deze op ongeveer gelijke hoogte zijn geschied. Bij deze correctie is aangenomen $\frac{d\,\theta}{dH} = -0{,}0065$ (temperatuurgradiënt in standaard-atmosfeer).

Gegevens en uitwerking van de resultaten van horizontale snelheidsvluchten, ter bepaling van de temperatuurscorrectie voor snelheid op de aanwijzing van thermometers.

Stuwsnelheid Vq in km/h	Stuwdruk q in mm H_2O	Standaardhoogte in m	Temp. θ_a in °C [4])	Temp. herleid naar H = 380 m [5])	$\left(\frac{d\theta_a}{dq}\right)_H$ ontleend aan fig. 2	Opmerkingen
300	433	370	5,8	5,7		
298	428	400	5,3	5,4		
321	497	350	5,9	5,6		Vliegtuig 1
350	591	425	6,2	6,5		
321	497	350	6,0	5,8		*Datum*
320	493	410	5,8	6,0	*0.0083*	24-11-'33
280	378	375	5,1	5,1		
258	321	390	5,0	5,0		Thermometer
244	287	385	4,0	4,0		NZ I
207	208	350	3,8	3,6		
293	414	380	5,2	5,2		
259	324	1670	+ 8,2	—		Vliegtuig 2
237	271	1670	+ 7,7	—		*Datum*
217^5	228	1675	+ 7,3		*0.0096*	1-10-'34
188^5	172	1670	+ 6,8	—		Thermometer
167^5	136	1670	+ 6,3	—		NZI
231	258	5075	—15,8	—		Vliegtuig 3
205	203	5070	—16,5	—	*0,0135*	
178	153	5080	—17,3	—	vlucht I	*Datum*
140 142	94.5 97.5	3595	— 8,5	—		26-4-'35
174	146	3590	— 8,1 — 7,8	—		
234	264	3595	— 6,0	—	*0.0145*	Thermometer
256.5 255.5	318 315	3585	— 5,0	—	vlucht II	NZI
140	94,5	5080	—17,8	—		
160	124	5075	—17,3	—		
178 179	153 155	5075	—16,9	—	*0,0143*	Vliegtuig 3
219	231	5070	—15,8	—	vlucht IV	
140	94^5	3605	— 8,9	—		*Datum*
164^5	131	3625	— 8,0	—	*0,0125*	2-5-'35
195^5	184	3605	— 7,8	—		Thermometer
250	304	3635	— 6,8	—	vlucht V	NZI
142	97^5	2590	— 4,8	—		
179	155	2590	— 4,3	—		
217^5	229	2560	— 3,3	—	*0,0105*	
239^5	278	2590	— 3,1	—		
254^5	313	2540	— 2,7	—	vlucht VI	
353	600	3210	— 7,6	—		Vliegtuig 4
320	492^5	3210	— 9,0	—		
301^5	438	3200	— 9,0	—		*Datum*
264^5	337	3185	— 9,9	—	0,00965	19-1-'38
246	291^5	3215	—10,9			Thermometer
221^5	236^5	3215	—11,5			NZII
178^5	153	3205	—12,2			
356	610	1005	3,5	—		
336^5	545	1000	3,0	—		
307^5	455	1000	2,4	—	*0,00675*	
260^5	327	995	$1{,}5^5$	—		
228	250^5	970	0,9			

Rapport V. 1032.

Bepaling van de snelheid van een vliegtuig door meting van den stuwdruk onder toepassing van een gesleepte statische buis

door

dr. ir. H. J. VAN DER MAAS en drs. J. H. GREIDANUS.

Overgedrukt uit het Weekblad „De Ingenieur" 1939 no. 6. Algemeen gedeelte.

RAPPORT V. 1032.

Bepaling van de snelheid van een vliegtuig door meting van den stuwdruk onder toepassing van een gesleepte statische buis

Uittreksel.

Dit rapport geeft een overzicht van de vraagstukken, die zich voordoen bij de bepaling van de snelheid van een vliegtuig ten opzichte van de lucht uit stuwdrukmetingen verkregen met behulp van een zelfrichtende stuwdrukbuis en een aan een slang gesleepte statische buis.

De constructie van het meetsysteem (1. stuwdrukbuis, 2. statische buis, 3. slangconstructie, 4. snelheidsmeter) wordt onder II besproken. Onder III. 1 worden de factoren genoemd, die de dynamische stabiliteit van de gesleepte buis beïnvloeden. In III. 2 wordt de slanglengte berekend, die noodig is om de statische buis in een punt te brengen, waar de verstoring van den statischen druk door het vliegtuig, vergeleken bij den stuwdruk, te verwaarloozen is. Deze berekening is gebaseerd op het snelheidsveld van den het vliegtuig vervangenden hoefijzerwervel. Het blijkt, dat een slanglengte van 20 m praktisch steeds voldoende is.

In hoofdstuk IV worden de fouten behandeld, die de snelheidsmeteraanwijzing (naast instrumentale fouten) bevatten kan. Dit zijn:

1. Fouten in de snelheid $\left(v = \sqrt{\frac{2q}{\rho}}\right)$ tengevolge van de samendrukbaarheid van de lucht. Deze worden door correctie van de aanwijzing geëlimineerd.
2. Fouten, die in niet-horizontale vluchten optreden tengevolge van luchtstroomingen in de drukleidingen, vooral in de lange slang, waaraan de statische buis gesleept wordt. Deze fouten kunnen voldoende verkleind worden door een snelheidsmeter te gebruiken met een klein eigenvolume aan de statische-druk-zijde (b.v. circa 30 cm³) en door den inwendigen diameter van de drukleiding tot ten minste 4 mm te vergrooten. De fout kan ook geheel geëlimineerd worden door „compensatie" van het systeem (d.i. kunstmatige vergrooting van het snelheidsmeter-volume aan de stuwdrukzijde door bijschakeling van een extra volume en/of opname van een capillair van geschikte afmetingen in de stuwdrukleiding).
3. Traagheidsfouten, die bij meting van niet-stationnaire snelheden kunnen optreden ten gevolge van stroomingen in de stuwdrukleiding.
4. Fouten, die veroorzaakt worden door aanhoudende tangentieele of centrifugale versnellingen.

   Deze fouten blijken vrij groot te kunnen worden, zoodat het meetsysteem in den beschreven vorm onder deze omstandigheden (scherpe bochten, enz.) geen nauwkeurige resultaten oplevert. Dit punt zal nog nader onderzocht worden.

Bij doeltreffende uitvoering van het meetsysteem blijkt de uiteindelijk bereikbare nauwkeurigheid der snelheidsmeting in horizontale rechtlijnige vlucht als regel *minstens* ¹/₄ % bij de maximale en 1½ % bij de minimale snelheid te bedragen, welke getallen door ijkingen op baanvluchten experimenteel bevestigd werden.

RAPPORT V. 1032.

Détermination de la vitesse d'un avion au moyen de mesures de la pression dynamique en faisant usage d'un tube statique suspendu librement

Sommaire.

Ce rapport donne un aperçu des problèmes, qui se présentent en déterminant la vitesse d'un avion par rapport à l'air au moyen de mesures de la pression dynamique, obtenus avec un tube de pitot pivotant et un „tube statique" traîné au bout d'un tuyau.

La construction de l'appareil de mesure (1. tube de pitot, 2. tube statique, 3. tuyau flexible, 4. indicateur de vitesse) a été exposée sous II. Les facteurs, qui influencent la stabilité dynamique du tube suspendu, sont désignés sous III. 1. La longueur du tuyau, nécessaire pour tenir le tube statique dans une position où la perturbation de la pression statique résultant de l'avion, comparée à la pression dynamique, est négligeable, a été calculé en III. 2. Ce calcul se base sur les propriétés du champ de vitesse du tourbillon en fer à cheval remplaçant l'avion. Il apparaît qu'une longueur du tuyau flexible de 20 m suffit en pratique.

Dans le chapitre IV on discute les erreurs possibles des indications de vitesse (sauf erreurs instrumentales).

Les questions suivantes sont le sujet de cette discussion:

1. Les erreurs de la vitesse $\left(v = \sqrt{\frac{2q}{\rho}}\right)$ résultant de la compressibilité de l'air. On peut éliminer cette erreur en corrigeant les indications.
2. Les erreurs, qui se produisent pendant les vols non-horizontaux en conséquence des courants d'air dans les conduites de refoulement, surtout dans le long tuyau traînant le tube statique. Il est possible de réduire ces erreurs par l'application d'un indicateur de vitesse à petite capacité (30 cm³) à la côté de la pression statique et en élargissant le diamètre intérieur des conduites de refoulement à 4 mm au moins. L'erreur peut être éliminée par une „compensation" du système (c.à.d. une augmentation artificielle de la capacité de l'indicateur de vitesse à la côté de la pression dynamique en ajoutant une capacité supplémentaire, et/ou l'insertion d'un tube capillaire de certaines dimensions dans la conduite de la pression dynamique).
3. Les erreurs causées par l'inertie, qui peuvent se produire en mesurant des vitesses variables. Ces erreurs ne peuvent excercer une influence considérable que dans les systèmes compensés.
4. Les erreurs, causées par des accélérations continuelles tangentielles ou centrifuges. Il apparaît que ces erreurs peuvent excercer une influence considérable, de manière que l'appareil de mesure dans la forme décrite ne produit pas de résultats suffisamment exacts dans des situations pareilles (virages, etc.). Cette question sera l'objet d'un examen complémentaire.

La précision finale de la mesure de la vitesse pendant des vols en palier est au moins de ¹/₄ % à la vitesse maximum et de 1½ % à la vitesse minimum si l'arrangement de l'appareil de mesure est efficace. Les précisions susdites ont été confirmées par des vérifications pendant des vols sur trajectoires de longueur connue.

BERICHT V. 1032.

Bestimmung der Geschwindigkeit eines Flugzeuges mittels Messungen des Staudruckes unter Anwendung einer geschleppten statischen Sonde.

Zusammenfassung.

Diese Abhandlung gibt eine Uebersicht der Probleme die sich zeigen bei der Bestimmung der Geschwindigkeit eines Flugzeuges bezüglich der Luft aus Messungen des Staudruckes mit Hilfe eines selbst-richtenden Staurohres und einer an einem Schlauch geschleppten statischen Sonde.

Die Konstruktion des Mess-Systems (1. Staurohr, 2. statische Sonde, 3. Schlauchkonstruktion, 4. Geschwindigkeitsmesser) wird im zweiten Teil beschrieben. Im dritten Teil, 1 werden die Faktoren genannt, welche die dynamische Stabilität der geschleppten Sonde beeinflüssen.

In III, 2 wird die Schlauchlänge berechnet, die erforderlich ist um die statische Sonde in einem Punkt vernachlässigbarer Störung des statischen Druckes zu bringen. Diese Berechnung ist ausgeführt mit Hilfe des Geschwindigkeitsfeldes des — das Flugzeug ersetzenden — Hufeisenwirbels.

Es stellt sich heraus, dass eine Schlauchlänge von etwa 20 m praktisch immer genügt.

Im vierten Teil werden die nachfolgenden Fehler untersucht:

1. Der Fehler in der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2q}{\rho}}$, verursacht durch die Kompressibilität der Luft. Dieser Fehler wird durch Korrektur beseitigt.
2. Die Fehler, die im nicht wagerechten Fluge auftreten können, wegen Strömungen in den Druckleitungen. Diese Fehler können genügend verringert werden wenn ein Geschwindigkeitsmesser mit sehr kleinem Volumen (etwa 30 cm^3) an der Seite des statischen Druckes verwendet wird und der Innendurchmesser der Druckleitungen wenigstens bis auf 4 mm vergrössert wird. Die Fehler können völlig beseitigt werden durch „Kompensation" des Systems (d.h. künstliche Vergrösserung des Volumens des Geschwindigkeitsmessers an der Seite des Staudruckes und/oder Aufnahme eines Kapillarrohres bestimmter Abmessungen in der Staudruckleitung).
3. Trägheitsfehler bei Messungen veränderlicher Geschwindigkeiten infolge Strömungen in der Staudruckleitung. Merkliche Fehler dieser Art treten nur in „kompensierten" Systemen auf.
4. Fehler, die verursacht werden durch Tangential- oder Zentrifugal-Beschleunigungen. Diese Fehler können ziemlich gross werden. Das Messsystem in der beschriebenen Form kann deshalb unter derartigen Umständen (Kurvenflug u.s.w.) keine genaue Resultate geben. Dieser Punkt bleibt eine nähere Untersuchung vorbehalten.

Die Anwendung des beschriebenen Messsystems richtiger Konstruktion ermöglicht Geschwindigkeitsmessungen mit einer Genauigkeit von wenigstens $^1/_4$ % bei der Höchstgeschwindigkeit bis $1\frac{1}{2}$ % bei Mindestgeschwindigkeit. Diese Zahlen sind experimental bestätigt worden durch Vergleich mit direkte Geschwindigkeitsbestimmungen bei Flüge über Strecken bekannter Länge.

REPORT V. 1032.

Determination of the speed of an airplane by measuring the impact-pressure using a suspendic static head

Summary.

This report contains a survey of the problems which have to be considered when the speed of an airplane with respect to the air is determined from measurements of impact-pressure, obtained with a pivoted pitot-head and a suspended static head.

Part II gives a description of the construction of the measuring-system (1. pitot head, 2. static head, 3. flexible tube, 4. air speed indicator).

Under III. 1 attention is paid to the factors which influence the dynamic stability of the suspended static head. The length of the flexible tube, required to bring the static head at a point where the disturbance of static pressure caused by the airplane is negligible with respect to the impact-pressure, is calculated in part III. 2. This computation is based on the velocity-field of the horseshoe vortex substituting the airplane. In normal cases the length of the tube does not need to exceed 20 m.

Part IV contains a survey of the errors (save instrumental errors) as specified below:

1. Error in the speed $v = \sqrt{\frac{2q}{\rho}}$, resulting from the compressibility of the air, which is eliminated by a correction of the indicated airspeed.
2. Errors, occuring in non-level flights in consequence of pressure drop in the tubes, especially in the long tube of the static head. These errors can be sufficiently reduced by the use of an airspeed-indicator which has a small volume (e.g. 30 cm^3) on the static side and by enlargement of the internal diameter of all tubes to at least 4 mm. The errors can be totally removed by „compensation" of the system (i.e. by artificial enlargement of the volume of the airspeed indicator on the energy-pressure side and/or by inserting a capillary of suitable dimensions into the energy-pressure-tube).
3. Errors, resulting from lag when measuring variable airspeeds. Perceptible errors are found to occur only in „compensated" systems.
4. Errors, caused by tangential or centrifugal accelerations. These errors can attain considerable values. Therefore a system of the described type cannot give sufficiently exact results under these circumstances (sharp turns, etc). This point is reserved for further investigation.

With a measuring-system of the described type and of correct construction an accuracy can be reached of at least $^1/_4$ % at maximum airspeed up to $1\frac{1}{2}$ % at stalling speed. These figures are checked experimentally by comparison with the results of flights over a speed-course.

Bepaling van de snelheid van een vliegtuig door meting van den stuwdruk onder toepassing van een gesleepte statische buis

door

dr. ir. H. J. VAN DER MAAS en drs. J. H. GREIDANUS.

Rapport V. 1032 van het Nationaal Luchtvaart-Laboratorium te Amsterdam.

Notaties.

(In III, 2 is hiervan op enkele punten, die toegelicht zijn, afgeweken).

P, p = druk.
v = snelheid.
q = stuwdruk.
ρ = luchtdichtheid.
b = spanwijdte.
c_a = draag-coëfficiënt.
c_w = weerstandcoëfficiënt.
Γ = sterkte van een wervel.
T = abs. temperatuur.
m = gewicht.
W = weerstand van een luchtleiding.
w = stijgsnelheid.
g = versnelling van de zwaartekracht.
l = lengte.
η = viscositeit van lucht.
V = volume.
$\kappa = \dfrac{\text{soortelijke warmte bij constanten druk.}}{\text{soortelijke warmte bij const. volume.}}$
R = gasconstante.

I. Inleiding.

De bepaling van de snelheid van een vliegtuig ten opzichte van de lucht kan geschieden door meting van het verschil tusschen den energie-druk en den statischen druk.

Nu wordt de energie-druk in het algemeen niet beïnvloed door de nabijheid van het vliegtuig. Dit is echter wel het geval met den statischen druk.

Daarom moet, wanneer de nauwkeurigheid van deze snelheidsbepaling aan hooge eischen moet voldoen, de statische druk worden gemeten in een punt dat buiten de verstoring van het snelheidsveld door het vliegtuig valt.

Dit geschiedt met behulp van een onder het vliegtuig, aan een lange slang gesleepte „statische buis".

Deze werkwijze wordt door het N.L.L. reeds sinds 1924 toegepast [1]).

[1]) In navolging van de Royal Aircraft Establishment. Men zie de oorspronkelijke Engelsche publicatie in *R & M*, No. 845, 1922.

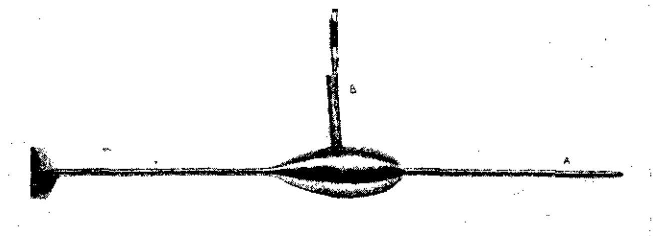


Fig. 1.

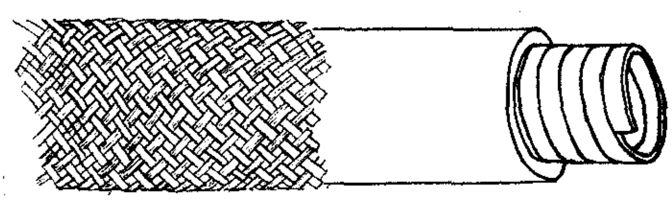


Fig. 2.

In verband met de zich wijzigende omstandigheden (toenemende vliegsnelheid, grootere vliegtuigen enz.) en de strengere eischen gesteld aan de nauwkeurigheid, werd de practische uitvoering vaak gewijzigd, terwijl het theoretisch onderzoek van de verschillende verschijnselen, die zich voordeden, verder werd uitgewerkt. Een deel van de resultaten is vastgelegd in een aantal vroeger verschenen R.S.L.-rapporten, waarvan de belangrijkste in de literatuuropgave te vinden zijn.

Enkele resultaten, die de laatste jaren verkregen zijn, zullen o.m. in deze verhandeling worden opgenomen.

Bij juiste en zorgvuldige toepassing van bovenbedoelde methode kan in vele gevallen een nauwkeurigheid worden verkregen, die langs anderen weg nauwelijks bereikbaar geacht moet worden.

II. Constructie van het systeem.

1. *Stuwdrukbuis.*

De energiedruk wordt gemeten door middel van een „zelfrichtende" stuwdrukbuis. Deze is voorzien van windvanen en is in een horizontaal en verticaal vlak binnen zekere grenzen draaibaar. Daardoor stelt zij zich steeds in de richting van den relatieven windstroom in. De buis is van voren open en hol, de hier optredende energiedruk wordt door een slang aan de stuwdrukzijde van den snelheidsmeter toegevoerd. De vorm van den neus is zoo gekozen, dat kleine hoeken tusschen de buis en de richting van den windstroom den druk in de buis niet merkbaar beïnvloeden.

De plaats, waar de buis wordt aangebracht is onverschillig, mits mag worden aangenomen, dat de strooming er het karakter van een potentiaalstrooming heeft.

2. *Statische buis.*

Een afbeelding van het laatst ontwikkelde type, dat zeer gunstige eigenschappen vertoont, geeft fig. 1. Bij A zijn in den „neus" een groot aantal zeer kleine gaatjes aangebracht. Bij B wordt zij aan de slang bevestigd. De plaats van de gaatjes in den „neus" is zóó gekozen, dat ook bij kleine hoeken tusschen de langsas van de buis en den windstroom de afgenomen druk gelijk is aan den statischen druk. Dit is geschied aan de hand van uitvoerige berekeningen en windtunnelproeven. Zie L. 12 (berekening) en L. 10 en 11 (windtunnelmetingen) [2]).

De pijp B (in de dwarsrichting afgeplat) is scharnierend in het zwaartepunt van de buis bevestigd.

De totale lengte bedraagt ca. 96½ cm, het gewicht is 7,2 kg.

3. *Slang.*

Hiervoor werd langen tijd gummislang gebruikt van 4,0 mm inwendige en 8,0 mm uitwendige diameter. In deze slang was een dunne stalen kabel (diameter 1,6 mm) aangebracht die de krachten opneemt (gewicht van de buis en windkrachten op het systeem), de slang zelf dient dan uitsluitend voor de drukgeleiding. Deze uitvoering bezit, zooals is gebleken (zie hoofdstuk IV, 2) enkele nadeelen. Daarom is later een slang ontwikkeld, waarvan de wand sterk genoeg is om ook de krachten op te nemen, zoodat de extra kabel vervallen kon.

Fig. 2 toont de constructie. Binnenin bevindt zich een

[2]) L = Literatuurlijst.

holle Bowden-kabel (veer-kabel) met een inwendigen diameter van 4,5 mm. Voor de luchtdichte afsluiting zorgt vervolgens een 1 mm dikke rubberlaag. Daaromheen is een staaldraadvlechting aangebracht van 32 × 4 draadjes van 0,15 mm diameter. Hierdoor worden de krachten opgenomen. De uitwendige diameter van de complete slang is ca 8,5 mm, het gewicht per meter 0,15 kg. De ervaringen met deze slang zijn tot nu toe gunstig.

4. *De snelheidsmeter.*

De snelheidsmeter, waarop de energie- en statischedrukleidingen worden aangesloten is een differentiaal drukmeter. De meteruitslag is evenredig met het verschil tusschen den energiedruk en den statischen druk.

III. Stabiliteitseischen en noodzakelijke slanglengte.

1. *Stabiliteit.*

Wil een nauwkeurige meting van den ongestoorden statischen druk mogelijk zijn, dan moet de statische buis „rustig" onder het vliegtuig hangen.

Nu is gebleken, dat iedere buis, wanneer de snelheid stijgt boven een voor het type „critische" waarde, heftige slingeringen kan vertoonen. Hierdoor worden goede metingen onmogelijk.

Een theoretisch onderzoek over het vraagstuk der stabiliteit van door een vliegtuig aan een kabel gesleepte voorwerpen is uitgevoerd door ir. C. Koning en T. P. de Haas. Voor een uitvoerige bespreking wordt naar hun publicatie verwezen (L. 9).

Hier zij slechts vermeld, dat dit onderzoek heeft aangetoond, dat de grenssnelheid der dynamische stabiliteit in de eerste plaats steeds kan worden verhoogd door vergrooting van het gewicht. Verder is het gewenscht dat:

1°. de statische stabiliteit klein is,

2°. de demping groot is,

3°. het traagheidsmoment om een dwarsas door het zwaartepunt zoo klein mogelijk is.

De onder 1° en 2° vermelde voorwaarden kunnen bereikt worden door het oppervlak van de staartvlakken klein te houden en de staartlengte groot te maken. Vanzelfsprekend moet de buis bovendien een goeden stroomlijnvorm vertoonen. De stabiliteit werd meermalen tijdens vliegproeven uitvoerig onderzocht. Hierbij werd de buis vanuit het vliegtuig, waaraan zij verbonden was, geobserveerd, terwijl ook vanuit een begeleidend vliegtuig cinematografische opnamen van de bewegingen van de buis werden gemaakt. Daarbij is gebleken, dat de langs theoretischen weg verkregen aanwijzingen op bevredigende wijze door de practijk worden bevestigd. (L. 5).

De nieuwste statische buis van het N.L.L. (fig. 1), is beproefd tot snelheden van ruim 500 km/h, onder toepassing van een slanglengte van ca. 18 m, hierbij werden in volledig uitgelaten toestand nimmer ontoelaatbare slingeringen geconstateerd.

2. *Noodzakelijke slanglengte.*

De verstoring van den statischen druk door het vliegtuig in het punt, waar zich de statische buis bevindt, moet beneden een te verwaarloozen maximum blijven.

De fout in % van de snelheid, die door deze geringe verstoring ontstaat, neemt toe bij kleiner wordende vliegsnelheid; gebleken is, dat zij in zeer ongunstige gevallen bij 20 m slang bij minimale snelheid beneden 1½ à 2 % en bij maximale snelheid beneden ∾ ¼ % blijft. De procentueele fout in den stuwdruk is het dubbele hiervan.

In normale gevallen mogen deze percentages op circa 1 % en 0,15 % worden gesteld. Een eenvoudige berekening kan een inzicht verschaffen in de verschillende factoren, die hier een rol spelen. Zij valt in 2 deelen uiteen:

a. De berekening van de plaats van de buis bij gegeven slanglengte.

b. De berekening van de verstoring door het vliegtuig op die plaats.

Voor de eerste berekening kan naar de bestaande literatuur worden verwezen. (L. 15 en 17).

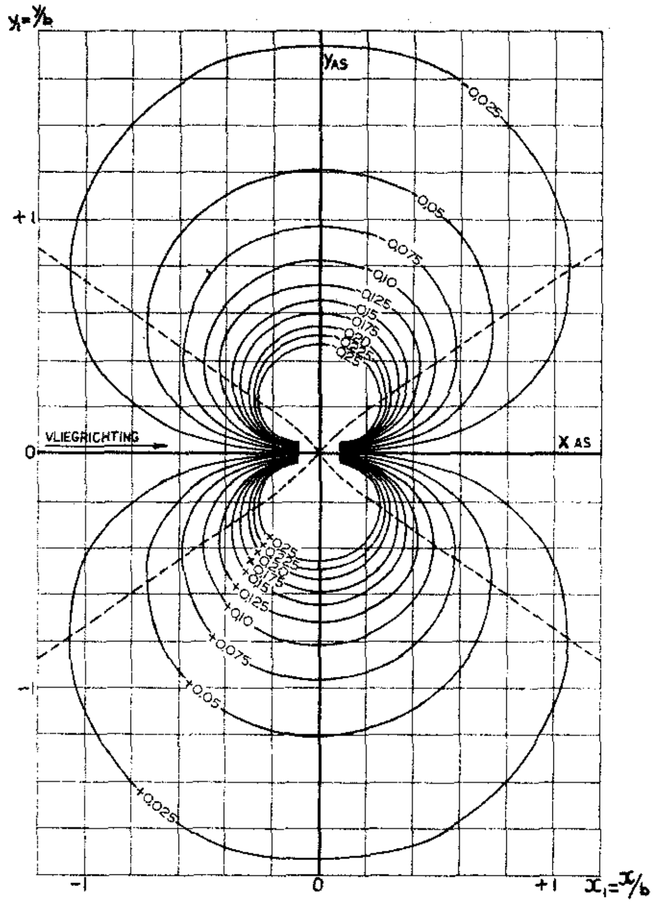


Fig. 3.

Speciaal de publicatie van Danielzig bevat een nauwkeurige en volledige uitwerking van dit vraagstuk.

Een berekening als bedoeld onder *b* is uitgevoerd door Kiel (L. 18) en door ir. Koning van het N.L.L. (L. 8).

Aan de laatstbedoelde berekening is het navolgende ontleend: Het stoorveld van een vliegtuig komt op eenigen afstand van het vliegtuig in goede benadering overeen met het snelheidsveld van een *hoefijzerwervel* van, bij onveranderlijke vliegsnelheid, constante sterkte, waarvan de breedte ongeveer gelijk is aan de spanwijdte van het vliegtuig.

Als u; v; w de componenten zijn van de door dezen wervel geïnduceerde snelheid, dan levert de vergelijking van Bernoulli, als V de totale stroomsnelheid is op zeer groote afstand van het vliegtuig:

$$p_o + \tfrac{1}{2}\rho V^2 = p + \tfrac{1}{2}\rho \left\{ (V+u)^2 + v^2 + w^2 \right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

met p_o = ongestoorde statische druk; p = statische druk ter plaatse van de buis.

Daar op de plaats, waar de statische buis zich bevindt, u; v; $w << V$ volgt uit (1):

$$p - p_o = \Delta p = -\rho V u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Hierin is dus Δp het verschil tusschen den statischen druk in het beschouwde punt en den ongestoorden statischen druk.

Aannemend dat de buis zich in het symmetrievlak van het vliegtuig bevindt, is volgens bekende formules

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{4}b^2}} \quad \ldots\ldots (3)$$

Hierin is b de spanwijdte. De stand van het gebruikte coördinatenstelsel volgt uit fig. 3. De oorsprong van dit coördinatenstelsel is het aerodynamisch middelpunt van den vleugel. Wordt b als lengte-eenheid ingevoerd, dan is met

$$x^2 + y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = b^2({x_1}^2 + {y_1}^2) = b^2 {r_1}^2$$

volgens (3):

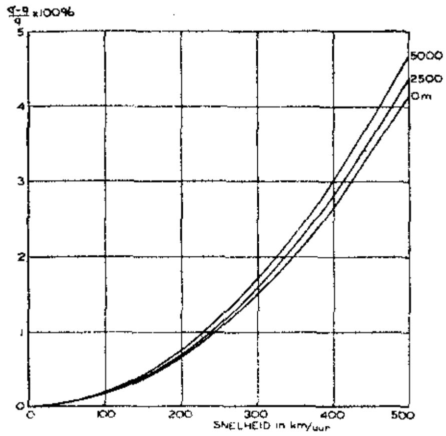


Fig. 4.

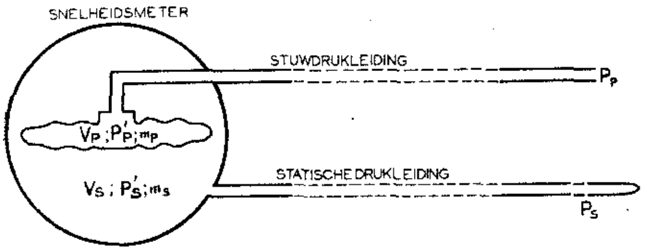


Fig. 5.

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi b} \cdot \frac{y_1}{r_1^2\sqrt{r_1^2 + \frac{1}{4}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

en dus:

$$\triangle p = -\frac{G}{4\pi b^2} \cdot \frac{y_1}{r_1^2\sqrt{r_1^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{G}{b^2} \cdot f(x_1, y_1) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

waarin G het gewicht van het vliegtuig is, dat met Γ is verbonden door de vergelijking: $G = \rho\ \Gamma\ Vb$

$$\text{en } f(x_1, y_1) = -\frac{y_1}{4\pi\, r_1^2\sqrt{r_1^2 + \frac{1}{4}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

De verhouding van de fout $\triangle p$ in de meting van den statischen druk tot den stuwdruk q is dus

$$\frac{\triangle p}{q} = \frac{G}{qb^2} \cdot f(x_1, y_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

De relatieve miswijzing van den, op het systeem aangesloten, manometer hangt dus af van het gewicht en de spanwijdte en is omgekeerd evenredig met den stuwdruk. De aard der afhankelijkheid van de spanwijdte is niet zoo direct te zien, daar zij ook in $f(x_1, y_1) \equiv f\left(\frac{x}{b}; \frac{y}{b}\right)$ voorkomt. De factor $\frac{G}{qb^2}$ in (7) kan nog worden omgevormd.

Men heeft n.l. $\quad G = c_a\, q\, F$

$$\text{en} \quad c_{wi} = \frac{c_a^2\, F}{\pi\, b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

waarin c_a de draag-coëfficiënt en c_{wi} de coëfficiënt van den geïnduceerden weerstand is, terwijl F het vleugeloppervlak voorstelt.

Men vindt uit (8) direct:

$$\frac{G}{qb^2} = c_a \frac{F}{b^2} = \pi \cdot \frac{c_{wi}}{c_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

De miswijzing neemt dus toe naarmate de voerstraal uit den oorsprong van het met den vliegtoestand overeenkomende punt van de polaire van den geïnduceerden weerstand minder steil loopt.

De factor $f(x_1, y_1)$ in (7) is een symmetrische functie van x_1 en anti-symmetrisch in y_1. Voor de statische buis is y_1 zeker negatief, $f(x_1, y_1)$ is dan positief. Het verloop van deze functie wordt geïllustreerd door figuur 3, waarin de lijnen $f(x_1, y_1) = c$ voor verschillende waarden van de constante geteekend zijn. [3])

Met behulp van (7), en eventueel (9) en fig. 3 kan de miswijzing, als de plaats van de buis bekend is, gemakkelijk worden berekend.

Men kan in eerste benadering voor $x^2 + y^2$ wel het quadraat van de slanglengte invullen.

Voor een slang van 20 m vindt men dan, dat *zelfs in de ongunstige gevallen* de fouten in den te meten stuwdruk niet boven de reeds aan het begin van deze paragraaf aangegeven grootte komen. Tot slot merken we op dat, daar $\triangle p$ ter plaatse van de buis positief is, de stuwdruk, dien de meter aanwijst, kleiner is dan de werkelijke, ongestoorde stuwdruk. Ook de snelheidsaanwijzing is dus te klein.

IV. Fouten in de aanwijzing.

Behalve de hierboven genoemde fout door de verstoring van den statischen druk door het vliegtuig, die door het toepassen van een voldoend lange slang willekeurig klein kan worden gemaakt, kunnen onder omstandigheden nog andere fouten in de aanwijzing van den aangesloten snelheidsmeter optreden. Een systematisch overzicht volgt hieronder.

1. *Fout tengevolge van de samendrukbaarheid van de lucht.* (Zie voor de notatie blz. A. 58, kolom 1)

Men vindt de snelheid uit den stuwdruk met behulp van de vergelijking van BERNOULLI

$$q = \tfrac{1}{2}\,\rho v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Echter geldt deze formule alléén voor potentiaalstroomingen van *onsamendrukbare* vloeistoffen.

Nu is de invloed van de samendrukbaarheid van de lucht zéér klein voor snelheden beneden $\sim$ 180 km/h. (Beneden 1 % van q).

Voor grootere snelheden moet men echter rekening houden met merkbare afwijkingen van (10).

Volgens berekeningen, die hierover werden gemaakt (L. 4) moet (10) worden vervangen door

$$\left.\begin{aligned} q' &= \tfrac{1}{2}\,\rho v^2\left(1 + \frac{v^2}{4c^2} + \frac{2-\kappa}{24}\frac{v^4}{c^4} + \ldots\ldots\right) \\ \text{waarin} \quad c &= \sqrt{\kappa \cdot gRT} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

de geluidsnelheid is.

Termen met hoogere machten van v spelen in de practijk geen rol.

Het verschil tusschen den werkelijken stuwdruk q' en $\frac{1}{2}\rho v^2 = q$ in % van q bedraagt dus

$$\frac{q'-q}{q} \cdot 100\ \% = \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2} \cdot 100\ \% \ldots\ldots \quad (12)$$

Deze vergelijking geeft de procentueele fout, die in het quadraat van de snelheid wordt gemaakt, wanneer (10) i.p.v. (11) wordt gebruikt. (Zie ook fig. 4).

2. *Fout in niet-horizontale vluchten.*

In niet-horizontale vluchten gaat t.g.v. den veranderden statischen druk een strooming optreden in de drukleidingen. Daarmee ontstaan drukverschillen tusschen de uiteinden en dus een fout in de aanwijzing van den meter.

A. B e r e k e n i n g.

Een nader inzicht zal een aan de hand van fig. 5 uit te voeren berekening leveren. Voor zoover deze berekening zoowel voor de stuwdrukzijde als voor de statische-drukzijde van den snelheidsmeter geldt, worden de indices p en s weggelaten.

Het gewicht van de, in één der deelvolumina (hiermede worden de metervolumina aan de stuw- en statische-zijde bedoeld) van den snelheidsmeter aanwezige, lucht is even-

[3]) De grafiek is ontleend aan het rapport A. 344 (L. 8).

redig met $\frac{P'}{T}$, of

$$m = c\frac{P'}{T} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (13)$$

c = constante.

De volumeveranderingen door vervorming van het membraan zijn zeer klein en worden verwaarloosd.

Volgens (13) is, wanneer aangenomen wordt, dat alle veranderingen isotherm geschieden:

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{1}{P'}\cdot\frac{dP'}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots (14)$$

Nu verandert m alleen doordat lucht toe- of afvloeit door de drukleiding. In de practijk komen slechts „langzame" stroomingen voor, die zeker laminair zijn. Verandert het drukverschil aan de uiteinden der leiding niet al te snel, dan is in dit geval de per sec door een doorsnee stroomende gewichtshoeveelheid ongeveer evenredig met het drukverschil. (Dit komt neer op het toepassen van de wet van Poiseuille óók op niet zuiver stationnaire stroomingen).

Dus

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P - P'}{W'} = \frac{\triangle P}{W'} \quad \dots\dots\dots (15)$$

W' is hierin de evenredigheidsconstante.

Noemen we voor het vervolg

$$W = \rho g W' \quad \dots\dots\dots\dots\dots (16)$$

„weerstand" van een leiding, dan is

$$\frac{dm}{dt} = \rho g\frac{\triangle P}{W} \quad \dots\dots\dots\dots (17)$$

Daar de drukverschillen binnen het systeem t.o.v. den statischen druk klein zijn, verwaarloozen wij variaties van ρ.

Met:

$$m = \rho g V \qquad V = \text{meter-deel-volume}$$

wordt (14) wegens (17):

$$\frac{\triangle P}{VW} = \frac{1}{P'}\frac{dP'}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots (18)$$

Daar $\triangle P << P$ mag rechts $\frac{1}{P'}$, worden vervangen door: $\frac{1}{P}$. Verder is

$$\frac{dP'}{dt} = \frac{dP}{dt} - \frac{d\triangle P}{dt}$$

waarmee wij vinden:

$$\frac{1}{P}\frac{d\triangle P}{dt} + \frac{\triangle P}{VW} = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \quad \dots\dots\dots (19)$$

Wanneer de druk P zoodanig verandert, dat $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ constant is, dan leert deze differentiaalvergelijking voor $\triangle P$, daar P als „langzaam-veranderlijk" mag worden beschouwd, dat zich eenigen tijd na de „inschakeling" een stationnair drukverschil instelt, van de grootte

$$\triangle P = + VW\cdot\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots (20)$$

Nu is als P_s de statische luchtdruk in de atmosfeer is:

$$dP_s = -g\rho dh$$

Doch

$$\rho g = \frac{P_s}{RT}$$

en dus

$$\frac{1}{P_s}\frac{dP_s}{dt} = -\frac{w}{RT} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (21)$$

w = stijgsnelheid.

Voor den energie-druk geldt $P_p = P_s + q$.

Hierin is steeds $q << P_s$, (wanneer althans de voorwaartsche snelheid en de hoogte niet al te groot zijn) en wanneer dus wordt gevlogen bij constante stuwsnelheid, dan is óók:

$$\frac{1}{P_p}\frac{dP_p}{dt} \sim -\frac{w}{RT} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (22)$$

Uit (20), (21), en (22) volgt

$$\triangle P_p = -V_pW_p\cdot\frac{w}{RT} \text{ en } \triangle P_s = -V_sW_s\cdot\frac{w}{RT} \dots (23)$$

De stuwdruk, dien de meter aanwijst, bevat dus de fout:

$$\triangle q = \triangle P_p - \triangle P_s = \frac{w}{RT}(V_sW_s - V_pW_p) \dots\dots (24)$$

Verder constateert men, dat aan den eisch:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \text{constant}$$

in goede benadering voldaan is, wanneer de stijgsnelheid constant is. Het is exact juist in een *isotherme* atmosfeer.

Wanneer de drukleiding een lange cylindrische buis of slang is, dan is volgens de formule van POISEUILLE:

$$W = \frac{8\,\eta\, l}{\pi r^4} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (25)$$

De weerstand neemt dus zéér snel toe bij afnemenden binnendiameter van de leiding.

B. D i s c u s s i e.

In het algemeen is, wanneer geen speciale maatregelen zijn genomen, doordat de statische drukleiding de lange slang bevat, waaraan de buis gesleept wordt: $W_s >> W_p$.

Dit geldt in versterkte mate, wanneer de slang, waaraan wordt gesleept, nog een stalen kabel bevat.

Bovendien is voor de tot nu toe gebruikelijke snelheidsmeters steeds V_s veel grooter dan V_p, omdat de stuwdrukleiding op de (aneroïde-)doos is aangesloten en de statische leiding op het meterhuis.

Men kan dan ook, wanneer aan de stuwdrukzijde volume of weerstand niet opzettelijk sterk zijn vergroot, $\triangle P_p$ naast $\triangle P_s$ verwaarloozen.

Het resultaat is dan volgens (23), dat:

Bij stijgvluchten de aanwijzing van den snelheidsmeter te laag is.

Bij dalende vluchten de aanwijzing van den snelheidsmeter te hoog is.

Daar het verschil $\triangle P_s$ niet afhangt van de voorwaartsche snelheid, (d.i. van q), wordt de relatieve fout $\frac{\triangle P_s}{q}$ grooter met afnemende snelheid.

Volgens(23) hangt $\triangle P_s$ van de temperatuur af, echter niet zoo sterk als wordt gesuggereerd door de wijze, waarop T explicite voorkomt.

Immers: ook de weerstand W hangt af van de temperatuur, daar hij volgens (23) lineair afhangt van de viscositeit, die grooter wordt bij toenemende temperatuur. In de omgeving van de „normale" temperatuur van 15° C bedraagt de verandering van W per 10° C dientengevolge circa 3 à 4%, terwijl de verandering van T ongeveer $\frac{10}{290} \sim 3\frac{1}{2}$ % bedraagt. Het quotiënt $\frac{W}{T}$ verandert dus slechts weinig en men kan daarom voor W wel invullen W_{15} (weerstand bij 15° C) en voor T 288°.

Alvorens in te gaan op de methoden, die kunnen worden gevolgd om fouten door de hierboven besproken oorzaak te vermijden, is het gewenscht een inzicht te hebben in de te verwachten grootte-orde.

Aannemend, dat $\triangle P_p$ naast $\triangle P_s$ verwaarloosd mag worden, schrijven we voor (23)

$$\triangle P_s = -f.w \quad f = \frac{V_sW_s}{29{,}27 \times 290} \quad \triangle P_p \sim 0 \ \dots (26)$$

Naar verder uit volumemetingen aan snelheidsmeters is gebleken, is voor sommige gebruikelijke typen

$$V_s \sim 300 \text{ cm}^3$$

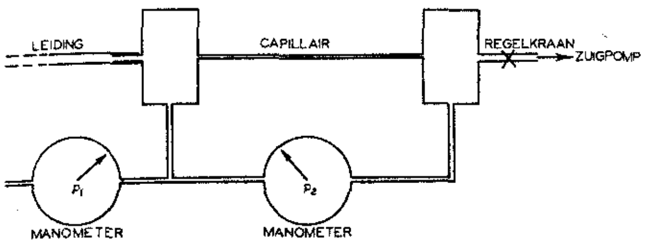


Fig. 6.

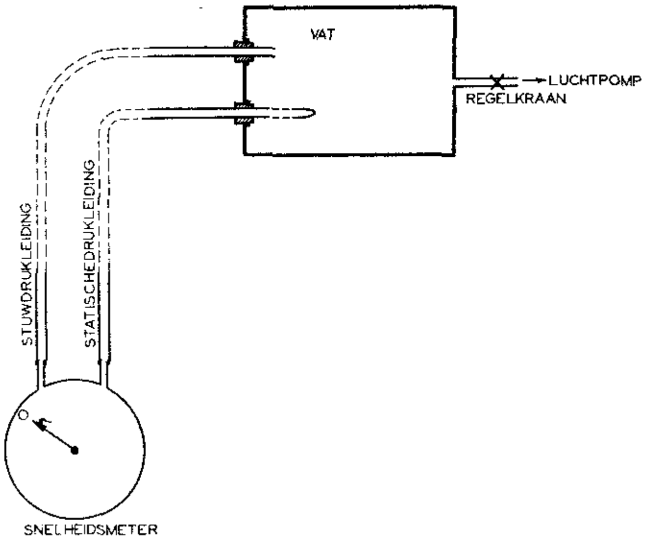


Fig. 7.

Tenslotte hebben weerstandsmetingen geleerd, dat voor één der veel gebruikte nieuwere statische buizen van het N.L.L. de totale weerstand van de geheele statische drukleiding ongeveer

$$W_1 \sim 5{,}7 \cdot 10^6 \ \frac{kg\ sec}{m^5} \ \text{(bij ca. } 15^\circ \text{ C)}$$

kan bedragen.

Hiernaast moge worden vermeld dat in een ongunstig geval, wanneer in het vliegtuig nog een lange statische drukleiding is aangebracht en de statische buis is opgehangen aan een staalkabel, die zich binnen het luchtkanaal bevindt, weerstanden mogelijk zijn van de grootte

$$W_2 \sim 20 \cdot 10^6 \ \frac{kg\ sec}{m^5} \ \text{(bij ca. } 15^\circ \text{ C)}$$

Met bovenstaande getallen wordt:

$$f_1 \sim 0{,}20 \ \frac{kg\ sec}{m^3} \qquad f_2 \sim 0{,}71 \ \frac{kg\ sec}{m^3} \quad \ldots\ldots \ (27)$$

Het resultaat van de toepassing van (26) op deze twee gevallen geeft het onderstaande tabelletje. De opgegeven percentages moeten met de stijgsnelheid in m/sec worden vermenigvuldigd.

Fout in de stuwdrukmeting in % van den stuwdruk, per m/sec stijgsnelheid.

Stuwsnelheid (km/h)	80	100	120	160	200	250	300	400
$\left[\frac{1}{w}\frac{\triangle P_s}{q} \cdot 100\,\%\right]_1$	0,65	0,41[5]	0,29	0,16	0,10[5]	0,06[5]	0,04[5]	0,02[5]
$\left[\frac{1}{w}\frac{\triangle P_s}{q} \cdot 100\,\%\right]_2$	2,30	1,47	1.02	0,57[5]	0,37	0,23[5]	0,16[5]	0,09

Vooral bij kleinere snelheden kunnen dus ontoelaatbare fouten optreden. Zij zijn evenredig met het metervolume, en wanneer meerdere *instrumenten tegelijkertijd* op de statische drukleiding aangesloten worden (b.v. hoogtemeter, 2e snelheidsmeter, enz.) natuurlijk met het totale aangesloten volume.

Teneinde onnauwkeurigheden in de stuwdrukmeting te voorkomen, kunnen volgens (23) en (24) de volgende maatregelen worden genomen:

a. Correctie van de meteraanwijzing met behulp van (24)

b. Vermindering van den leidingsweerstand en het aangesloten volume zóó, dat de fout tot beneden een te verwaarloozen minimum wordt gereduceerd.

c. Compensatie van de fout, door $V_p W_p$ kunstmatig gelijk te maken aan $V_s W_s$, waardoor volgens (24) de fout geheel geëlimineerd kan worden.

Hierbij zijn de volgende opmerkingen van belang:

a. *Correctie.*

Hiervoor moet de optredende stijgsnelheid bekend zijn. Hoewel (23) slechts een eerste benadering is, is het wel aannemelijk, dat de meetnauwkeurigheid op deze wijze verbeterd kan worden. Vooral bij veranderlijke stijgsnelheid *blijft echter een ongewenschte onzekerheid* in de metingen bestaan. Deze weg verdient daarom niet de voorkeur.

b. *Verkleining van W_s en V_s.*

De weerstand van de statische drukleiding kan zeer effectief worden beïnvloed door verandering van den binnendiameter, (ondersteld wordt dat de leiding cylindrisch is. Zie (25)). Het verdient aanbeveling dezen niet kleiner dan ca. 4 mm te nemen. Willekeurige vergrooting is niet mogelijk, daar de slang, waaraan de buis wordt gesleept niet te dik (en zwaar) mag worden.

Wat het metervolume betreft: men is hier gebonden aan de in den handel verkrijgbare instrumenten, die tot nu toe gewoonlijk een onnoodig groot volume aan de statische zijde hebben. Op initiatief van het N.L.L. overweegt op het oogenblik een fabrikant van vliegtuiginstrumenten de constructie van snelheidsmeters met belangrijk kleiner statisch volume dan gebruikelijk is, hetgeen in dit verband een groote verbetering zou geven.

Wanneer b.v. het metervolume tot op $^1/_{10}$ van het bij de opstelling van het tabelletje hiervóór ondersteld volume van 300 cm³ kon worden verkleind, dan constateert men op grond van het eerste voorbeeld, dat in practisch alle gevallen de resteerende fout zou kunnen worden verwaarloosd.

c. *Compensatie.*

$$V_p W_p = V_s W_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (28)$$

Door in de stuwdrukleiding een capillair op te nemen en/of bij den snelheidsmeter het volume aan de stuwzijde door bijschakeling van een „dood" volume te vergrooten, kan het product $V_p W_p$ kunstmatig gelijk worden gemaakt aan $V_s W_s$. Volgens (24) treedt dan in niet-horizontale vlucht géén fout op.

Zooals blijken zal uit een bespreking van de traagheid, (zie blz. A. 63) kan deze methode nadeelen meebrengen.

Zij is meestal toelaatbaar, wanneer het product $V_s W_s$ niet te groot is, b.v. $V_s W_s <$ ca. $2000 \ \frac{\text{kg sec.}}{\text{m}^2}$ (Zie blz. A. 63 onderaan).

Het is naar aanleiding van het bovenstaande duidelijk, dat het gewenscht is *de weerstand van de drukleidingen* te kennen. Deze kan worden gemeten door vergelijking van het drukverval aan de leiding en een hiermee in serie geschakelde capillair van bekenden (b.v. met (25) berekenden) weerstand. Fig. 6 geeft een schets van de opstelling.

Men heeft: $$W_{leiding} = \frac{p_1}{p_2} W_{capillair} \quad \ldots\ldots\ldots \ (29)$$

De geringe afhankelijkheid van den weerstand van het drukverschil kan worden verwaarloosd.

De correcte uitvoering van de compensatie (*c*) kan door een eenvoudige proef worden gecontroleerd. Fig. 7 geeft hiervan een schets, waarbij weinig commentaar noodig is. Wanneer men door inschakeling van de perspomp den druk

in het vat verhoogt, mag de snelheidsmeter tijdens de drukverandering (bij juiste uitvoering van de compensatie) géén merkbare uitslag aannemen. Het is bij deze proef noodzakelijk, dat de meter een tot nul doorloopende schaalverdeeling bezit.

3. *Fout tengevolge van traagheid.*

Hoewel het gewenscht kan zijn het systeem zoo uit te voeren, dat aan (28) voldaan is, heeft dit het nadeel, dat in de aanwijzing een traagheid wordt geïntroduceerd, die merkbaar wordt bij veranderingen van de voorwaartsche snelheid.

Wanneer wij de strooming van de leiding ook in het niet-stationnaire geval weer afleiden uit een formule van het Poiseuille-type, dan kunnen we aanknoopen bij vergelijking (19).

Met $\triangle P_p = p$ geeft deze vergelijking toegepast op de stuwdrukzijde:

$$\frac{1}{P_p}\frac{dp}{dt} + \frac{p}{V_pW_p} = \frac{1}{P_p}\frac{dP_p}{dt}$$

Bovendien is $P_p = P_s + q$ en $q << P_s$

Nemen we nu verder aan, hetgeen bij groote veranderingen der voorwaartsche snelheid en kleine stijgsnelheid geoorloofd zal zijn, dat P_s veel langzamer verandert dan $q \left(\frac{dP_s}{dt} << \frac{dq}{d}\right)$, dan geeft bovenstaande vergelijking:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{P}{VW} \cdot p = \frac{dq}{dt} \qquad (30)$$

waarin de index p eenvoudigheidshalve is weggelaten en waarin P als een constante wordt beschouwd.

De algemeene oplossing van (30) luidt:

$$p = e^{-\alpha t}\left[\int^t \frac{dq}{dt} e^{\alpha t} dt + A\right] \qquad (31)$$

Hierin is ter afkorting geschreven: $\frac{P}{VW} = \alpha$ ...... $(31a)$

Hiermee kan gemakkelijk het verloop van de aanwijzing worden berekend, als het verloop van q gegeven is.

Ter illustratie berekenen we hier alléén de fout in de aanwijzing op verschillende tijdstippen, nadat de stuwdruk plotseling (discontinu) veranderde van q tot $q + p_o$. Dit geval wordt door (31) gegeven, als wordt genomen $A = p_o$ $\frac{dq}{dt} = 0$, hetgeen overeenkomt met een discontinue stuwdrukverandering van de grootte p_o op het tijdstip $t = 0$.

$$\text{Dus} \quad p = p_o e^{-\alpha t} \qquad (32)$$

Volgens (31*a*) hangt de traagheid af van de hoogte: op groote hoogte is P klein, en dus α ook: de traagheid is dan relatief groot.

We onderzoeken allereerst de te verwachten grootte-orde van dit effect, en accepteeren daartoe als basis voor het product VW dezèlfde waarden als bij de berekening van de fout in niet-horizontale vlucht werd gebruikt. (Zie hoofdstuk IV, 2, B.

Deze getallen kunnen in de practijk optreden wanneer het systeem „gecompenseerd" is. (blz. A. 62, tweede kolom).

Het nevenstaande tabelletje geeft de met (32) gevonden uitkomst.

Het vermeldt p in % van p_o, op 1, 2, 3, . . . sec nà de discontinuë stuwdrukverandering: de berekening is uitgevoerd voor hoogten van 1000 m, 3000 m en 6000 m

Bij deze tabel moet de opmerking gemaakt worden, dat de percentages te klein zijn, omdat de tijd noodig voor het instellen van de stooming niet in aanmerking is genomen. Naarmate de traagheid grooter wordt, worden de getallen nauwkeuriger. Men mag wel aannemen, dat de grootte-orde van alle in de tabel opgenomen uitkomsten correct is. Het vraagstuk is uitvoeriger onderzocht in rapport V. 911 (L. 6), waarin ook experimenteele onderzoekingen zijn opgenomen.

Opmerkingen	hoogte	p in % van p_o					
		na 1 sec	na 2 sec	na 3 sec	na 4 sec	na 6 sec	na 12 sec
$\left[\frac{p}{p_o} \cdot 100\ \%\right]_1$	1000 m	0,45	—	—	—	—	—
	3000 m	1,50	0,02	—	—	—	—
$V_pW_p \sim 1700\ \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$	6000 m	6,2	0,4	0,02	—	—	—
$\left[\frac{p}{p_o} \cdot 100\ \%\right]_2$	1000 m	21,7	4,7	1,0	0,22	—	—
	3000 m	30,7	9,4	2,8	0,85	0,08	—
$V_pW_p \sim 6000\ \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$	6000 m	45	20,2	9,1	4,1	1,8	0,81

Wanneer de compensatie ter eliminatie van de fout in niet horizontale vlucht *niet* aangebracht is, dan is practisch steeds zoowel

$$V_p << V_s \quad \text{als} \quad W_p << W_s$$

Hierbij is ondersteld, dat een snelheidsmeter van het tot nu toe gangbare type gebruikt wordt, waarvoor steeds de eerste (versterkte) ongelijkheid geldt. Het product V_pW_p is dan ook veel kleiner dan het product V_sW_s, óók in die gevallen, waar het laatste product al zoo klein mogelijk is gemaakt.

Uit de tabel kan met het oog hierop de conclusie getrokken worden dat, wanneer géén compensatie aangebracht is, de traagheid zéér klein is, (nog véél kleiner dan in het eerste voorbeeld) en in de practijk geen rol speelt.

Alléén bij gecompenseerde systemen zal men dus met merkbare traagheidseffecten rekening moeten houden. Welke traagheid nog toelaatbaar geacht mag worden hangt af van de aan de snelheidsmeting gestelde eischen. Het lijkt aannemelijk, dat het in vele gevallen voldoende is, wanneer discontinue stuwdrukveranderingen binnen b.v. 2 seconden tot op enkele % correct worden aangewezen.

Het eerste in de tabel op deze bladzijde aangegeven voorbeeld zou dan voldoen, en men zou een waarde van circa 2000 $\frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$ voor het product W_pV_p als het toelaatbaar maximum kunnen beschouwen.

Het is nog van belang er op te wijzen, dat in het tweede beschouwde voorbeeld de traagheid de snelheidsmeteraanwijzing bij manoeuvres, waarbij snel veranderlijke snelheden optreden, aanmerkelijk kan vervalschen.

De conclusies kunnen als volgt geresumeerd worden: Wanneer volume en weerstand aan de stuwdrukzijde *niet* kunstmatig vergroot zijn, speelt in normale gevallen de traagheid geen rol van beteekenis.

Wanneer dit wèl geschied is, dan is het van belang de optredende traagheid nauwkeurig te onderzoeken. Gewoonlijk zullen waarden van $W_pV_p < 2000\ \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$ kunnen worden toegelaten.

4. *Fout in bochten.*

Wanneer het vliegtuig een bocht beschrijft, kan in de aanwijzing van den, op een gesleepte statische buis aangesloten, snelheidsmeter een belangrijke fout ontstaan, doordat de lucht als het ware uit de slang wordt „gecentrifugeerd."

Een korte berekening zal dit nauwkeuriger aantoonen. Wanneer

ng de in de bocht optredende centrifugale versnelling is (d.i. de lengte van het vectorische verschil tusschen resulteerende versnellingsvector en gravitatieversnellingsvector)

L de lengte van de slang.
L_1 lengte van de projectie van de slang op de richting van den vector ng
α de hoek tusschen een „element" dL van de slang en den vector ng.
P de druk in de slang van de statische buis,
dan geldt voor de lucht in de slang:

$$dP = -ng\,\rho\,dL\cos\alpha.$$

Als weer $\triangle P_s = P_s - P_s'$
dan wordt

$$\triangle P_s = \int dP = -ng\rho\int_0^L dL\cos\alpha = -ng\rho\,L_1 \quad \ldots (33)$$

waarbij de variatie van ρ met L is verwaarloosd, terwijl bovendien in (33) niet de „invloed" van de zwaartekrachtsversnelling is opgenomen, daar deze geen fouten geeft.

Nemen we b.v. $L = 20$ m
$L_1 \sim 10$ m
$n \sim 2\frac{1}{2}$
$\rho \sim 0{,}103 \frac{\text{kg sec}^2}{m^4}$
(hoogte ca. 2000 m).

dan wordt $\triangle P_s \sim 25{,}8$ mm water ...... (34)

In de snelheidsmeteraanwijzing ontstaat dus een zeer belangrijke fout. In % van den werkelijken stuwdruk beteekent (34) immers een fout van de grootte:

$\frac{\triangle p_s}{q} \cdot 100$ %:	23,1 %	14,9 %	8,4 %	3 %	2 %
v_q (km/h):	120	150	200	300	400

In de practijk gedraagt de fout (33) zich zeer „onregelmatig", tengevolge van de voortdurende variatie van n en L_1 (L. 13). Het is dan ook bij de normale uitvoering niet goed mogelijk de meetresultaten achteraf door een correctie voldoende te verbeteren.

In vluchten, waarbij belangrijke (tangentieele of centrifugale) versnellingen optreden, kan de snelheidsbepaling met behulp van een aan een kabel gesleepte statische buis niet tot betrouwbare resultaten leiden, wanneer geen speciale maatregelen worden genomen.

Op het oogenblik wordt door het N.L.L. onderzocht in hoeverre hierin verbetering gebracht kan worden.

Eén weg om ook in dit geval een analoge methode toe te passen, bestaat uit het gebruiken van een gesleepte buis, waarmee eveneens de stuwdruk wordt gemeten, en die dus door een slang met 2 kanalen met het vliegtuig is verbonden. Deze uitvoering heeft weer andere nadeelen, het is niet de bedoeling hierop in deze publicatie verder in te gaan.

V. Korte samenvatting.

Deze verhandeling geeft een overzicht van de vraagstukken, die zich voordoen bij de meting van de snelheid van een vliegtuig t.o.v. de lucht, met behulp van een aan het vliegtuig bevestigde zelfrichtende stuwbuis en een aan een slang gesleepte statische buis.

Bij doeltreffende uitvoering blijkt als regel een nauwkeurigheid (in de snelheid) van *minstens* $\frac{1}{4}$ % bij maximale en $1\frac{1}{2}$ % bij minimale snelheid bereikbaar te zijn. In stationnaire horizontale vlucht is dit door vele (elders opgenomen, zie de opmerking onderaan de literatuurlijst) experimenteele verificaties bewezen. Naar de meening van het N.L.L. zal het bereiken van een gelijke nauwkeurigheid bij toepassing van andere meetmethoden op zeer groote moeilijkheden stuiten.

Achtereenvolgens zijn beschouwingen opgenomen over de constructie van de apparatuur (hoofdst. II), de stabiliteit en noodzakelijke slanglengte (hoofdst. III), en de fouten, die kunnen ontstaan door verwaarloozing van de samendrukbaarheid van de lucht, door den weerstand van de drukleidingen (fout in niet-horizontale vlucht; traagheid) en tengevolge van tangentieele en centrifugale versnellingen (in bochten). (hoofdst. IV).

De nauwkeurige snelheidsmeting onder omstandigheden, waarbij groote continue versnellingen optreden (b.v. in bochten), stuit nog op enkele moeilijkheden. In de toekomst zal door het N.L.L. worden nagegaan op welke wijze deze kunnen worden opgelost.

LITERATUURLIJST.

R.S.L.- en N.L.L.-rapporten. Alleen het onder 9 genoemde rapport is gepubliceerd.

1. IJking der snelheidsmeters, aanwezig op het instrumentenbord van het laboratoriumvliegtuig, type F II, van den R.S.L. *R.S.L.-rapport V.* 66, 1924.
2. Rapport over het onderzoek naar de stabiliteit en regelmatigheid van statische drukmeting van de statische buis ter ophanging onder vliegtuigen. *R.S.L.-rapport V.* 78, 1924.
3. Beschrijving van de bij den R.S.L. gevolgde methode van snelheidsmeting op groote hoogten en beschouwingen over de methode die in Roemenië werd toegepast bij de wedstrijden in Augustus en September 1930. *R.S.L.-rapport V.* 422, 1930.
4. De herleiding van de aanwijzing van stuwdruk-snelheidsmeters naar werkelijke snelheid met inachtname van de samendrukbaarheid van de lucht. *Rapport V.* 1136, 1938.
5. Onderzoek van het gedrag van uitgelaten statische buizen, type RSL VI, VIA en VI b in de vlucht. *Rapport V.* 910 (intern), 1936.
6. De weerstand van de drukleidingen bij een gesleepte statische buis en zijn invloed op de snelheidsmeteraanwijzing. *N.L.L.-rapport V.* 911 (intern).
7. Snelheidsvermindering door een onder het vliegtuig uitgelaten statische buis. *N.L.L.-rapport V.* 915, 1936.
8. De invloed van het vliegtuig op den druk gemeten met een gesleepte statische buis. *N.L.L.-rapport A.* 344, 1937.
9. De critische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan een kabel wordt gesleept. *Rapport A.* 367, 1936. Versl. en Verhand. v. d. R.S.L. Deel VII.

9a. Grafieken voor het bepalen der kritische snelheid. *N.L.L.-rapport A.* 635, 1937.

10. Onderzoek in den windtunnel van een statische buis. *Rapport A.* 423, 1936.
11. Onderzoek naar den invloed van de plaats der drukgaatjes in statische buizen op de aanwijzing van deze instrumenten. *Rapport A.* 561, 1936.
12. Berekening over de strooming om het drie-dimensionale halflichaam. *Rapport A.* 568, 1936.
13. Miswijzing van den op een gesleepte statische buis aangesloten snelheidsmeter wanneer versnellingen optreden. *Rapport V.* 1027.

Andere publicaties.

14. The measurement of static pressure by a suspended static head. *R & M* 854, 1922.
15. GLAUERT: The stability of a body towed by a light wire. *R & M* 1312, 1930.
16. The effect of tubing on the indication of an airspeed meter. *Journal of the Aeronautical Sciences II*, 1936, pag. 165.
17. DANIELZIG: Verhalten von statischen Sonden bei hohen Geschwindigkeiten. *Luftfahrtforschung Bd.* 14, 1937. Seite 304.
18. KIEL: Fehlerabschätzung bei Staudruckeichungen mittels unter dem Flugzeug geschleppten Sonden. *Luftfahrtforschung Bd.* 14, 1937. Seite 310.
19. WILDHACK: Pressure drop in tubing in aircraft instrument installations. *N.A.C.A. Technical Note* 593, 1937.
20. F. L. TOMPSON: The measurement of air-speed in flight. *Journal of the Aeronautical Sciences.* Aug. 1937.

Opmerking.

Bij het samenstellen van deze literatuurlijst werden verschillende rapporten, die niet *hoofdzakelijk* op de gesleepte statische buis betrekking hebben, *niet* genoemd. Hiertoe behooren ook verschillende rapporten, die *ijkingen* bevatten van deze apparatuur op baanvluchten. Er moge op gewezen worden dat hierbij gebleken is dat de in deze verhandeling genoemde nauwkeurigheid inderdaad in de practijk kan worden bereikt.

Rapport S. 82.

De torsie van staven met enkelvoudig samenhangende langwerpige doorsneden

door

dr. ir. A. VAN DER NEUT en ir. F. J. PLANTEMA.

RAPPORT S. 82.

De torsie van staven met enkelvoudig samenhangende langwerpige doorsneden.

Uittreksel.

Voor prismatische staven met enkelvoudig samenhangende langwerpige doorsneden wordt een benaderingsmethode ontwikkeld ter bepaling van de schuifspanningsverdeeling bij zuivere torsie en van de torsiestijfheid. Deze methode sluit zich aan bij de voorstelling omtrent de oplossing van het torsieprobleem, die verkregen wordt door middel van de zeepvliesanalogie. Uit deze voorstelling blijkt de aanvaardbaarheid van de aanname, dat doorsneden over het zeepvlies loodrecht op de lengterichting (y) van de doorsnede den vorm hebben van een parabool met verticale as (vgl. (4)). De hoogte van het zeepvlies langs de middellijn van de doorsnede wordt bepaald door de differentiaalvergelijking (9) en zijn randvoorwaarden (10), (12) of (13).

De gesloten oplossing van deze vergelijking wordt voor staven met elliptische (vgl. (17)), rechthoekige (vgl. (18), (19) en (20)) en driehoekige (vgl. (23) en (24)) doorsneden gegeven.

In het algemeen kan de vergelijking alleen door numerische integratie worden opgelost. Deze integratiemethode wordt besproken in punt 8, de oplossing stelt zich samen uit twee oplossingen van de homogene ($C = 0$) en een oplossing van de niet-homogene vergelijking, d.w.z. $z = z_{nh} + k_1 z_{h1} + k_2 z_{h2}$. De constanten k_1 en k_2 worden bepaald uit de randvoorwaarden. Een rekenvoorbeeld wordt gegeven in tabel IV. Het gebruik van (13) als vereenvoudigde randvoorwaarde levert altijd bevredigende resultaten (punt 5, fig. 13).

De schuifspanningscomponenten en de torsiestijfheid worden gegeven door (14) en (16).

De volgens deze methode gevonden resultaten zijn zoodanig, dat de torsiestijfheid slechts een verwaarloosbare fout vertoont, terwijl de grootste schuifspanningen alleen voor doorsneden met sterk gekromde middellijn grootere fouten vertoonen. Voor dergelijke gevallen, waar een onsymmetrische doorsnede van het zeepvlies moet worden verwacht, is een correctie afgeleid (punt 9, vgl. (28), (29) en (30'')), die voor ieder strookje dy na oplossing van (9) kan worden berekend. De correctiemethode is toegepast op staven met halfcirkelvormige (punt 10, fig. 9 en 10) en stroomlijnvormige (punt 11, fig. 11—15, tabel IV—VI) doorsneden en de resultaten zijn voor de eerste met de exacte resultaten en voor de laatste met experimenteele resultaten (fig. 15, tabel VI) vergeleken. De overeenstemming is zeer goed.

Op eenvoudige wijze kunnen minder nauwkeurige oplossingen worden verkregen met behulp van (31) en (32), punt 12b; de resultaten zijn met de bovengenoemde voor het stroomlijnprofiel vergeleken in tabel VIII.

De in het rapport gebruikte notaties zijn gegeven in punt 13.

RAPPORT S. 82.

La torsion des membres avec sections solides et oblonges.

Résumé.

Une méthode approximative pour la détermination des tensions de cisaillement en cas de torsion et de la rigidité à la torsion pour des membres prismatiques avec sections solides et oblonges est développée. La méthode est basée sur la solution de la problème de torsion, qui est donnée par l'analogie de la pellicule savonneuse soumise à une pression. Comme première approximation les sections de la pellicule savonneuse normales à la direction longitudinale (y) peuvent être supposées d'une forme parabolique avec un axe vertical (équation (4)). La hauteur de la pellicule le long de la ligne médiane de la section transversale est déterminée par l'équation differentielle (9) et ses conditions de limite (10), (12) ou (13).

La solution de cette équation est donnée pour membres avec des sections transversales elliptiques (équation (17)), rectangulaires (équations (18), (19) et (20)) et triangulaires (équations (23) et (24)). En général l'équation ne peut être intégrée que numériquement. La méthode de solution est discutée en article 8, la solution est trouvée par superposition de 2 solutions de l'équation homogène ($C = 0$) et une solution de l'équation non-homogène, c'est à dire $z = z_{nh} + k_1 z_{h1} + k_2 z_{h2}$; les constants k_1 et k_2 sont déterminés des conditions de limite. Un exemple numérique est donné en tableau IV. L'équation (13) peut toujours être employée comme condition de limite (compare fig. 13).

Les tensions de cisaillement et la rigidité à la torsion sont données par les équations (14) et (16).

Les résultats, trouvés par cette méthode, donnent la rigidité à la torsion avec une accuratesse très bonne, les erreurs dans les tensions de cisaillement sont d'importance seulement quand la ligne médiane de la section transversale est courbée distinctement. Pour ces cas, en lesquels la section de la pellicule savonneuse sera dissymmétrique une correction est trouvée (article 9, équations (28), (29) et (30'')), qui peut être calculée pour chaque interval le dy après avoir résolue l'équation (9). Cette méthode a été appliquée pour des membres à section transversale sémicirculaire (article 10, fig. 9 et 10) et à profil fuselé (article 11, fig. 11—15, tableaux IV—VI). Les résultats ont été comparés avec les chiffres exacts pour la section sémi-circulaire et avec des résultats expérimentaux pour le profil fuselé (fig. 15, tableau VI). L'accuratesse des résultats était très bonne.

D'une manière simple une solution moins accurate peut être obtenue des équations (31) et (32), article 12b; les résultats ont été comparés pour le profil fuselé avec ceux de la méthode discutée ci-dessus (tableau VIII).

Symboles:

a, b	: coordonnées en direction x de la circumférence de la section transversale (fig. 1).
c	: rotation par unité de longueur.
g, h, z	: fonctions de y, équations (4), (8) et (28).
m_1, m_2	: cosines de direction des côtés du triangle (article 7c).
p	: pression sous la pellicule savonneuse.
S	: tension de surface de la pellicule savonneuse.
w	: fonction de torsion ou hauteur de la pellicule savonneuse.
x, y	: coordonnées cartésiens de la section transversale.
F	: surface de la section transversale, équation (31).
G	: *coefficient d'élasticité de cisaillement.*
G, I_w	: la rigidité à la torsion.
I_p	: moment d'inertie polaire de la section transversale, équation (31).
M_w	: moment de torsion.
τ_x, τ_y	: composantes de la tension de cisaillement normales aux axes X resp. Y.

indice h: concernant l'équation homogène.
indice nh: concernant l'équation non-homogène.

Les quotients différentielles par y sont indiquées par des accents.

BERICHT S. 82.

Die Torsion von Stäben mit einfach zusammenhängenden, länglichen Querschnitten.

Zusammenfassung.

Für prismatischen Stäben mit einfach zusammenhängenden, länglichen Querschnitten wird eine Annäherungsmethode für die Bestimmung der Schubspannungen bei reiner Torsion und für die Torsionssteifigkeit entwickelt.

Diese Methode beruht auf der durch das Seifenhautgleichnis gelieferte Auffassung der Lösung des Torsionsproblems. In erster Annäherung kann angenommen werden, dass Schnitte der Seifenhaut senkrecht auf der Längsrichtung (y) des Stab-Querschnitts die Form einer Parabel mit senkrechter Achse haben (Gl. (4)). Die Höhe der Seifenhaut längs der Mittellinie des Querschnitts wird durch die Differentialgleichung (9) und ihre Randbedingungen (10), (12) oder (13) bestimmt.

Die Lösung dieser Gleichung wird für Querschnitte mit elliptischen (Gl. (17)), rechteckigen (Gl. (18), (19) und (20)) und dreieckigen (Gl. (23) und (24)) Querschnitten gegeben. Im allgemeinen kann aber die Gleichung nur durch schrittweise Integration gelöst werden.

Diese Lösungsmethode wird in Punkt 8 besprochen; die Lösung wird gefunden durch Superposition von zwei Lösungen der homogenen ($C = 0$) und einer Lösung der nicht-homogenen Gleichung, d.h. $z = z_{nh} + k_1 z_{h1} + k_2 z_{h2}$. Die Konstanten k_1 und k_2 werden durch die Randbedingungen bestimmt. Ein numerisches Beispiel wird in Tabelle IV gegeben. Das Gebrauch der Gl. (13) als vereinfachte Randbedingung liefert immer befriedigende Ergebnisse (siehe Fig. 13).

Die Schubspannungen und die Torsionssteifigkeit werden durch die Gleichungen (14) und (16) gegeben.

Die Ergebnisse dieser Lösungsmethode liefern eine genaue Annäherung der Torsionssteifigkeit, während in den Werten der Schubspannungen nur grössere Fehler vorkommen, wenn die Mittellinie des Querschnitts stark gekrümmt ist. Für solche Fälle, wo die Schnitte der Seifenhaut unsymmetrisch sein werden, wird eine Korrektion angegeben (Punkt 9, Gl. (28), (29) und (30'')), die für jeden Streifen dy berechnet werden kann nach Lösung der Gl. (9). Diese Methode ist für Stäbe mit halbrunden (Punkt 10, Fig. 9 und 10) und stromlinienförmigen (Punkt 11, Fig. 11—15, Tabelle IV—VI) Querschnitten angewendet worden und die Ergebnisse sind mit den genauen Ergebnissen für die halbrunden und mit experimentellen Ergebnissen für die stromlinienförmigen Querschnitte (Fig. 15, Tabelle VI) verglichen worden. Die Übereinstimmung ist sehr gut.

In einfacher Weise kann eine weniger genaue Lösung mit den Gleichungen (31) und (32), Punkt 12b, gefunden werden; die Ergebnisse sind für den stromlinienförmigen Querschnitt mit den Ergebnissen der obengenannten Methode verglichen worden (Tabelle VIII).

Formelzeichen:

a, b : x-Koordinaten des Umrisses des Querschnitts (Fig. 1).
c : spezifische Verdrehung.
g, h, z: Funktionen von y, Gl. (4), (8) und (28).
m_1, m_2 : Richtungstangente der Seiten des Dreiecks (Punkt 7c).
p : Überdruck der Seifenhaut.
S : Oberflächenspannung der Seifenhaut.
w : Torsionsfunktion oder Ordinate der Seifenhaut.
x, y : Cartesische Koordinaten im Querschnitt.
F : Fläche des Querschnitts (Gl. (31)).
G : Schubmodul.
$G\,I_w$: Torsionssteifigkeit.
I_p : Polares Trägheitsmoment des Querschnitts, Gl. (31).
M_w : Torsionsmoment.
τ_x, τ_y : Schubspannungskomponenten senkrecht zur X- bzw. Y-Achse.

Zeiger h bezieht sich auf der homogenen Gleichung.

Zeiher nh bezieht sich auf der nicht-homogenen Gleichung.

Differentialquotienten nach y werden durch Striche angegeben.

REPORT S. 82.
The torsion of members having solid oblong sections.

Summary.

For prismatical members having solid oblong sections an approximate method for the determination of the shear stress distribution with pure torsion and of the torsional rigidity is developed. This method starts from the conception of the solution of the torsion problem, that is supplied by the membrane analogy. It is satisfactory to assume as a first approximation, that sections of the membrane normal to the longitudinal direction (y) of the cross section have the shape of a parabola with vertical axis (equation (4)). The height of the membrane along the centerline of the cross section is governed by the differential equation (9) and its boundary conditions (10), (12) or (13).

The solution of this equation is given for members having elliptic (equation (17)), rectangular (equations (18), (19) and (20)) and triangular (equations (23) and (24)) cross sections. In general the equation can only be solved in step by step integration. The method of solution is discussed in item 8, the solution is found by superposition of 2 solutions of the homogeneous ($C = 0$) and a solution of the non-homogeneous equation, i.e. $z = z_{nh} + k_1 z_{h1} + k_2 z_{h2}$; the constants k_1 and k_2 being determined from the boundary conditions. A numerical example is given in table IV. The use of (13) as a simplified boundary condition is always satisfactory (see fig. 13).

The shear stresses and the torsional rigidity are given by equations (14) and (16).

The results found by this method are such, that the torsional rigidity is computed with great accuracy, whereas the shearing stresses show larger errors only when the centerline of the cross section is curved distinctly. For these cases, where the sections of the membrane will be unsymmetrical, a correction is found (item 9, equations (28), (29) and (30'')), that can be computed for each strip dy after solving equation (9). This method has been applied to members, having semi-circular (item 10, fig. 9 and 10) and streamline (item 11, fig. 11—15, table IV—VI) cross sections and the results have been compared with the exact figures for the semi-circular and with experimental results for the streamline (fig. 15, table VI) cross sections. The agreement appeared to be very good.

In a simple way a less accurate solution can be obtained from equations (31) and (32) item 12b, the results are compared with the above mentioned ones in table VIII for the streamline section.

Notations:

a, b : x-co-ordinates of the boundary of the cross section (fig. 1).
c : angular displacement per unit of length.
g, h, z: functions of y, equations (4), (8) and (28).
m_1, m_2: tangents of sides of triangle (item 7c).
p : pressure under membrane.
S : surface tension of membrane.
w : torsion function or ordinate of membrane.
x, y : cartesian co-ordinates in plane of cross section.
F : area of cross section, eq. (31).
G : modulus of rigidity.
GI_w : torsional rigidity.
I_p : polar moment of inertia of cross section, eq. (31).
M_w : torsional moment.
τ_x, τ_y : shear stress components normal to X- resp. Y-axis.

The index h refers to the homogeneous equation.

The index nh refers to the non-homogeneous equation.

Differential quotients with respect to y are indicated by dashes.

De torsie van staven met enkelvoudig samenhangende langwerpige doorsneden

door

dr. ir. A. VAN DER NEUT en ir. F. J. PLANTEMA.

Rapport S. 82. Nationaal Luchtvaart Laboratorium, Amsterdam.

INHOUD.

1. Inleiding.

Voor prismatische staven, waarvan de doorsnede enkelvoudig samenhangend en van langwerpigen vorm is, wordt een benaderingsmethode ontwikkeld ter bepaling van de schuifspanningsverdeeling bij zuivere wringing en van de torsiestijfheid. Deze methode leidt tot een differentiaalvergelijking, waarvan de oplossing in het algemeen op eenvoudige wijze in numerischen vorm kan geschieden. Voor staven, waarvan de doorsnede een elliptischen, cirkelvormigen, rechthoekigen of driehoekigen vorm heeft, werden gesloten oplossingen gevonden, die voor de eerste twee en voor de gelijkzijdig-driehoekige doorsnede exact zijn.

Voor doorsneden, die dermate gedrongen zijn als de halfcirkelvormige, bleek de benaderingsmethode zeer betrouwbare resultaten te geven. Ook de toepassing op een stroomlijnprofiel met sterk gekromde middellijn bleek resultaten te geven, die geheel door proeven bevestigd worden.

2. De algemeene wringingsformules. (lit. 1) [1].

De in dit rapport gebruikte notaties zijn gegeven in punt 13. Voor de zuiver gewrongen staaf van prismatischen vorm worden de schuifspanningscomponenten in twee onderling loodrechte richtingen x en y gevonden als de differentiaalquotiënten van een functie w, die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2\,G c = \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De schuifspanningen loodrecht op de X-as en de Y-as zijn respectievelijk

$$\tau_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \text{ en } \tau_y = +\frac{\partial w}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Voor een enkelvoudig samenhangende doorsnede heeft de functie w de eigenschap, dat ze langs den omtrek van de doorsnede een constante waarde heeft. Aangezien de grootte van deze constante geen invloed heeft op de differentiaalquotienten $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $\frac{\partial w}{\partial y}$ kan hiervoor de waarde nul worden gekozen. In dit geval wordt het wringend moment gegeven door

$$M_w = 2 \iint w \, dx \, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De integratie strekt zich uit over het geheele oppervlak der doorsnede.

Men kan zich de functie w denken als ordinaat van een zeepvlies, dat onder constanten overdruk p gespannen is over een opening in een vlakke plaat. De vorm van de opening komt overeen met den vorm der beschouwde doorsnede (Zeepvliesanalogie van PRANDTL). De ordinaat van dit zeepvlies voldoet n.l. bij kleine doorbuigingen van het vlies eveneens aan (1), terwijl ook aan de randvoorwaarde $w = 0$ voldaan is. Het wringend moment wordt dan voorgesteld door twee maal den inhoud van den zeepvliesheuvel, de schuifspanningscomponent in een bepaalde richting door de helling van het zeepvlies in de loodrechte richting.

De vergelijking van het zeepvlies luidt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -p/S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

waarin S de oppervlaktespanning van het vlies is.

De evenredigheidsfactor, die noodig is om de resultaten van het zeepvlies te kunnen overdragen op het torsieprobleem, wordt bepaald aan een zeepvlies, dat met denzelfden overdruk gespannen is over een cirkelvormige opening en dat van dezelfde zeepoplossing is vervaardigd.

3. De benaderingsoplossing.

De benaderingsmethode gaat nu uit van deze zeepvliesanalogie. De Y-as wordt gekozen in de lengterichting van de doorsnede, de X-as loodrecht erop (fig. 1). In eerste instantie wordt aangenomen, dat doorsneden over het zeepvlies evenwijdig aan de X-as den vorm hebben van een parabool met verticale as. Voor een oneindig lange doorsnede heeft het zeepvlies namelijk in alle punten y een gelijken vorm, zoodat $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ en blijkens (1) w exact een parabool is. Bij eindig lange, doch wel langwerpige doorsneden verandert w in y-richting langzaam, zoodat vooral in het middeldeel $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ belangrijk kleiner is dan $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ en w dus ook hier goed door een parabool benaderd wordt.

Deze benadering is voor staven, waarvan de middellijn der doorsneden weinig gekromd is, voldoende; indien de middellijn sterker gekromd is, zal de doorsnede van het zeepvlies niet meer symmetrisch zijn. In tweede benadering kan hiervoor een correctie worden ingevoerd, die later besproken wordt (punt 9).

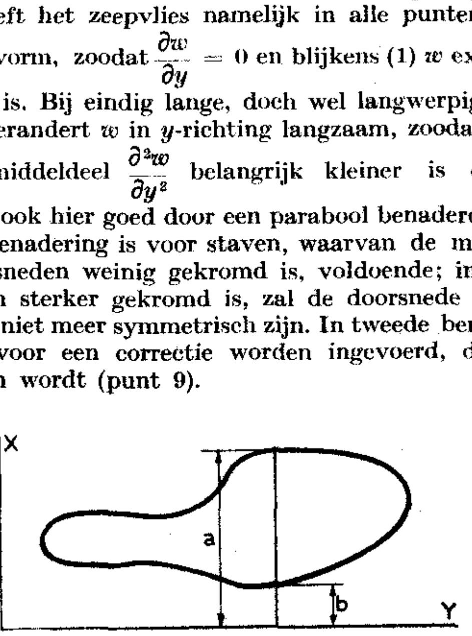


Fig. 1. Coördinaten van de contour.

[1] *Zie literatuurlijst aan het eind van dit rapport.*

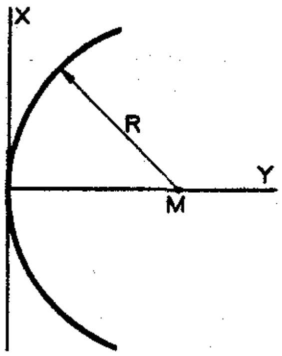


Fig. 2. De randvoorwaarde (11).

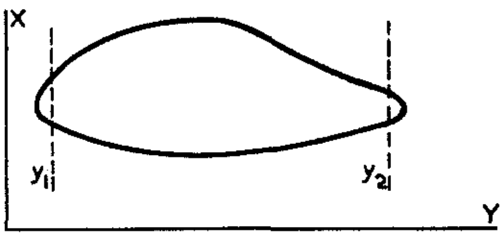


Fig. 3. Illustratie van de toelaatbaarheid der randvoorwaarden z = o, die exact gelden voor de afgeknotte doorsnede.

4. Het opstellen van de differentiaalvergelijking.

Met de notaties, die in punt 13 gegeven zijn, wordt de vergelijking van de doorsneden over het zeepvlies evenwijdig aan de X-as

$$w_1(x, y) = \left\{ x^2 - (a + b)\, x + ab \right\} g(y) \quad . \; . \quad (4)$$

De functie $g(y)$ is een voorloopig onbekende functie van y alleen. Aan de voorwaarde (1) kan nu in het algemeen niet meer exact voldaan worden. Door substitutie van (4) in (1) wordt gevonden

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \left\{ x^2 - (a + b)\, x + ab \right\} g''(y) + 2\left\{ -x(a+b)' + (ab)' \right\} g'(y) + \left\{ -x(a+b)'' + (ab)'' + 2 \right\} g(y) = -\frac{p_1(x, y)}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Bij de exacte oplossing is het tweede lid constant, men kan ervoor schrijven $-\, p/S$. Bij de benaderingsoplossing volgens (4) komt $p_1(xy)$ in de plaats van p. De druk $p_1(x, y)$ is nu niet meer constant. De functie $g(y)$ wordt nu zoodanig gekozen, dat het „gemiddelde" van den druk $p_1(x, y)$ over iedere doorsnede y gelijk is aan den druk p. Daarbij wordt het „gemiddelde" van $p_1(xy)$ nader gedefinieerd door de voorwaarde, dat den arbeid, dien de druk $p_1(xy)$ verricht bij het ontstaan van het zeepvlies $w_1(x, y)$, voor ieder strookje evenwijdig aan de X-as ter breedte dy gelijk is aan den arbeid, dien de druk p verricht bij het ontstaan van een vlies van geheel denzelfden vorm. Deze voorwaarde wordt uitgedrukt door:

$$\int_b^a \tfrac{1}{2} p_1(x, y)\, w_1(x, y)\, dx = \int_b^a \tfrac{1}{2}\, p\, w_1(x, y)\, dx \quad . \; . \quad (6)$$

Na substitutie van (4) en (5) en integratie naar x tusschen de grenzen b en a volgt na eenige omwerking

$$(a - b)^2 g'' + 5\,(a - b)(a - b)'\, g' + \left\{ 5/2\,(a - b)(a - b)'' - 10\,(a'b' + 1) \right\} g = 5\, p/S \quad (7)$$

Na invoeren van de nieuwe veranderlijke

$$z = g\,\frac{S}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

gaat (7) over in:

$$\left.\begin{aligned} z'' &= Az' + Bz + C \\ \text{met} \quad A &= -\frac{5}{a-b}(a-b)' \quad B = -\frac{2{,}5}{a-b}(a-b)'' + \frac{10}{(a-b)^2}(a'b'+1) \quad . \; . \; . \; . \\ C &= +\frac{5}{(a-b)^2} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Gaat men nu weer over van de zeepvliesanalogie op de oplossing van het torsieprobleem, dan moet in de plaats van p/S gesteld worden $2\, Gc$. Na oplossing van de differentiaalvergelijking (9) volgt dus de functie $w(x, y)$ door substitutie in (4) van

$$g(y) = 2\, G\, c\, z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8')$$

Indien de doorsnede symmetrisch is t.o.v. de Y-as is $a = -\, b$ en gaat (9) over in

$$\left.\begin{aligned} & z'' = A_1 z' + B_1 z + C_1 \\ & A_1 = -\frac{5a'}{a} \quad B_1 = -\frac{2{,}5}{a^2}\,(aa'' + a'^2 - 1) \quad C_1 = +\frac{1{,}25}{a^2} \end{aligned}\right\} (9')$$

5. De randvoorwaarden.

Door de benaderingsoplossing volgens (4) wordt overal langs den omtrek automatisch voldaan aan de voorwaarde $w = 0$. Aan de uiteinden behoeft hiertoe de functie $g(y)$ (of $z(y)$) niet nul te zijn. Iedere oplossing van de differentiaalvergelijking voor g kan als een in het kader van de ingevoerde benadering bruikbare oplossing worden beschouwd, daar de randvoorwaarde van het probleem langs den geheelen rand bevredigd is. Het ligt voor de hand, nu nog een zekere vrijheid van handelen bestaat, te eischen, dat in de middellijn nabij de uiteinden niet alleen vergelijking (7), maar ook de exacte differentiaalvergelijking van het probleem bevredigd wordt. Deze randvoorwaarde wordt uitgedrukt door

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -\, p/S$$

Daar in de uiteinden $x = \dfrac{a + b}{2}$, volgt met behulp van (5)

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\left[(a-b)^2 g'' + 4\,(a-b)\,(a-b)'\, g' + 2\left\{ (a-b)\,(a-b)'' - 4\,(a'b' + 1) \right\} g \right] = -\, p/S$$

Daar in de randpunten zoowel aan deze vergelijking als aan (7) moet worden voldaan, moet zulks ook met het verschil geschieden. Dit levert de randvoorwaarde:

$$(a-b)\,(a-b)'\, z' + 0{,}5 \left\{ (a-b\,(a-b)'' - 4\,(a'b' + 1) \right\} z = 1 \quad (10)$$

Indien het uiteinde gevormd wordt door een cirkelboog met straal R (fig. 2), gaat (10) over in

$$4\, R\, z' - 4z = 1 \quad (11)$$

Indien het uiteinde der doorsnede puntig gevormd is (a' en b' eindig), volgt uit (10):

$$z = -\frac{1}{2\,(a'b' + 1)} \quad (12)$$

Hierbij is stilzwijgend verondersteld, dat z' en z eindig zijn. Het bewijs van deze veronderstelling kan geleverd worden.

Voor lichamen, waarvan de doorsnede eindigt in een rechte lijn, die loodrecht staat op de X-as, wordt door (4) niet meer automatisch $w = 0$ aan de uiteinden, maar is hiertoe tevens vereischt de randvoorwaarde

$$z = 0 \quad (13)$$

Afhankelijk van den vorm van het lichaam heeft men dus één der randvoorwaarden (10) (12) of (13) toe te passen.

Voor de bepaling van torsiestijfheid en grootste schuifspanning zal men echter vrijwel steeds met de randvoorwaarde $z = 0$ kunnen rekenen. Deze randvoorwaarde geldt exact voor doorsneden met afgeknot uiteinde en zij geldt bij benadering voor doorsneden met vloeiend verloopend of puntig uiteinde, wat op de volgende wijze duidelijk kan worden gemaakt. [1]

In plaats van de beschouwde doorsnede wordt een andere doorsnede aangenomen, die slechts aan de uiteinden een geringe afwijking heeft van den oorspronkelijken vorm (fig. 3). De wijziging is verkregen door de doorsnede af te knotten in de punten y_1 en y_2, welke op geringen afstand van de uiteinden liggen. Voor een dergelijk gevormde doorsnede geldt de randvoorwaarde $z = 0$. Het zeepvlies, dat bij deze gewijzigde doorsnede behoort, zal alleen in de naaste omgeving van de uiteinden merkbaar afwijken van den vorm, dien het zeepvlies over de oorspronkelijke doorsnede heeft. Deze plaatselijke afwijking zal op den inhoud van het vlies, en dus op de torsiestijfheid, slechts een zeer geringen invloed hebben.

Indien het punt met de maximale helling op eenigen afstand ligt van het uiteinde, hetgeen bij langwerpige doorsneden wel steeds het geval is, zal ook de grootste helling en dus de waarde der maximale schuifspanning slechts weinig invloed van de afwijking ondervinden. Voor deze berekeningen is de aangegeven benaderde randvoorwaarde voldoende nauwkeurig. Slechts indien men de schuifspanning in de naaste omgeving van een uiteinde wenscht te kennen, zal men deze methode niet mogen toepassen.

In fig. 13 zijn ter vergelijking de waarden van z geteekend, zooals zij berekend worden uit de exacte randvoorwaarde en de randvoorwaarde $z = 0$. Op geringen afstand van het uiteinde is het verschil reeds niet meer van belang.

6. De schuifspanningscomponenten en de torsiestijfheid.

Na oplossing van de differentiaalvergelijking (9) vindt men de schuifspanningscomponenten τ_x en τ_y uit (2). Door substitutie van (4) en (8′) vindt men:

$$\left.\begin{aligned}\tau_x &= (-2x + a + b)\, z\, 2\,Gc \\ \tau_y &= \Big[\big\{x^2 - (a+b)\,x + ab\big\}\, z' + \big\{-(a+b)'\,x + (ab)'\big\}\, z\Big]\, 2\,Gc\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (14)$$

De maximale schuifspanning, die langs den omtrek optreedt, wordt probeerenderwijs gevonden; de plaats is meestal bij benadering bekend.

De grootte van het torsiemoment volgt uit (3) door substitutie van (4) en (8′)

$$M_w = 4\,Gc \int z\,dy \int_b^a \big\{x^2 - (a-b)\,x + ab\big\}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{3}\,Gc \int (a-b)^3\, z\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

De torsiestijfheid GI_w van de doorsnede wordt gedefinieerd

door $\quad GI_w = \dfrac{M_w}{c} = -\dfrac{2}{3}\,G \displaystyle\int (a-b)^3\, z\, dy \; . \; (16)$

7. Oplossingen in gesloten vorm.

a. *De elliptische en cirkelvormige doorsneden (fig. 4).*

Wegens de symmetrie is $a = -b$ en $w = (x^2 - a^2)\, g(y)$. Kiest men voor $g(y)$ een constante grootheid, dan volgt na substitutie van de waarde van a^2 met de notaties van fig. 6:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\left(\frac{d^2}{f^2} + 1\right) g = \text{constant} = -2\,Gc$$

De benaderingsmethode is dus voor deze doorsneden exact. Voor z vindt men met behulp van (8′)

$$z = \frac{-f^2}{2\,(f^2 + d^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Met behulp van (14) en (16) vindt men verder de bekende resultaten voor schuifspanningen en torsiestijfheid.

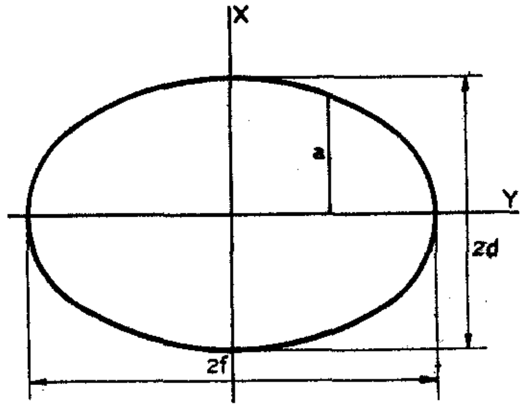


Fig. 4. Elliptische doorsnede.

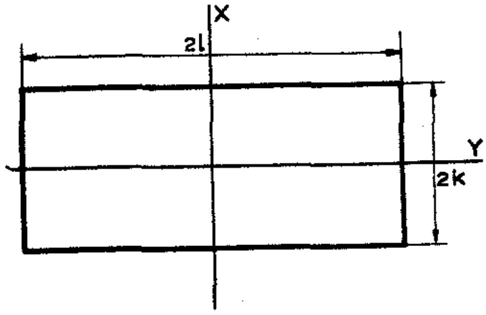


Fig. 5. Rechthoekige doorsnede.

b. *De rechthoekige doorsnede* (fig. 5).

Voor deze doorsnede is te schrijven $a = -b = k$. Er wordt een nieuwe veranderlijke $\xi = g + \frac{1}{2}\,\frac{p}{S}$ ingevoerd, waarna (7) overgaat in:

$$\xi'' - \frac{5}{2\,k^2}\,\xi = 0$$

De randvoorwaarden zijn $\left\{\begin{array}{ll} y = 0 & \dfrac{d\xi}{dy} = 0 \\ y = l & \xi - \frac{1}{2}\dfrac{p}{S} = 0 \end{array}\right.$

Na oplossing van de differentiaalvergelijking en terugsubstitutie volgt w:

$$w = +\,Gc\,(k^2 - x^2)\left(1 - \frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}}{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}\right) \quad \alpha^2 = \frac{5}{2\,k^2} \quad (18)$$

Met behulp van (4), (8′) en (16) volgt:

$$I_w = 3{,}37310\; k^4\,(\alpha l - \operatorname{tgh}\,\alpha l) \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

De schuifspanning kan worden gevonden met behulp van (2), (19) en door te bedenken, dat $M_w = I_w Gc$. Men vindt voor de maximale schuifspanning, die optreedt in het uiteinde van de korte as, in absolute waarde:

$$\tau_{max} = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\substack{y = 0 \\ x = k}} = 2\,Gck\left(1 - \frac{1}{\cosh\,\alpha l}\right) =$$

$$= \frac{0{,}59293\; M_w\left(1 - \dfrac{1}{\cosh\,\alpha l}\right)}{k^3\,(\alpha l - \operatorname{tgh}\,\alpha l)} \quad . \; . \; . \; (20)$$

[1] Zie ook punt 8.

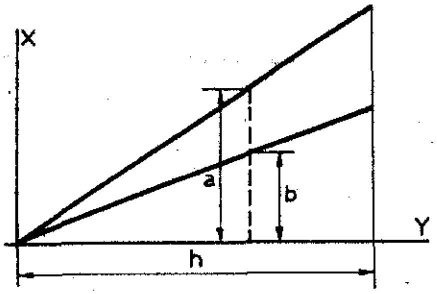


Fig. 6. Driehoekige doorsnede.

Voor een vierkante doorsnede ($k = l$) is $\tau_{max} = 1{,}2104$ Gck. Voor de schuifspanning, die optreedt in het uiteinde van de andere symmetrie-as en die in dit geval even groot moet zijn, vindt men 1,4528 Gck. Het verschil tusschen deze twee waarden is vrij aanzienlijk, de juiste uitkomst is 1,351 Gck (lit. 2). Een nauwkeurige benadering van de exacte uitkomsten geven voor een rechthoekige doorsnede de volgende formules (lit. 2, met eenige vereenvoudiging):

$$\tau_{max} = 2\,Gck\left(1 - \frac{0{,}81057}{\cosh \dfrac{\pi l}{2k}}\right) =$$

$$= \frac{M_w\left(1 - \dfrac{0{,}81057}{\cosh \dfrac{\pi l}{2\,k}}\right)}{k^3\ \left[2{,}667\ \dfrac{l}{k} - 1{,}6732\ (tgh\ \dfrac{\pi l}{2\ k} + 0{,}00412)\right]} \quad . \ . \ (21)$$

$$I_w = k^4\ \left[5{,}333\ \frac{l}{k} - 3{,}3464\ (tgh\ \frac{\pi\, l}{2\ k} + 0{,}00412)\right] \quad (22)$$

Voor smalle rechthoeken gaan deze over in:

$$\tau_{max} = \frac{2\ M_w}{k^3\ (5{,}333\ \dfrac{l}{k} - 3{,}360)} \quad . \ . \ . \ . \ . (21')$$

$$I_w = k^4\ (5{,}333\ \frac{l}{k} - 3{,}360) \quad . \ . \ . \ . (22')$$

In tabel I zijn voor verschillende waarden van $\frac{l}{k}$ de

TABEL I. *Rechthoek.*

l/k	$k^3/M_w \cdot \tau max$			I_w/k^4			Benadering punt 12[b]	
	(20)	(21)	% fout	(19)	(22)	% fout	$k^3/M_w\,\tau$	I_w/k^4
1,0	0,5418	0,6017	–10,0	2,23	2,25	–0,9	0,834	2,40
1,2	0,4451	0,4760	– 6,5	3,18	3,19	–0,3	0,589	3,40
1,4	0,3757	0,3928	– 4,4	4,17	4,19	–0,5	0,451	4,44
1,6	0,3236	0,3324	– 2,9	5,20	5,22	–0,4	0,362	5,52
1,8	0,2829	0,2889	– 2,1	6,25	6,26	–0,16	0,303	6,60
2,0	0,2506	0,2542	– 1,4	7,31	7,32	–0,13	0,260	7,68
3,0	0,1556	0,1559	– 0,02	12,63	12,64	–0,08	0,154	12,97
4,0	0,1109	0,1109	0	17,96	17,97	–0,06	0,111	18,04
5,0	0,0859	0,0858	0	23,29	23,31	–0,08	0,0858	23,1
6,0	0,0698	0,0698	0	28,63	28,64	–0,03	0,0717	27,9

uitkomsten volgens (19) en (20) vergeleken met die volgens (21) en (22). Dit leidt tot de volgende conclusies:

1°. de torsiestijfheid wordt door (19) zeer goed benaderd voor alle waarden van $\frac{l}{k}$;

2°. de waarde der maximale schuifspanning wordt voor alle $\frac{l}{k} \geq 2$ door (20) zeer goed benaderd, namelijk met een fout van ten hoogste 1 %.

Voor waarden van $\frac{l}{k} \geq 3$ is $tgh\ \alpha l = 1$ en gaan (19) en (20) over in:

$$I_w = k^4\ (5{,}333\ \frac{l}{k} - 3{,}373) \quad . \ . \ . \ . \ . (19')$$

$$|\tau_{max}| = \frac{2\ M_w}{k^3\,(5{,}333\ \dfrac{l}{k} - 3{,}373)} \quad . \ . \ . \ . (20')$$

Deze formules zijn practisch gelijk aan (22′) en (21′).

Ten slotte zijn voor practisch gebruik in tabel II correctiefactoren f_1 en f_2 gegeven, waarmee het tweede lid van (19′) resp. (20′) vermenigvuldigd moet worden om voor alle waarden van $\frac{l}{k}$ uitkomsten te geven, welke in overeenstemming zijn met de vergelijkingen (21) en (22).

TABEL II. *Rechthoek.*

$\frac{l}{k}$	f_1	f_2
1	1,148	0,5897
1,2	1,054	0,7204
1,4	1,024	0,8039
1,6	1,012	0,8586
1,8	1,005	0,8994
2,0	1,004	0,9271
3,0	1,001	0,9842
4,0	1,001	0,9955
5,0	1,001	0,999
$\geq$ 6,0	1,000	1

$$I_w = f_1 k^4\ (5{,}333\ \frac{l}{k} - 3{,}373)$$

$$\tau max = f_2\ \frac{2\ M_w}{k^3\,(5{,}333\ \dfrac{l}{k} - 3{,}373)}$$

c. *De driehoekige doorsnede* (fig. 6).

De kortste zijde wordt evenwijdig aan de X-as gekozen en de hoogtelijn daarop als Y-as met het tegenovergestelde hoekpunt in den oorsprong. De vergelijkingen van de zijden zijn $a = m_1 y$; $b = m_2 y$. Onder invoering hiervan gaat (9) over in:

$$y^2\ \frac{d^2 z}{dy^2} + 5\,y\,\frac{dz}{dy} - \frac{10\ (m_1 m_2\ +\ 1)}{(m_1 - m_2)^2}\ z = \frac{5}{(m_1 - m_2)^2}$$

De randvoorwaarden zijn:

$$y = 0 \qquad z = \frac{-1}{2\ (m_1 m_2 + 1)}$$

$$y = h \qquad z = 0$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking is:

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2\,(m_1 m_2 + 1)} \left\{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{-2+t}\right\} \\ \text{met } t &= -\frac{1}{m_1 - m_2}\ \sqrt{4 m_1^2 + 2 m_1 m_2 + 4 m_2^2 + 10} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Voor de torsiestijfheid vindt men:

$$I_w = \frac{(m_1 - m_2)^3}{3\,(m_1 m_2 + 1)} \left(0{,}25 - \frac{1}{2 + t}\right) h^4 \quad . \; (24)$$

De schuifspanningen vindt men met behulp van (14). De resultaten worden op enkele bijzondere gevallen toegepast.

Voor de gelijkbeenig-driehoekige doorsnede vindt men door substitutie van $m_1 = -m_2 = m$:

$$z = -\frac{1}{2\,(1 - m^2)} \left\{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{-2+t}\right\} \text{met } t = \sqrt{\frac{5 + 3m^2}{2\,m^2}}$$

Langs de basis treedt de grootste schuifspanning op in het midden. Ze bedraagt in absolute waarde:

$$|\tau_{ba}| = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\substack{x = 0 \\ y = h}} = \frac{m^2}{1 - m^2}\,(t - 2)\; Gch\,. \; (25)$$

Langs de beenen bedraagt de schuifspanning

$\tau = \sqrt{1 + m^2}.\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x = a}$. De plaats waar het maximum optreedt wordt gegeven door:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^{t - 2} = \frac{1}{t - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

en de grootte van de maximum schuifspanning langs de beenen bedraagt:

$$|\tau_{max}| = \frac{2\,m\,\sqrt{1 + m^2}}{1 - m^2}\;\frac{t - 2}{t - 1}\left(\frac{1}{t - 1}\right)^{\frac{1}{t - 2}} Gch \; (27)$$

Voor den gelijkzijdigen driehoek is $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Men vindt $t = 3$ en:

$$z = -0{,}75\,\frac{h - y}{h}$$

$$I_w = \frac{h^4}{15\,\sqrt{3}}$$

Uit (24), (25) en (26) volgen respectievelijk:

$$|\tau_{ba}| = \tfrac{1}{2}\,Gch;\; y = \tfrac{1}{2}\,h \;\text{ en }\; |\tau_{max}| = \tfrac{1}{2}\,Gch = \frac{15\,M_w\,\sqrt{3}}{2\;h^3}$$

Verder is makkelijk af te leiden, dat deze oplossing exact is, daar:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -2\,Gc.$$

TABEL III. *Gelijkbeenige driehoek.*

$bg\ tg\ m$	m	$\frac{\tau_{ba}}{2\,Gch}$	$\frac{y}{h}$	$\frac{(\tau_{max})}{2\,Gch}$
0°	0	0	0	0
5°	0,0875	0,0623	0,162	0,0699
10°	0,1763	0,113	0,256	0,1205
15°	0,268	0,156	0,330	0,161
20°	0,364	0,192	0,393	0,194
25°	0,466	0,223	0,449	0,224
30°	0,577	0,250	0,5	0,250
35°	0,700	0,2735	0,549	0,275
40°	0,839	0,2975	0,591	0,302
45°	1	0,3125	0,632	0,325

In tabel III zijn verder voor waarden van m gelegen tusschen 0 en 1 de uitkomsten van (25), (26) en (27) gegeven.

Het geval, dat $m = 1$, komt overeen met den gelijkbeenig-rechthoekigen driehoek. Men heeft hiervoor een contrôle,

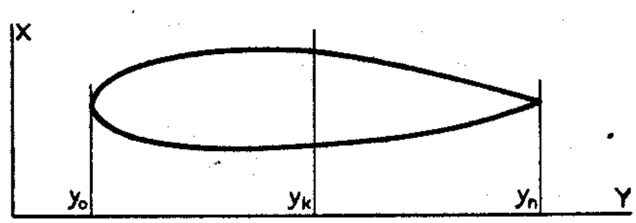


Fig. 7. Nummering der intervallen.

doordat deze ook voorgesteld wordt door in de algemeene formules te substitueeren $m_1 = 1$ en $m_2 = 0$. Berekent men voor dit geval de maximale waarden der schuifspanningen langs de drie zijden van den driehoek dan vindt men:

voor $y = h$: $\tau_{max} = 0{,}4354\,Gch$ voor $x = 0{,}5\,h$
langs Y-as: $\tau_{max} = 0{,}3560\,Gch$ voor $y = 0{,}43958\,h$
langs hypothenusa: $\tau_{max} = 0{,}5035\,Gch$ voor $y = 0{,}43958\,h$

De schuifspanningen langs de twee rechthoekszijden moeten aan elkaar gelijk zijn en de grootste schuifspanning moet optreden in het midden van de hypothenusa. De in den laatsten regel van tabel III gevonden waarden zijn aanzienlijk grooter, ook treedt daar het maximum langs de beenen op.

Uit het bovenstaande lijkt het raadzaam de gevonden formules niet toe te passen op driehoeken, waarvoor m_1 of m_2 in absolute waarde grooter dan 0,6 zijn.

Lit. 3 geeft een op andere wijze gevonden benaderingsoplossing voor de gelijkbeenig driehoekige doorsnede. De formules, die voor de torsiestijfheid en de schuifspanningen worden gevonden, zijn precies dezelfde als uit het voorgaande werd afgeleid.

8. De numerische oplossingsmethode.

De differentiaalvergelijking (9) kan slechts in speciale gevallen in gesloten vorm worden opgelost (punt 7). Indien een oplossing in gesloten vorm niet gevonden wordt, kan de oplossing numerisch als volgt geschieden.

De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt gesplitst in oplossingen van de homogene ($C = 0$) en een oplossing van de niet-homogene vergelijking. Van de homogene vergelijking worden twee oplossingen bepaald ($z_{h\,1}$ en $z_{h\,2}$), van de niet-homogene vergelijking één oplossing (z_{nh}). Deze oplossingen voldoen in het algemeen slechts aan de differentiaalvergelijkingen en niet aan de randvoorwaarden. Iedere functie $z = z_{nh} + k_1 z_{h\,1} + k_2 z_{h\,2}$ voldoet dan aan (9). De waarden van de constanten k_1 en k_2 bij welke ook aan de randvoorwaarden (10) voldaan wordt, bepalen dan de oplossing. Ter bepaling van de functies z_{nh}, $z_{h\,1}$ en $z_{h\,2}$ gaat men als volgt te werk (notaties zie fig. 7):

Het stuk $y_o - y_n$ wordt in n gelijke intervallen $\triangle y$ verdeeld. Op een willekeurige plaats $y = y_k$ neemt men willekeurige van nul verschillende beginwaarden z_k en z_k' aan en berekent z_k'' uit (9). Op de helft van het eerste interval berekent men $z_{k+\frac{1}{2}} = z_k + \frac{1}{2} z_k' \triangle y$ en $z_{k+\frac{1}{2}}' = z_k' + \frac{1}{2} z_k'' \triangle y$, deze neemt men als gemiddelden over het eerste interval en vindt aldus $z_{k+1} = z_k + z_{k+\frac{1}{2}}' \triangle y$ en $z_{k+1}' = z_k' + z_{k+\frac{1}{2}}'' \triangle y$. Voor alle volgende intervallen wordt deze bewerking herhaald en uitgaande van y_k naar beide zijden. De twee oplossingen der homogene vergelijking bepaalt men met verschillende beginwaarden voor z_k en z_k', althans voor één van beide. Men vindt op deze wijze drie stellen eindwaarden, n.l.

$$(z_{h\,1})_o,\ (z_{h\,1}')_o,\ (z_{h\,1})_n,\ (z_{h\,1}')_n;\ (z_{h\,2})_o,\ (z_{h\,2}')_o,\ (z_{h\,2})_n,\ (z_{h\,2}')_n;$$
$$(z_{nh})_o,\ (z_{nh}')_o,\ (z_{nh})_n,\ (z'_{nh})_n.$$

De randvoorwaarden in de punten $y = y_o$ en $y = y_n$ te zamen met:

$$\begin{aligned} z_o &= (z_{nh})_o + k_1\,(z_{h\,1})_o + k_2\,(z_{h\,2})_o \\ z_o' &= (z_{nh}')_o + k_1\,(z_{h\,1}')_o + k_2\,(z_{h\,2}')_o \\ z_n &= (z_{nh})_n + k_1\,(z_{h\,1})_n + k_2\,(z_{h\,2})_n \\ z_n' &= (z_{nh}')_n + k_1\,(z_{h\,1}')_n + k_2\,(z_{h\,2}')_n \end{aligned}$$

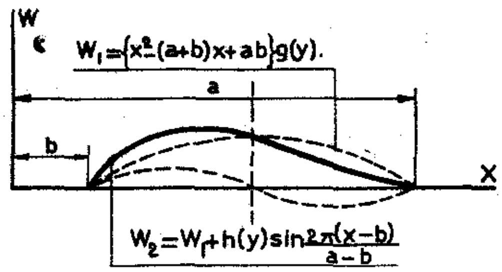


Fig. 8. Torsie-functie w_2 voor doorsneden met sterk gekromde middellijn.

leveren 6 vergelijkingen met de 6 onbekenden k_1, k_2, z_o, z_o', z_n en z_n'.

Indien de beschouwde doorsnede symmetrisch is t.o.v. de X-as, behoeft men slechts één helft te beschouwen; men heeft nu de voorwaarde $z' = 0$ voor $y = 0$. In de symmetriedoorsnede kiest men een willekeurige beginwaarde z_o, terwijl men bij de bepaling van de functies z_{nh} en z_h in $y = 0$ aanneemt $z_{nh}' = 0$ en $z_h' = 0$. Op deze wijze krijgt men slechts één oplossing van de homogene vergelijking. Uit de randvoorwaarde voor het uiteinde bepaalt men dan de constante k, waarmede de oplossing wordt $z = z_{nh} + kz_h$.

Dat deze methode tot een goed resultaat voert, wordt veroorzaakt doordat: 1°. begonnen wordt op een plaats waar z weinig veranderlijk is en 2°. de fouten, die bij de oplossing der homogene vergelijking en der niet-homogene vergelijking gemaakt worden, van denzelfden aard zijn en bij de combinatie grootendeels verdwijnen.

Bij een willekeurige doorsnede is het raadzaam het beginpunt van de integratie (y_k) niet in of nabij de uiteinden te kiezen, doch bij voorkeur in het midden van de doorsnede.

Deze aanbeveling houdt verband met het karakter van de oplossing der homogene vergelijking. In de omgeving van de uiteinden neemt de waarde van z_h namelijk zeer sterk toe. Door de berekening te betrekken op eindige intervallen verkrijgt men daarom niet de exacte waarde van de functie z_h in dit gebied. Indien men dan ook aan het uiteinde zekere beginwaarden van z_{nh}' en z_{nh} aanneemt — die in het algemeen, omdat de werkelijke waarde onbekend is, van de werkelijke waarde zullen afwijken — wordt bij verdere integratie een functie gevonden, die gelijk is aan $z_{nh} = z - kz_h$. Ook indien de functie z zelf in de omgeving van het uiteinde regelmatig verloopt, zal dit met de functie z_{nh} niet het geval zijn; immers verandert z_h aan het uiteinde zeer snel. Dit heeft ten gevolge, dat men op eenigen afstand van het uiteinde op waarden van z_{nh} komt, die zeer sterk afwijken van de werkelijke waarde, terwijl deze afwijkingen zeer groot worden naarmate men het andere uiteinde nadert. Op deze wijze moet de oplossing $z = z_{nh} + kz_h$ gevonden worden als verschil van 2 getallen, welke zeer weinig verschillen. De nauwkeurigheid gaat hierbij teloor, tenzij men ieder der oplossingen z_{nh} en z_h zeer nauwkeurig bepaalt.

Dergelijk moeizaam rekenwerk kan worden vermeden door betreffende een punt op voldoenden afstand van de uiteinden een schatting te maken omtrent z en z' (zie punt 11) en van deze beginwaarden uit te integreeren. Ook dan zal men naar de uiteinden toe grootere getallen voor z_{nh} vinden, doch deze zullen blijken door een homogene oplossing met kleine beginwaarden gecompenseerd te kunnen worden.

De omstandigheid, dat de intervallen eindig zijn in het gebied nabij de uiteinden, heeft schijnbaar het bezwaar, dat de functies z_{nh} en z_h onvoldoende nauwkeurig worden bepaald. Dit bezwaar vervalt echter geheel, indien de functie z weinig veranderlijk is in dit gebied; immers worden dan in z_{nh} en $k_1 z_{h\,1} + k_2 z_{h\,2}$ gelijke fouten gemaakt, die elkaar volkomen opheffen. Indien z nabij het uiteinde zelf sterk verandert, verkrijgt men inderdaad een minder groote nauwkeurigheid. De oplossing $z_{nh} + k_1 z_{h\,1} + k_2 z_{h\,2}$ voldoet dan slechts schijnbaar aan de randvoorwaarde; in werkelijkheid levert zij een andere z op dan de randvoorwaarden vereischen. Dit beteekent, dat de oplossing het bedrag $\triangle k_1 z_{h\,1} + \triangle k_2 z_{h\,2}$ foutief is. Echter is in verband met de omstandigheid, dat z_h nabij de uiteinden zeer veel in grootte toeneemt, deze fout slechts in de naaste omgeving der uiteinden merkbaar. Hierop berust ook de toepasbaarheid der onder punt 5 besproken vereenvoudigde randvoorwaarde.

Slechts in het uitzonderlijke geval, dat men de spanningen nabij het uiteinde wenscht te kennen bij ter plaatse sterk veranderende waarde der functie z, geeft de besproken wijze van numerische integratie geen betrouwbare gegevens. In dit geval zal men òf de intervallen in dit gebied zeer klein moeten kiezen òf langs analytischen weg voor dit gebied de oplossing moeten benaderen.

9. *Correctiemethode voor doorsneden met sterk gekromde middellijn.*

Onder middellijn van de doorsnede wordt verstaan de meetkundige plaats van de middens der koorden evenwijdig aan de X-as. Indien deze sterk gekromd is, zijn de doorsneden over het zeepvlies evenwijdig aan de X-as niet meer symmetrisch, maar heeft het hoogste punt zich verplaatst naar de holle zijde. Deze omstandigheid is voornamelijk van belang voor de bepaling der grootste schuifspanning; immers zullen de hellingen van het zeepvlies grooter worden aan de zijde waarheen zich de top verplaatst. Zooals uit punt 10 blijken zal, wordt de torsiestijfheid reeds met groote nauwkeurigheid gevonden uit de benaderingsoplossing volgens (4), zoodat de verschuiving van den top op den inhoud van het zeepvlies weinig invloed uitoefent. In verband hiermede wordt op den parabolischen zeepvliesvorm een verplaatsing gesuperponeerd, die antisymmetrisch is. Voor deze anti-symmetrische verplaatsing wordt de sinusfunctie gekozen, zoodat de ordinaat van het zeepvlies wordt (zie fig. 8):

$$w_2\,(xy) = \left\{ x^2 - (a+b)\,x + ab \right\} g\,(y) + + h\,(y)\,\sin \frac{2\,\pi\,(x-b)}{a-b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

waarin $g\,(y)$ gelijk is aan de gelijknamige functie, waarvoor in punt 8 de wijze van oplossing is gegeven, en waarin $h\,(y)$ een voorloopig nog onbekende functie van y is.

Deze correctie door middel van de sinusfunctie heeft geen invloed op het aandeel, dat ieder strookje dy levert in de torsiestijfheid, omdat de inhoud van het zeepvlies, voorzoover hij van de sinusfunctie afhangt, gelijk nul is.

Daar het hier een benaderingsoplossing betreft, geeft substitutie van (28) in het linkerlid van (1) in het algemeen niet, dat voldaan wordt aan (1). De functie $h\,(y)$ zal nu zoodanig gekozen moeten worden, dat in het van belang zijnde gebied de fout, voor wat betreft het voldoen aan (1), zoo klein mogelijk wordt gehouden.

In een willekeurig punt is de fout:

$$\epsilon = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2\;Gc,$$

of na substitutie van (28):

$$\epsilon = [x^2 - (a-b)\,x + ab]\;g'' + 2\;[-x\,(a-b)' + (ab)']\;g' + + [-x\,(a+b)'' + (ab)'' + 2]\;g + h''\,\sin\frac{2\,\pi\,(x-b)}{a-b} + + 4\pi h'\left(\frac{x-b}{a-b}\right)'\cos\frac{2\,\pi\,(x-b)}{a-b} + + h\left[-4\,\pi^2\left\{\frac{1}{(a-b)^2} + \left(\frac{x-b}{a-b}\right)'^2\right\}\sin\frac{2\,\pi\,(x-b)}{a-b} + + 2\,\pi\left(\frac{x-b}{a-b}\right)''\cos\frac{2\,\pi\,(x-b)}{a-b}\right] + 2\;Gc, \quad . \; . \quad (29)$$

of

$$\epsilon = f_1(x, y) + h''f_2(x, y) + h'f_3(x, y) + hf_4(x, y),$$

waarin f_1, f_2, f_3 en f_4 bekende functies zijn van x en y. De voorwaarde betreffende beperking van de fout kan worden uitgedrukt door den eisch, dat de som van de kwadraten der fouten in het beschouwde gebied zoo klein mogelijk is. De functie h wordt dan bepaald uit de voorwaarde dat de integraal

$$J = \int_{y_1}^{y_2} \int_{b}^{a} \epsilon^2 dx dy = \text{minimum} \quad . \; . \; . \; (30)$$

Daartoe zou $h(y)$ ontwikkeld kunnen worden volgens

$$h(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i(y),$$

waarin de functies $h_i(y)$ bekende willekeurige functies van y en c_i voorloopig nog onbekende constanten zijn.

Uit de minimum voorwaarde (30) volgen dan n lineaire vergelijkingen, waaruit de n constanten c_i opgelost kunnen worden.

Deze vergelijkingen hebben de gedaante:

$$\frac{\partial J}{\partial c_j} = 2\int_{y_1}^{y_2} \int_{b}^{a} [f_1 + \Sigma c_i (h_i''f_2 + h_i'f_3 + h_i f_4)] \cdot$$

$$(h_j''f_2 + h_j'f_3 + h_j f_4)\, dx dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30')$$

De uitvoering van de integraties zal in den regel vrij veel rekenwerk vereischen. Voor de hier beschouwde lichamen met vloeiend verloopende contouren kan echter met een eenvoudige benadering van h als functie van y worden volstaan, hetgeen het rekenwerk sterk vereenvoudigt.

Het is namelijk de bedoeling de grootste schuifspanning te bepalen. Bij de beschouwde lichamen zal de spanning langs den omtrek slechts weinig veranderen in de omgeving van het punt met de grootste spanning. Ook is te verwachten, dat de plaats met de maximale schuifspanning, zooals die uit de benadering volgens punt 8 gevonden wordt, in dit gebied zal liggen (vergel. punt 11).

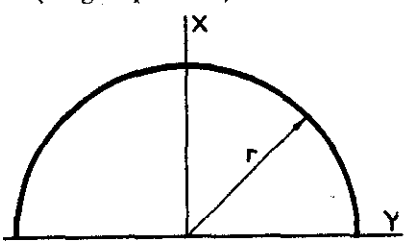


Fig. 9. Halfcirkelvormige doorsnede.

Onder deze omstandigheden kan de integratie J over y beperkt blijven tot een elementair strookje dy ter plaatse van het punt met maximale schuifspanning volgens 1ste benadering, terwijl de functie h in de omgeving van dit punt constant gedacht wordt. De constante h volgt dan uit de vergelijking

$$\int_{b}^{a} (f_1 + hf_4)\, f_4 dx = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30'')$$

De integraties kunnen het eenvoudigst numerisch worden uitgevoerd.

10. Toepassing van de methode op de halfcirkelvormige doorsnede. (fig. 9).

Voor deze doorsnede is $b = 0$ en $a^2 = r^2 - y^2$. De coëfficiënten in (9) worden:

$$A = \frac{5\, y}{r^2 - y^2} \quad B = \frac{2{,}5\, r^2}{(r^2 - y^2)^2} + \frac{10}{r^2 - y^2} \quad C = \frac{5}{r^2 - y^2}$$

Wegens de symmetrie van de doorsnede t.o.v. de X-as kan men de integratie van (9) aanvangen in $y = 0$. Hier is $z' = 0$. De randvoorwaarde in het punt $y = r$ volgt uit (10). De coëfficiënten uit vergelijking (10) zijn alle gelijk nul of eindig, behalve de coëfficiënt

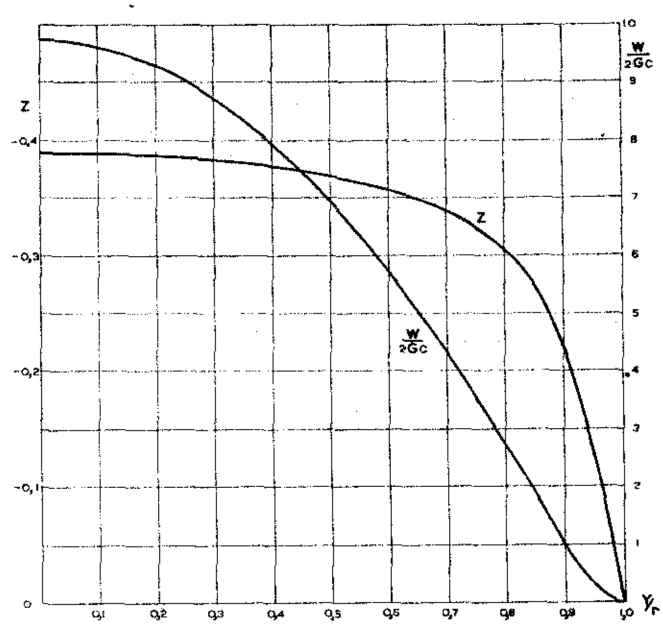


Fig. 10. De spannings-functie voor de halfcirkelvormige doorsnede.

$\frac{5}{2}(a - b)\,(a - b)''$, die oneindig groot is in het eindpunt.

Daar dit de coëfficiënt is van z volgt als randvoorwaarde $z = 0$. Kiezen wij $r = 10$, de intervalbreedte $\triangle\, y = 1$ en als beginwaarde voor de oplossingen z_h en z_{nh} $z_o = -0{,}3$, dan levert de oplossing der homogene vergelijking in het punt $y = 10$ $z_h = = -109{,}62032$ en die der niet-homogene vergelijking $z_{nh} = 32{,}61280$.

De randvoorwaarde geeft dus:

$32{,}61280 - 109{,}62032\, k = 0 \quad k = 0{,}29751$

De waarde $z = z_{nh} + k\, z_h$ is grafisch uitgezet in fig. 10; in het punt $y = 0$ is $z = -1{,}29751 \times 0{,}3 = -0{,}38925$. Ook de waarde van w langs de middellijn van het profiel is uitgezet.

Met behulp van (16) vindt men $I_w = 2927{,}715 = 0{,}2928\; r^4$.

De grootste schuifspanning treedt op in de punten $x = 0$ $y = 0$ en $x = r$ $y = 0$ en bedraagt $|\,\tau_x\,| = 0{,}7785$ $Gcr = 2{,}659\, \frac{M_w}{r^3}$.

De correctiemethode wordt vervolgens toegepast op het strookje $y = 0$. Men heeft $z_o = -0{,}38925$ $z_o' = 0$ $z_o'' = 0{,}00134$. Daaruit volgt

$f_1 = (0{,}00134\; x^2 - 0{,}05233\; x + 0{,}2215)\; 2\; Gc$. Verder is $f_4 = -0{,}39478\; sin\; 0{,}628\; x + 0{,}00628\; x\; cos\; 0{,}628\; x$. De uitwerking van (30'') geeft $h = 0{,}64126\; Gc$.

Voor de schuifspanning in het punt $x = y = 0$ vindt men $0{,}8188\; Gcr$ en in het punt $x = r$ $y = 0$ $0{,}7382\; Gcr$.

De exacte uitkomsten zijn $I_w = 0{,}296\, r^4$, $\tau_{x=y=0} = 0{,}849\; Gcr$ en $\tau_{\substack{x=r\\ y=0}} = 0{,}719\; Gcr$ (lit. 4). De fout in de torsiestijfheid bedraagt $-1{,}08$ %, in de ongecorrigeerde schuifspanningen $-8{,}3$ % resp. $+8{,}3$ % en in de gecorrigeerde schuifspanningen $-3{,}5$ % resp. $+2{,}7$ %. De resultaten der benaderingsmethode zijn dus alleszins bevredigend, te meer daar het hier een zeer gedrongen doorsnede met sterk gekromde middellijn betreft.

Ten slotte zijn de schuifspanningen nog eens gecorrigeerd onder aanname dat h evenredig is met $a - b$. Men vindt dan $h = 0{,}62552\; Gc$ en $\tau_{x=y=0} = 0{,}8178\; Gcr$, $\tau_{\substack{x=r\\ y=0}} = 0{,}7392$ Gcr, dus practisch dezelfde resultaten.

11. Toepassing van de methode op een stroomlijnprofiel.

De omtrek van de beschouwde doorsnede is benaderd

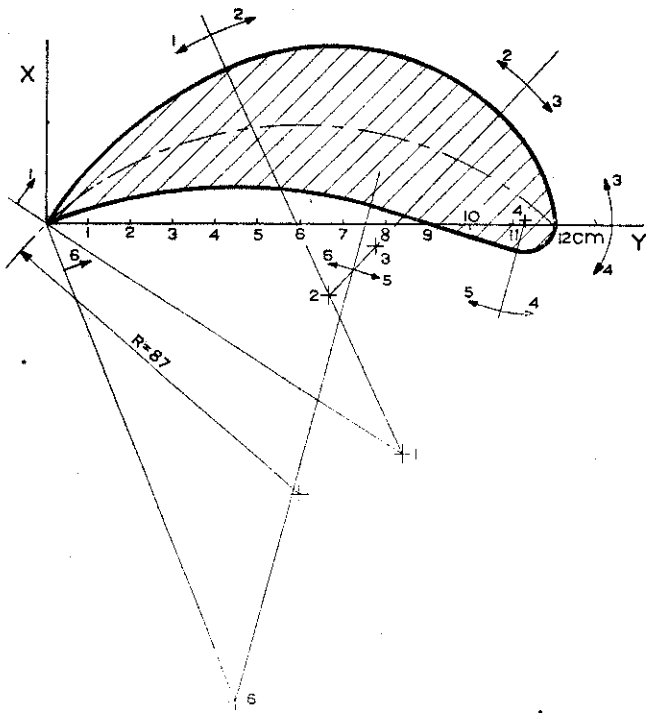


Fig. 11. Stroomlijnprofiel met sterk gekromde middellijn.

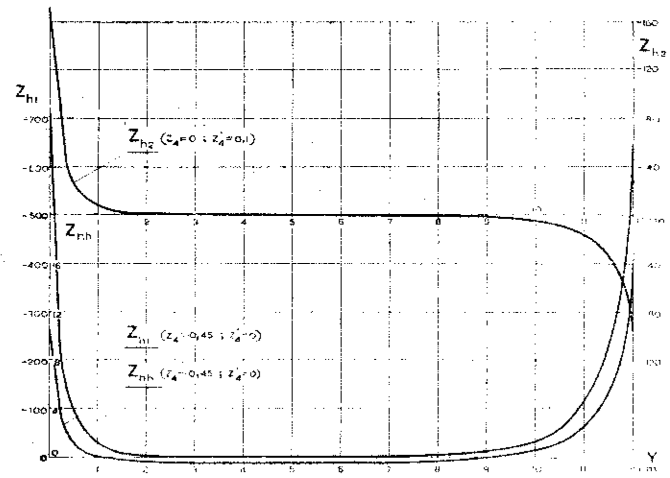


Fig. 12. Stroomlijnprofiel.
Oplossingen van homogene en niet-homogene vergelijkingen.

door eenige cirkelbogen, zooals in fig. 11 is aangegeven. De lengte van de doorsnede wordt in 12 gelijke intervallen verdeeld. De constanten A, B en C uit (9) moeten op de grenzen der intervallen en op de helft van ieder interval berekend worden; dit is het meest tijdroovende gedeelte der berekening.

De randvoorwaarde voor $y = 0$ is (12), men vindt hieruit $z_o = -0{,}31028$. Als randvoorwaarde voor $y = 12$ wordt (11) genomen. Aangezien de waarde, die voor R genomen dient te worden, niet nauwkeurig te bepalen is, zijn hiervoor verschillende waarden, gelegen tusschen 1 en 2,5, gesubstitueerd. Het blijkt, dat de keuze van R binnen deze grenzen op de waarden van z geen invloed heeft. Kiest men $R = 1{,}6$, dan wordt de randvoorwaarde $1{,}6\, z_{12}' - z_{12} = 0{,}25$.

De numerische integratie van (9) wordt aangevangen in $y = 4$. De waarde van z_4' zal klein en negatief zijn, ook z_4'' zal klein zijn. Verwaarloost men z_4' en z_4'', dan volgt uit (9) $Bz_4 + C = 0$. Dit geeft $z_4 \cong -0{,}47$. In werkelijkheid zal z_4 in absolute waarde kleiner zijn wegens de welving van het vlies in y-richting, die de hoogte van het vlies verlaagt.

De niet homogene vergelijking en de eerste homogene vergelijking worden opgelost met de beginwaarden $z_4 = -0{,}45$ en $z_4' = 0$, de tweede homogene vergelijking met de beginwaarden $z_4 = 0$ en $z_4' = 0{,}1$. In tabel IV is als voorbeeld de oplossing van de tweede homogene vergelijking tusschen $y = 4$ en $y = 0$ gegeven, waarbij in negatieve Y-richting wordt geintegreerd.

De oplossing der drie vergelijkingen is gegeven in figuur 12. De eindwaarden bedragen:

$$(z_{nh})_o = 10{,}4025 \quad (z_{h1})_o = -709{,}44 \quad (z_{h2})_o = -171{,}090$$
$$(z_{nh})_{12} = 15{,}797 \quad (z_{h1})_{12} = -645{,}84 \quad (z_{h2})_{12} = 94{,}052$$
$$(z_{nh}')_{12} = 101{,}171 \quad (z_{h1}')_{12} = -4070{,}9 \quad (z_{h2})_{12} = 592{,}84$$

De randvoorwaarden zijn:

$$z_o = -0{,}31028 = 10{,}4025 - 709{,}44\, k_1 - 171{,}090\, k_2$$
$$1{,}6\, z_{12}' - z_{12} = 0{,}25 = 146{,}077 - 5867{,}6\, k_1 + 854{,}49\, k_2$$

Hieruit volgt: $k_1 = 0{,}021181 \quad k_2 = -0{,}025213$.

De resulteerende waarden van z zijn grafisch voorgesteld in fig. 13. In deze figuur is ook de waarde van $\frac{w}{2\,Gc}$ langs de middellijn van het profiel uitgezet.

$$x = \frac{a+b}{2}, \qquad \frac{w}{2\,Gc} = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 z$$

Ten slotte zijn de waarden van z gestippeld geteekend, die volgen uit de randvoorwaarden $z = 0$ i.p.v. de exacte randvoorwaarden. Het verschil met de juiste oplossing is op geringen afstand van de uiteinden al niet meer van belang.

De integratie (16) levert de torsiestijfheid $I_w = 82{,}2$ cm^4. De grootheid $-\frac{2}{3}(a-b)^3 z$ stelt op schaal $\frac{1}{Gc}$ de oppervlakte van de doorsnede over den torsieheuvel in het $X-W$ vlak voor. Het verloop hiervan is grafisch voorgesteld in fig. 14 als functie van y.

Voor de gedeelten van den omtrek gelegen tusschen $y = 2$ en $y = 12$ zijn de schuifspanningen aan bolle en holle zijde bepaald, de resultaten zijn gegeven in tabel V.

Tabel IV. *Stroomlijnprofiel.*
Oplossing homogene differentiaalvergelijking.

(1)	(2) = $-\frac{1}{2}$(10)	(3)	(4) = $-\frac{1}{2}$(3)	(5)	(6)	(7)	(8) = (6) × (3)	(9) = (7) × (5)	(10) = (8) + (9)
y	$\frac{1}{2} z'' \triangle y$	z'	$\frac{1}{2} z' \triangle y$	z	A	B	Az'	Bz	z''
4	0,04181	0,1	− 0,05	0	−0,83624	1,48412	− 0,08362	0	− 0,08362
3,5		0,14181		− 0,05	−0,97689	1,82900	− 0,13853	− 0,09145	− 0,22998
3	0,35937	0,32998	− 0,16499	− 0,14181	−1,17115	2,34315	− 0,38646	− 0,33228	− 0,71874
2,5		0,68935		− 0,30680	−1,45278	3,16555	− 1,00147	− 0,97119	− 1,97266
2	4,09670	2,30264	− 1,15132	− 0,83116	−1,89047	4,62032	− 4,35307	− 3,84033	− 8,19340
1,5		6,39934		− 1.98248	−2,64653	7,62706	− 16.9360	− 15,1205	− 32,0565
1	129,500	34,3591	−17,1796	− 7,23050	−4,21390	15,7962	−144,786	−114,214	−259,000
0,5		163,859		− 24,4101	−9,07978	57,3580			
0				−171,090	− ∞	∞			

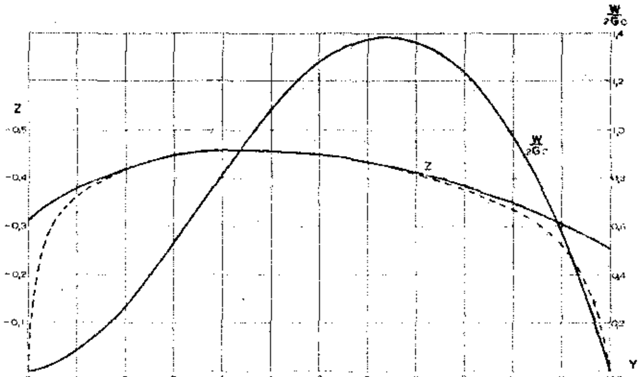


Fig. 13. De spannings-functie van het stroomlijnprofiel.
——— juiste randvoorwaarden. - - - randvoorwaarden z=0

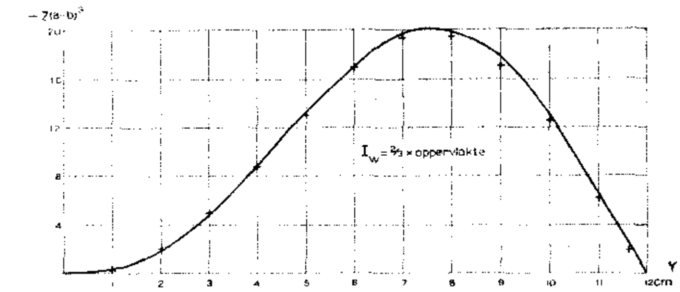


Fig. 14. Stroomlijnprofiel; inhoud van de spannings-functie.
——— berekend + + + gemeten

TABEL V. *Stroomlijnprofiel.*

y	$\|\tau_x\|/2\ Gc$	$\|\tau_b\|/2\ Gc$	$\|\tau_h\|/2\ Gc$
2	0,685	0,889	0,823
2,5	0,842	1,041	0,952
3	0,984	1,167	1,058
3,5	1,112	1,274	1,115
4	1,227	1,366	1,228
4,5	1,329	1,431	1,329
5	1,403	1,461	1,404
5,5	1,473	1,502	1,477
6	1,511	1,520	1,522
6,5	1,555	1,555	1,578
7	1,565	1,558	1,589
7,5	1,539	1,556	1,590
8	1,489	1,531	1,555
8,5	1,438	1,514	1,500
9	1,382	1,510	1,444
9,5	1,288	1,474	1,345
10	1,166	1,421	1,219
10,5	1,023	1,362	1,070
11	0,859	1,321	0,898
11,5	0,581	1,205	0,613

De schuifspanningen langs de bolle en holle zijden bedragen respectievelijk $\tau_b = \tau_x \sqrt{1 + a'^2}$ en $\tau_h = \tau_x \sqrt{1 + b'^2}$. Voor de doorsneden $y = 6{,}5$; 7; 7,5; 8 zijn ten slotte de schuifspanningen gecorrigeerd. De gecorrigeerde schuifspanningen zijn gegeven in tabel VI. De grootste schuifspanning blijft optreden in de doorsneden $y = 7 - 7{,}5$ aan de holle zijde. De correctie bedraagt ongeveer 4 %, ze is dus nog niet van veel belang.

TABEL VI. *Stroomlijnprofiel.*
Gecorrigeerde schuifspanningen.

y	holle kant $\tau/2\ Gc$			bolle kant $\tau/2\ Gc$		
	exper.	berek.	verschil %	exper.	berek.	verschil %
6,5	1,671	1,642	−1,7	1,429	1,492	+4,4
7	1,676	1,650	−1,6	1,456	1,500	+3,0
7,5	1,659	1,648	−0,7	1,470	1,501	+2,1
8	1,613	1,605	−0,5	1,475	1,480	+0,3

De torsiestijfheid wordt nog gecontroleerd met behulp van een benaderingsformule van de ST. VENANT (lit. 5) volgens welke:

$$I_w = \frac{F^4}{40\ I_p} \quad \dots\dots\dots \quad (31)$$

waarin F het oppervlak van de doorsnede en I_p het polaire traagheidsmoment zijn. Deze formule geeft voor de cirkelvormige doorsnede $I_w = 1{,}552\ r^4$, juist is $1{,}57\ r^4$. Voor de halfcirkelvormige doorsnede geeft de benaderingsformule $I_w = 0{,}302\ r^4$, terwijl de juiste waarde is $0{,}296\ r^4$. Voor een rechthoekige doorsnede met hetzelfde oppervlak en ongeveer dezelfde lengte-breedteverhouding als de schroefbladdoorsnede (lengte 10 cm, breedte 3,16 cm) geeft de benaderingsformule $I_w = 86$ cm^4, de juiste uitkomst is 84,08 cm^4.

Ten slotte geeft (31) voor de schroefbladdoorsnede $I_w = 83{,}33$ cm^4. De met behulp van de benaderingsmethode gevonden waarde 82,2 cm^4 is, evenals de exacte uitkomsten voor halfcirkelvormige en rechthoekige doorsnede, wat kleiner dan de uitkomst van de formule van de ST. VENANT.

Op verzoek van het Nationaal Luchtvaart Laboratorium werden in het Laboratorium voor Toegepaste Mechanica van de Technische Hoogeschool te Delft de torsiestijfheid en de schuifspanningsverdeeling experimenteel bepaald. Deze bepaling geschiedde volgens de electrische meetmethode (lit. 6).

De waarde van de torsiestijfheid, die uit deze metingen volgde, bedraagt 80,9 cm^4. Het verschil met de berekende waarde is 1,5 %. In fig. 14 zijn de gemeten waarden met de berekende waarden vergeleken.

De experimenteel gevonden waarden van de schuifspanningen *langs den omtrek zijn in tabel VI vergeleken* met de berekende waarden. De overeenstemming is zeer goed. De schuifspanningen langs den omtrek zijn in fig. 15 nog eens grafisch uitgezet. Uit deze figuur blijkt, dat ook in het algemeene verloop een goede overeenstemming bestaat *tusschen de gemeten en de berekende waarden.*

De schrijvers stellen het op prijs prof. dr. ir. C. B. BIEZENO en zijn medewerkers dr. ir. J. J. Koch en ir. Jos. M. Rademaker op deze plaats hun dank te betuigen voor de door hen verleende medewerking.

12. Vereenvoudiging van de berekening.

In gevallen, waarin de nauwkeurigheid van de berekening niet groot behoeft te zijn, kunnen verschillende vereenvoudigingen *worden ingevoerd, die sneller tot een* oplossing voeren.

a) Uit het voorgaande is reeds gebleken, dat het in acht nemen van de exacte randvoorwaarden slechts van ondergeschikt belang is (zie bv. fig. 13). Er wordt daarom nagegaan, wat de invloed *is van het niet in acht nemen* van een der randvoorwaarden, waardoor de oplossing van een der homogene vergelijkingen uitgespaard kan worden. Indien bij het stroomlijnprofiel alleen de randvoorwaarde $z_{12} = 0$ wordt gesteld en de constante k wordt afgeleid uit de niet-homogene *en eerste homogene* vergelijking, volgen waarden voor z, die in tabel VII zijn vergeleken met de nauwkeurige waarden. De overeenstemming blijkt goed te zijn, behalve in de buurt van de uiteinden. Voor de bepaling van de maximale schuifspanning is deze oplossing alleszins voldoende. De afwijking in de torsiestijfheid bedraagt ongeveer 1,5 %.

b) Een grovere benadering wordt gevonden door in het gebied, waar de grootste schuifspanningen verwacht worden, de waarden van z te bepalen door in (9) z' en z''

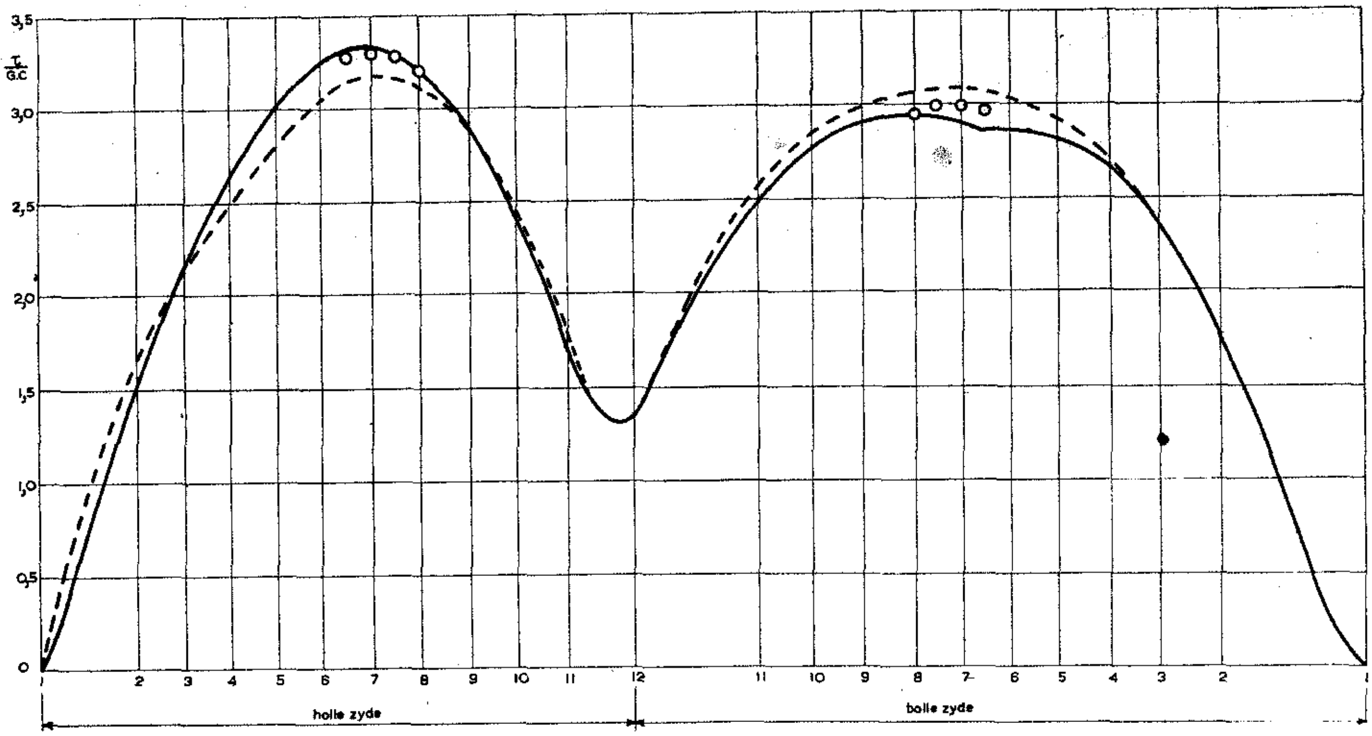


Fig. 15. Stroomlijnprofiel; de schuifspanning langs den omtrek.
—— *gemeten.* - - - *berekend, zonder correctie voor de gekromde middellijn.* O O O *berekend, met correctie voor de gekromde middellijn.*

TABEL VII. *Vereenvoudigde berekening stroomlijnprofiel. Resulteerende waarden van z.*

y	Oplossing punt 11	Benadering punt 12a
0	—0,310	—6,701
1	—0,372	—0,642
2	—0,416	—0,448
3	—0,446	—0,452
4	—0,459	—0,461
5	—0,451	—0,452
6	—0,451	—0,452
7	—0,436	—0,435
8	—0,406	—0,401
9	—0,384	—0,374
10	—0,348	—0,322
11	—0,303	—0,217
12	—0,254	0

te verwaarloozen. De schuifspanning τ_x wordt dan gevonden uit: $\tau_x = 2\,(a - b)\;Gc\,\frac{C}{B}$

De waarde van c volgt uit: $M_w = GcI_w$, waarin I_w bepaald wordt volgens (31).
De schuifspanning bedraagt dus:

$$\tau = 2\,(a - b)\,\frac{M_w}{I_w}\,\frac{C}{B}\,\sqrt{1 + a'^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

Voor de rechthoekige doorsnede (fig. 5) gaat (32) over in:

$$\tau = \frac{0{,}417\;M_w}{k^3}\left\{\frac{k}{l} + \left(\frac{k}{l}\right)^3\right\}$$

terwijl $I_w = 4{,}8\;\frac{k^3 l^3}{k^2 + l^2}$

In tabel I zijn de op deze wijze gevonden waarden voor schuifspanning en torsiestijfheid gegeven naast de exacte waarden volgens (21) en (22).

Voor de halfcirkelvormige doorsnede (zie punt 10) volgt uit (32) $\tau_{max} = 2{,}65\;\frac{M_w}{r^3}$. De methode volgens punt 8 en 9 geeft $2{,}80\;\frac{M_w}{r^3}$, terwijl de exacte uitkomst is $2{,}87\;\frac{M_w}{r^3}$.

Voor de doorsnede van het stroomlijnprofiel zijn de schuifspanningen volgens (32) gegeven in tabel VIII naast de meer nauwkeurige waarden volgens punt 11.

TABEL VIII. *Benadering stroomlijnprofiel punt 12b.*

y	Holle kant τ/M_w		Bolle kant τ/M_w	
	punt 11	punt 12b	punt 11	punt 12b
6,5	0,0406	0,0401	0,0369	0,0395
7	0,0408	0,0401	0,0371	0,0393
7,5	0,0407	0,0400	0,0372	0,0392
8	0,0397	0,0362	0,0368	0,0362

13. Notaties.

a, b: x-coördinaten van den omtrek van de doorsneden (functies van y)
g, h, z: functies van y
m_1, m_2: richtingscoëfficiënten
p: overdruk van het zeepvlies
S: oppervlaktespanning van het zeepvlies
w: torsiefunctie of ordinaat van het zeepvlies
x, y: Cartesische coördinaten in het vlak van de doorsnede
G: glijdingsmodulus
GI_w: torsiestijfheid
M_w: wringend moment
τ_x, τ_y: schuifspanningscomponenten loodrecht op de X- resp. Y-as.
c: specifieke hoekverdraaiing.

De index h heeft betrekking op de homogene vergelijking.

De index nh heeft betrekking op de niet-homogene vergelijking.

Afgeleiden naar y worden aangegeven door accenten.

14. Overzicht.

De ontwikkelde benaderingsmethode voor het bepalen van de torsiestijfheid en de schuifspanningen bij zuivere wringing van enkelvoudig samenhangende doorsneden van langwerpigen vorm, sluit zich aan bij de voorstelling omtrent de oplossing, die verkregen wordt door middel van de zeepvliesanalogie. Uit deze voorstelling blijkt de aanvaardbaarheid van de aanname, dat doorsneden over het zeepvlies loodrecht op de lengterichting van de doorsnede den vorm hebben van een parabool met verticale as. De differentiaalvergelijking van de zeepvlieshoogte langs de middellijn van de doorsnede wordt gegeven door vergelijking (9) en zijn randvoorwaarden door (10) (12) en (13).

De onder deze aanname gevonden resultaten zijn zoodanig, dat de torsiestijfheid slechts een verwaarloosbare fout vertoont, terwijl de grootste schuifspanningen alleen voor doorsneden met sterk gekromde middellijn grootere fouten vertoonen. Voor dergelijke gevallen, waar een onsymmetrische doorsnede van het zeepvlies moet worden verwacht, is in punt 9 een correctiemethode aangegeven, die in de punten 10 en 11 in een tweetal voorbeelden is toegepast. Het blijkt, dat de gevonden correctie de afwijkingen goed weergeeft. Alleen bij sterke kromming van de middellijn van het profiel is de correctie quantitatief van belang, zoodat in de practijk meestal volstaan kan worden met een schatting der onsymmetrie, die eenigszins aan den veiligen kant wordt gehouden.

De met de benaderingsmethode gevonden resultaten zijn, waar mogelijk, met de exacte uitkomsten vergeleken (punten 7 en 10, tabel I), waarbij in het algemeen goede overeenstemming bleek te bestaan. Voor enkele der in punt 7 besproken gevallen is de methode exact (cirkel, ellips, gelijkzijdige driehoek).

Voor het geval van een schroefbladdoorsnede (punt 11, fig. 11) konden de resultaten der berekening met metingsresultaten worden vergeleken. De overeenstemming bleek zeer goed te zijn (fig. 15, tabel VI).

Voor gevallen, waarin geen groote nauwkeurigheid wordt vereischt, worden in punt 12 methodes aangegeven, die op de ontwikkelde benaderingsmethode zijn gebaseerd, doch die sneller tot een resultaat voeren omtrent de grootte der maximale spanning.

LITERATUUR.

1. Zie o.a.:
   A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik, Band III (siebente Auflage, S. 418 f. S.) en Band V (zweiter Abdruck, S. 145 f. S.).
   A. und L. Föppl, Drang und Zwang. Zweiter Band, zweite Auflage, S. 37 f. S.
2. Föppl, Drang und Zwang, zweiter Band zweite Auflage, S. 95.
3. W. J. Duncan, D. L. Ellis and C. Scruton. The flexural centre and the centre of twist of an elastic cylinder. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, August 1933, p. 231—235.
4. Pöschl, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 1921, S. 319.
5. Föppl. Drang und Zwang. Zweiter Band zweite Auflage, S. 101.
6. C. B. Biezeno en J. J. Koch, Über einige Beispiele zur electrischen Spannungsbestimmung. *Ingenieur Archiv* 1933, Bd. IV, S. 384.

RAPPORT A 635.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Grafiek voor het bepalen van de kritische snelheid van een door een vliegtuig gesleept lichaam.

door

Ir. C. KONING.

RAPPORT A 635.

Grafiek voor het bepalen van de kritische snelheid van een door een vliegtuig gesleept lichaam.

Uittreksel.

Het in rapport A 367 [1]) afgeleide verband tusschen de kritische snelheid van het gesleepte lichaam en zijn eigenschappen wordt in grafiekvorm gegeven (fig. 1, 2). Hiertoe worden de door (37) gedefinieerde variabelen x, y, z ingevoerd, waardoor de formules (34) t/m (36) voor het berekenen van de kritische snelheid overgaan in (39).

RAPPORT A 635.

Abaque pour déterminer la vitesse critique d'un corps remorqué par un avion.

Résumé.

La relation entre les propriétés du corps remorqué et sa vitesse critique, qui a été établie dans le rapport A 367 [2]), est donnée sous la forme d'un abaque (fig. 1, 2). A cet effet les variables x, y, z, définies par (37), sont introduites. Ainsi les formules (34) à (36) pour la vitesse critique se transforment en (39).

REPORT A 635.

Diagram for the determination of the critical velocity of a body towed by an aeroplane.

Summary.

The relation between the critical velocity of the body and its properties, obtained in report A 367 [3]), is given here in a graphical form (fig. 1, 2). For this the variables x, y, z, defined by (37), are introduced, so that the expressions (34) to (36) for the calculation of the critical velocity change into (39).

BERICHT A 635.

Diagramm zur Bestimmung der kritischen Geschwindigkeit eines Körpers, der vom Flugzeug geschleppt wird.

Zusammenfassung.

Die in Bericht A 367 [4]) hergeleitete Beziehung zwischen der kritischen Geschwindigkeit des geschleppten Körpers und seinen Eigenschaften wird hier in der Form eines Diagramms gegeben (Fig. 1, 2). Dazu werden die von (37) definierten Variabelen x, y, z eingeführt, wobei die Formeln (34) bis (36) zur Berechnung der kritischen Geschwindigkeit übergehen in (39).

---

1) De kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan een kabel gesleept wordt.
Verslagen en Verhandelingen RSL, Deel VII (1934), blz. 128.

2) La vitesse critique d'un corps remorqué par un avion.
Verslagen en Verhandelingen RSL, Tome VII (1934), p. 125.

3) The critical velocity of a body towed by an aeroplane.
Verslagen en Verhandelingen RSL, Vol. VII (1934), p. 126.

4) Die kritische Geschwindigkeit eines Körpers, der vom Flugzeug geschleppt wird.
Verslagen en Verhandelingen RSL, Bnd. VII (1934), S. 127.

RAPPORT A 635.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Grafiek voor het bepalen van de kritische snelheid van een door een vliegtuig gesleept lichaam

door

Ir. C. KONING.

Overzicht.

Een grafiek wordt besproken, die een overzichtelijk beeld geeft van de wijze, waarop de verschillende factoren de kritische snelheid beïnvloeden en tevens kan dienen om globale waarden van deze snelheid te bepalen.

Indeeling.

1. *Inleiding.*

In rapport A 367 [5]) is een methode ontwikkeld voor het berekenen van de kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan een kabel gesleept wordt. Deze „kritische snelheid" is de bovengrens van het gebied van snelheden, waarbij zeker geen onstabiele slingeringen zullen optreden.

Uit de gegeven formules kan echter de invloed van de verschillende grootheden, waarvan de kritische snelheid afhangt, niet op eenvoudige wijze worden afgelezen. Om aan dit bezwaar tegemoet te komen en tevens een hulpmiddel te scheppen voor het op eenvoudige wijze bepalen van globale waarden voor de kritische snelheid, werd een grafiek ontwikkeld. Deze geeft het verband tusschen drie variabelen, die alle in de berekening voorkomende grootheden benevens de kritische snelheid omvatten.

Eenige bijzonderheden van algemeenen aard, die bij het opstellen der grafiek aan het licht kwamen, worden in punt 6 besproken.

De nummering der formules in het onderstaande sluit aan bij die in rapport A 367, formules met een nummer lager dan 37 zijn uit genoemd rapport overgenomen.

2. *De kritische snelheid.*

In rapport A 367 wordt als absoluut stabiliteitskriterium gegeven:

$$I\,k_M' < \tfrac{1}{4}\,\varrho k_D^2 \qquad (30)$$

Indien aan deze voorwaarde niet voldaan wordt, moet de kritische snelheid berekend worden uit:

$$B_k = \frac{-\varrho\, k_D^2 + 2\, k_D \sqrt{2\,\varrho\, I k_M'}}{2\, I\, k_M'} \qquad (34)$$

$$\sin^2 \varphi_k = \frac{2\, B_k\, k_W}{(1-B_k)\, k_L' + B_k\, k_W} \qquad (35)$$

$$V_k^2 = \frac{2\, mg\, \operatorname{tg} \varphi_k}{\varrho\, k_W} \qquad (36)$$

De hier gebruikte notaties hebben de in rapport A 367 omschreven beteekenis.

---

[5]) De kritische snelheid van een lichaam, dat door een vliegtuig aan een kabel gesleept wordt. Verslagen en Verhandelingen RSL. Deel VII (1934), blz. 128.

3. Invoeren van nieuwe variabelen.

Voert men de volgende nieuwe variabelen in:

$$x = \frac{\varrho k_D{}^2}{l\, k_M'}\ ; \quad y = \frac{k_L'}{k_W} \quad \text{en} \quad z = \tfrac{1}{2}\varrho \frac{k_W}{mg} V_k{}^2, \tag{37}$$

dan wordt het absolute stabiliteitskriterium:

$$x > 4 \tag{38}$$

terwijl de formules voor het berekenen van de kritische snelheid in de gevallen, waarin $x < 4$ is, worden:

$$B_k = -\tfrac{1}{2}x + \sqrt{2x}$$

$$\sin^2 \varphi_k = \frac{2\,B_k}{(1-B_k)\,y + B_k}$$

$$z = \operatorname{tg} \varphi_k$$

Na eliminatie van φ_k en B_k uit deze vergelijkingen verkrijgt men het verband tusschen x, y en z. Dit luidt:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1 - f(x)}{2\,f(x)}\,y - \tfrac{1}{2} \tag{39^A}$$

Hierin beteekent:

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x + \sqrt{2x} \tag{39^B}$$

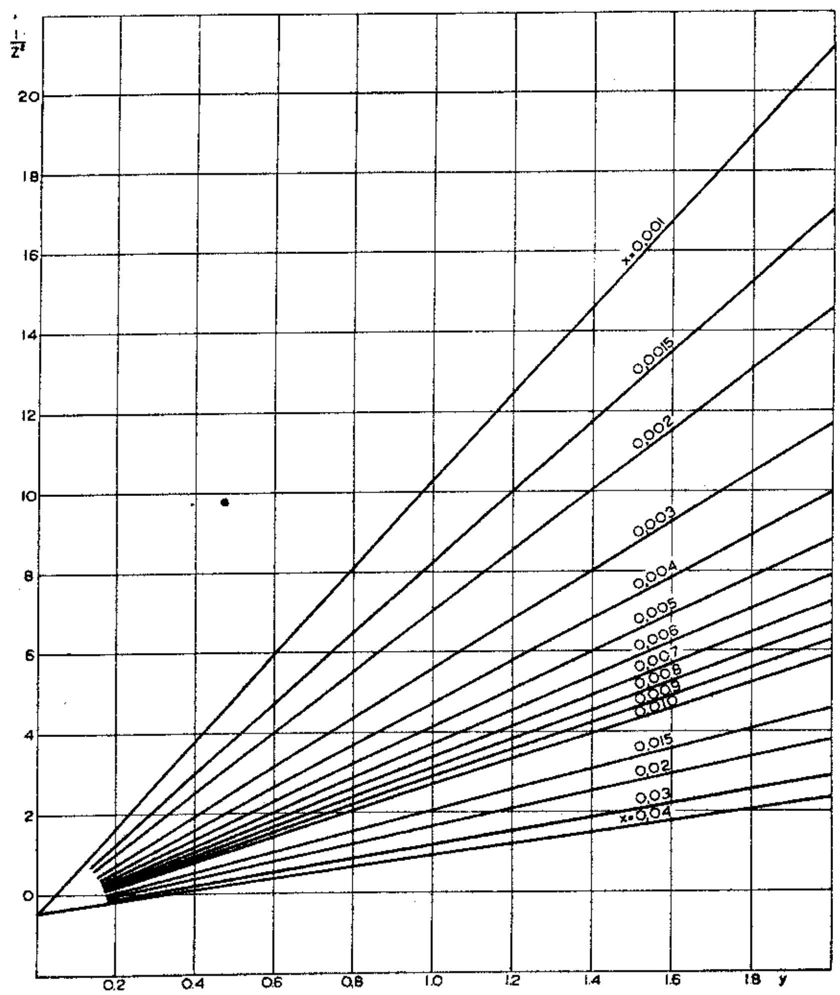


Fig. 1. Verband tusschen y en z voor constante waarden van x ($0.001 \leq x \leq 0.04$).
Voor beteekenis van x, y en z zie (37).

4. Beschrijving van de grafiek.

Het door (39) gegeven verband tusschen $\frac{1}{z^2}$ en y is lineair en kan dus op eenvoudige wijze voor verschillende waarden van x grafisch worden voorgesteld.

Als voorbeeld hiervan geven de figuren 1 en 2 de grafieken voor $0 \leq y \leq 2$ en resp. $0.001 \leq x \leq 0.04$ en $0.04 \leq x \leq 2$. Voor de verschillende in de praktijk gebruikte lichamen loopen de waarden van de coëfficiënten, in het bijzonder van x, vrij veel uiteen. Dit maakte de splitsing in twee gebieden van x noodig, omdat anders de afleesnauwkeurigheid onvoldoende werd. Voor x-waarden tusschen 2 en 4 is geen grafiek gegeven, daar deze praktisch niet voorkomen.

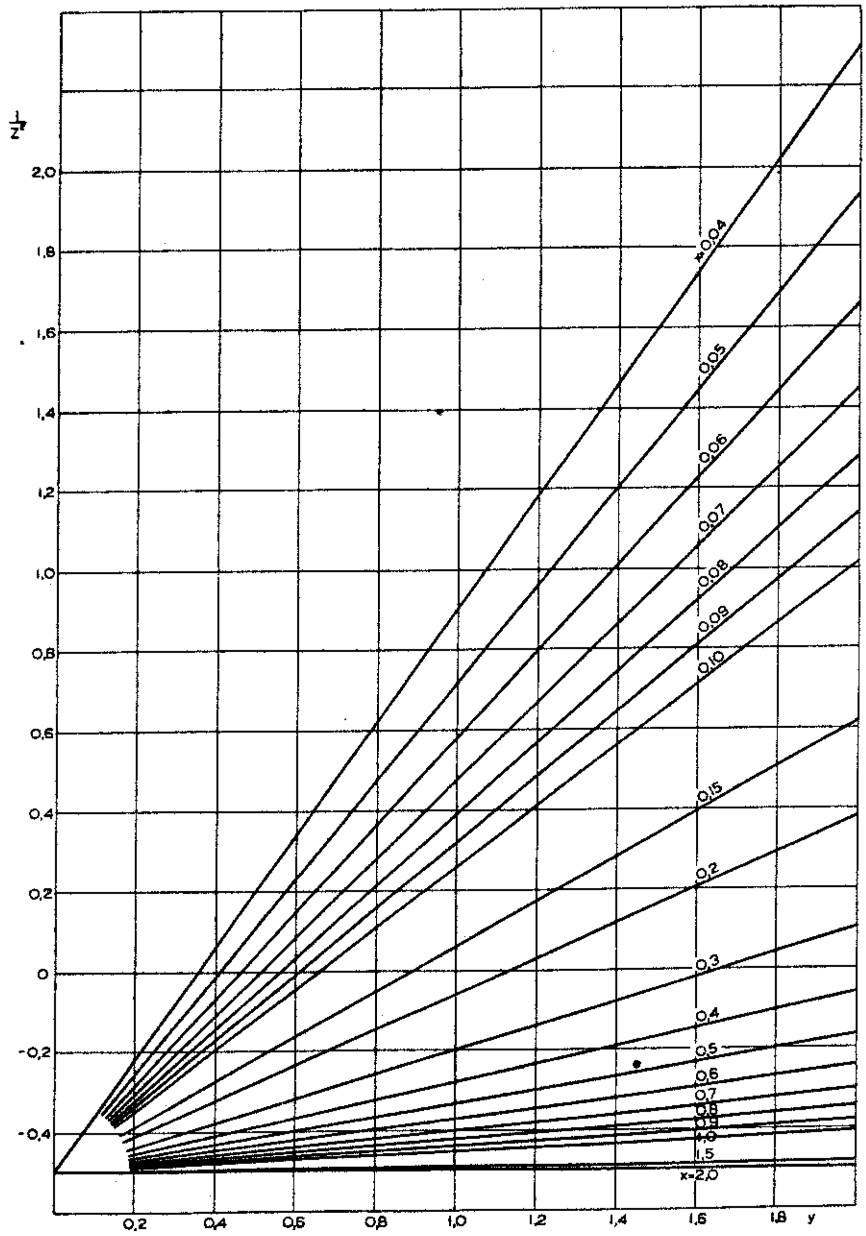


Fig. 2. Verband tusschen y en z voor constante waarden van x ($0,04 \leq x \leq 2$).
Voor beteekenis van x, y en z zie (37).

5. Gebruik van de grafiek.

Hoewel de wijze van gebruik van de grafiek na het bovenstaande wel duidelijk zal zijn, zal deze hier nog in het kort aangegeven worden.

Uit de aerodynamische coëfficiënten en het traagheidsmoment worden de grootheden x en y voor het beschouwde lichaam berekend (zie (37)). Uit de grafiek wordt de daarbij behoorende waarde van $\frac{1}{z^2}$ bepaald, waaruit z en met behulp van (37) de kritische snelheid V_k berekend wordt.

Indien bij de bepaling van x blijkt, dat deze grooter dan 4 is, dan is het lichaam bij iedere sleepsnelheid stabiel, zoodat de berekening van de kritische snelheid achterwege kan blijven.

Moeten vrij veel berekeningen uitgevoerd worden, dan biedt het gebruik van een hulpgrafiek, die het verband tusschen $\frac{1}{z^2}$ en z geeft, voordeelen.

6. *Bijzonderheden.*

Uit de figuur 2 blijkt, dat voor $x = 2$ $\frac{1}{z^2}$ steeds negatief is, welke waarde y ook bezit. Dit beteekent, dat er dan geen kritische snelheid zal bestaan, m.a.w. dat voor $x = 2$ het gesleepte lichaam bij iedere sleepsnelheid stabiel zal zijn, onafhankelijk van de waarde van y. Dat deze uitkomst juist is, blijkt ook wanneer men de waarden van de wortels λ van vergelijking (28) voor dit geval bepaalt. Deze blijken te zijn:

$$\lambda = \pm \frac{V_o \, k_M'}{k_D} \sqrt{\tfrac{1}{2} \left\{ 1 - B \pm \sqrt{(B-1)(B+3)} \right\}}$$

Hierin heeft B de in formule (20) gegeven waarde, waaruit volgt, dat B steeds positief doch kleiner dan 1 is. De onder den tweeden wortel voorkomende vorm is dus steeds negatief, zoodat voor $x = 2$ geen reëele λ-waarden worden gevonden, hetgeen beteekent, dat het gesleepte lichaam bij iedere sleepsnelheid stabiel is.

Uit de grafieken blijkt overigens, dat voor iedere aangenomen waarde van x, kleiner dan 2, steeds $\frac{1}{z^2}$ nul, en daarmede de kritische snelheid oneindig groot gemaakt kan worden door passende keuze van y. Bij grootere y-waarden bestaat dan wel een kritische snelheid, bij kleinere daarentegen zal het lichaam bij alle snelheden stabiel zijn.

Voor waarden van x, kleiner dan 2, neemt $\frac{1}{z^2}$ af, dus de kritische snelheid toe, met grooter wordende x, dus b.v. met toenemende k_D.

Voor waarden van x tusschen 2 en 4 doet zich echter, zooals uit (39) afgeleid kan worden, het omgekeerde verschijnsel voor. De kritische snelheid wordt hier grooter met afnemende x, dus ook met afnemenden dempingscoëfficiënt. Bij de tot nu toe in de praktijk voorkomende gevallen was x steeds veel kleiner dan 2. Indien echter gevallen voorkomen, waarbij de waarde van x boven 2 ligt, is het noodig aan de hier genoemde eigenschap aandacht te besteden, teneinde te voorkomen, dat men wijzigingen aan het lichaam aanbrengt, die de kritische snelheid verlagen inplaats van verhoogen.

RAPPORT V 737.

(Herziene uitgave, Juni 1939)
Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De invloed van de bewegelijkheid van vloeistoffen in de tanks van een vliegtuig op de stuurstandslijnen van de hoogtebesturing.

door

Dr. Ir. H. J. VAN DER MAAS en Ir. A. J. MARX.

RAPPORT V 737.

De invloed van de bewegelijkheid van vloeistoffen in de tanks van een vliegtuig op de stuurstandslijnen van de hoogtebesturing.

Uittreksel.

Wanneer de vloeistoftanks van een vliegtuig slechts gedeeltelijk gevuld zijn, zal een verandering van den standhoek (langshelling) van een vliegtuig een verplaatsing van het zwaartepunt tengevolge hebben. Deze zwaartepuntsverplaatsing kan, afhankelijk van de grootte, den vorm en het aantal vloeistoftanks, een soms niet te verwaarloozen invloed op de stuurstandslijnen van de hoogtebesturing, die een criterium vormen voor de statische langsstabiliteit, uitoefenen.

In dit rapport wordt een methode ter bepaling van dezen invloed gegeven en met een voorbeeld toegelicht.

RAPPORT V 737.

L'influence de la mobilité de la liquide dans les réservoirs d'un avion sur les courbes de position du gouvernail de profondeur.

Sommaire.

Quand les réservoirs d'un avion ne sont remplis que partiellement, un changement de l'inclinaison longitudinale de l'avion effectuera un déplacement du centre de gravité.

L'influence de ce déplacement du centre de gravité sur les courbes de position du gouvernail de profondeur, qui forment un critérium pour la stabilité longitudinale statique, dépend des dimensions, de *la forme* et du *nombre* des *réservoirs*; une considération numérique établit qu'il sera parfois nécessaire de mettre cette influence en ligne de compte.

Ce rapport contient une description d'une méthode de calculation de l'influence susdite, éclaircie par un exemple.

REPORT V 737.

The influence of the mobility of the liquid in the liquid-containers of an airplane on the elevator curves.

Summary.

When liquid-containers of an airplane are only partially filled, a change of the angle of pitch of the airplane will cause a displacement of the centre of gravity.

The influence of this displacement of the centre of gravity on the elevator curves, which form a criterion of the longitudinal static stability depends on the dimensions, the shape and the number of the tanks. A numerical computation shows that this influence cannot always be neglected.

This report contains a description of a method of determining the above mentioned influence, with an explanatory example.

BERICHT V 737.

Der Einflusz der Beweglichkeit von Flüssigkeiten in den Flüssigkeitsbehältern auf die Steuerstands-Kurven der Höhensteuerung.

Auszug.

Wenn die Flüssigkeitsbehälter eines Flugzeuges nur teilweise gefüllt sind, wird eine Aenderung der Längsneigung eine Verschiebung des Schwerpunktes herbeiführen.

Der Einflusz dieser Verschiebung des Schwerpunktes auf die Steuerstandskurven der Höhensteuerung, die ein Kriterium für die statische Längsstabilität bilden, ist von Grösse, Form und Zahl der Behälter abhängig; eine numerische Ueberlegung zeigt, dass man diesen Einflusz nicht immer vernachlässigen darf.

In dieser Abhandlung wird ein Verfahren zur Bestimmung dieses Einfluszes ausgearbeitet und mit einem Beispiel erläutert.

RAPPORT V 737.

(Herziene uitgave, Juni 1939)

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De invloed van de bewegelijkheid van vloeistoffen in de tanks van een vliegtuig op de stuurstandslijnen van de hoogtebesturing.

door

Dr. Ir. H. J. VAN DER MAAS en Ir. A. J. MARX.

Indeeling.

Inleiding.

Indien bij een vliegtuig de vloeistoftanks niet geheel gevuld zijn, zal bij veranderingen van de langshelling het zwaartepunt van de vloeistof, en daarmede het zwaartepunt van het vliegtuig, zich verplaatsen. Deze zwaartepuntsverplaatsingen beinvloeden o.a. de stuurstandslijnen van de hoogtebesturing [1]). In dit rapport zal worden aangegeven hoe de stuurstandslijnen, behoorend bij gedeeltelijk gevulde vloeistoftanks, kunnen worden afgeleid uit de stuurstandslijnen voor geheel gevulde tanks.

De hierbij gevolgde methode kan alsvolgt beschreven worden:

Aangenomen wordt dat de stuurstandslijnen voor 2 verschillende *vaste* zwaartepuntsliggingen (dus bij geheel gevulde vloeistoftanks) door metingen bepaald zijn. Ook het verband tusschen standhoek en stuwsnelheid voor de motorafregeling waarvoor de stuurstandslijn geldt, wordt geacht bekend te zijn.

Nu denkt men zich de vloeistof in de gedeeltelijk gevulde tanks bevroren in den toestand, die bij een bepaalde langshelling Θ_0 optreedt. De index o zal steeds op dezen *uitgangstoestand* duiden.

De stuurstandslijn voor de zwaartepuntsligging die bij de bovenbedoelde bevroren vloeistofvorm optreedt, kan door berekening worden afgeleid uit de beide bekende stuurstandslijnen [2]), waaruit ook de hoogteroercoëfficiënt k als functie van de snelheid kan worden bepaald.

Nu treedt in werkelijkheid bij iedere afwijking van den uitgangstoestand een zwaartepuntsverplaatsing op, zoodat het moment om een vaste dwarsas verandert, vergeleken bij het moment in den uitgangstoestand. Deze verandering kan op grond van het bekende verband tusschen langshelling en snelheid, en den bekenden vorm van de brandstoftanks, worden berekend. Een hernieuwd momentenevenwicht eischt ter compensatie van deze verandering een (kleine) verstelling van het hoogteroer, die met de bekende hoogteroercoëfficiënt eveneens berekend kan worden. Door deze berekening wordt ook de gezochte stuurstandslijn, welke lijn door het momentenevenwicht vastgelegd wordt, bepaald. De bewerking kan worden opgevat als een correctie op de stuurstandslijn behoorende bij den uitgangstoestand.

---

[1]) De stuurstandslijnen van de hoogtebesturing geven het verband tusschen de hoogteroerhoek en de vliegsnelheid in stationnaire vlucht en bij een bepaalde motorafregeling. Zij worden bepaald door het momentenevenwicht om de dwarsas. Hun beteekenis voor de beoordeeling der statische langsstabiliteit van het vliegtuig wordt behandeld in Deel V van de Verslagen en Verhandelingen van den Rijks Studiedienst voor de Luchtvaart.

[2]) Voor de methoden volgens welke deze berekening geschieden kan, wordt verwezen naar de onder [1]) genoemde verhandeling.

Het totaal gewicht in den toestand, waarbij de beide stuurstandslijnen behooren waarvan de berekening uitgaat, moet gelijk zijn aan het gewicht dat bij de gedeeltelijk gevulde tanks optreedt, daar in dit rapport de invloed van gewichtsveranderingen, *bij vaste zwaartepuntsligging*, op de stuurstandslijnen buiten beschouwing gelaten wordt.

Notaties.

Θ = langshelling (hoek tusschen vleugelkoorde en horizontaal),
c_m = momentencoëfficiënt van het vliegtuig zonder horizontale staartvlakken,
c_{ms} = momentencoëfficiënt van de horizontale staartvlakken bij verstard gedachte vloeistof,
c'_{ms} = momentencoëfficiënt van de horizontale staartvlakken bij vrij vloeistofoppervlak,
q = stuwdruk,
F = vleugeloppervlak,
t = koorde,
V = vloeistofvolume,
γ = soortelijk gewicht van de vloeistof,
m = metacenterhoogte,
w = horizontale component van de verplaatsing van het vloeistofzwaartepunt bij een verandering van de langshelling,
I = traagheidsmoment van het vloeistofoppervlak t.o.v. de lijn door het zwaartepunt van den vloeistofspiegel, loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig,
β = *hoek tusschen hoogteroer en stabilo bij verstarde vloeistof,*
β' = ,, ,, ,, ,, ,, ,, bewegelijke vloeistof met vrij oppervlak,
α_s = invalshoek van de strooming aan het stabilo,
k = hoogteroercoëfficiënt,
f = oppervlak van de horizontale staartvlakken,
l = horizontale afstand van het hart van de roeras tot het zwaartepunt van het vliegtuig.

Teekenregels.

Θ is positief in stijgstanden,
w ,, ,, bij zwaartepuntsverplaatsingen naar *achter*,
β, β' zijn ,, ,, roeruitslagen naar *beneden*,
momenten ,, ,, wanneer zij *staartlastig* zijn.

Beschouwing.

Het momentenevenwicht om de dwarsas eischt dat in den uitgangstoestand:

$$c_{m_o} \cdot q_o \cdot Ft + c_{ms_o} \cdot q_o \cdot Ft = 0$$

waarbij dus ondersteld is, dat de momentencoëfficiënten de *momenten t.o.v. het zwaartepunt* van het vliegtuig geven, en dat zij door deeling door *vleugel*oppervlak x *vleugel*koorde dimensieloos gemaakt zijn. Gaat men van den door de index o gekarakteriseerden stationnairen toestand over naar een anderen statonnairen toestand 1, dan geldt wanneer de vloeistof in de tanks als star beschouwd wordt:

$$c_{m_1} \cdot q_1 \cdot Ft + c_{ms_1} \cdot q_1 \cdot Ft = 0 \tag{1}$$

De bij de toestanden o en 1 optredende langshellingen zijn resp. Θ_o en Θ_1. Wanneer de vloeistof echter *niet verstard is*, zal het vloeistofniveau zich tengevolge van de langshellingverandering $\Theta_1 - \Theta_o$ wijzigen, waarbij het vloeistofzwaartepunt zich zal verplaatsen. Dientengevolge treedt een extra moment op van de grootte γVw, zoodat wanneer een vrij vloeistofoppervlak aanwezig is geldt:

$$c_{m_1} \cdot q_1 \cdot Ft + c'_{ms_1} \cdot q_1 \cdot Ft + \gamma Vw = 0 \tag{1a}$$

Uit (1) en (1a) volgt:

$$c_{ms_1} - c'_{ms_1} = \frac{\gamma Vw}{q_1 Ft} \tag{2}$$

Nu kan in het algemeen voor de coëfficiënt c_{ms} geschreven worden:

$$c_{ms} = -c_1 (\alpha_s + c_2 \beta) \cdot \frac{f\,l}{Ft}$$

waarin c_1 en c_2 bij benadering constant en positief zijn.
In het gegeven geval is α_s constant, zoodat invulling in (2) het navolgende resultaat geeft:

$$c_1 c_2 (\beta' - \beta) = \frac{\gamma V}{q_1 f l} \cdot w$$

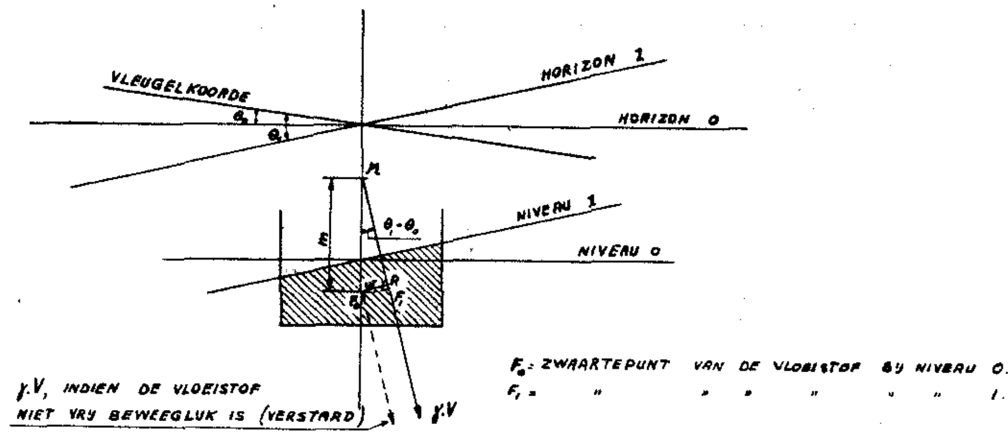


Fig. 1. De verplaatsing van het zwaartepunt van de vloeistof in een gedeeltelijk gevulde tank bij een verandering van de helling van het vliegtuig.

of, volgens fig. 1 daar $c_1c_2 = k$:

$$\Delta\beta = \frac{\gamma V}{kq_1 fl} \cdot m \sin(\Theta_1 - \Theta_0)$$

Hierin is $\Delta\beta$ de door de verplaatsing van het zwaartepunt van de vloeistof noodzakelijk geworden verandering van den roerhoek, en m de ware metacenterhoogte.

Deze vergelijking stelt ons in staat, de stuurstandslijn voor een toestand, waarin een vrij bewegelijk vloeistof-oppervlak optreedt af te leiden uit een „normale" stuurstandslijn behoorend bij een toestand met onbewegelijke vloeistofoppervlakken. Het gewicht en de zwaartepuntsligging waarbij deze laatste stuurstandslijn behoort dienen echter overeen te komen met gewicht en zwaartepuntsligging in een uitgangstoestand met langshelling Θ_0 met vrij vloeistofoppervlak.

Bepaling van m.

Het punt M in fig. 1, waar de werklijnen van het vloeistofgewicht bij twee verschillende hellingen van de tank elkaar snijden, wordt metacenter genoemd.

De afstand $m = M F_0$, waarbij F_0 het zwaartepunt van de vloeistof in een door de index o te karakteriseeren uitgangstoestand is, is de metacenterhoogte.

In het algemeen verplaatst het punt M zich bij veranderingen van de helling. Maakt men den hoek Θ gemeten t.o.v. den uitgangstoestand nu steeds kleiner, dan nadert M tot een bepaalde limiet M_0. Men noemt M_0 het „ware metacenter" en $m_0 = M_0F_0$ de „ware metacenterhoogte" behoorend bij de toestand o.

De meetkundige plaats der ware metacenters voor verschillende langshellingen is de metacenterkromme.

Volgens een bekende stelling uit de hydrostatica geldt:

$$m_0 = \frac{I_0}{V} \tag{3}$$

waarin I_0 het traagheidsmoment is — voor den uitgangstoestand — van de vloeistofoppervlakte t.o.v. de lijn door het zwaartepunt van de vloeistofspiegel loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig.

Voor eenige veel voorkomende tankvormen kan de waarde van m voor eindige waarden van $\Theta_1 - \Theta_0$ uit de waarde van m_0 berekend worden.

a. Rechte cylindrische tank met cirkelvormige doorsnede en de as loodrecht op het symmetrievlak. Vanzelfsprekend is hierbij steeds, onafhankelijk van de hoeveelheid vloeistof:

$$m = m_0 \tag{4}$$

b. Rechthoekige tank met hoeklijnen evenwijdig aan en loodrecht op het symmetrievlak (fig. 2).

$$m = m_0\left(1 + \frac{tg^2(\Theta_1 - \Theta_0)}{2}\right) \tag{4a}$$

Deze formule geldt slechts zoolang het vloeistof niveau de ribben A of B niet bereikt.

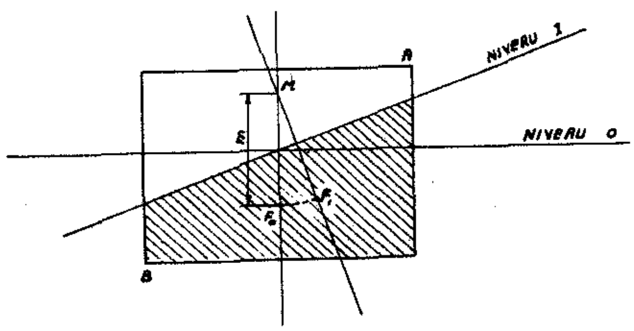


Fig. 2. Zwaartepuntsverplaatsing bij rechthoekige tanks.

c. Rechte cylindrische tank met elliptische of cylindrische doorsnede, waarvan de as evenwijdig aan het symmetrievlak verloopt en de eindvlakken platte of nagenoeg platte vlakken zijn (fig. 3).

$$m = m_0\left(1 + \frac{tg^2(\Theta_1 - \Theta_0)}{2}\right) \tag{4b}$$

Ook deze formule geldt alleen zoolang het vloeistofniveau niet verder komt dan één der punten A of B.

Bereikt de vloeistof voor de gevallen onder b en c genoemd wel de hoekpunten van de tank, dan zijn de formules (4) niet meer geldig, zij leveren dan te groote uitkomsten. Wanneer dit het geval is, en ook wanneer de tanks niet de hiervoor aangegeven eenvoudige vormen hebben, moet m, vaak voor iedere helling apart, door berekening worden bepaald. Hiervoor dient vanzelfsprekend de vorm van de tank en de stand t.o.v. de vleugelkoorde *nauwkeurig bekend te zijn.*

Bij aanwezigheid van meerdere tanks, a, b, c, etc., wordt de waarde van m:

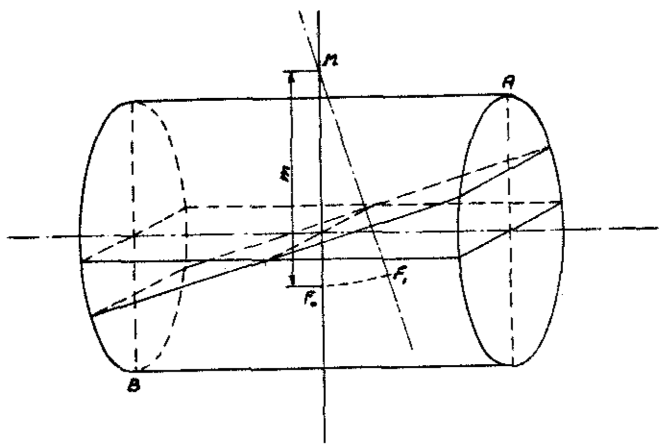


Fig. 3. Zwaartepuntsverplaatsing bij cylindrische tanks.

$$m = \frac{m_a \gamma V_a + m_b \gamma V_b + \ldots\ldots\ldots}{\gamma V_a + \gamma V_b + \ldots\ldots\ldots} \qquad (7)$$

De invloed van een bepaald vloeistofvolume wordt kleiner wanneer de tanks door schotten in kleinere afdeelingen worden verdeeld.

Voorbeeld.

Het hieronder volgende voorbeeld heeft betrekking op een willekeurig vliegtuig, uitgerust met 4 brandstoftanks *van normale afmetingen en is dus geenszins een illustratie van een* extreem geval.

De stuurstandslijn voor een zwaartepuntsligging van 28,8% van de grootste koorde wordt aangenomen bepaald te zijn bij geheel gevulde tanks, dus bij vaste vloeistofoppervlakken. Aangenomen is verder, dat bij den hellinghoek $\Theta_0 = 0{,}6^\circ$ ($V_q = 276^5$ km/h) met half gevulde tanks de zwaartepuntsligging eveneens 28,8% *bedraagt en de vloeistofspiegel juist evenwijdig aan de as van de tanks* is gericht (zie fig. 3).

De 4 tanks zijn cylindrisch en de assen loopen evenwijdig aan het symmetrievlak van het vliegtuig (formule 4b). De tanks zijn alle van gelijke grootte, zoodat voor m de voor 1 tank geldende waarde kan worden aangenomen. Het grootste hoekverschil bedraagt 14,4°. Er bestaat geen gevaar, dat de vloeistof de hoekpunten van de tank zal bereiken.

De berekening van de stuurstandslijn voor dezen toestand is uitgevoerd *in tabel* 1 *en* het resultaat is in fig. 4 aangegeven. Men ziet, dat de invloed in dit geval gering is. De stuurstandslijn verdraait iets in onstabielen zin.

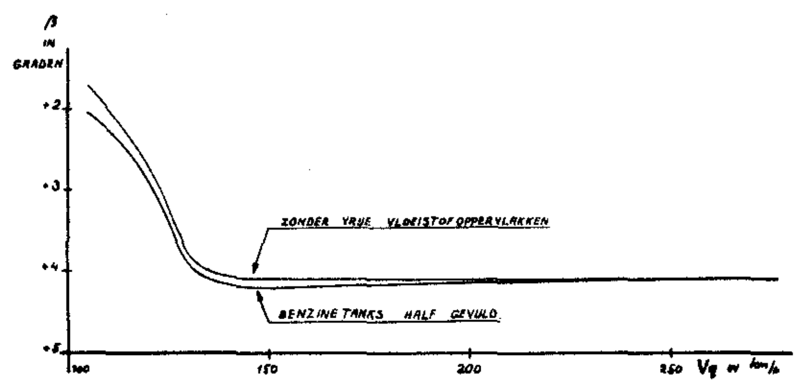


Fig. 4. Stuurstandslijnen bij geheel en bij gedeeltelijk gevulde benzinetanks.

TABEL 1

Aantal tanks:	4 (cylindrisch),
Afmetingen per tank:	Diam. = 0,834 m; Lengte = 1,53 m,
Stand tanks:	As evenwijdig aan symmetrievlak,
Hoeveelheid vloeistof per tank:	0,42 m^3 (half gevuld),

$$I_o = \frac{1}{12} \cdot 1{,}53^3 \cdot 0{,}834 = 0{,}25 \text{ m}^4$$

$$m_o = \frac{0{,}25}{0{,}42} = 0{,}59 \text{ m}$$

$$\gamma V = 4 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}77 \cdot 10^3 = 1290 \text{ kg}$$

$$fl = 336 \text{ m}^3$$

$$\frac{\gamma V\, m_o}{fl} = 2{,}26 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \qquad \Theta_o = +0{,}6^\circ$$

$$\Delta\beta = \frac{2{,}26}{Kq}\left(1 + \frac{tg^2(\Theta_1 - \Theta_o)}{2}\right) \sin(\Theta_1 - \Theta_o)$$

V_q km/h	Θ graden	$\Theta_1 - \Theta_o$ graden	k	q kg/m^2	β gemeten graden	$\Delta\beta$ graden	β' graden
105	+ 14,4	+ 13,8	0,032	53	+ 1,7	+ 0,33	+ 2,03
114	+ 13,5	+ 12,9	0,038	63	+ $2{,}2^5$	+ 0,21	+ 2,46
122	+ 12,2	+ 11,6	0,040	72	+ 3,0	+ 0,16	+ 3,16
132^5	+ 11,0	+ 10,4	0,034	84	+ 3,9	+ 0,14	+ 4,04
142^5	+ 9,9	+ 9,3	0,031	98	+ 4,1	+ 0,12	+ 4,22
157^5	+ 8,8	+ 8,2	0,027	119	+ 4,1	+ 0,10	+ 4,20
176	+ 7,4	+ 6,8	0,026	149	+ 4,1	+ 0,07	+ 4,17
202^5	+ 6,2	+ 5,6	0,023	197	+ 4,1	+ 0,05	+ 4,15
231	+ 3,6	+ 3,0	0,017	256	+ 4,1	+ 0,03	+ 4,13
260^5	+ 1,4	+ 0,8	0,016	328	+ 4,1	0	+ 4,1
276^5	+ 0,6	0			+ 4,1	0	+ 4,1

1) N.B. De in deze tabel opgenomen snelheid V_q is de *stuw*snelheid van het vliegtuig, d.w.z.: $V_q = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_o}}$, waarin ϱ_o de luchtdichtheid op 0 m hoogte in de standaardatmosfeer is.

RAPPORT V 1165.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De ijking van stuwdruksnelheidsmeters van vliegtuigen en de herleiding hunner aanwijzing naar werkelijke snelheid.

door

Ir. S. WYNIA en Ir. A. J. MARX.

RAPPORT V 1165.

De ijking van stuwdruksnelheidsmeters van vliegtuigen en de herleiding hunner aanwijzing naar werkelijke snelheid.

Samenvatting.

Daar de stuwdruk in een stationnaire vlucht niet uitsluitend van de vliegsnelheid afhangt, kan de schaal van een als snelheidsmeter uitgevoerde stuwdrukmeter niet zóó ingericht worden, dat hij steeds de werkelijke vliegsnelheid t.o.v. de omringende lucht aanwijst. In deze verhandeling wordt nagegaan hoe de werkelijke snelheid uit de snelheidsmeteraanwijzing afgeleid kan worden onder inachtname van de samendrukbaarheid van de lucht. Om deze herleiding te kunnen uitvoeren moeten bovendien de statische druk en de temperatuur van de omringende lucht bekend zijn.

Fig. 4 bevat het resultaat dezer beschouwing in voor geregelde praktische toepassing geschikten vorm, en in de onderstelling dat de schaalindeeling van den snelheidsmeter zoodanig is dat zij, wanneer gevlogen wordt in lucht van 760 mm Hg druk en een temperatuur van 15° C. (dit zijn de op nul meter hoogte in de standaardatmosfeer optredende omstandigheden), afgezien van meetfouten, de werkelijke vliegsnelheid aanwijst.

Een analoge uitwerking wordt in fig. 5 gegeven, voor het geval dat de schaal van den snelheidsmeter de tegenwoordig minder gebruikelijke indeeling vertoont, die uit de formule $V_a' = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_0}}$ volgt. De snelheid die uit deze formule volgt heeft alleen dan een directe beteekenis, wanneer zij zoo klein is dat de invloed van de samendrukbaarheid van de lucht te verwaarloozen is.

RAPPORT V 1165.

L'étalonnement des indicateurs de vitesse des avions et la réduction de leur indication à la vitesse réelle.

Résumé.

Vu que la pression dynamique en vol stationnaire ne dépend pas exclusivement de la vitesse de vol, il est impossible de diviser l'échelle d'un indicateur de pression dynamique, utilisé comme indicateur de vitesse, tellement que l'indication soit toujours conforme à la vitesse réelle.

Dans cet essai on montre comment la vitesse réelle est déduite de la vitesse indiquée, tenant compte de la compressibilité de l'air. Pour effectuer la dérivation il est nécessaire qu'en oûtre la pression statique et la température soient connues.

Le résultat des calculations est résumé dans la fig. 4 dans une forme appropriée à l'application pratique, et valable pour les indicateurs de vitesse dont l'échelle est divisé tellement que l'indication-sauf les erreurs instrumentales- est celle de la vitesse réelle quand la pression statique de l'air est 760 mm Hg et la température 15° C. (c.à.d. dans les conditions de l'atmosphère-type à l'altitude zéro).

Les résultats d'une calculation analogue sont résumés dans la figure 5 pour le cas moins usuel que l'échelle de l'indicateur de vitesse est basée sur la formule $V_a' = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_0}}$. La vitesse trouvée par cette formule a seulement une signification directe quand elle est tellement petite que les effects de la compressibilité de l'air sont négligeables.

REPORT V 1165.

The calibration of airspeed indicators for airplanes and the reduction of their indication to real airspeed.

Summary.

As the impact pressure in a stationary flight does not depend exclusively on the airspeed, the scale of an airspeed-indicator measuring impact-pressure cannot be divided in such a way that the instrument always indicates real airspeeds. In this report the derivation of real airspeed from indicated airspeed has been studied, taking into account the effects of the compressibility of the air. For this derivation static pressure and temperature must moreover be known.

Fig. 4 presents the results of these calculations in a form suitable for practical application, and for airspeed indicators with a scale-division giving real airspeeds (safe instrumental errors) if the static pressure of the air is 760 mm Hg and the temperature 15° C. (Conditions on zero altitude in standard atmosphere).

In fig. 5 analogous results have been given for the now less usual case, that the scale division of the airspeed indicator is based on the formula $V_a' = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_0}}$. The speed following from this formula has only a direct significance when so small that the compressibility effects may be neglected.

BERICHT V 1165.

Die Eichung von Staudruckgeschwindigkeitsmessern für Flugzeuge und die Reduktion ihrer Anzeige zur wirklichen Geschwindigkeit.

Zusammenfassung.

Weil der Staudruck im stationnären Flug nicht ausschlieszlich von der Fluggeschwindigkeit abhängt, kann die Skala von einem als Geschwindigkeitsmesser ausgeführten Staudruckmesser nicht so eingeteilt werden, dasz immer die wirkliche Geschwindigkeit bezüglich der Luft angezeigt wird. In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, wie die wirkliche Geschwindigkeit aus der Anzeige des Geschwindigkeitsmessers abgeleitet werden kann wenn auch auf die Zusammendrückbarkeit der Luft Rücksicht genommen wird. Um diese Umrechnung ausführen zu können, müssen auch der statische Druck und die Temperatur bekannt sein.

Fig. 4 enthält das Ergebnis dieser Rechnung in gebrauchsfertiger Form, unter die Voraussetzung dasz die Skalaeinteilung des Geschwindigkeitsmessers derart ausgeführt worden ist, dasz in Luft von 760 mm Hg Druck und 15° C. Temperatur (das sind die in 0 m Höhe in der Normatmosphäre auftretende Umstände) — von instrumentelle Fehlern abgesehen — genau um die wirkliche Geschwindigkeit angezeigt wird.

Eine ähnliche Ableitung wird in Fig. 5 gegeben für den gegenwärtig wenig gebräuchlichen Fall, dasz die Skala des Geschwindigkeitsmessers festgelegt wird durch die Formel $V_a' = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_0}}$. In diesem Fall hat die angezeigte Geschwindigkeit nur eine direkte Bedeutung, wenn sie so klein ist, dasz der Einflusz der Zusammendrückbarkeit der Luft vernachlässigt werden darf.

RAPPORT V 1165.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De ijking van stuwdruksnelheidsmeters van vliegtuigen en de herleiding hunner aanwijzing naar werkelijke snelheid.

door

Ir. S. WYNIA en Ir. A. J. MARX.

Inhoud.

Notaties.

V = snelheid,
q = stuwdruk,
ϱ = luchtdichtheid,
p = statische druk,
Θ = temperatuur in °C.
T = absolute temperatuur,
v = soortelijk volume,
$R = \frac{p}{g\varrho T}$ = gasconstante,
g = zwaartekrachtsversnelling,
$k = \frac{\text{soort. warmte bij constanten druk}}{\text{soort. warmte bij constant volume}}$
$\mu = \frac{k-1}{k}$
c = geluidssnelheid,
H_p = *standaarddrukhoogte*,

ϱ_0, p_0 en T_0 zijn de waarden die ϱ, p en T vertoonen op nul meter hoogte in de standaardatmosfeer. D.w.z.: $p_0 = 760$ mm Hg, $\varrho_0 = 0{,}125\ \frac{\text{kgsec}^2}{\text{m}^4}$, $T_0 = 288°$ K.

1. *Inleiding.*

De snelheid van een vliegtuig wordt in den regel bepaald door meting van den stuwdruk, den statischen druk en de temperatuur. Uit deze metingen kan de snelheid n.l. met behulp van door de theorie der gasstroomingen geleverde formules worden *afgeleid*. De nauwkeurigheid die op deze manier kan worden bereikt wordt beperkt door de hier verder buiten beschouwing blijvende meetnauwkeurigheid en door de beperkte geldigheid van de theorie. De door de laatste omstandigheid veroorzaakte fouten zijn slechts zeer klein, wanneer de tamelijk gecompliceerde formules worden gebruikt, die de theorie voor samendrukbare middenstoffen levert. Verwaarloost men echter de samendrukbaarheid van de lucht, dan verkrijgt men wel eenvoudige, maar slechts bij benadering geldige formules. De benadering is goed zoolang de vliegsnelheid klein is, wordt echter steeds slechter naarmate de snelheid toeneemt. Bij een snelheid van 300 km/h bedraagt de fout b.v. ca. ¾%, bij 500 km/h ca. 2%, hetgeen in vele gevallen onbevredigend is. Men is dan dus gedwongen, de herleiding op de eerstbedoelde meer ingewikkelde, doch practisch exacte formules te baseeren. Hiervoor kan, ter vermijding van tijdroovend rekenwerk, gedeeltelijk van grafieken gebruik gemaakt worden. Zoowel de formules als een nog niet elders gepubliceerde en speciaal voor geregelde praktische toepassing ontwikkelde gedeeltelijk grafische herleidingsmethode zullen in deze verhandeling medegedeeld worden.

De schaal van de stuwdrukmeters, die in vliegtuigen gebruikt worden, is — ook al hangt de snelheid mede van den statischen druk en van de temperatuur af — steeds in snelheidsmaat uitgevoerd.

Daarom moet, om de werkelijke snelheid uit de aanwijzing te kunnen afleiden, ook bekend zijn hoe deze snelheidsschaal verkregen is. Tegenwoordig geschiedt dat zoo, dat gezorgd wordt dat het instrument op nul meter hoogte in de standaardatmosfeer (dus voor één bepaald stel waarden van den statischen druk en de temperatuur), afgezien van meetfouten, exact de werkelijke snelheid aanwijst. Vroeger echter werd de schaalverdeeling vaak gebaseerd op de benaderingsformules die voor niet-samendrukbare middenstoffen gelden, een methode die vooral bij hooge snelheden niet zoo geschikt is, daar de aangewezen snelheid dan strikt genomen geen directe beteekenis heeft. In deze verhandeling wordt aangenomen dat de schaalindeeling van den snelheidsmeter volgens de eerst bedoelde tegenwoordig gebruikelijke manier geschiedde, echter zal ook voor de tweede, als verouderd te beschouwen manier een correctiemethode voor de aanwijzing van het instrument opgenomen worden. [1])

2. *Algemeene beschouwingen.*

21. *Grondformules.*

Wanneer wordt aangenomen dat:

a. het medium de eigenschappen bezit van een ideaal gas met gering warmtegeleidingsvermogen,
b. de strooming stationnair en rotatievrij is en de invloed van de viscositeit van het medium verwaarloosd mag worden,

dan geldt voor twee willekeurige punten van een horizontale stroombuis in een overigens willekeurig stroomingsveld de wet van Bernoulli:

$$\tfrac{1}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\varrho} = 0 \qquad (1)\ [2])$$

en de gaswet

$$pv^k = \text{const.} \qquad (2)$$

Neemt men het punt 1 in de ongestoorde strooming en het punt 2 in een stuwpunt, d.i. een punt, waarin de stroomsnelheid nul is ($V_2 = 0$), dan vindt men uit (1) en (2) na uitvoering der integratie en oplossing naar $V_1 \equiv V$, de steeds te gebruiken afkorting $\frac{k-1}{k} = \mu$ invoerend:

$$V = \sqrt{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{2p}{\varrho}\cdot\left[\left(1+\frac{q}{p}\right)^{\mu} - 1\right]} \qquad (3)$$

Opgelost naar den stuwdruk q ($= p_2 - p_1$), geeft dit: x)

$$q = p\left[\left(\frac{\varrho}{2p}\cdot\mu\cdot V^2 + 1\right)^{1/\mu} - 1\right] \qquad (4)$$

Dit zijn de vrij gecompliceerde grondformules voor het verband tusschen de werkelijke snelheid V, den stuwdruk q, den statischen druk p en de dichtheid ϱ, waarop de snelheidsbepaling berusten moet.

22. *Reeksontwikkelingen.*

De beide betrekkingen (3) en (4) kunnen in reeksen ontwikkeld worden. Deze luiden, in den voor atmosferische lucht geldigen vorm [3])

$$(k = 1{,}4\ [4])\ ;\ \text{dus}\ \mu = \frac{k-1}{k} \sim 0{,}286)$$

$$V = \sqrt{\frac{2q}{\varrho}}\left[1 - 0{,}179\frac{q}{p} + 0{,}0861\frac{q^2}{p^2} - \ldots\ldots\right] \qquad (5)$$

en

$$q = \tfrac{1}{2}\varrho V^2\left[1 + \frac{1}{4}\frac{V^2}{c^2} + \frac{2-k}{24}\cdot\frac{V^4}{c^4} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\varrho V^2\left[1 + 6{,}22.10^{-4}\cdot\frac{V^2}{T} + 1{,}55.10^{-7}\frac{V^4}{T^2} + \ldots\ldots\right] \qquad (6)$$

In de 2e reeks is $c = \sqrt{k.gRT}$ de geluidsnelheid, en moeten de eenheden van het kg-m-sec stelsel gebruikt worden.

---

[1]) Om verwarring uit te sluiten zijn de betreffende deelen van deze verhandeling met een kleiner lettertype gedrukt.

[2]) Deze formule volgt direct uit de grondvergelijking:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \varrho\frac{dV}{dt} = \varrho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\right) = (\text{volgens de onderstelling b})\,\varrho V\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\varrho}{2}\frac{\partial V^2}{\partial s}$$

waarin ∂s een lengte-element van de stroombuis is.

[3]) Zie voor de afleiding van deze reeksen N.L.L.-rapport V 1136 „De herleiding van de aanwijzing van stuwdruksnelheidsmeters naar werkelijke snelheid met inachtname van de samendrukbaarheid van de lucht".

[4]) Zie het N.L.L.-rapport V 885 „Standaardwaarden".

x) In latere jaren is de stuwdruk gedefinieerd als $\frac{1}{2}\rho V^2$, dus niet als de drukverhoging in een stuwpunt

Neemt men in beide reeksen alléén de eerste term in aanmerking dan verkrijgt men de bekende eenvoudige voor niet-samendrukbare middenstoffen exact geldige formules

$$V = \sqrt{\frac{2q}{\varrho}} \text{ en } q = \tfrac{1}{2}\varrho V^2 \tag{7}$$

Wanneer alle termen behalve de beide eerste worden verwaarloosd dan onstaat:

—in (5) voor $\frac{q}{p} < 0{,}16$ een fout δV in V, die kleiner is dan 0,2% van V.

Op een standaarddrukhoogte H van 8000 m wordt $\frac{q}{p} = 0{,}16$ voor V = 520 km/h, voor kleinere hoogten wordt de bijbehoorende waarde van V grooter.

—in (6) voor $\frac{V^2}{T} < 150 \frac{m^2}{sec^2\,{}^\circ K}$ een fout δq in q die kleiner is dan 0,4% van q. Bij een temperatuur van —27° C. (8000 m hoogte in den standaard-atmosfeer) is $\frac{V^2}{T} = 150 \frac{m^2}{sec^2\,{}^\circ K}$ voor V = 680 km/h. Voor hoogere temperaturen wordt ook de bijbehoorende waarde van V grooter.

Worden alle termen behalve de 3 eerste verwaarloosd, dan ontstaan de voornoemde fouten

—in (5) eerst bij $\frac{q}{p} < 0{,}34$, d.w.z. voor H = 8000 m bij V = 750 km/h.

—in (6) „ „ $\frac{V^2}{T} < 180 \frac{m^2}{sec^2\,{}^\circ K}$, d.w.z. voor een temperatuur van —27° C. bij V = 740 km/h.

In deze verhandeling worden deze reeksen verder niet gebruikt. Alle berekeningen zullen met behulp van de volledige formules uitgevoerd worden.

23. Grafieken voor V en q.

Stelt men
$$\sqrt{\frac{2q}{\varrho}} = V_i \tag{8}$$
dan is:
$$\frac{V}{V_i} = \sqrt{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{p}{q} \cdot \left[\left(1+\frac{q}{p}\right)^{\mu} - 1\right]}$$

$\frac{V}{V_i}$ hangt dus uitsluitend van $\frac{q}{p}$ af; fig. 1 geeft het met bovenstaande formule berekende verband grafisch weer. Bepaalt men $\frac{V}{V_i}$ met behulp van deze grafiek uit de metingen van q en p, dan is

$$V = \left(\frac{V}{V_i}\right) \cdot \sqrt{\frac{2q}{\varrho}}$$

De bepaling van ϱ eischt bovendien een temperatuursmeting (T).

Volgens (7) zou $V_i = V$ zijn, wanneer de samendrukbaarheid van de lucht verwaarloosd mocht worden.

Stelt men $\tfrac{1}{2}\varrho V^2 = q_i$ (9)
dan is volgens (4)

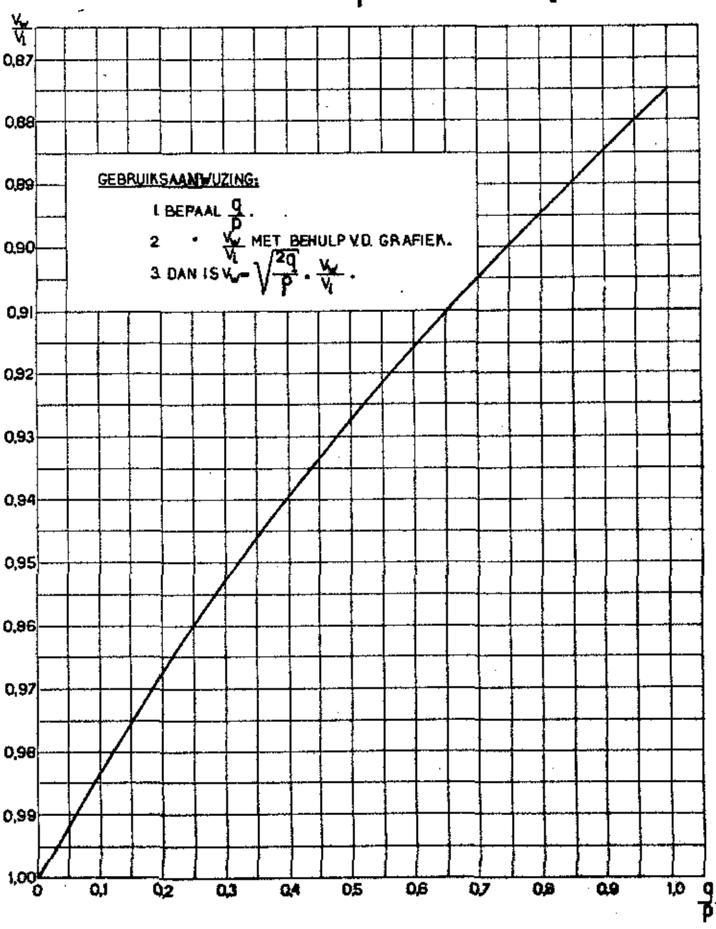
$$\frac{q}{q_i} = \frac{2p}{\varrho V^2}\left[\left(\frac{\varrho V^2}{2p} \cdot \mu + 1\right)^{1/\mu} - 1\right]$$

$\frac{q}{q_i}$ hangt dus uitsluitend van $\frac{2p}{\varrho V^2} = 2gR\frac{T}{V^2}$ [1]), dus van $\frac{V^2}{T}$ af.

Fig. 2 geeft dit verband grafisch weer. Bepaalt men $\frac{q}{q_i}$ met deze grafiek uit de snelheid *en de temperatuur*, dan is

$$q = \left(\frac{q}{q_i}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\varrho V^2$$

Fig. 1. GRAFIEK VOOR DE AFLEIDING VAN DE WERKELIJKE SNELHEID V_w UIT DEN STUWDRUK q BIJ DE DICHTHEID ρ EN DEN DRUK p.

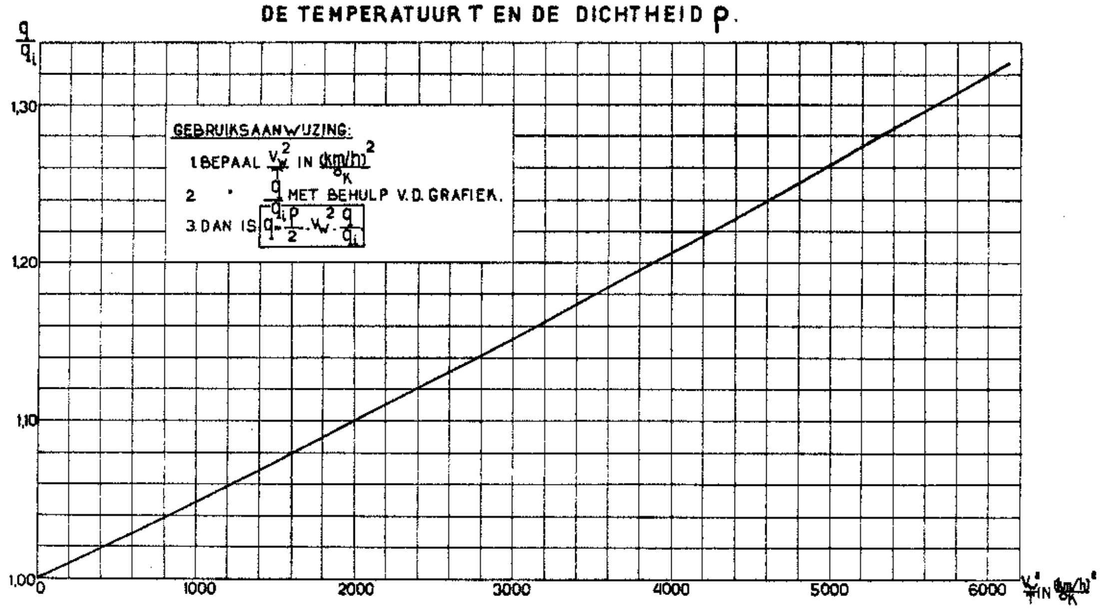


---

1) Hier wordt de toestandsvergelijking van ideale gassen in den vorm $p = g\varrho RT$ gebruikt.

De bepaling van ϱ eischt nu bovendien een drukmeting (p). Volgens (7) zou $q_i = q$ zijn wanneer de samendrukbaarheid van de lucht verwaarloosd mocht worden.

Fig. 2. BEPALING VAN DEN STUWDRUK q UIT DE WERKELIJKE SNELHEID V_w, DE TEMPERATUUR T EN DE DICHTHEID ρ.



3. *De schaalindeeling van vliegtuigsnelheidsmeters en herleiding der aanwijzingen.*

31. *Schaalindeeling van vliegtuigsnelheidsmeters.*

Een vliegtuigsnelheidsmeter, aangesloten op een stuwbuis en een statische buis, is in beginsel een stuwdrukmeter voorzien van een snelheidsschaal. Daar echter het verband tusschen de snelheid V en den stuwdruk q volgens (3) en (4) bovendien van p en ϱ, dus van p en T afhangt, zal de snelheidsmeteraanwijzing alléén voor bepaalde waarden van den (statischen) druk p en de temperatuur T, gelijk kunnen zijn aan de werkelijke vliegsnelheid V (waarvoor in dit hoofdstuk verder V_w geschreven zal worden om duidelijk aan te geven dat de *werkelijke* snelheid wordt bedoeld).

Zooals reeds in de inleiding vermeld is, wordt de schaal tegenwoordig zóó ingedeeld, dat de aanwijzing op nul meter hoogte in de standaard-atmosfeer, dus voor $p = p_o$, en $T = T_o$ (dus ook $\varrho = \varrho_o$), met V_w overeenkomt. Onder hiervan afwijkende omstandigheden zal V_w door een herleiding uit de aangewezen snelheid moeten worden afgeleid.

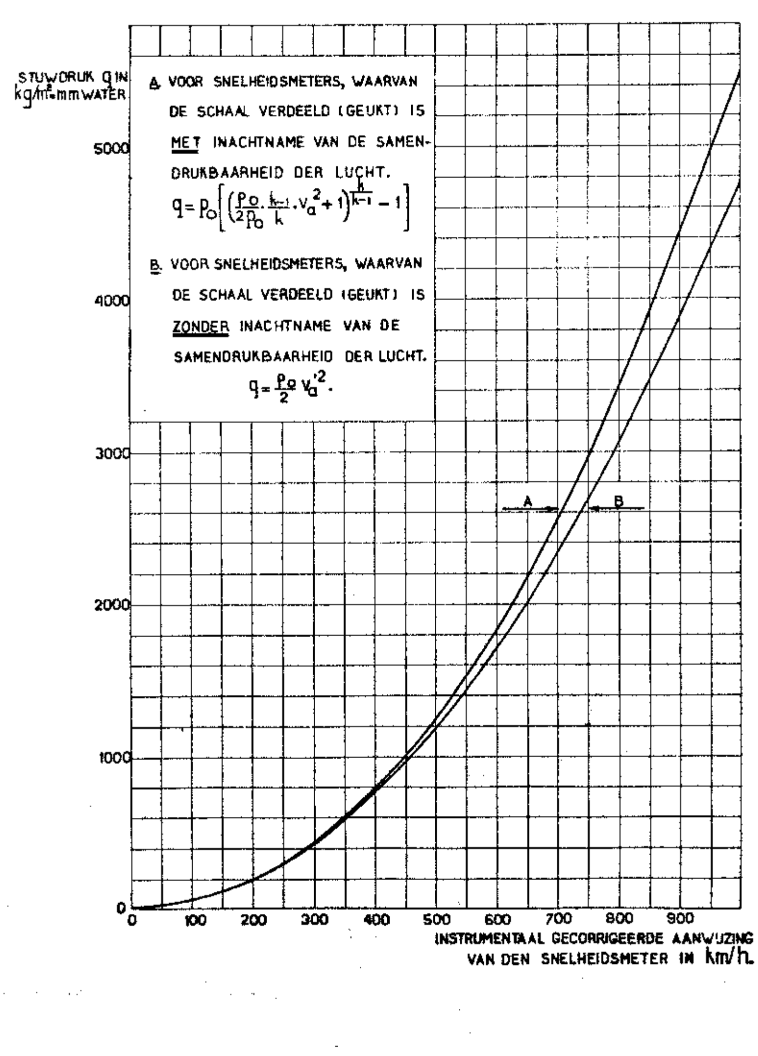
32. *Het verband tusschen den stuwdruk en de snelheidsmeteraanwijzing.*

Het verband tusschen druk q en aangewezen snelheid V_a, dat de schaalindeeling van snelheidsmeters bepaalt, luidt in verband met het onder 31 medegedeelde volgens (4)

$$q = p_o \left[\left(\frac{\varrho_o}{2 p_o} \cdot \mu \cdot V_a^2 + 1 \right)^{1/\mu} - 1 \right] \quad (10)$$

Fig. 3 geeft dit verband tusschen q en V_a grafisch weer, terwijl tabel 1 hiervoor enkele getallen geeft.

Fig. 3. VERBAND TUSSCHEN DE INSTRUMENTAAL GECORRIGEERDE AANWIJZING VAN DEN SNELHEIDSMETER EN DEN STUWDRUK q.



Wanneer de schaalindeeling van den snelheidsmeter volgens de oudere methode onder verwaarloozing van de samendrukbaarheid van de lucht geschiedde, bestaat tusschen den stuwdruk en de aanwijzing de navolgende betrekking:

$$q = \tfrac{1}{2}\,\varrho_0\,V_a'^{\,2} \tag{11}$$

welk verband in fig. 3 mede aangegeven is. Aan V_a' is ter voorkoming van verwarring een accent toegevoegd.

Wanneer $\varrho = \varrho_0$ komt de aanwijzing dan met de werkelijke snelheid overeen, mits deze zoo klein is dat de samendrukbaarheid van de lucht verwaarloosd mag worden.

Uit (11) volgt:

$$V_a' = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_0}} \tag{12}$$

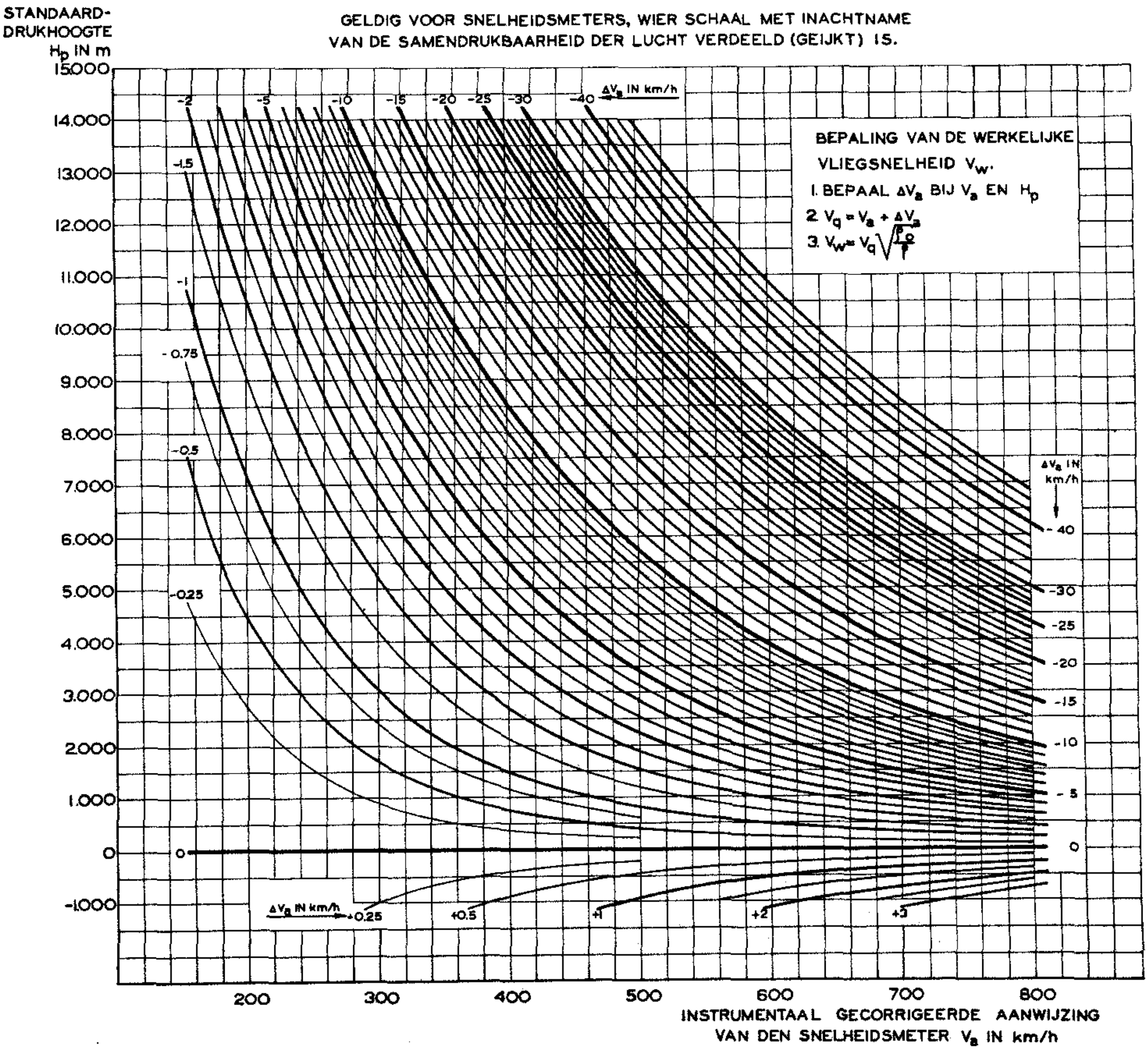
33. *De herleiding der aangewezen snelheid V_a naar de werkelijke snelheid V_w.*

De bepaling van V_w uit V_a, de druk p en de dichtheid ϱ geschiedt in 2 stappen, daar de invloeden van p en ϱ gescheiden in rekening gebracht kunnen worden. Men kan voor (3) n.l. schrijven:

$$V_w = \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho}}\;.\;\sqrt{\frac{1}{\mu}\;.\;\frac{2p}{\varrho_0}\;.\;\left[\left(1+\frac{q}{p}\right)^{\mu}-1\right]} \tag{13}$$

Fig. 4.

GRAFIEK VOOR DE AFLEIDING VAN DE WERKELIJKE SNELHEID V_W UIT DE INSTRUMENTAAL GECORRIGEERDE AANWIJZING V_a VAN DEN SNELHEIDSMETER.



De *fictieve* snelheid

$$V_q = \sqrt{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{2p}{\varrho_0} \cdot \left[\left(1+\frac{q}{p}\right)^{\mu} - 1\right]} = \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_0}}\, V_w \tag{14}$$

hangt dus alleen van p en q, en alleen van ϱ en V_w af. Aan deze fictieve snelheid kan de naam stuwsnelheid gegeven worden. Men dient de beteekenis van deze stuwsnelheid echter wel goed in het oog te houden. Hieraan zal onder 4 nog bijzondere aandacht besteed worden.

Het verband tusschen V_a en V_q, hetwelk volgens (10) en (14) alleen p als parameter bevat, wordt in fig. 4 door lijnen van gelijk verschil $\Delta\, V_a = V_q - V_a$ als functie van V_a en p[1]) vastgelegd. De constructie dezer grafiek werd in rapport V 1136 beschreven. Vermeld zij dat het algebraïsch verband tusschen V_q, V_a en p zeer gecompliceerd is, zoodat in de praktijk steeds van de grafiek gebruik gemaakt zal moeten worden.

Nadat V_q bepaald is, kan hieruit V_w afgeleid worden met de eenvoudige en bekende formule

$$V_w = V_q \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho}} \tag{15}$$

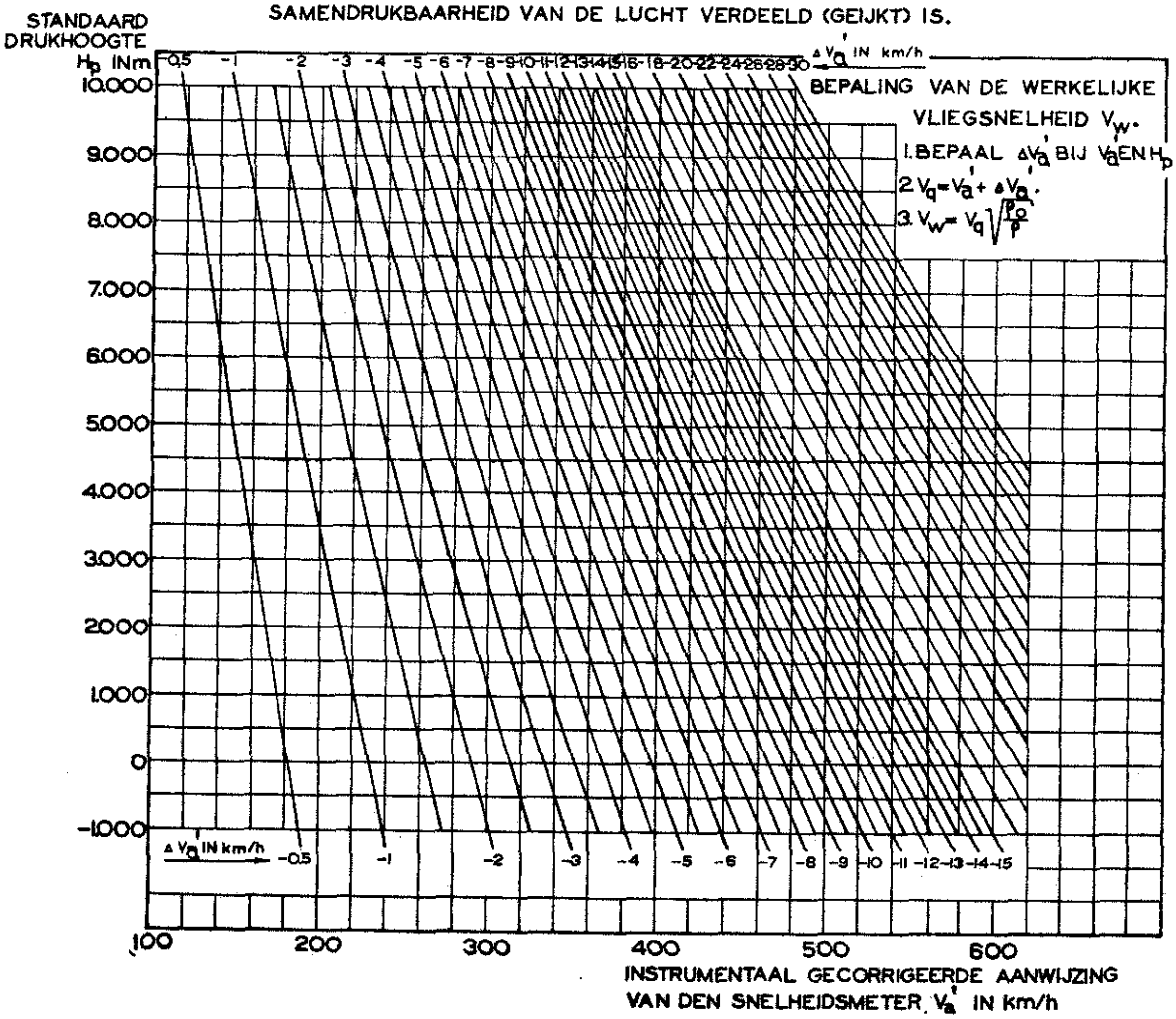
welke uit (14) volgt en waarmee tevens de invloed van de luchtdichtheid in rekening wordt gebracht.

Resumeerend geschiedt de bepaling van de werkelijke snelheid V_w van een vliegtuig t.o.v. de omringende lucht als volgt:

a. Men leest den snelheidsmeter, den hoogtemeter en den thermometer af.

Fig. 5. GRAFIEK VOOR DE AFLEIDING VAN DE WERKELIJKE SNELHEID V_W UIT DE INSTRUMENTAAL GECORRIGEERDE AANWIJZING V_a' VAN DEN SNELHEIDSMETER.

GELDIG VOOR SNELHEIDSMETERS, WIER SCHAAL ONDER VERWAARLOOZING VAN DE SAMENDRUKBAARHEID VAN DE LUCHT VERDEELD (GEIJKT) IS.



[1]) Als *maat* voor p is in de grafiek de door den vliegtuig-hoogtemeter aangewezen standaarddrukhoogte ingevoerd, d.w.z. de hoogte, waarop de betreffende druk in de standaard-atmosfeer optreedt.

Na instrumentale correctie[1]) op grond hunner ijkingen levert dit bij elkaar behoorende waarden van V_a, H(= standaarddrukhoogte) en T (= $273 + \Theta$ in °C).

b. Men bepaalt uit H en T de luchtdichtheid ϱ. Dit geschiedt b.v. door de in de standaard-atmosfeer op hoogte H optredende luchtdichtheid ϱ_H te vermenigvuldigen met $\frac{T_H}{T}$, waarin T_H de in de standaard-atmosfeer op de hoogte H optredende temperatuur is: $\varrho = \varrho_H \cdot \frac{T_H}{T}$ (16)

c. De *grafiek van fig. 4 levert bij V_a en H de* „correctie" ΔV_a, waarmee $V_q = V_a + \Delta V_a$ bepaald wordt.

d. Men berekent V_w met behulp van (15) en (16) uit V_q en ϱ.

Wanneer de snelheidsmeterschaal onder verwaarloozing van de samendrukbaarheid ingedeeld is, dient de aanwijzing als volgt omgewerkt te worden.

Volgens (12) is nu: $V_a' = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_0}}$ *waarbij het accent bij V_a aangeeft dat deze betrekking uitsluitend bij de oude* ijkmethode geldt.

Men kan nu uit V_a' en p op grond van (12) en (14) de stuwsnelheid V_q weer afleiden, daar na eliminàtie van q uit (12) en (14) een formule ontstaat, die alleen V_a', p en V_q als variabelen bevat. Deze formule kan omgewerkt worden tot een grafiek, waaruit $\Delta V_a' = V_q - V_a'$ als functie van V_a' en p (met voordeel kan de standaarddrukhoogte weer in plaats van p ingevoerd worden). Fig. 5 geeft deze grafiek. Tenslotte geeft de formule (15) dan V_w, waarbij met de luchtdichtheid rekening gehouden wordt.

De herleiding van V_a' (oude schaalindeeling) naar V_w verloopt dus geheel analoog aan de uitvoerig besproken herleiding van V_a (nieuwe methode) naar V_w. Een vergelijking van de figuren 4 en 5 leert echter dat de verschillen $V_q - V_a'$ grooter dan de verschillen $V_q - V_a$ zijn. Verder vertoont de snelheidsmeteraanwijzing V_a een duidelijke samenhang met de werkelijke snelheid, daar zij hier op nul meter hoogte in de standaard-atmosfeer mee samenvalt. De snelheidsmeteraanwijzing V_a' daarentegen is een niet op eenvoudige wijze te interpreteeren zuiver fictieve snelheid.

4. *De definities van aangewezen snelheid en stuwsnelheid.*

Het is van belang de in deze verhandeling gebruikte en naar de meening van het N.L.L. ook algemeen-aanbevelingswaardige definities van de aangewezen- en de stuwsnelheid hieronder nog even in gepreciseerden vorm te herhalen.

De *aangewezen snelheid* V_a is de uitsluitend van den stuwdruk afhankelijke fictieve vliegsnelheid, die met de werkelijke snelheid t.o.v. de omringende lucht overeenkomt wanneer de luchtdruk 760 mm Hg (= p_0) en de temperatuur 15° C. (= T_0) bedraagt.

De *stuwsnelheid* V_q is de van den stuwdruk en van den statischen druk afhankelijke fictieve vliegsnelheid, die met de werkelijke vliegsnelheid t.o.v. de omringende lucht overeenkomt wanneer de luchtdichtheid 0,125 $\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$ bedraagt.

Binnen het geldigheidsgebied van de in deze verhandeling uiteen gezette theoretische grondslagen wordt V_a mathematisch gedefinieerd door de betrekking (10). De stuwsnelheid wordt mathematisch door de formule (14) vastgelegd. Er wordt de aandacht op gevestigd, dat V_a, (V_a') en V_q samenvallen, wanneer de samendrukbaarheid van de lucht verwaarloosd wordt. In dat geval kan men op grond van (7) en (11) schrijven

$$V_q \left(= \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_0}}\, V_w\right) = \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_0}} \cdot \sqrt{\frac{2q}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2q}{\varrho_0}} = V_a'$$

dus ook $q = \frac{1}{2}\,\varrho_0 V_q^2$

Deze betrekkingen zijn (behalve de tusschen haakjes geplaatste) voor de stuwsnelheid echter *niet* meer geldig, wanneer de invloed van de samendrukbaarheid van de lucht mede in rekening moet worden gebracht.

---

[1]) Op de aanwijzing van den thermometer moet naast de instrumentale correctie bovendien een correctie aangebracht worden voor stuwings- en wrijvingseffecten, die een gevolg zijn van de plaatsing van den thermometer in een snelle luchtstrooming. Deze correctie is van den vorm $\Delta\Theta = -c \cdot \frac{\varrho_0}{\varrho} \cdot q$, waarin c een constante is, die van den vorm en van de opstelling van den thermometer afhangt. Bij gebrek aan nadere gegevens kan $c \simeq 0{,}008 \frac{{}^\circ\text{Cm}^2}{\text{kg}}$ genomen worden, welke waarde in het algemeen *niet meer dan* 20% fout zal zijn, zoodat er reeds een aanmerkelijke verbetering van de temperatuurbepaling mee kan worden verkregen. Zie voor uitvoeriger beschouwingen rapport V 834: „Correctie voor stuwing en wrijving op thermometeraanwijzingen".

Het verband tusschen den stuwdruk q en de aangewezen snelheid V_a.

$$q = p_o \left[\left(\frac{\varrho_o}{2 p_o} \cdot \mu \cdot V_a^2 + 1 \right)^{\frac{1}{\mu}} - 1 \right] \text{met } \mu = \frac{k-1}{k}$$

$$p_o = 10332{,}3 \, \frac{kg}{m^2} \; ; \; \varrho_o = 0{,}12498 \, \frac{kg \; sec^2}{m^4} \; ; \; k = 1{,}4$$

TABEL I.

Aangewezen snelheid V_a in		Stuwdruk q in	
km/h	m/sec	kg/m²	mm Hg
0	0	0	0
20	5,56	1,929	0,142
40	11,11	7,717	0,568
60	16,67	17,369	1,278
80	22,22	30,892	2,272
100	27,78	48,298	3,553
120	33,33	69,600	5,119
140	38,89	94,816	6,974
160	44,44	123,96	9,118
180	50,00	157,07	11,553
200	55,56	194,16	14,282
220	61,11	235,26	17,305
240	66,67	280,41	20,626
260	72,22	329,64	24,247
280	77,78	382,99	28,171
300	83,33	440,51	32,402
320	88,89	502,23	36,942
340	94,44	568,22	41,796
360	100,00	638,51	46,966
380	105,56	713,18	52,459
400	111,11	792,27	58,276
420	116,67	875,86	64,425
440	122,22	964,00	70,908
460	127,78	1056,8	77,732
480	133,33	1154,3	84,902
500	138,89	1256,5	92,424
520	144,44	1363,6	100,30
540	150,00	1475,7	108,55
560	155,56	1592,8	117,16
580	161,11	1715,0	126,15
600	166,67	1842,5	135.53
620	172,22	1975,3	145,29
640	177,78	2113,5	155,46
660	183,33	2257,3	166,04
680	188,89	2406,7	177,03
700	194,44	2562,0	188,45
720	200,00	2723,1	200,30
740	205,56	2890,3	212,59
760	211,11	3063,6	225,34
780	216,67	3243,2	238,56
800	222.22	3429,3	252,24
820	227,78	3622,0	266,42
840	233,33	3821,4	281,08
860	238,89	4027,7	296,26
880	244,44	4241,1	311,96
900	250,00	4461,7	328.19
920	255,56	4689,8	344,96
940	261,11	4925,4	362,29
960	266,67	5168,9	380,20
980	272,22	5420,3	398,69
1000	277,78	5679,9	417,79

RAPPORT A 730.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De correctie van den invalshoek en den weerstand van een prismatischen vleugel met eindige breedte naar die voor een overeenkomstigen vleugel met oneindig groote breedte

door

Ir. A. BOELEN.

RAPPORT A 730.

De correctie van den invalshoek en den weerstand van een prismatischen vleugel met eindige breedte naar die voor een overeenkomstigen vleugel met oneindig groote breedte.

Uittreksel.

De correcties, die noodig zijn om de aerodynamische eigenschappen van een vleugelprofiel nauwkeurig te kunnen bepalen uit metingsresultaten voor een prismatischen vleugel met eindige breedte, werden berekend voor het geheele gebied van slankheden, dat van belang kan zijn.

De circulatieverdeeling werd berekend met de door Lotz aangegeven methode. De daaruit volgende correcties voor weerstand en invalshoek zijn:

$$\Delta c_w = -F_1 \frac{t_0}{\pi b} c_a^2 = F_1 \Delta c_{w\,ell}$$

$$\Delta \alpha = -F_2 \frac{t_0}{\pi b} c_a = F_2 \Delta \alpha_{ell}$$

De factoren F_1 en F_2 hangen alleen af van $\frac{t_0 c_1}{2b}$ en zijn in fig. 2 als functie van dezen parameter gegeven. Deze laatste kan in fig. 1 bepaald worden uit de bekende slankheid (b/t_0) en helling van de liftlijn $\left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)$. Hierbij wordt tevens de waarde van $k = \frac{c_1}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{b=\infty}$ gevonden.

De uitkomsten worden vergeleken met die van andere onderzoekers. De overeenkomst blijkt bevredigend te zijn.

RAPPORT A 730.

La correction de l'angle d'attaque et de la résistance d'une aile prismatique d'envergure finie à ceux d'une aile d'envergure infinie.

Résumé.

Les corrections qui sont nécessaires pour calculer les caractéristiques aérodynamiques d'un profil d'aile de celles d'une aile prismatique d'envergure finie, furent calculées pour des ailes d'envergure de 2,5 à 10.

La distribution de la circulation fut déterminée selon la méthode de Lotz. Les corrections de la résistance et de l'angle d'attaque résultant de cette distribution sont:

$$\Delta c_w = -F_1 \frac{t_0}{\pi b} c_a^2 = F_1 \Delta c_{w\,ell}$$

$$\Delta \alpha = -F_2 \frac{t_0}{\pi b} c_a = F_2 \Delta \alpha_{ell}$$

F_1 et F_2 sont donnés dans la figure 2 comme function du paramètre $\frac{t_0 c_1}{2b}$. Ce paramètre peut être déterminé de la figure 1 pour une aile dont l'envergure (b/t_0) et l'augmentation de sustentation avec l'angle d'attaque $\left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)$ sont connues.

Les résultats sont comparés avec ceux d'autres auteurs. La correspondance est satisfaisante.

REPORT A 730.

The correction of angle of incidence and resistance of a prismatic aerofoil of finite span to those for the aerofoil of infinite span.

Summary.

The corrections necessary to determine the aerodynamic characteristics of a wingsection from those of a prismatic aerofoil of finite span, are calculated for a range of aspect ratios (2,5 tot 10).

The distribution of the circulation has been calculated by the method of Lotz. The corrections for the resistance and the angle of incidence following from it are:

$$\Delta c_w = -F_1 \frac{t_0}{\pi b} c_a{}^2 = F_1 \Delta c_{w\,ell}$$

$$\Delta \alpha = -F_2 \frac{t_0}{\pi b} c_a = F_2 \Delta \alpha_{ell}$$

The factors F_1 and F_2 are given in fig. 2 in dependence of the parameter $\frac{t_0 c_1}{2b}$. This parameter can be determined from fig. 1, together with $k = \frac{c_1}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{b=\infty}$, the aspect ratio (b/t_0) and the slope of the lift curve $\left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{b \neq \infty}$ being given.

The results are compared with those of other authors. The agreement is fairly good.

BERICHT A 730.

Die Umrechnung des Anstellwinkels und des Widerstandes eines prismatischen Flügels mit endlicher Breite nach denen unendlich breiter Flügel.

Zusammenfassung.

Die Korrekturen, die man zur Bestimmung der aerodynamischen Eigenschaften eines Flügelprofils aus denen eines prismatischen Flügels endlicher Breite braucht, wurden für Flügel verschiedener Seitenverhältnisse (2,5 bis 10) berechnet.

Die Verteilung der Zirkulation wurde mittels des von Lotz angegebenen Verfahrens bestimmt. Die Korrekturen für den Widerstand und den Anstellwinkel ergeben sich daraus bzw. als:

$$\Delta c_w = -F_1 \frac{t_0}{\pi b} c_a{}^2 = F_1 \Delta c_{w\,ell}$$

$$\Delta \alpha = -F_2 \frac{t_0}{\pi b} c_a = F_2 \Delta \alpha_{ell}$$

Die Beiwerte F_1 und F_2 sind in Abb. 2 auf den Parameter $\frac{t_0 c_1}{2b}$ aufgetragen. Dieser Parameter kann für einen Flügel mit bekanntem Wert von $\frac{b}{t_0}$ und von $\frac{d c_a}{d \alpha}$ zusammen mit $k = \frac{c_1}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d c_a}{d \alpha}\right)_{b=\infty}$ aus Abb. 1 ermittelt werden.

Die berechneten Werte werden mit den Resultaten anderer Verfasser verglichen. Die Übereinstimmung ist ziemlich gut.

RAPPORT A 730.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De correctie van den invalshoek en den weerstand van een prismatischen vleugel met eindige breedte naar die voor een overeenkomstigen vleugel met oneindig groote breedte

door

Ir. A. BOELEN.

Overzicht.

De bovengenoemde correcties worden voor prismatische vleugels met slankheden van 2,5 tot 10 berekend. De uitkomsten worden zoo gegeven, dat *binnen dit gebied de correcties voor een willekeurigen vleugel op* eenvoudige wijze bepaald kunnen worden. Zij worden tevens vergeleken met resultaten van andere onderzoekers.

Inhoudsopgave.

1. *Inleiding.*

Om de aerodynamische eigenschappen van vleugelprofielen experimenteel te bepalen, worden in een windtunnel driekomponentenmetingen met prismatische vleugelmodellen, d.w.z. rechthoekige vleugels met constanten invalshoek, uitgevoerd. Daar deze modellen een eindige breedte hebben, zijn de eigenschappen van het vleugelprofiel niet gelijk aan die van den onderzochten vleugel. Deze laatste moeten worden omgerekend tot uitkomsten, die voor een oneindig breeden vleugel gelden.

Als regel wordt bij deze omrekening aangenomen, dat de verdeeling van de circulatie (dus ook van de draagkracht) over de vleugelbreedte elliptisch is. Deze veronderstelling is niet geheel juist, doch brengt in het algemeen geen groote fouten met zich mee, zoodat zij in de meeste gevallen wel toelaatbaar is. Voor meer nauwkeurige berekeningen is het echter gewenscht rekening te houden met de omstandigheid, dat de circulatieverdeeling bij een prismatischen vleugel afwijkt van de elliptische.

Daar de berekening van de aan te brengen correcties bij niet-elliptische circulatieverdeeling niet zoo eenvoudig is, dat deze snel van geval tot geval kan worden verricht, werd zij eens voor al voor het geheele gebied van breedteverhoudingen, dat van belang kan zijn (2,5 tot 10), uitgevoerd.

De verkregen uitkomsten worden vergeleken met die van andere onderzoekers.

2. *Berekeningsmethode.*

21. *Algemeen.*

Voor de prismatische vleugels werd de verdeeling van de circulatie en hieruit de geinduceerde weerstand en de gemiddelde geinduceerde invalshoek berekend. Deze twee grootheden kunnen beschouwd worden als de correcties, welke resp. op den weerstand en op den invalshoek moeten worden aangebracht. Daar bij een prismatischen vleugel de aerodynamische invalshoek niet voor alle elementen gelijk is, is dit, streng genomen, alleen dan juist, wanneer

1° de lift lineair met den invalshoek verloopt,

2° de profielweerstand niet of lineair met dezen hoek verandert.

Aan de eerste voorwaarde, die trouwens ook een der uitgangspunten van de berekening vormt, wordt voldaan zoolang de strooming het vleugelbovenvlak volgt (geen loslating); aan de tweede meestal met voldoende benadering zoolang de invalshoek klein is. Bij de bepaling van de meest belangrijke grootheid n.l. den minimum weerstand van een profiel zullen dus in het algemeen beide voorwaarden wel bevredigd worden.

Wordt de correctie bij grootere invalshoeken toegepast, dan bestaat de mogelijkheid, dat niet de exacte waarde van de gevraagde grootheden gevonden wordt, doch een gemiddelde, dat hiervan weinig zal afwijken.

22. *Circulatieverdeeling.*

De circulatieverdeeling werd berekend volgens de door Lotz ontwikkelde methode [1]). Hierbij wordt deze verdeeling verkregen in den vorm van de Fourierreeks:

$$\Gamma_x = V\, t_0\, c_1\, \alpha_0 \,\Sigma\, \alpha_{en} \sin n\, \delta_x$$

Hierin is:

x = coördinaat langs de vleugelbreedte.
Γ_x = circulatie voor het element x.
V = snelheid van den ongestoorden wind.
t_0 = vleugelkoorde.
$c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)_{b=\infty}$.
α_0 = meetkundige invalshoek van den vleugel.
α_{en} = reeksontwikkelingscoëfficiënt.
$\delta_x = \text{bgcos} - \frac{2x}{b}$.
b = vleugelbreedte.

De coëfficiënten α_{en} worden bepaald door het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. Zij zijn alleen afhankelijk van den omtreksvorm en het invalshoekverloop van den vleugel, die in het hier beschouwde geval onveranderlijk zijn en van den parameter $\frac{t_0 c_1}{2b}$.

23. *Geinduceerde weerstand.*

De plaatselijke geinduceerde weerstand (W_{ix}) is bij een vleugel met eindige breedte:

$$W_{ix} = A_x\, \alpha_{ix}$$

waarin

A_x = plaatselijke lift.
α_{ix} = geinduceerde invalshoek.

Voor deze beide grootheden volgt uit de in punt 22 voor de circulatie gegeven reeks:

$$A_x = \varrho V^2 t_0 c_1 \alpha_0 \Sigma \alpha_{en} \sin n\, \delta_x$$

$$\alpha_{ix} = \frac{t_0 c_1}{2\,b} \alpha_0 \Sigma\, n\, \alpha_{en} \frac{\sin n\, \delta_x}{\sin \delta_x}$$

Bij invoering hiervan, integratie over de geheele vleugelbreedte en overgang op den coëfficiënt van den geinduceerden weerstand (c_{iw}) wordt nu gevonden:

$$c_{wi} = \frac{1}{\frac{1}{2} \varrho V^2 t_0 b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} W_{ix}\, dx = \frac{\pi}{4} \frac{t_0}{b} c_1{}^2 \alpha_0 \Sigma\, n\, \alpha_{en}{}^2$$

Daarnaast is de liftcoëfficiënt:

$$c_a = \frac{1}{\frac{1}{2} \varrho V^2 t_0 b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} A_x dx = \frac{\pi}{2} c_1\, \alpha_0\, \alpha_{e_1}$$

---

[1]) Deze methode is o.a. beschreven in:
Lotz, I. Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1931 S. 189.
Koning, C. und Boelen, A. Aerodynamische Eigenschaften der Quasi-Trapezflügel mit verschiedener Breite des prismatischen Teiles. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1933 S. 43 en Verslagen en Verhandelingen van den RSL Deel VII (1934) blz. 1.

zoodat, wanneer deze in c_{wi} ingevoerd wordt, de uitkomst overgaat in

$$c_{wi} = \frac{1}{\pi}\frac{t_o}{b} c_a^2 \frac{\Sigma n\, \alpha_{en}^2}{\alpha_{e1}^2} = c_a^2 \frac{O}{\pi b^2} \frac{\Sigma n\, \alpha_{en}^2}{\alpha_{e1}^2}$$

Zooals bekend, luidt voor een vleugel met hetzelfde oppervlak (O) en dezelfde breedte (b) doch elliptische circulatieverdeeling het verband tusschen c_{wi} en c_a:

$$c_{wi\,ell} = c_a^2 \frac{O}{\pi b^2}$$

De geinduceerde weerstand van den prismatischen vleugel kan bijgevolg uitgedrukt worden in den vorm

$$c_{wi} = \frac{\Sigma n\, \alpha_{en}^2}{\alpha_{e1}^2} c_{wi\,ell} = F_1 c_{wi\,ell}$$

Behoudens het in punt 21 gemaakte voorbehoud is dus de bij overgang naar den oneindig breeden vleugel aan te brengen weerstandscorrectie

$$\Delta c_w = F_1 \Delta c_{well}$$

waarin Δc_{well} de bekende correctie voor elliptische circulatieverdeeling is.

24. Invalshoekcorrectie.

De plaatselijke aerodynamische invalshoek (α_x) is bij een prismatischen vleugel met eindige breedte:

$$\alpha_x = \frac{\Gamma}{c_1 V t_o} = \alpha_o \Sigma \alpha_{en} \sin n\delta_x$$

De gemiddelde waarde van deze grootheid $(\tilde{\alpha}_x)$, bepaald door integratie over de vleugelbreedte, is:

$$\tilde{\alpha}_x = \frac{\alpha_o}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Sigma \alpha_{en} \sin n\,\delta_x\, dx = \frac{\pi}{4} \alpha_o \alpha_{e1}$$

Aangenomen wordt, dat deze hoek gelijk is aan den overeenkomstigen (α_∞) voor den oneindig breeden vleugel. De op den invalshoek van den vleugel met eindige breedte aan te brengen correctie is dus:

$$\Delta \alpha = \tilde{\alpha}_x - \alpha_o = \alpha_\infty \left(1 - \frac{4}{\pi \alpha_{e1}}\right)$$

Bij invoeren van den liftcoëfficiënt $c_a = 2c_1\alpha_\infty$ gaat deze uitkomst over in

$$\Delta \alpha = \frac{c_a}{2c_1}\left(1 - \frac{4}{\pi \alpha_{e1}}\right)$$

Voor een vleugel met hetzelfde oppervlak O en dezelfde breedte b, doch elliptische circulatieverdeeling is de correctie

$$\Delta \alpha_{ell} = -c_a \frac{O}{\pi b^2} = -c_a \frac{t_o}{\pi b}$$

zoodat die voor een prismatischen vleugel als volgt daarin kan worden uitgedrukt

$$\Delta \alpha = \frac{2b}{t_o c_1}\left(\frac{1}{\alpha_{e1}} - \frac{\pi}{4}\right) \Delta \alpha_{ell} = F_2 \Delta \alpha_{ell}$$

25. Bepaling van $c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)_{b=\infty}$.

In de punten 23 en 24 zijn de correcties voor den weerstand en den invalshoek afgeleid. Zij zijn gelijk aan die voor den „elliptischen" vleugel vermenigvuldigd met een factor. Deze factoren zijn afhankelijk van de coëfficiënten α_{en} en in het laatste geval bovendien van $\frac{t_o c_1}{2b}$. Daar de coëfficiënten uitsluitend van den parameter $\frac{t_o c_1}{2b}$ afhangen is dit ook voor de factoren F_1 en F_2 het geval.

Voor de bepaling van dezen parameter is, naast de meetkundige grootheden t_o en b, ook de aerodynamische c_1 noodig. Deze is niet bekend, doch hangt samen met de helling van de liftlijn voor den eindig breeden vleugel $\left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)$.

Dit verband luidt:

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = \frac{\pi^3}{360} k \alpha_{e1}$$

waarin $k = \frac{c_1}{\pi}$ en α in graden gemeten is. Aan de invoering van de grootheid k inplaats van c_1, ligt de gedachte ten grondslag, dat in een ideale vloeistof bij gladde afstrooming aan den achterrand van het profiel $c_1 = \pi$ zal zijn. k geeft dus aan in hoeverre deze toestand in werkelijkheid benaderd wordt.

Daar ook α_{e1} van den parameter $\frac{t_0 c_1}{2b}$ afhangt, kunnen de correcties voor één bepaalden vleugel niet berekend worden, zonder in een iteratieproces te vervallen. Dit bezwaar valt echter weg indien men de berekeningen voor een serie vleugels uitvoert. In dat geval kan namelijk een stel willekeurige waarden voor $\frac{t_0}{b}$ en voor c_1 of k gekozen worden, waarna achtereenvolgens de parameter $\left(\frac{t_0 c_1}{2b}\right)$, de circulatie-verdeeling (α_{en}) en de grootheden $\frac{dc_a}{d\alpha}$, F_1 en F_2 berekend worden.

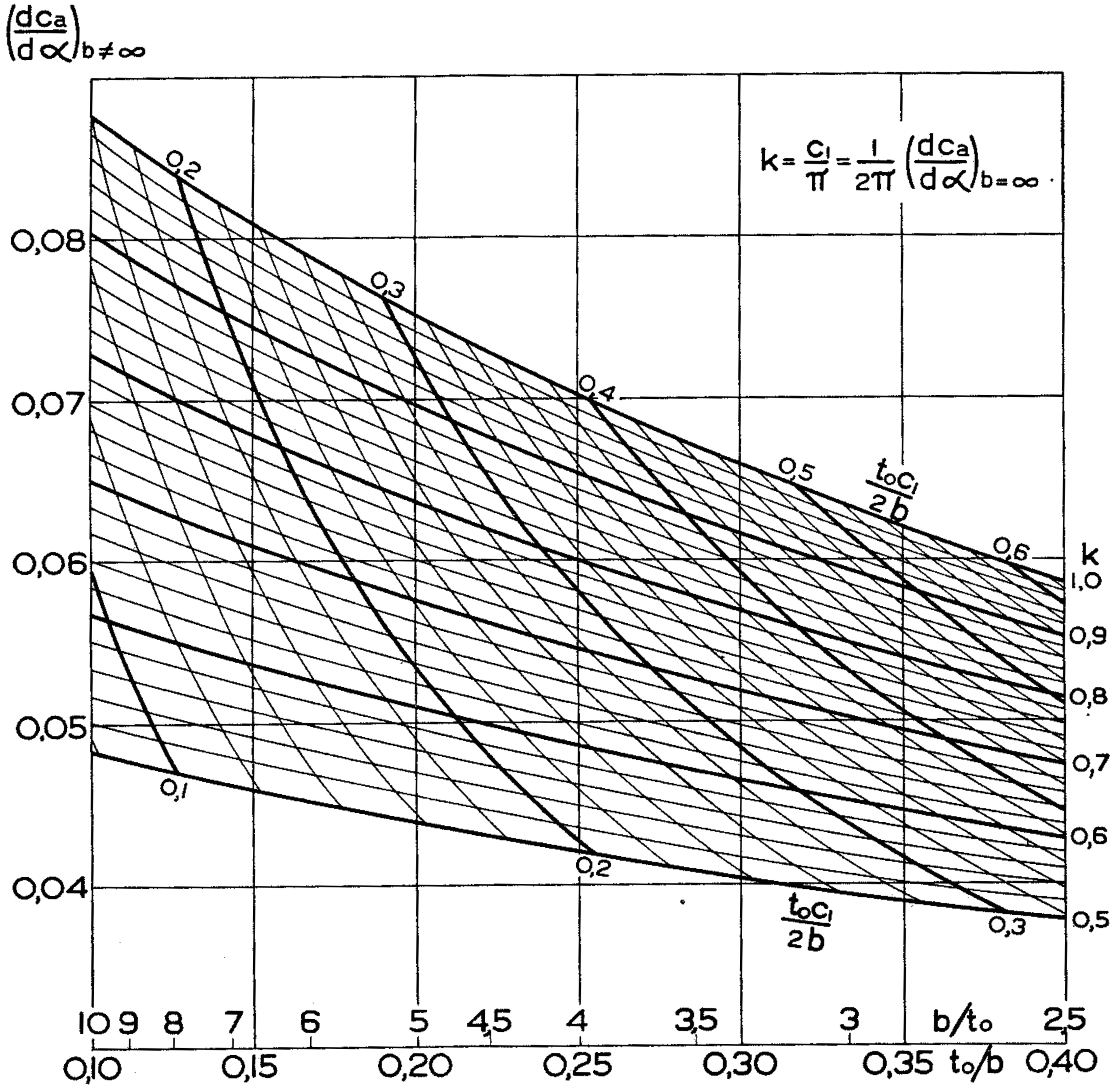


Fig. 1. Verband tusschen $\frac{t_0 c_1}{2b}$, $k = \frac{c_1}{\pi}$, $\frac{t_0}{b}$ en $\left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)_{b \neq \infty}$

—— Berekende lijnen.
—— Geïnterpoleerde lijnen.

Door deze uitkomsten uit te zetten, zooals dat in de bijgaande figuren 1 en 2 gedaan is, kunnen uit de eerste door interpoleeren voor een willekeurigen prismatischen vleugel met bekende slankheid $\left(\frac{b}{t_0}\right)$ en $\frac{dc_a}{d\alpha}$, de waarden van k (dus c_1) en van den parameter $\frac{t_0 c_1}{2b}$ gevonden worden. De bij laatstgenoemde grootheid behoorende waarden van F_1 en F_2 worden dan uit fig. 2 afgelezen.

3. *Vergelijking met Duitsche en Amerikaansche uitkomsten.*

De verkregen uitkomsten zijn vergeleken met door Betz [2]) en het N.A.C.A. [3]) gegeven resultaten. Door deze onderzoekers worden notaties gebezigd, die van de hier gebruikte afwijken. Gemakshalve wordt hier het verband tusschen de verschillende notaties gegeven:

Betz: $L = \frac{2b}{t_0 c_1}$

$\frac{W}{W_{min}} = F_1$

N.A.C.A.: $\frac{b^2}{S} = 1{,}375\,\frac{2b}{t_0 c_1}$

$\sigma = F_1 - 1$

$\tau = F_2 - 1$

De door deze onderzoekers verkregen uitkomsten zijn niet algemeen geldig, omdat gerekend werd met een bepaalde waarde van c_1 (Betz $c_1 = \pi$; NACA $c_1 = 2{,}75$).

Als gevolg hiervan is het niet mogelijk de correcties rechtstreeks te bepalen voor een vleugel, waarvoor c_1 een andere waarde heeft, zonder in een iteratieproces te vervallen. Teneinde dit te voorkomen werd de berekening door het N.L.L. uitgevoerd voor een aantal waarden van c_1 en de resultaten op een zoodanige wijze gegeven, dat een rechtstreeksche bepaling van de correcties voor iederen prismatischen vleugel mogelijk is.

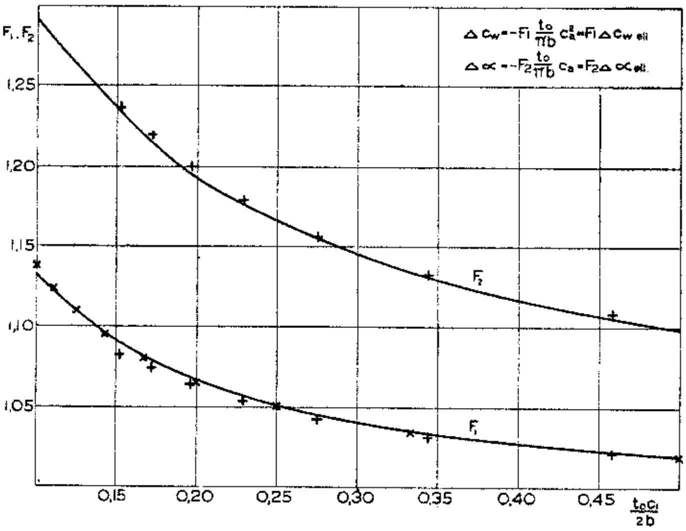


Fig. 2. Correcties voor rechthoekige vleugels naar oneindig groote breedte. Verhouding tusschen de correcties bij werkelijke en elliptische circulatieverdeeling voor weerstand (F_1) en invalshoek (F_2).

———	door N.L.L. berekend.
x	door Betz berekend.
+	door N.A.C.A. berekend.

Bedoelde resultaten zijn in fig. 2 mede uitgezet. Hun overeenstemming met de thans berekende is bevredigend.

4. *Gebruik van de grafieken.*

Indien van een gegeven prismatischen vleugel met eindige breedte de helling van de liftlijn $\frac{dc_a}{d\alpha}$ bekend is, kan met behulp van de figuren 1 en 2 op de hieronder gegeven wijze de helling van de liftlijn, de invalshoek en de weerstand gecorrigeerd worden naar den oneindig breeden vleugel.

a) Bepaal $\frac{t_0}{b}$ en $\left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)_{b\,=\,\text{eindig}}$, waarbij α in graden genomen moet worden.

b) Lees in fig. 1 de bijbehoorende waarden van k en $\frac{t_0 c_1}{2b}$ af.

c) Lees in fig. 2 de bij $\frac{t_0 c_1}{2b}$ behoorende waarden van F_1 en F_2 af.

d) Bepaal de gevraagde grootheden c_1, $\Delta\alpha$ en Δc_w door vermenigvuldiging van k, F_2 en F_1 met resp. π, $-\frac{1}{\pi}\frac{t_0}{b}c_a$ en $-\frac{1}{\pi}\frac{t_0}{b}c_a^2$.

Overgang van den gegeven vleugel naar een anderen met eveneens eindige breedte, doch verschillende slankheid moet via den oneindig breeden vleugel geschieden, tenzij het verschil in slankheid zoo klein is, dat de gebruikelijke omrekeningsformules voor elliptische circulatie-verdeeling gebezigd mogen worden.

---

[2]) Betz, A. Tragflügeltheorie. Berichte der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt. (Oct. 1920).

[3]) Jacobs, E. N. and Anderson, R. F. Large scale aerodynamic characteristics of airfoils as tested in the Variable Density Tunnel. N.A.C.A. Report 352 (1930).

RAPPORT A. 557.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De invloed van een over de vleugelbreedte verloopenden invalshoek op den weerstand.

door

Ir. C. KONING

RAPPORT A. 557.

De invloed van een over de vleugelbreedte verloopenden invalshoek op den weerstand.

Uittreksel.

De geinduceerde weerstand c_{wi} van een vleugel met niet-constanten invalshoek kan, op grond van de uitkomsten van de driedimensionale draagvlaktheorie, gegeven worden in den vorm (7). Daarin zijn c_a de draagkrachtcoëfficiënt, $\Delta\alpha$ een maat voor de grootte van het verloop van den invalshoek en c_1, c_2, c_3 coëfficiënten. De waarde van deze coëfficiënten hangt af van den vorm en de profieleigenschappen van den vleugel en van de wijze, waarop de invalshoek verloopt, doch niet van de grootte van c_a en $\Delta\alpha$.

De toename van den geinduceerden weerstand als gevolg van den verloopenden invalshoek is gegeven door (8), zij blijkt lineair afhankelijk te zijn van c_a. De aard van deze afhankelijkheid wordt in de eerste plaats bepaald door het teeken van $\Delta\alpha$ en van c_2 (fig. 1), daarnaast door de waarde van $\Delta\alpha$ (fig. 2). De gegeven getallenvoorbeelden en aerodynamische overwegingen doen vermoeden, dat c_2 positief is voor rechthoekige en weinig tapsche vleugels, nul voor elliptische en negatief voor sterk tapsche vleugels.

Fig. 3 geeft als voorbeeld het verschil tusschen den geinduceerden weerstand van den beschouwden vleugel en van den overeenkomstigen elliptischen vleugel ($c_{wi} - c_{wi\,ell}$) bij verschillende waarden van $\Delta\alpha$ voor een willekeurig geval, waarbij c_2 negatief is. Dezelfde figuur geldt voor een positieve waarde van c_2, wanneer de teekens van $\Delta\alpha$ verwisseld worden. De krommen raken aan een omhullende, die gegeven is door (10).

Voor zoover de profielweerstand van de elementen van den vleugel benaderd kan worden door (11), gelden voor dien van den vleugel soortgelijke overwegingen.

RAPPORT A. 557.

L'influence d'un gauchissement sur la résistance aérodynamique d'une aile.

Résumé.

A l'aide des résultats de la théorie tourbillonaire la trainée induite c_{wi} d'une aile gauchie peut être donnée sous la forme de (7). Dans cette formule c_a est le coefficient de portance et $\Delta\alpha$ une mesure pour le gauchissement. Les coefficients c_1, c_2 et c_3 dépendent du contour de l'aile, des qualités aérodynamiques du profil et de la forme du gauchissement, mais ils sont indépendants de c_a et de $\Delta\alpha$.

L'augmentation de la trainée induite, causée par le gauchissement, est donnée par (8), elle change linéairement avec c_a. Son caractère est déterminé en premier lieu par les signes de $\Delta\alpha$ et du coefficient c_2 (fig. 1), en second lieu par la valeur de $\Delta\alpha$ (fig. 2). Les exemples numériques donnés et des considérations aérodynamiques font supposer, que le coefficient c_2 est positif pour les ailes rectangulaires et les ailes légèrement trapézoidales, zéro pour les ailes elliptiques et négatif pour les ailes fortement trapézoidales.

La figure 3 donne en exemple la différence entre la trainée induite d'une aile arbitraire, pour laquelle c_2 est négatif, et celle de l'aile correspondante elliptique ($c_{wi} - c_{wi\,ell}$) pour des valeurs différentes du gauchissement $\Delta\alpha$. En changeant les signes des $\Delta\alpha$ on obtient la figure pour une valeur positive de c_2. Les courbes ont une enveloppe donnée par (10).

La résistance de profil des éléments de l'aile étant donnée par (11), la trainée correspondante de l'aile a un caractère analogue à cet de la trainée induite traité ci-dessus.

REPORT A. 557.

The influence of wing warping on the drag.

Summary.

By means of the results of the threedimensional aerofoil theory the induced drag c_{wi} of a warped wing (wing with washin or washout) may be given in the form (7). Here c_a is the lift coefficient and $\Delta\alpha$ a measure for the washin. c_1, c_2 and c_3 are coefficients depending on the plan form of the wing, the aerodynamical properties of the wing section and the form of the warping, but not on the value of c_a and $\Delta\alpha$.

The increase of the induced drag, due to the warping, is given by (8), it shows a linear change with c_a. The character of the relation between this increase and the lift coefficient depends on the signs of $\Delta\alpha$ and c_2 (fig. 1) and on the value of $\Delta\alpha$ (fig. 2). The numerical examples given

and aerodynamical considerations make suppose that the sign of c_2 is determined mainly by the plan form of the wing, being positive for rectangular and slightly tapered wings, zero for elliptical and negative for largely tapered wings.

As an example figure 3 gives the difference between the induced drag of an arbitrary wing, for which c_2 is negative, and that of the corresponding elliptical wing ($c_{wi} - c_{wi\,ell}$) at different values of $\Delta\alpha$. This figure also holds for a positive value of c_2 if only the sign of $\Delta\alpha$ is changed. The curves have an envelope given by (10).

If the profile drag of the wing elements may be approximated by (11), the corresponding resistance of the wing shows properties of the same kind as those of the induced drag discussed above.

BERICHT A. 557.

Der Einflusz von Flügelverwindung auf den Widerstand.

Zusammenfassung.

Auf Grund der Resultate der dreidimensionalen Tragflügeltheorie kann der induzierte Widerstand c_{wi} eines verwundenen Flügels in der Form (7) angegeben werden. Dabei sind c_a der Auftriebsbeiwert und $\Delta\alpha$ ein Masz für die Verwindung. Die Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 hängen von der Form des Flügels und der Verwindung und von den Profileigenschaften, aber nicht von dem Wert von c_a und $\Delta\alpha$ ab.

Die Änderung des induzierten Widerstandes als Folge der Verwindung ist durch (8) gegeben, sie ist linear abhängig von c_a. Der Charakter dieser Abhängigkeit wird zunächst bedingt durch die Zeichen von $\Delta\alpha$ und c_2 (Abb. 1), daneben durch den Wert von $\Delta\alpha$ (Abb. 2). Die gegebene Zahlenbeispiele und aerodynamische Überlegungen deuten darauf hin, dasz c_2 positiv sein wird für Rechteckflügel und Trapezflügel mit relativ groszer Endtiefe, Null für elliptische Flügel und negativ für Trapezflügel mit relativ kleiner Endtiefe.

Als Beispiel gibt Abb. 3 den Unterschied zwischen den induzierten Widerstand eines willkürlichen Flügels mit negativen c_2 und den des zugehörigen elliptischen Flügels ($c_{wi} - c_{wi\,ell}$) für einige Werte von $\Delta\alpha$. Diese Figur gelt auch für einen positiven Wert von c_2, wenn nur die Zeichen der $\Delta\alpha$ verwechselt werden. Die Kurven haben eine Einhüllende, die durch (10) gegeben ist.

Wenn der Profilwiderstand der Flügelelemente in der Form (11) gegeben werden kann, führt die Berechnung des Profilwiderstandes des Flügels zu ähnlichen Resultaten.

RAPPORT A 557.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De invloed van een over de vleugelbreedte verloopenden invalshoek op den weerstand

door

Ir. C. KONING.

Overzicht.

Een uitdrukking voor den geinduceerden weerstand van een vleugel wordt afgeleid, waaruit blijkt hoe deze weerstand beinvloed wordt door een over de vleugelbreedte verloopenden invalshoek. Eenige bijzonderheden van dezen invloed worden besproken. Een soortgelijke wijze om den invloed van genoemd verloop op den profielweerstand te behandelen wordt aangeduid.

Indeeling.

1. Inleiding.

Overwegingen, zoowel van aerodynamischen als van constructieven aard, kunnen er toe leiden een vleugel aan zijn uiteinden een anderen invalshoek te geven dan in het midden, terwijl in de tusschengelegen gebieden deze hoek geleidelijk verloopt. De invloed van een dergelijk verloop op de aerodynamische eigenschappen zal, indien men hem in zijn vollen omvang wil leeren kennen, slechts door een voor ieder geval afzonderlijk uit te voeren onderzoek bepaald kunnen worden. Een dergelijk onderzoek zal zeker ten deele experimenteel moeten zijn, omdat sommige eigenschappen (b.v. gedrag bij invalshoeken in de omgeving van de kritische, eigenschappen bij van nul verschillenden gierhoek) bij den huidigen stand van de aerodynamica nog niet voor berekening toegankelijk zijn. Daarnaast kunnen echter andere (b.v. die voor kleine invalshoeken en symmetrische stroomingstoestand) zeer wel door berekening gevonden worden. Hoewel ook hierbij, ter verkrijging van volledige en kwantitatieve resultaten, ieder geval afzonderlijk behandeld moet worden, kunnen toch, zij het ook slechts kwalitatief, eenige algemeen geldige eigenschappen vastgesteld worden. Deze worden, voor zoover zij de geinduceerde en profielweerstand betreffen, in het volgende besproken.

Bij de hier gegeven beschouwingen wordt uitgegaan van de drie-dimensioneele draagvlaktheorie in den gebruikelijken vorm. De gegeven resultaten gelden daardoor alleen voor die gevallen, waarin genoemde theorie toegepast mag worden, en blijven dus beperkt tot het gebied van invalshoeken, waar nog geen of althans geen belangrijke loslating van de vleugelstrooming optreedt.

Teneinde de tekst niet noodeloos onoverzichtelijk te maken, is de beteekenis, die hier aan verschillende begrippen toegekend wordt, in een bijlage aan het einde van het rapport afzonderlijk omschreven.

2. Splitsing van de circulatie.

Voor ieder element van een vleugel met verloopenden invalshoek (of „getordeerden vleugel") kan de meetkundige invalshoek $\alpha_g(x)$ beschouwd worden als te bestaan uit twee deelen:

a. een hoek α. die voor ieder element dezelfde waarde heeft en gelijk is aan den invalshoek van den vleugel;

b. een hoek $\alpha_0(x)$, die voor de verschillende elementen een verschillende waarde heeft, doch onafhankelijk is van den invalshoek van den vleugel.

De vergelijking voor het berekenen van de circulatieverdeeling van een gegeven vleugel [1]) is lineair in de circulatie èn in den meetkundigen invalshoek van de elementen. Bijgevolg kan, wanneer de hoeken op de boven aangegeven wijze gesplitst worden, ook de circulatieverdeeling opgebouwd gedacht worden uit twee overeenkomstige deelen.

Het eerste deel is dan de circulatieverdeeling voor een vleugel, die van de beschouwde alleen daarin verschilt, dat hij een over de geheele breedte constanten meetkundigen invalshoek heeft. Daarnaast is het tweede deel de circulatieverdeeling voor den gegeven vleugel bij invalshoek nul.

Een dergelijke splitsing van invalshoeken en circulatie geeft een belangrijke besparing bij berekeningen, die betrekking hebben op een vleugel, waarvoor het verloop van den invalshoek, ook wat de grootte betreft, gegeven is. Voor het volgende is het echter gewenscht nog een stap verder te gaan. Aangenomen wordt daarbij dan, dat de wijze, waarop de invalshoek over de vleugelbreedte verloopt (b.v. lineair), vaststaat, doch dat de grootte van dit verloop (b.v. verschil in α_g voor midden en vleugeluiteinden) voorloopig als willekeurig beschouwd mag worden. Zoodoende hebben de beschouwingen dan niet betrekking op één bepaalden vleugel, doch op een groep van vleugels, die onderling alleen verschillen in de mate, waarin zij getordeerd zijn.

De meetkundige invalshoek van de elementen is dan:

$$\alpha_g(x) = \alpha + \alpha_1(x)\Delta\alpha \qquad (1)$$

waarin:

$\alpha_g(x)$ = meetkundige invalshoek van het element,
α = invalshoek van den vleugel (= meetkundige invalshoek in het midden),
$\alpha_1(x)$ = verdraaiing van het element voor $\Delta\alpha = 1$,
$\Delta\alpha$ = maat voor de torsie van den vleugel.

De circulatieverdeeling kan nu op overeenkomstige wijze geschreven worden in den vorm:

$$\Gamma(x) = \alpha\,\Gamma_0(x) + \Delta\alpha\,\Gamma_1(x) \qquad (2)$$

met

$\Gamma(x)$ = totale circulatie voor het element x van den beschouwden vleugel,
$\Gamma_0(x)$ = circulatie voor het overeenkomstige element van den niet-getordeerden vleugel met invalshoek $\alpha = 1$,
$\Gamma_1(x)$ = circulatie voor het element x van den getordeerden vleugel bij invalshoek $\alpha = 0$ en verdraaiing $\Delta\alpha = 1$.

De circulaties $\Gamma_0(x)$ en $\Gamma_1(x)$ kunnen door berekening afzonderlijk bepaald worden.

3. *Algemeene uitdrukkingen voor draagkracht en geinduceerden weerstand.*

31. *Draagkracht.*

Voor het element x van den vleugel neemt nu iedere grootheid, die lineair afhankelijk is van de circulatie (draagkracht, storingssnelheid, geinduceerde invalshoek), overeenkomstig (2), den vorm aan:

$$F_1(x, \alpha, \Delta\alpha) = \alpha\, f_0(x) + \Delta\alpha\, f_1(x) \qquad (3)$$

Hierbij is $f_0(x)$ alleen bepaald door den vorm van den vleugel, $f_1(x)$ door dezen vorm en dien van het verloop van den invalshoek. Beide zijn echter onafhankelijk van den invalshoek van den vleugel (α) en van de grootte van het verloop van den invalshoek ($\Delta\alpha$).

De draagkracht van den vleugel wordt verkregen door die van de elementen over de vleugelbreedte te integreeren. Dit levert als draagkrachtcoëfficiënt op:

$$c_a = a_0\,\alpha + a_1\,\Delta\alpha \qquad (4)$$

Voor de constante coëfficiënten a_0 en a_1 geldt dan hetzelfde wat boven reeds resp. voor de functies $f_0(x)$ en $f_1(x)$ gezegd werd.

---

[1]) Zie o.m.
Prandtl. Tragflügeltheorie I, in Prandtl-Betz. Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik (1927), S. 29.
Glauert. The elements of aerofoil and airscrew theory (1926), p. 137.
Burgers. Airfoils aud airfoilsystems of finite span, in Durand. Aerodynamic Theory, Vol. II (1935), p. 165.
Lotz. Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. ZFM 1931, S 189.
Koning und Boelen. Aerodynamische Eigenschaften der Quasi-Trapezflügel mit verschiedener Breite des prismatischen Teiles. ZFM 1933 en Verslagen en Verhandelingen RSL Deel VII (1934), blz. 1.

32. Geinduceerde weerstand.

De geinduceerde weerstand van een element van den vleugel is gelijk aan het product van draagkracht en geinduceerden invalshoek. Beide zijn lineair afhankelijk van α en $\Delta\alpha$ (zie boven (3)). De geinduceerde weerstand van het element heeft dus de gedaante:

$$F_2(x, \alpha, \Delta\alpha) = \alpha^2 f_2(x) + 2\alpha\,\Delta\alpha\, f_3(x) + \Delta\alpha^2 f_4(x) \tag{5}$$

Hierbij dient het volgende opgemerkt te worden:

Uit de herkomst van (5) blijkt, dat $f_2(x)$ alleen afhankelijk is van den vorm van den vleugel, $f_3(x)$ en $f_4(x)$ bovendien van den vorm van het verloop van den invalshoek. De factor 2 is, zooals dit bij dergelijke vormen gebruikelijk is, alleen ingevoerd om het verdere formule-werk te vereenvoudigen. Hier en in het volgende zal, daar verwarring buitengesloten lijkt, de schrijfwijze $\Delta\alpha^2$ gebruikt worden met de beteekenis $(\Delta\alpha)^2$.

Het integreeren van (5) over de vleugelbreedte en het uit de hierbij verkregen uitkomst op de gebruikelijke wijze berekenen van den coëfficiënt van den geinduceerden weerstand leidt dan tot het resultaat

$$c_{wi} = b_1\alpha^2 + 2b_2\,\alpha\,\Delta\alpha + b_3\,\Delta\alpha^2 \tag{6}$$

Voor onderlinge vergelijking van vleugels met verschillende grootte van het verloop van den invalshoek is deze uitkomst niet geschikt, daar het gewenscht is hen hierbij bij gelijke waarde van c_a te beschouwen. Door elimineeren van α uit (4) en (6) kan echter c_{wi} uitgedrukt werden in c_a en $\Delta\alpha$:

$$c_{wi} = c_1 c_a^2 + 2c_2 c_a\,\Delta\alpha + c_3\,\Delta\alpha^2 \tag{7}$$

Uit de wijze, waarop deze uitdrukking afgeleid werd, volgt, dat de waarde van c_1 alleen afhangt van den vorm van den vleugel, die van c_2 en c_3 van dezen vorm en van dien van het verloop van den invalshoek, beide zijn echter onafhankelijk van c_a en $\Delta\alpha$.

33. De waarde van de coëfficiënten c.

De waarden voor de in (7) voorkomende coëfficiënten c kunnen alleen door voor iederen vleugelvorm afzonderlijk uit te voeren berekeningen gevonden worden. Een uitzondering hierop vormt, zooals in punt 44 besproken wordt, die voor c_2 bij elliptische vleugels.

Eenige algemeene eigenschappen van deze coëfficiënten volgen echter uit het feit, dat de geinduceerde weerstand nooit negatief kan worden.

Voor den niet-getordeerden vleugel is $c_{wi} = c_1 c_a^2$. Hieruit volgt dus, dat c_1 steeds positief zal zijn.

Bij $c_a = 0$ is voor den getordeerden vleugel $c_{wi} = c_3\,\Delta\alpha^2$. In tegenstelling met den vleugel zonder verloop van den invalshoek, zal hier de circulatie niet voor alle elementen nul zijn, doch voor een deel ervan positief, voor een ander deel negatief. Dit brengt echter een van nul verschillende en zeker positieve geinduceerde weerstand mede. Ook c_3 is dus steeds positief.

Opdat nu ook voor alle andere waarden van c_a c_{wi} grooter dan nul zal zijn, moet voldaan worden aan de voorwaarde, dat de vergelijking in c_a:

$$c_1 c_a^2 + 2c_2 c_a\,\Delta\alpha + c_3\,\Delta\alpha^2 = 0$$

geen reëele wortels heeft. Dit zal echter alleen dan het geval zijn, wanneer $c_2^2 < c_1 c_3$ is.

4. Gevolgtrekkingen, die afgeleid kunnen worden uit de algemeene uitdrukking voor c_{wi}.

41. De invloed van verloopenden invalshoek.

Uit (7) volgt als vermeerdering van den geinduceerden weerstand door het verloop van den invalshoek

$$\Delta c_{wi} = 2c_2 c_a\,\Delta\alpha + c_3\,\Delta\alpha^2 \tag{8}$$

Wordt $\Delta\alpha$ als een vaststaande grootheid beschouwd, dan volgt hieruit, voor zoover c_2 van nul verschilt:

de toename van c_{wi} verloopt lineair met c_a,

zij wordt nul voor $c_a = -\dfrac{c_3}{2c_2}\Delta\alpha$,

voor $c_a = 0$ is zij steeds positief.

Verloop van den invalshoek geeft dus in beginsel steeds een vermindering van den geinduceerden weerstand voor sommige waarden van c_a. Deze verbetering blijft echter beperkt òf tot een gebied van positieve c_a-waarden boven een eveneens positieve grens, òf tot een van negatieve c_a onder een negatieve grens. Of het een dan wel het ander het geval zal zijn, hangt, zooals schematisch in fig. 1 aangegeven is, af van de teekens van $\Delta\alpha$ en c_2.

De „polairen" in fig. 3 geven een overzichtelijk beeld van den invloed van den verloopenden invalshoek op c_{wi} voor een bepaald geval. Hierbij was c_2 negatief, de toestand voor een gelijke, doch positieve waarde van dezen coëfficiënt kan echter verkregen worden door omkeering van het teeken van $\Delta\alpha$. In deze figuur is, omdat de verschillen tusschen de beschouwde gevallen klein zijn, niet de totale geinduceerde weerstand, doch het verschil tusschen deze en die voor den overeenkomstigen vleugel met elliptische circulatieverdeeling uitgezet.

In het uitzonderingsgeval $c_2=0$ geeft verloopende invalshoek steeds een, over het geheele gebied constante, vergrooting van den geinduceerden weerstand.

De wijze waarop Δc_{wi} beinvloed wordt door de grootte van het invalshoekverloop is in fig. 2 schematisch aangegeven. Hieruit blijkt, dat, zooals ook rechtstreeks uit (8) afgelezen kan worden door vergrooten van de absolute waarde van $\Delta\alpha$ Δc_{wi} bij $c_a=0$ toeneemt en dat het punt, waar Δc_{wi} van teeken wisselt, verder van $c_a=0$ af komt te liggen. In deze figuur is c_2 als negatief aangenomen. Voor positieve waarden wordt echter hetzelfde beeld verkregen, alleen moeten daarbij de teekens $\Delta\alpha$ verwisseld worden.

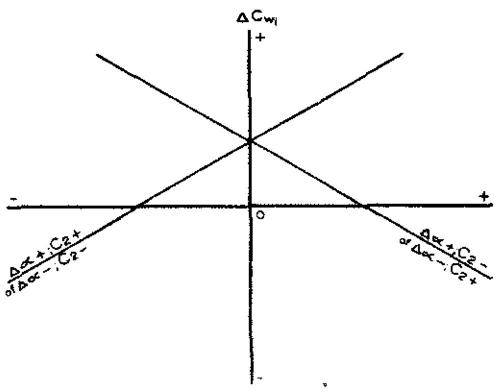


Fig. 1. De invloed van de teekens van $\Delta\alpha$ en c_2 op Δc_{wi}.

42. De grootste door verloop van den invalshoek te verkrijgen verbetering.

Zijn de vorm van den vleugel en die van het verloop van den invalshoek, en daarmee ook de coëfficiënten c gegeven, dan kan de vraag gesteld worden of het mogelijk is $\Delta\alpha$ zoo te kiezen, dat bij een vaste waarde van c_a, c_{wi} zoo klein mogelijk wordt.

Uit (7) volgt als voorwaarde, waaraan $\Delta\alpha$ daartoe moet voldoen:

$$\frac{d\, c_{wi}}{d\, \Delta\alpha}=2\, c_2\, c_a+2\, c_3\, \Delta\alpha=0$$

en dus

$$\Delta\alpha=-\frac{c_2}{c_3}c_a \tag{9}$$

De bijbehoorende waarde van c_{wi}, zijnde dus de laagst bereikbare, is:

$$c_{wi}=\left(c_1-\frac{c_2^2}{c_3}\right)c_a^2 \tag{10}$$

Uit (9) blijkt, dat de gevraagde waarde van $\Delta\alpha$ afhangt van die van c_a. Het is dus wel mogelijk om door juiste keuze van $\Delta\alpha$ een minimum waarde van c_{wi} te bereiken voor één waarde van c_a, echter niet om een vleugel te krijgen, die over het geheele gebied of in meer dan één punt gunstiger is dan alle anderen. De betrekking (10) stelt dan ook niet de geinduceerde weerstand van een dergelijken vleugel voor, doch geeft, zooals in fig. 3 te zien is, de omhullende, waaraan de polairen voor vleugels met verschillende waarde van $\Delta\alpha$ in één punt raken.

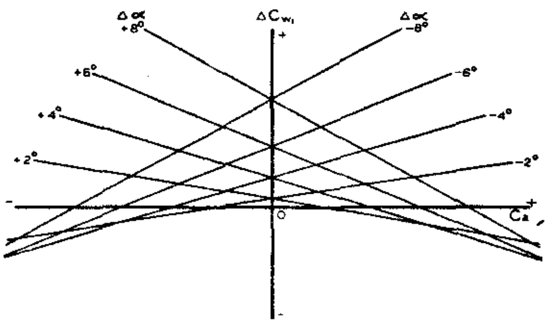


Fig. 2. De invloed van de waarde van $\Delta\alpha$ op Δc_{wi} (c_2 negatief).

Men zou kunnen vermoeden, dat deze omhullende samenvalt met de polaire van den elliptischen vleugel. Dit zal echter in het algemeen niet het geval zijn. Immers wanneer de vleugelvorm gegeven is, zal het alleen door een speciale keuze van den vorm van het verloop van den invalshoek mogelijk zijn, een elliptische circulatieverdeeling te krijgen.

Bovenstaande beschouwing geldt alleen voor het geval, dat c_2 van nul verschilt. Is $c_2=0$, dan is, zooals onmiddellijk uit (7) te zien is, de niet-getordeerde vleugel voor alle waarden van c_a de gunstigste. Een omhullende in den boven aangegeven zin bestaat dan niet.

43. Getallenvoorbeelden.

Voor twee vleugels van verschillende tapschheid werden de resultaten in de hier aangegeven richting uitgewerkt. De eerste („vleugel *a*") was sterk tapsch (verhouding van eind- tot middenkoorde q=0,24), de tweede („vleugel *b*") daarentegen veel minder (q=0,60). Beide hadden een ongeveer lineair verloopenden invalshoek. Daar deze twee gevallen uit het beschikbare materiaal van reeds vroeger berekende vleugels gekozen werden, verschilden de vleugels ook in andere opzichten (slankheid, profieleigenschappen) eenigszins. Deze verschillen kunnen echter, waar de bespreking hier slechts ten doel heeft een algemeenen indruk te geven, als onbelangrijk buiten beschouwing blijven.

De waarden van de in (7) voorkomende coëfficiënten bleken te zijn:

vleugel *a* (sterk tapsch): $c_1 = +0,05191$; $c_2 = -0,000186$; $c_3 = +0,0000250$;
vleugel *b* (minder tapsch): $c_1 = +0.05013$; $c_2 = +0,000143$; $c_3 = +0,0000384$;

Voor beide vleugelvormen werd de geinduceerde weerstand berekend voor den niet-getordeerden vleugel, voor de omhullende en voor den elliptischen vleugel met dezelfde slankheid (O/b^2). Dit leverde als resultaat:

	vleugel *a*	vleugel *b*
niet-getordeerden vleugel:	$c_{wi} = 0,05191\ c_a^2$;	$c_{wi} = 0,05013\ c_a^2$
omhullende :	$c_{wi} = 0,05053\ c_a^2$;	$c_{wi} = 0,04960\ c_a^2$
elliptische vleugel :	$c_{wi} = 0,04985\ c_a^2$;	$c_{wi} = 0,04918\ c_a^2$

De verhouding tusschen de geinduceerde weerstanden voor de drie genoemde gevallen is dus voor vleugel *a*: 1,041 : 1,014 : 1 en voor vleugel *b*: 1,019 : 1,009 : 1. Gelet op de in punt 42 besproken beteekenis van de omhullende volgt hier dus uit, dat voor vleugel *a* door torsie van den vleugel een verbetering van ongeveer $2\frac{1}{2}\%$ van c_{wi} voor één bepaalde waarde van c_a verkregen kan worden. Ook in dit punt is dan de geinduceerde weerstand nog ongeveer $1\frac{1}{2}\%$ hooger dan die van den overeenkomstigen elliptischen vleugel. Voor vleugel *b* bedragen deze verschillen beide 1%.

In fig. 3 is het verschil in geinduceerden weerstand tusschen den beschouwden vleugel en den elliptischen gegeven voor vleugel *a* met eenige verschillende waarden van $\Delta\alpha$ en voor de bijbehoorende omhullende. Op deze laatste zijn de punten aangegeven, waar de krommen voor de vleugels met de bijgeschreven waarden van $\Delta\alpha$ haar zouden raken.

Mogelijk ten overvloede zij hier opgemerkt, dat de in dit punt gegeven resultaten betrekking hebben op betrekkelijk willekeurige gevallen. Het zou dus onjuist zijn hieruit kwantitatieve conclusies te trekken over hetgeen in het algemeen bereikbaar is.

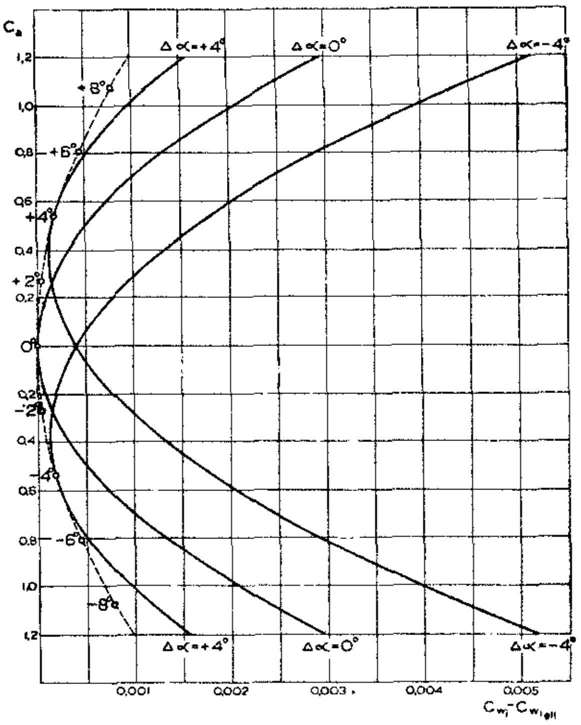


Fig 3. Verschil in geinduceerden weerstand tusschen de vleugel met elliptische circulatieverdeeling ($c_{wi\,ell}$) en vleugels van een bepaalden vorm met verschillende grootte ($\Delta\alpha$) van het verloop van den invalshoek (c_2 negatief).
o— — — —o: omhullende.

44. De invloed van den vorm van den vleugel.

In het bovenstaande is gebleken, dat de waarde van den coëfficiënt c_2, doch in het bijzonder ook zijn teeken van belang is. Is hij positief, dan zal, teneinde den geinduceerden weerstand bij positieve c_a te verminderen, den vleugel een negatief verloop van den invalshoek gegeven moeten worden, m.a.w. de invalshoek zal naar buiten toe moeten afnemen. Voor negatieve waarden van c_2 is daarentegen het omgekeerde het geval.

De waarde en het teeken van c_2 zijn afhankelijk van den vorm van den vleugel en van dien van het verloop van den invalshoek. Zijn waarde kan alleen door voor ieder geval afzonderlijk uit te voeren berekeningen bepaald worden. Het lijkt echter wel mogelijk, zij het dan ook op grond van eenigszins speculatieve beschouwingen, in algemeene trekken het verband tusschen zijn teeken en den vorm van den vleugel aan te geven. Voor zoover men zich beperkt tot in de praktijk voorkomende vormen van het invalshoekverloop (lineair of nagenoeg lineair), zal dit teeken hoofdzakelijk afhankelijk zijn van het verloop van de vleugelkoorde, dus van den vleugelvorm in engeren zin.

Van den elliptischen vleugel is bekend, dat hij in niet-getordeerden toestand den minimum geinduceerden weerstand heeft. Ieder verloop van den invalshoek geeft dus steeds een vermeerdering van c_{wi}. Boven werd gevonden, dat dit alleen het geval zal zijn bij vleugels, waarvoor $c_2 = 0$ is. Voor den elliptischen vleugel is dus steeds $c_2 = 0$.

Bij de in punt 43 besproken voorbeelden bleek voor den daar beschouwden, sterk tapschen vleugel c_2 een negatieve, voor den minder tapschen daarentegen een positieve waarde te hebben.

Deze feiten, te zamen met een nog volgende aerodynamische beschouwing, doen vermoeden, dat, wat het teeken van c_2 betreft, de volgende uitspraak gerechtvaardigd is:

> voor vleugels, waarbij in niet-getordeerden toestand de circulatieverdeeling voor het buitendeel voller (resp. minder vol) is dan de elliptische, zal c_2 positief (resp. negatief) zijn.

De eerste groep (circulatieverdeeling voller dan de elliptische) omvat de rechthoekige en weinig tapsche vleugels, de tweede de sterk tapsche vleugels.

Aerodynamisch kan dit als volgt verklaard worden. Bij een niet-getordeerden, rechthoekigen of weinig-tapschen vleugel is de circulatie aan het buitendeel relatief grooter dan bij de overeenkomstige elliptische. Tengevolge hiervan is de geinduceerde weerstand in eerstgenoemd geval grooter. Geeft men nu den vleugel een negatief verloop van den invalshoek, dan zal de circulatie voor het buitendeel afnemen, de circulatieverdeeling dus naar de elliptische naderen en de geinduceerde weerstand afnemen. In punt 41 werd besproken, dat dit typisch is voor vleugels met een positieve waarde van c_2.

Voor een sterk tapschen vleugel geldt een soortgelijke redeneering met het eenige verschil, dat hier bij den niet-getordeerden vleugel de circulatie aan het buitendeel relatief te laag is en dus een positief verloop van den invalshoek noodig is om een vermindering van c_{wi} te krijgen.

45. De praktische beteekenis van het boven besprokene.

451. Algemeen.

Het bovenstaande geeft aanleiding tot eenige gevolgtrekkingen van praktisch belang. Evenals de voorafgaande bespreking kunnen zij echter niet anders dan kwalitatief zijn. De vraag of de verschillen veroorzaakt door den verloopenden invalshoek zoo groot zijn, dat zij praktisch van beteekenis zijn, zal voor ieder geval afzonderlijk beschouwd moeten en meestal eerst na het uitvoeren van berekeningen beantwoord kunnen worden.

Een vleugel met verloopenden invalshoek kan zoowel op grond van aerodynamische als van constructieve overwegingen toegepast worden. Alleen de eersten zullen nader beschouwd worden, waarbij dan als belangrijkste genoemd kunnen worden: verminderen van den geinduceerden weerstand, verkrijgen van langsstabiliteit en tegengaan van ongewenschte loslatingsverschijnselen. Uit den aard der zaak zal de bespreking hier beperkt blijven tot de verandering in den geinduceerden weerstand, die het gevolg is van een, soms om andere redenen gewenschte, torsie van den vleugel.

Opgemerkt dient nog te worden, dat de volgende beschouwingen, voor zoover zij betrekking hebben op den invloed, die het teeken van den coëfficiënt c_2 heeft, gebaseerd zijn op de in punt 41 en 42 afgeleide en met zekerheid vaststaande resultaten. Waar echter gesproken wordt over den invloed van den vleugelvorm wordt uitgegaan van het in punt 44 besprokene, zoodat hierbij het daar reeds aangeduide voorbehoud geldt.

452. Verloopende invalshoek om den geinduceerden weerstand te verminderen.

Vermindering van den geinduceerden weerstand voor alle waarden van c_a is niet mogelijk. Door een juiste keuze van de grootte van het verloop kan echter steeds (met uitzondering van den elliptischen vleugel) voor een zeker gebied van c_a verbetering verkregen worden. Hierbij doen zich echter twee beperkingen voor, waarvan de eene het gevolg is van de wijze, waarop vergrooten van de torsie c_{wi} beinvloedt, terwijl de andere samenhangt met den vleugelvorm.

Bij vergrooting van het verloop van den invalshoek verschuift namelijk het gebied, waarin vermindering van c_{wi} optreedt, naar steeds hoogere waarden van c_a, zoodat het tenslotte buiten het praktisch van belang zijnde gebied komt te liggen. Bovendien zal daarbij c_{wi} bij lagere waarden van c_a steeds toenemen.

De tweede beperking wordt gevormd door de omstandigheid, dat bij vleugels, waarvoor c_2 negatief is, $\Delta\alpha$ positief moet zijn om bij positieve waarden van c_a een vermindering van c_{wi} te verkrijgen. Dit beteekent echter, dat de invalshoek op het buitendeel van den vleugel grooter moet worden dan in het midden. Er bestaat reden om te vermoeden, dat „c_2 negatief" beteekent: sterk tapsche vleugels. Bij dergelijke vleugels is echter reeds in niet-getordeerden toestand de aerodynamische invalshoek voor het buitendeel grooter dan in het midden[2]). Positieve torsie van den vleugel, die een verdere vergrooting van dezen hoek geeft, kan dan bezwaren meebrengen. Immers zal deze tengevolge kunnen hebben, dat bij grooten invalshoek van den vleugel de strooming aan het buitendeel het eerste loslaat, hetgeen een ongunstigen invloed op de dwarsstabiliteit heeft. De toepassing van verloopenden invalshoek als middel om den geinduceerden weerstand te verminderen, zal in het algemeen dus beperkt moeten blijven tot vleugels met positieve waarde van c_2, waarschijnlijk dus tot rechthoekige en weinig tapsche vleugels, tenzij bij sterk tapsche vleugels het loslaten van de strooming op het buitendeel door bijzondere maatregelen tegengegaan wordt.

453. Verloopende invalshoek om langsstabiliteit te verkrijgen.

Verloopende invalshoek wordt bij staartlooze vliegtuigen toegepast als middel ter verkrijging van langsstabiliteit. Hierbij moet de vleugel òf een positieven pijlvorm (vleugeluiteinden achter de middendoorsnede) en negatief verloop van den invalshoek òf een negatieven pijlvorm en positieve torsie hebben.

In eerstgenoemd geval zal de torsie van den vleugel een vermeerdering van den geinduceerden weerstand voor alle positieve waarden van c_a meebrengen, wanneer c_2 negatief of nul is. Is daarentegen c_2 positief, dan blijft deze vermeerdering beperkt tot een gebied in de omgeving van $c_a = 0$ en zal bij de daar boven vallende positieve waarden van c_a een vermindering optreden. Gebruik makend

[2]) Zie o.m. de laatste in noot 1 aangegeven publicatie.

van hetgeen in punt 44 besproken is over het verband tusschen het teeken van c_2 en den vleugelvorm kan dus gezegd worden: stabiliseering door positieven pijlvorm en negatief verloop van den invalshoek zal in het algemeen bij sterk tapsche en elliptische vleugels een ongunstigen invloed hebben op den geinduceerden weerstand. daarentegen zal zij bij rechthoekige en weinig tapsche vleugels een gedeeltelijke verbetering kunnen geven.

Voor het tweede geval (negatieve pijlvorm en positieve torsie) geldt, afgezien van den elliptischen vleugel, het omgekeerde. Voor dit type bestaat echter tot nu toe weinig belangstelling, waarschijnlijk als het gevolg van andere bezwaren, die het naar buiten toe vergrooten van den meetkundigen invalshoek meebrengt (minder gunstige verdeeling van de vleugelbelasting, vergrooten van de mogelijkheid van loslaten van de strooming aan het buitendeel van den vleugel bij groote invalshoeken). Er bestaat dus geen reden er hier nader op in te gaan.

454. Verloopende invalshoek om ongewenschte loslating tegen te gaan.

Voor zoover dit verschijnsel niet het gevolg is van de aanwezigheid van verstorende lichamen (b.v. motorgondels aan den vleugelneus of van een ongunstigen profielvorm van het buitendeel van den vleugel), zal het loslaten van de strooming bij groote invalshoeken alleen bij sterk tapsche vleugels aan het buitendeel van deze beginnen. Het is in beginsel mogelijk hierin verbetering te brengen door den vleugel een negatief verloop van den invalshoek te geven. Dit zal echter, waar c_2 hier negatief is, steeds een vermeerdering van den geinduceerden weerstand voor alle positieve waarden van c_a veroorzaken.

5. Profielweerstand.

In sommige gevallen kan het bovenstaande voor een deel zonder meer op den profielweerstand toegepast worden. Hiertoe is noodig, dat voor alle elementen van den vleugel de coëfficiënt ervan benaderd kan worden door:

$$c_{w\infty} = d_0 + d_1 \alpha_e^2 \qquad (11)$$

Hierin zijn:

$c_{w\infty}$ = coëfficiënt van den profielweerstand van het element,

d_0, d_1 = positieve constanten, die, afgezien van een geringen invloed van het Reynolds'sche getal, alleen afhangen van den profielvorm,

α_e = effectieve of aerodynamische invalshoek, zijnde het verschil tusschen de meetkundige en de geinduceerde invalshoek (resp. α_g en α_i).

Zooals in punt 2 en 31 besproken werd (zie (1) en (3)) zijn α_g en α_i beiden lineair afhankelijk van α en $\Delta\alpha$. Dit geldt dus ook voor α_e. Uit (11) volgt nu, dat de profielweerstand van het element geschreven kan worden *in den algemeenen vorm:*

$$F_3(x, \alpha, \Delta\alpha) = f_5(x) + \alpha^2 f_6(x) + 2\alpha\,\Delta\alpha\, f_7(x) + \Delta\alpha^2 f_8(x) \qquad (12)$$

Integreeren en bepalen van den coëfficiënt van den profielweerstand voor den geheelen vleugel leidt dan tot:

$$c_{wp} = e_0 + e_1 \alpha^2 + 2e_2\, \alpha \Delta\alpha + e_3 \Delta\alpha^2 \qquad (13)$$

Door elimineeren van α uit (4) en (13) wordt tenslotte als eindresultaat verkregen:

$$c_{wp} = g_0 + g_1 c_a^2 + 2 g_2\, c_a \Delta\alpha + g_3 \Delta\alpha^2 \qquad (14)$$

Over de hierin voorkomende coëfficiënten g kan het volgende worden opgemerkt.

Uit de boven schematisch aangeduide afleiding volgt, dat g_0 en g_1 alleen afhankelijk zijn van de in (11) voorkomende coëfficiënten en van den vorm van den vleugel, g_2 en g_3 bovendien ook van den vorm van het verloop van den invalshoek. Wat de coëfficiënten d_0 en d_1 betreft heeft de eerste alleen invloed op de waarde van g_0, de tweede op die van g_1 t/m g_3.

Evenals dit bij den geinduceerden weerstand het geval was, kunnen ook hier eenvoudige beschouwingen uitsluitsel geven over *het teeken van sommige* der coëfficiënten. De niet-getordeerde vleugel met lift nul ($\Delta\alpha=0$, $c_a=0$) zal een positieve profielweerstand hebben, waaruit volgt, dat g_0 steeds positief zal zijn. Hierbij is α_e nul voor alle elementen. Geeft men den vleugel nu een invalshoek α, terwijl $\Delta\alpha=0$ blijft, dan zullen zoowel c_a als α_e van nul verschillen. Volgens (11) wordt dan de profielweerstand van de elementen en dus ook die van den geheelen vleugel grooter. Uit (14) blijkt dan, dat ook g_1 steeds positief zal zijn.

Vergelijkt men den niet-getordeerden vleugel ($\Delta\alpha=0$) met den getordeerden ($\Delta\alpha\neq 0$), beiden bij $c_a=0$, dan is bij den eersten α_e overal nul, bij den laatsten daarentegen deels grooter, deels kleiner dan nul. Bijgevolg is de profielweerstand in laatstgenoemd geval ($\Delta\alpha\neq 0$) grooter. *g_3 zal dus steeds positief moeten zijn.*

De uitdrukking voor den profielweerstand (14) heeft, afgezien van de constante term g_0, geheel denzelfden vorm als die voor den geinduceerden weerstand (7). De in punt 41, 42 afgeleide resultaten en de daaruit voortvloeiende in punt 45 besproken gevolgtrekkingen gelden dus ook hier, tenminste voor zoover daarbij sprake is van den invloed van de coëfficiënten (daar: c_1 t/m c_3, hier: g_1 t/m g_3) op de weerstandsverandering bij torsie van den vleugel. Een eenvoudig verband tusschen den vleugelvorm en het teeken van den belangrijksten coëfficiënt, zooals dat in punt 44 besproken werd, bestaat hier niet. Het is dus niet mogelijk in het algemeen aan te geven, welke rol de vorm van den vleugel hier speelt. Voorts dient er op gelet te worden, dat bij den profielweerstand steeds het constante deel g_0 optreedt, terwijl een overeenkomstige term bij de geinduceerde niet voorkomt.

Bij de bovenstaande beschouwingen werd uitgegaan van de veronderstelling, dat de profielweerstand der elementen in den vorm (11) benaderd kan worden. Dit is zeker het geval voor symmetrische profielen bij niet al te groote waarden van α_e. Ook voor andere profielen kan een dergelijke benadering toelaatbaar zijn. Meestal zal daarbij echter in (11) ook een eerste-machts-term in α_e aangenomen moeten worden, met het gevolg, dat in (14) termen zullen optreden, die lineair zijn in c_a en $\Delta\alpha$. Een dergelijke meer gecompliceerde vorm voor c_{wp} kan op soortgelijke wijze onderzocht worden als hier voor de meer eenvoudige geschiedde. Daarop zal hier echter niet nader worden ingegaan.

6. *Samenvatting.*

a. De geinduceerde weerstand van een vleugel met verloopenden invalshoek kan gegeven worden in den vorm

$$c_{wi} = c_1 c_a^2 + 2 c_2 c_a \Delta\alpha + c_3 \Delta\alpha^2$$

$\Delta\alpha$ is een maat voor de torsie van den vleugel. c_1, c_2 en c_3 zijn constanten, die afhankelijk zijn van den vorm van den vleugel en van de wijze, waarop de invalshoek over de vleugelbreedte verloopt, doch onafhankelijk van de door $\Delta\alpha$ bepaalde grootte van dit verloop en van den liftcoëfficiënt c_a (punt 3).

b. Door verloopenden invalshoek wordt steeds, behoudens in het onder *d* te noemen geval, de geinduceerde weerstand voor sommige waarden voor c_a vermeerderd, voor andere verminderd. In de omgeving van $c_a = 0$ wordt c_{wi} er steeds door vergroot. Het is mogelijk om door torsie voor alle positieve waarden van c_a c_{wi} te vergrooten, echter niet om haar over dit geheele gebied te verminderen (punt 41).

c. Bij een gegeven vorm van den vleugel en van het verloop van den invalshoek bestaat voor iedere waarde van c_a een bepaalde $\Delta\alpha$, die den geinduceerden weerstand minimum maakt. Deze waarde van $\Delta\alpha$ is echter afhankelijk van die van c_a. De meest gunstige toestand kan dus slechts bij één waarde van c_a bereikt worden. Als regel is ook dan nog de geinduceerde weerstand grooter dan die van den vleugel met elliptische circulatieverdeeling (punt 42).

d. Een uitzondering op het onder *b* en *c* besprokene vormen die vleugels, waarvoor $c_2 = 0$ is. Daarbij wordt door verloopenden invalshoek de geinduceerde weerstand steeds vergroot voor alle waarden van c_a (punt 41).

e. Het teeken van het verloop van den invalshoek, dat gegeven moet worden om in een bepaald geval vermindering van den geinduceerden weerstand te verkrijgen, hangt af van dat van den coëfficiënt c_2 (punt 41).

f. Er bestaat reden om te vermoeden, dat voor vleugels met een lineair of ten naaste bij lineair verloop van den invalshoek, het volgende verband bestaat tusschen den vorm van den vleugel eener- en het teeken van c_2 en dat van het onder *e* bedoelde verloop anderzijds:

voor rechthoekige en weinig tapsche vleugels is c_2 positief en moet $\Delta\alpha$ negatief zijn om, voor zoover mogelijk, den geinduceerden weerstand bij positieve c_a te verminderen; voor sterk tapsche vleugels daarentegen is c_2 negatief en moet $\Delta\alpha$ positief zijn om dit resultaat te verkrijgen.

De grens tusschen beide groepen wordt gevormd door den elliptischen vleugel, voor welken $c_2 = 0$ is en waarbij ieder verloop van den invalshoek een vermeerdering van den geinduceerden weerstand meebrengt (punt 44).

g. De verkregen uitkomsten laten kwalitatieve gevolgtrekkingen toe over den invloed van den verloopenden invalshoek voor de gevallen, waarin deze toegepast wordt om den geinduceerden weerstand te verminderen, langsstabiliteit te verkrijgen of ongewenschte loslatingsverschijnselen tegen te gaan (punt 45).

h. In sommige gevallen kan hetgeen afgeleid werd voor den geinduceerden weerstand zonder meer ook toegepast worden op den profielweerstand. Een eenvoudig verband tusschen de weerstandsverandering en den vleugelvorm kan hier echter niet gegeven worden (punt 5).

BIJLAGE.

Definities.

a. Een *element* van den vleugel wordt aangegeven door de *coördinaat* x, zijnde zijn afstand van het midden van den vleugel.

b. De „*meetkundige invalshoek van een element van den vleugel*" $\alpha_g(x)$ is de hoek tusschen de lijn van nul-lift van het profiel van dit element en de richting van de ongestoorde strooming, d.w.z de strooming op grooten afstand voor den vleugel.

c. Een „*getordeerde vleugel*" of „*vleugel met verloopenden invalshoek*" is een vleugel, waarbij de meetkundige invalshoek, als gedefinieerd onder *b*, niet voor alle elementen dezelfde waarde heeft.

d. De „*invalshoek van den vleugel*" α is de meetkundige invalshoek van het in het midden van den vleugel gelegen element.

e. De „*vorm van den vleugel*" omvat, met uitzondering van de meetkundige invalshoeken der elementen, alle grootheden, die invloed hebben op de circulatieverdeeling.

f. De „*verdraaiing van een element*" $\alpha_0(x)=\alpha_1(x)\Delta\alpha$ is het verschil in meetkundigen invalshoek tusschen het beschouwde element en dat in het midden van den vleugel.

g. Het „*verloop van den invalshoek*" omvat de in *f* gegeven verdraaiing voor alle elementen.

h. Bij het onder *g* genoemde verloop worden onderscheiden de „*vorm*" $\alpha_1(x)$ en de „*grootte*" $\Delta\alpha$ ervan. De eerste, die een functie van x is, geeft de verdraaiing van de verschillende elementen, echter zoodanig gelijkvormig vergroot of verkleind, dat deze voor een bepaald element, b.v. dat aan het uiteinde van den vleugel de waarde 1 heeft. De tweede is dan een constante factor, bepaald door de werkelijke verdraaiing van laatstgenoemd element.
Wat het teeken betreft zal aangenomen worden, dat $\alpha_1(x)$ steeds geheel of overwegend positief is. Of de vleugel een positief dan wel een negatief verloop van den invalshoek (of wel positieve of negatieve torsie) heeft, hangt dus af van het teeken van $\Delta\alpha$.

Opgemerkt dient te worden, dat de definitie *c* insluit, dat niet iedere vleugel, waarvan de op de gewone wijze op de koorde gemeten invalshoek een constante of niet-constante waarde heeft, respectievelijk een niet-getordeerde of getordeerde vleugel is. Ook de hoek tusschen de koorde en de lijn van nul-lift voor het profiel moet hierbij in rekening gebracht worden.

RAPPORT A. 589.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De tunnelcorrectie voor een schroef in een „gemengden" tunnel

door

Ir. C. KONING.

RAPPORT A. 589.

De tunnelcorrectie voor een schroef in een „gemengden" tunnel.

Uittreksel.

a. Omvang van het hier beschouwde vraagstuk (punt 1).

Behandeld wordt het gedrag van een schroef in een windtunnel, waarbij de begrenzing van het voorste deel van den luchtstroom gevormd wordt door een vasten wand, die van het achterste deel door een oppervlak van constanten druk. De schroef bevindt zich in het scheidingsvlak tusschen beide deelen (fig. 1).

b. Vergelijkingen ter bepaling van de snelheden (punt 2, 3, 5).

Uitgegaan wordt van veronderstellingen aansluitend bij die van de eenvoudige straal-theorie (Froude-Rankine) van de schroef. De betrekkingen tusschen de drukken en snelheden in de in fig. 1 aangegeven doorsneden worden dan gegeven door (6) t/m (11), die na elimineeren van de drukken overgaan in (12) t/m (14). (21) t/m (23) zijn de oplossingen van deze vergelijkingen.

c. Tunnelcorrectie (punt 4).

De correctie voor den invloed van de beperkte doorsnede van den luchtstroom bestaat, evenals bij de schroef in een gesloten tunnel, uit een correctie op de windsnelheid. De gecorrigeerde snelheid is gegeven door (26).

d. Bijzonderheden (punt 5, 6).

De snelheden in de verschillende doorsneden en de gecorrigeerde snelheid hangen alleen af van de tunnelsnelheid v_1, de parameter λ en de gereduceerde trek t.

Er bestaat een grenstoestand, waarbij de snelheid in den ring buiten de schroef nul wordt. Deze is gegeven door (29).

e. Getallenvoorbeelden (punt 7).

Het verloop van de snelheden werd berekend voor veranderlijke t bij constante λ(d/D) (fig. 4) en voor veranderlijke λ (d/D) bij constante t (fig. 5).

f. Vergelijking met gesloten tunnel (punt 7e).

De gecorrigeerde snelheid wordt vergeleken met die voor een gesloten tunnel (fig. 4b, 5b). De verschillen tusschen beide gevallen blijken gering te zijn.

g. Conclusies (punt 9).

De hier beschouwde opstelling van de schroef in een gemengden tunnel is, wat correctie betreft, minder gunstig dan die in een vrijstraal en biedt geen voordeel boven die in een gesloten tunnel.

Het is van belang ook het vraagstuk in zijn meer algemeenen vorm, waarbij de schroef verder naar achteren opgesteld is, te onderzoeken, omdat in een vrijstraaltunnel toch steeds vóór de schroef een vaste begrenzing van den strooming aanwezig zal zijn.

h. Notaties.

Voor de beteekenis der gebezigde notaties kan verwezen worden naar de opgave aan het einde van het rapport.

RAPPORT A. 589.

L'influence des parois pour une hélice propulsive dans une soufflerie à parois mixtes.

Résumé.

a. Etendue du problème traité ici (point 1).

L'influence de la veine limitée de la soufflerie est discutée pour le cas de parois fixes en avant et d'une surface libre en arrière, l'hélice étant située dans la section de transition (Fig. 1).

b. Equations pour déterminer les vitesses (point 2, 3, 5).

Partant des suppositions de la théorie de l'hélice idéale (Froude-Rankine) les relations (6) jusqu'à (11) entre les vitesses et les pressions dans les sections, indiquées par la figure 1, sont établies. Par élimination des pressions elles sont transformées en (12) jusqu'à (14), dont (21) jusqu'à (23) sont les solutions.

c. Correction pour l'influence de la veine limitée (point 4).

Comme dans le cas d'une soufflerie à parois fixes, la correction pour l'influence de la veine limitée est une correction sur la vitesse. La vitesse corrigée est donnée par (26).

d. Discussion des résultats (point 5, 6).

Les vitesses dans les sections, indiquées par la figure 1, et la vitesse corrigée ne dépendent que de la vitesse de la soufflerie v_1, du paramètre λ et de la traction réduite t.

L'état critique, pour lequel la vitesse dans la section annulaire autour de l'hélice est zéro, est déterminé par (29).

e. Exemples numériques (point 7).

Les vitesses ont été calculées tant pour des valeurs différentes de t et une valeur constante de λ (d/D) (Fig. 4) que pour une valeur variable de λ (d/D), t étant constante (Fig. 5).

f. Comparaison avec la soufflerie à parois fixes (point 7e).

La vitesse corrigée fut comparée avec celle d'une soufflerie à parois fixes. Les différences entre les résultats sont de peu d'importance.

g. Conclusions (point 9).

A point de vue de correction le cas considéré d'une hélice dans une soufflerie à parois mixtes est défavorable à la montage dans une veine libre et de même valeur que celle dans une soufflerie à parois fixes.

Il serait important d'étudier aussi le problème sous la forme plus générale l'hélice étant située dans une section quelconque de la partie à surface libre, parceque toute soufflerie à veine libre doit avoir des parois fixes partielles.

h. Symboles.

$c_T = \frac{T}{\varrho n^2 d^4}$ = coefficient de traction,

d = diamètre de l'hélice,

n = nombre de révolutions,

p = pression,

$t = \frac{2T}{\varrho S v_1^2}$ = traction réduite,

v = vitesse,

D = diamètre de la soufflerie,

$O = \frac{1}{4}\pi D^2$ = surface de la section de la soufflerie,

$S = \frac{1}{4}\pi d^2$ = surface du cercle de l'hélice,

T = traction de l'hélice,

V = vitesse corrigée (voir *c*),

$\lambda = \sqrt{\frac{O}{O-S}} = \frac{1}{\sqrt{1-(d/D)^2}}$,

ϱ = densité de l'air.

Indices.

1, 2, 3, 4: dans les sections, indiquées par la figure 1,

s : dans le souffle de l'hélice,

∞ : hélice dans une veine illimitée,

gr : pour l'état critique (voir *d*).

REPORT A. 589.

The wall interference for a propeller in a mixed windtunnel.

Summary.

a. Extend of the problem treated here (point 1).

The behaviour of a propeller in a windtunnel is discussed for the case in which the flow in front of the propeller is constrained by a cylindrical fixed wall, whereas downstreams it is bounded by a surface of constant pressure. The propeller is situated in the section between these two parts (fig. 1).

b. Velocity equations (point 2, 3, 5).

By application of the axial momentum theory the relations (6) till (11) between the velocities and pressures in the sections indicated in fig. 1 are obtained. Elimination of the pressure leads to (12) till (14), the solution of these equations is given by (21) till (23).

c. Correction for interference (point 4).

As in the case of a propeller in a windtunnel with a closed working section the correction may be applied by introduction of an equivalent free air speed, which is here given by (26).

d. Discussion of results (point 5, 6)

The velocities in the sections mentioned above and the equivalent free air speed depend on the windtunnel speed v_1, the parameter λ and the reduced thrust t only.

A limiting state exists, in which the velocity in the annular space surrounding the propeller is zero. It is given by (29).

e. *Numerical examples (point 7).*

The velocities have been calculated both for different values of t at constant λ (d/D) (fig. 4) and for different values of λ (d/D) at constant t (fig. 5).

f. *Comparison with closed tunnel (point 7e).*

The equivalent free air speed is compared with that for a windtunnel with closed working section (fig. 4b, 5b). The results differ only slightly.

g. *Conclusions (point 9).*

As regards interference the arrangement for testing propellers considered here is less favourable than a free jet and has no advantages over a closed working section.

A study of the more general problem, in which the propeller is situated in an arbitrary section of the „free jet part", would be of interest as in a free jet tunnel part of the flow is always constrained by fixed walls.

h. *Notation.*

The symbols used in the report have the following meaning:

$c_T = \dfrac{T}{\varrho n^2 d^4}$ = thrust coefficient,

d = diameter of propeller,

n = revolutions per second,

p = pressure,

$t = \dfrac{2T}{\varrho S v_1^2}$ = reduced thrust,

v = axial velocity,

D = diameter of windtunnel,

$O = \frac{1}{4}\pi D^2$ = area of tunnel section,

$S = \frac{1}{4}\pi d^2$ = area of propeller disc,

T = thrust,

V = equivalent free air speed,

$\lambda = \sqrt{\dfrac{O}{O-S}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(d/D)^2}}$,

ϱ = mass density of air.

Suffices:

1, 2, 3, 4: in the corresponding sections (as indicated in fig. 1),

s : in the slipstream,

∞ : propeller in unrestricted flow ($D=\infty$),

gr : in the limiting state (see under *d*).

BERICHT A. 589.

Die Windkanalkorrektur für einen Propeller in einem „gemischten" Windkanal.

Zusammenfassung.

a. *Umfang des behandelten Problems (Punkt 1).*

Betrachtet wird die Wirkung eines Propellers in einem Windkanal, wobei der Luftstrahl vorn durch Wände, hinten durch eine freie Oberfläche begrenzt wird. Der Propeller steht dabei in der Trennungsebene zwischen diesen beiden Teilen (Abb. 1).

b. *Gleichungen zur Bestimming der Geschwindigkeiten (Punkt 2, 3, 5).*

Auf Grund der einfachen Strahltheorie (Froude-Rankine) des Propellers werden die Gleichungen (6) bis (11) aufgestellt, die die Beziehungen zwischen die Geschwindigkeiten und Drucke in den in Abb. 1 angedeuteten Querschnitten angeben. Durch Elimination der Drucke gehen sie in die Gleichungen (12) bis (14) über, deren Lösungen von (21) bis (23) gegeben sind.

c. *Windkanalkorrektur (Punkt 4).*

Der Einflusz der beschränkten Abmessungen des Luftstrahles läszt sich, wie beim geschloszenen Kanal, in eine Korrektur auf die Geschwindigkeit ausdrücken. Die korrigierte Geschwindigkeit wird von (26) gegeben.

d. *Einzelheiten der Lösungen (Punkt 5, 6).*

Die Geschwindigkeiten in den oben erwähnten Querschnitten, sowie die korrigierte Geschwindigkeit, sind nur abhängig von der Windkanalgeschwindigkeit v_1, dem Beiwert λ und dem reduzierten Schub t.

Der Grenzfall, in dem die Geschwindigkeit in dem Kreisring auszerhalb des Propellers Null wird, ist durch (29) bestimmt.

e. *Zahlenbeispiele (Punkt 7).*

Die Geschwindigkeiten wurden berechnet als Funktion des Schubes t (Abb. 4) und des Beiwertes λ (d/D) (Abb. 5) für je einen Wert von λ (d/D), bezw. von t.

f. Vergleich mit dem geschlossenen Windkanal (Punkt 7e).

Die korrigierte Geschwindigkeit wird verglichen mit der für einen geschlossenen Kanal (Abb. 4b, 5b). Die Unterschiede sind nur unwesentlich.

g. Folgerungen (Punkt 9).

Die hier betrachtete Anordnung des Propellers ist, soweit Korrekturen betrifft, im Nachteil in Vergleich mit der in einem freien Strahl und hat der in einem geschloszenen Kanal gegenüber keine Vorteile.

Die allgemeinere Form des Problems, bei der der Propeller an einer willkürlichen Stelle im Freistrahlteil angeordnet ist, verdient Interesse, weil in jedem Freistrahl die Strömung teilweise durch Wände beschränkt wird.

h. Formelzeichen.

Die im Bericht benutzten Formelzeichen haben folgende Bedeutung:

$c_T = \frac{T}{\varrho n^2 d^4}$ = Schubzahl,

d = Durchmesser des Propellers,

n = Drehzahl,

p = Druck,

$t = \frac{2T}{\varrho S v_1^2}$ = reduzierter Schub,

v = Axialgeschwindigkeit,

D = Durchmesser des Windkanals,

$O = \frac{1}{4}\pi D^2$ = Fläche des Windkanalquerschnittes,

$S = \frac{1}{4}\pi d^2$ = Schraubenkreisfläche,

T = Schub,

V = korrigierte Geschwindigkeit,

$\lambda = \sqrt{\frac{O}{O-S}} = \frac{1}{\sqrt{1-(d/D)^2}}$,

ϱ = Massendichte der Luft.

Zeiger:

1, 2, 3, 4: in den in Abb. 1 angegebenen Querschnitten,

s : im Schraubenstrahl,

∞ : Propeller in unbeschränkter Strömung,

gr : im unter *d* angegebenen Grenzfall.

RAPPORT A. 589.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De tunnelcorrectie voor een schroef in een „gemengden" tunnel.

door

Ir. C. KONING.

Overzicht.

De invloed van de beperkte doorsnede van de luchtstroom bij proeven met schroeven in een windtunnel wordt besproken voor het geval, waarbij de voorste helft van de begrenzing bestaat uit een vasten wand, de achterste uit een oppervlak van constanten druk (vrijstraal). De uitkomsten worden vergeleken met die voor een gesloten tunnel.

Indeeling.

1. *Inleiding.*

Wanneer een schroef in een windtunnel wordt onderzocht, zullen in het algemeen de beperkte afmetingen van de luchtstroom de strooming en daarmee ook de eigenschappen van de schroef beinvloeden.

De gevallen, waarin de begrenzing geheel gevormd wordt door een vasten wand (gesloten tunnel) of door een oppervlak van constanten druk (vrijstraal), zijn in de literatuur behandeld (lit. 1, 2, 4, 6[1]). In het eerste geval toont een op vereenvoudigende aannamen gebaseerde berekening, dat de invloed van den tunnelwand geëlimineerd kan worden door het aanbrengen van een correctie op de windsnelheid. Wordt dezelfde methode toegepast op het tweede geval, dan blijkt daarbij deze correctie nul te zijn. Beide uitkomsten werden voor niet al te groote schroeven van normalen vorm door experimenteele resultaten behoorlijk bevestigd (lit. 2, 6).

Een zuivere vrijstraaltunnel, d.w.z. een tunnel, waarbij de geheele begrenzing van de strooming gevormd wordt door een oppervlak van constanten druk, is echter onbestaanbaar. In werkelijkheid wordt de strooming zoowel voor als achter de vrijstraal steeds begrensd door vaste wanden. De vraag in hoeverre dit „gemengd" zijn van de begrenzing invloed heeft, werd tot nu toe niet behandeld. In het volgende wordt een bijzonder geval beschouwd, waarbij blijkt, dat deze invloed belangrijk kan zijn. De begrenzing van het voorste deel van de strooming wordt daarbij gevormd door een vasten wand, die van het achterste deel door een oppervlak van constanten druk, terwijl de schroef zich in het scheidingsvlak tusschen beide deelen bevindt. Deze opstelling is weliswaar nog in zooverre geidealiseerd, dat een vaste begrenzing om het achterste deel van de strooming ontbreekt en voorts ook niet de meest gebruikelijke. Zij geeft echter het voordeel, dat zij een betrekkelijk eenvoudige behandeling van het vraagstuk toelaat, en is overigens ook niet geheel van praktisch belang ontbloot.

Bij de bespreking van de resultaten wordt op sommige punten, die van theoretisch standpunt bezien belangwekkend zijn, wat verder ingegaan dan voor het bepalen van de correctie noodzakelijk is.

Tenslotte wordt de verkregen uitkomst voor de gecorrigeerde snelheid vergeleken met die voor den geheel gesloten tunnel.

---

[1]) De aanwijzingen „lit." verwijzen naar de literatuuropgave aan het einde van het rapport.

2. *Veronderstellingen.*

Aangenomen wordt, dat de schroef opgesteld is in een luchtstroom van cirkelvormige doorsnede en wel zoo, dat de hartlijnen van schroef en luchtstroom samenvallen. De begrenzing van de luchtstroom wordt vóór het vlak van de schroef, tot aan dit vlak, gevormd door een cylindrischen vasten wand (zie fig. 1), het overige deel door een oppervlak van constanten druk.

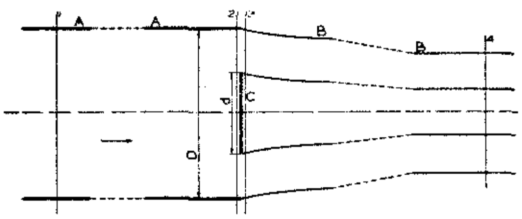


Fig. 1. Schematische voorstelling van de opstelling van de schroef in den windtunnel.

A : vaste wand,
B : oppervlak van constante druk („vrijstraal"),
C : schroefcirkel,
1 t/m 4: doorsneden, waarin de snelheden en drukken beschouwd worden.

Overzicht van de drukken en snelheden.

Doorsnede	buiten slipstroom		binnen slipstroom	
	druk	snelheid	druk	snelheid
1	p_1	v_1	p_1	v_1
2	p_2	v_2	p_{2s}	v_{2s}
3	p_2	v_2	p_{3s}	v_{2s}
4	p_2	v_2	p_2	v_{4s}

De veronderstellingen, die betrekking hebben op den aard van de strooming, komen in beginsel geheel overeen met die, waarvan de schroeftheorie van Rankine-Froude (lit. 3, 5) uitgaat, tevens ook met die, waarop de in punt *1* aangeduide behandeling van het hier beschouwde vraagstuk voor andere tunneltypen gebaseerd is. In het kort komen zij op het volgende neer.

De schroef wordt vervangen gedacht door een dunne schijf, waarin de druk van de erdoor stroomende lucht plotseling vergroot wordt, terwijl de snelheid onveranderd blijft. Deze druksprong heeft voor de geheele schijf dezelfde waarde.

De invloed van de radiale en tangentiale componenten van de snelheid wordt verwaarloosd.

Voor iedere doorsnede van de strooming, die bij de behandeling van het vraagstuk van belang is (zie punt 3a en fig. 1), hebben zoowel binnen als buiten den slipstroom de druk en de axiale snelheid een constante waarde. De waarde binnen en buiten den slipstroom kunnen echter verschillend zijn. Onder „slipstroom" wordt hier op de gebruikelijke wijze het gebied verstaan, dat ingenomen wordt door de lucht, die door den schroefcirkel gestroomd is of in de toekomst er door stroomen zal.

De invloed van samendrukbaarheid en wrijving wordt buiten beschouwing gelaten.

3. *De vergelijkingen ter bepaling van de snelheden.*

a. *Notaties.*

Een overzicht van de beteekenis der gebezigde symbolen is aan het einde van het rapport gegeven. Hierbij moet nog het volgende opgemerkt worden.

Van belang zijn de drukken p en axiale snelheden v in de vier in fig. 1 aangegeven doorsneden 1 t/m 4. Hiervan liggen 1 en 4 op grooten afstand resp. voor en achter de schroef, terwijl 2 en 3 doorsneden onmiddellijk voor en achter deze zijn. Druk en snelheid in genoemde doorsneden worden nu aangeduid met een index, die overeenkomt met het nummer van de doorsnede. Waar de waarden binnen en buiten den slipstroom verschillend zijn, wordt voor eerstgenoemde bovendien de index s toegevoegd.

Het zal later blijken, dat de verhoudingen van de snelheden alleen afhankelijk zijn van twee dimensielooze parameters. De eerste van deze, λ, is bepaald door het oppervlak van de tunneldoorsnede (O) en dat van den schroefcirkel (S):

$$\lambda = \sqrt{\frac{O}{O-S}} \tag{1}$$

Voor praktisch gebruik is het eenvoudiger haar waarde uit te drukken in de middellijnen van tunneldoorsnede (D) en schroef (d):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-(d/D)^2}} \tag{2}$$

De tweede parameter is de „gereduceerde trek" t, die verkregen wordt door de trek T van de schroef te deelen door het halve product van dichtheid van de lucht (ϱ), oppervlak van den schroefcirkel (S) en kwadraat van de tunnelsnelheid (v_1):

$$t = \frac{2T}{\varrho S v_1^2} \tag{3}$$

Tusschen deze grootheid en den gebruikelijken trekcoëfficiënt c_T bestaat de betrekking:

$$t = \frac{8}{\pi} c_T \left(\frac{nd}{v_1}\right)^2 \tag{4}$$

b. Eenige eenvoudige betrekkingen.

Uit den opzet van het vraagstuk volgen onmiddellijk eenige eenvoudige betrekkingen tusschen sommige grootheden. Hierdoor kan het aantal variabelen reeds van den aanvang af niet onbelangrijk beperkt worden.

Vanaf doorsnede 3 is de strooming begrensd door een oppervlak van constanten druk. Hieruit volgt, dat buiten den slipstroom de druk en dus ook de snelheid in de doorsneden 3 en 4 gelijk is.

De afstand tusschen de doorsneden 2 en 3 is zeer klein, bijgevolg kan aangenomen worden, dat buiten de slipstroom voor beide druk en snelheid gelijk zijn. Hetzelfde geldt, voorzoover de snelheid betreft, ook binnen den slipstroom.

De doorsneden 1 en 4 worden verondersteld op grooten afstand voor, resp. achter de schroef te liggen. De kromming van de stroomlijnen mag hier dus verwaarloosd worden en de druk zal over de geheele doorsnede dezelfde waarde hebben. Voor doorsnede 1 beteekent dit tevens constante snelheid. In doorsnede 4 daarentegen heeft de constante in de vergelijking van Bernoulli binnen en buiten den slipstroom, tengevolge van den druksprong in den schroefcirkel, een verschillende waarde, zoodat hier de snelheden verschillend zullen zijn.

Samenvattend leiden deze beschouwingen tot de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= p_3 = p_4 = p_{4s} \\ p_1 &= p_{1s} \\ v_2 &= v_3 = v_4 \\ v_1 &= v_{1s} \\ v_{2s} &= v_{3s} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Deze resultaten zijn reeds verwerkt in het bij fig. 1 gegeven overzicht van de drukken en snelheden.

c. Opstelling van de vergelijkingen.

Voor het bepalen van het verband tusschen den schroeftrek en de tunnelsnelheid als bekenden eenerzijds en de overige snelheden (desgewenscht ook de drukken) als onbekenden anderzijds, beschikt men nu over de betrekkingen tusschen:

druk en snelheid in de verschillende gebieden;

schroeftrek en druksprong in den schroefcirkel;

snelheid en doorsnede van de verschillende gebieden;

toename van de hoeveelheid van beweging van de door den tunnel stroomende lucht en de krachten, die er op werken.

De vergelijking van Bernoulli levert:

voor het gebied buiten den slipstroom:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\varrho v_2^2 \qquad (6)$$

voor het gebied binnen den slipstroom vóór de schroef:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_{2s} + \tfrac{1}{2}\varrho v_{2s}^2 \qquad (7)$$

voor het gebied binnen den slipstroom achter de schroef:

$$p_{3s} + \tfrac{1}{2}\varrho v_{2s}^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\varrho v_{4s}^2 \qquad (8)$$

De druksprong in den schroefcirkel is gelijk aan den trek van de schroef, gedeeld door het oppervlak van den schroefcirkel, dus:

$$S(p_{3s} - p_{2s}) = T \qquad (9)$$

Uit de overweging, dat door iedere doorsnede van den tunnel, in het bijzonder dus ook door 1 en 2, dezelfde hoeveelheid lucht zal stroomen, volgt:

$$O v_1 = (O-S)\,v_2 + S\,v_{2s} \qquad (10)$$

De toename van de hoeveelheid van beweging van de per tijdseenheid door den tunnel stroomende lucht is gelijk aan de er op werkende krachten in axiale richting. De hoeveelheid beweging van de instroomende lucht is $\varrho O v_1^2$. Voor het bepalen van deze grootheid voor de uitstroomende lucht moeten de gebieden binnen en buiten den slipstroom afzonderlijk beschouwd worden. Bovendien moeten, daar de oppervlakken in doorsnede 4 niet bekend zijn, de hoeveelheden lucht uitgedrukt worden in grootheden, die betrekking hebben op doorsnede 2. Zij zijn, resp. voor binnen en buiten den slipstroom, $\varrho S v_{2s}$ en $\varrho(O-S)v_2$. De hoeveelheid van beweging in doorsnede 4 is dan, eveneens voor beide luchthoeveelheden afzonderlijk, $\varrho S v_{2s} v_{4s}$ en $\varrho(O-S)v_2^2$. De krachten, die op de lucht werken, zijn de schroeftrek T en de resultante van de op het oppervlak werkende drukken $O(p_1-p_2)$. Bij dit laatste dient opgemerkt te worden, dat de druk p_2 niet alleen werkt in de doorsnede 4, doch tevens op het begrenzingsvlak van de straal tusschen de doorsneden 3 en 4, vandaar, dat hier ook O als oppervlak in rekening gebracht moet worden. Met invoering van de hier besproken waarden wordt de vergelijking voor de hoeveelheid van beweging:

$$\varrho S v_{2s} v_{4s} + \varrho(O-S)v_2^2 - \varrho O v_1^2 = T + O(p_1 - p_2) \qquad (11)$$

d. Oplossing van de vergelijkingen.

Door elimineeren van de drukken p met behulp van de vergelijkingen (6) t/m (8) en gelijktijdige invoering van de door (2) en (3) gedefinieerde grootheden λ en t gaan de vergelijkingen (9) t/m (11) over in:

$$v_{4s}^2 - v_2^2 = t\, v_1^2 \tag{12}$$

$$v_2 + (\lambda^2 - 1)v_{2s} = \lambda^2 v_1 \tag{13}$$

$$2(\lambda^2-1)v_{2s}v_{4s} + (2-\lambda^2)v_2^2 = \lambda^2 v_1^2 + (\lambda^2-1)t\,v_1^2 \tag{14}$$

Invoering van v_{2s} uit (13) en t uit (12) in (14) leidt nu tot:

$$(v_{4s}-v_2)^2 = \lambda^2(v_{4s}-v_1)^2 \tag{15}$$

λ is een steeds positieve grootheid. Bij positieven trek van de schroef zal v_{4s} steeds grooter dan v_1 en ook grooter dan v_2 zijn, terwijl bij negatieven trek het omgekeerde het geval is. (15) mag dus steeds vervangen worden door:

$$v_{4s} - v_2 = \lambda(v_{4s} - v_1)$$

of

$$v_2 = (1-\lambda)v_{4s} + \lambda v_1 \tag{16}$$

Bij invoering van deze waarde in (12) gaat zij over in de vierkantsvergelijking in v_{4s}:

$$\lambda(2-\lambda)v_{4s}^2 - 2\lambda(1-\lambda)v_1 v_{4s} - (\lambda^2 + t)v_1^2 = 0$$

met als wortel:

$$v_{4s} = v_1 \frac{1-\lambda+\sqrt{1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t}}{2-\lambda} \tag{17}$$

Het teeken werd hier gekozen op grond van de overweging, dat voor $t=0$ $v_{4s}=v_1$ moet worden.

Uit (16) en (13) volgen nu achtereenvolgens de uitkomsten voor v_2 en v_{2s}:

$$v_2 = v_1 \frac{1+(1-\lambda)\sqrt{1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t}}{2-\lambda} \tag{18}$$

$$v_{2s} = v_1 \frac{1+\lambda-\lambda^2+\sqrt{1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t}}{(1+\lambda)(2-\lambda)} \tag{19}$$

4. De tunnelcorrectie.

Bij iederen toestand van de schroef in den tunnel kan nu een overeenkomstige aangegeven worden in een onbegrensde strooming. Teneinde vast te stellen op welke punten overeenstemming moet bestaan om te mogen spreken van overeenkomstige toestanden, moet voor het oogenblik de werkelijke schroef en niet de in punt 2 ingevoerde denkbeeldige schijf beschouwd worden. De veronderstellingen, dat de doorstroomsnelheid voor den geheelen schroefcirkel een constante waarde heeft en dat de invloed van den tangentialen component van de snelheid buiten beschouwing kan blijven, worden echter aangehouden. Vergelijkt men nu de schroef in den tunnel en een gelijke schroef in de onbegrensde strooming bij hetzelfde toerental, dan blijkt, dat wanneer de doorstroomsnelheid door den schroefcirkel dezelfde waarde heeft, ook trek en moment voor beide schroeven gelijk zullen zijn. Immers voor alle overeenkomstige elementen van beide schroeven zijn dan grootte en richting van de relatieve snelheid gelijk. De eenige vraag, die nu overblijft, is: welke betrekking bestaat er dan tusschen de tunnelsnelheid v_1 en de snelheid V op grooten afstand voor de schroef in de onbegrensde strooming?

Voor het eerste geval is het verband tusschen tunnelsnelheid en doorstroomsnelheid gegeven door (19). Deze betrekking geldt echter ook voor het tweede geval, de onbegrensde strooming. Daarbij is dan echter O oneindig groot, dus, zooals uit (1) volgt, $\lambda=1$. Verder moet de tunnelsnelheid v_1 vervangen worden door de gevraagde snelheid V en t door $t_\infty = \frac{2T}{\varrho S V^2}$ of, daar de trek in beide gevallen gelijk is, door $t_\infty = \frac{v_1^2}{V^2}t$. Dit levert:

$$v_{2s_\infty} = \frac{V}{2}\left(1+\sqrt{1+t\frac{v_1^2}{V^2}}\right)$$

Volgens het boven besprokene moet deze waarde gelijk zijn aan die voor de schroef in den tunnel (v_{2s}), dus:

$$v_{2s} = \frac{V}{2}\left(1+\sqrt{1+t\frac{v_1^2}{V^2}}\right)$$

Oplossing hiervan naar V geeft:

$$V = v_{2s} - \frac{t}{4}\frac{v_1^2}{v_{2s}} \tag{20}$$

Het corrigeeren van de uitkomsten van tunnelproeven met een schroef bestaat dus in dit geval, evenals in dat van een schroef in een gesloten tunnel, uit het berekenen van de „gecorrigeerde snelheid" V. Deze is de snelheid van de onbegrensde strooming, waarbij de schroef, bij hetzelfde toerental, denzelfden trek en hetzelfde moment zal geven als in den tunnel. Opgemerkt moet hierbij worden, dat dus de op het toerental betrokken trek- en momentencoëfficiënt door deze correctie niet gewijzigd worden, echter wel V/nd en het nuttig effect.

5. *Samenvatting van de uitkomsten.*

De in de beide voorgaande punten verkregen uitkomsten kunnen als volgt worden samengevat:

Bij een trek T van de schroef en een snelheid v_1 in den tunnel zijn de snelheid in den schroefcirkel (v_{2s}), die buiten den schroefcirkel (v_2) en die in den slipstroom op grooten afstand achter de schroef (v_{4s}) achtereenvolgens gegeven door:

$$\frac{v_{2s}}{v_1} = \frac{1+\lambda-\lambda^2+\sqrt{1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t}}{(1+\lambda)(2-\lambda)} \tag{21}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1+(1-\lambda)\sqrt{1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t}}{2-\lambda} \tag{22}$$

$$\frac{v_{4s}}{v_1} = \frac{1-\lambda+\sqrt{1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t}}{2-\lambda} \tag{23}$$

Hierin beteekenen dan

$$\lambda = \sqrt{\frac{O}{O-S}} \tag{24}$$

en

$$t = \frac{2T}{\varrho S v_1^2} \tag{25}$$

De snelheid V, waarbij de schroef in een onbegrensde strooming bij hetzelfde toerental denzelfden trek en hetzelfde moment zal geven, volgt uit:

$$\frac{V}{v_1} = \frac{v_{2s}}{v_1} - \frac{t}{4}\frac{v_1}{v_{2s}} \tag{26}$$

Hierin hebben v_{2s} en t de resp. door (21) en (25) gegeven waarden.

6. *Bespreking van de uitkomsten.*

a. *Contrôle.*

De meest voor de hand liggende contrôle op de verkregen uitkomsten is het invoeren ervan in de vergelijkingen (12) t/m (14) of (6) t/m (11). Deze behoeft hier niet nader besproken te worden. Een andere weg om althans een indruk van de juistheid van deze uitkomsten te krijgen is na te gaan, welke waarden zij aannemen voor $O=\infty$, dus $\lambda=1$. Immers dan moeten zij overeenkomen met die voor de schroef in een onbegrensde strooming.

Bij invoering van $\lambda=1$ in (21) t/m (23) en (26) wordt verkregen:

$$\frac{v_{2s}}{v_1} = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+t})$$

$$\frac{v_2}{v_1} = 1$$

$$\frac{v_{4s}}{v_1} = \sqrt{1+t}$$

$$\frac{V}{v_1} = 1$$

Inderdaad komen de waarden voor v_{2s} en v_{4s} overeen met die, welke de theorie van Froude (lit. 3, 5) oplevert, terwijl ook de beide andere het verwachte resultaat geven. Het eerste blijkt nog duidelijker, wanneer men niet de snelheden zelf, doch hun verschillen met v_1 beschouwt:

$$\frac{v_{2s}-v_1}{v_1}=\tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+t}\right)$$

$$\frac{v_{4s}-v_1}{v_1}=-1+\sqrt{1+t}=2\,\frac{v_{2s}-v_1}{v_1}$$

b. Onbepaalde waarden.

Voor $\lambda=2$ krijgen de uitkomsten (21) t/m (23) den vorm $\frac{0}{0}$ en worden zij dus onbepaald. Behandelt men deze onbepaalde vormen op de gewone wijze (differentieeren van teller en noemer afzonderlijk naar λ en daarna invoeren van $\lambda=2$) dan is het resultaat:

$$\lambda=2:\quad \left.\begin{aligned} \frac{v_{2s}}{v_1}&=1+\frac{1}{12}t \\ \frac{v_2}{v_1}&=1-\frac{1}{4}t \\ \frac{v_{4s}}{v_1}&=1+\frac{1}{4}t \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

c. De grenstoestand $v_2=0$.

Laat men bij een gegeven schroef en constante snelheid van den tunnel t toenemen, dan neemt v_{2s} toe en v_2 overeenkomstig af (zie b.v. fig. 4a). Tenslotte kan een toestand bereikt worden, waarbij $v_2=0$ is. Deze vormt een grens van het gebied, waarbinnen de boven verkregen oplossing een mechanische beteekenis heeft. Immers $v_2=0$ beteekent, dat alle lucht, die door den tunnel aangevoerd wordt, door den schroefcirkel zal stroomen. Het is denkbaar, dat t nog verder opgevoerd wordt, waarbij dan door de ring buiten den schroefcirkel lucht ìn, inplaats van ùit den tunnel zal stroomen. Inderdaad geeft dan ook de verkregen oplossing een negatieve waarde voor v_2.

Toch bestaat er een belangrijk verschil in karakter tusschen den toestand, welke met deze oplossing overeenkomt, en dien, welke in werkelijkheid te verwachten is. Bij den eersten wordt namelijk verondersteld, dat de lucht ook in het gebied buiten den slipstroom hoofdzakelijk in axiale richting zal stroomen, aan de buitenzijde begrensd door een discontinuiteitsvlak. In werkelijkheid daarentegen zal de in den tunnel stroomende lucht van alle zijden toevloeien, zoodat de betrekking (11) haar geldigheid verliest.

De toestand $v_2=0$ geeft dus zeker een grens aan, waarboven de afgeleide correctiemethode niet meer gebruikt kan worden. Het lijkt echter gewenscht in de praktijk te zorgen er voldoende ver onder te blijven, daar, zelfs wanneer zij niet bereikt wordt, in de nabijheid ervan voor het bestaan van hinderlijke bijverschijnselen gevreesd moet worden.

De waarde van t, waarbij $v_2=0$ wordt, is, zooals uit (22) volgt, bepaald door:

$$1+(1-\lambda)\sqrt{1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t}=0 \tag{28}$$

of

$$t_{gr}=\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2} \tag{29}$$

Men kan echter ook de vraag van een andere zijde bezien en wel welke waarde λ moet hebben, m.a.w. hoe groot de schroef moet zijn, om bij een gegeven waarde van t v_2 nul te doen worden. De vergelijking (28) moet hiertoe naar λ opgelost worden. Na verdrijven van den wortel en vermenigvuldiging met λ gaat zij over in:

$$(1-t)\lambda^3+2(-1+2t)\lambda^2-5t\lambda+2t=0$$

Deze vergelijking heeft in de eerste plaats de wortel $\lambda=2$, die in het hier beschouwde verband geen beteekenis heeft (vergelijk punt 6b). De beide andere zijn:

$$\lambda=\frac{-t\pm\sqrt{t}}{1-t}$$

Zooals uit de definitie (1) voor λ volgt, hebben alleen positieve waarden van deze grootheid tusschen 1 en ∞ praktische beteekenis, dus hier alleen de wortel:

$$\lambda_{gr}=\frac{-t-\sqrt{t}}{1-t}=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1} \tag{30}$$

Uit deze uitkomst volgt, dat $v_2=0$ alleen voor kan komen wanneer $t>1$ is.

d. Complexe waarden.

Voor sommige combinaties van λ en t zullen de in (21) t/m (23) gegeven uitkomsten een complexe waarde kunnen hebben. Dit zal het geval zijn, wanneer:

$$1+\frac{2-\lambda}{\lambda}t<0$$

is, dus:

$$\text{of voor } \lambda<2 \text{ en } t<\frac{\lambda}{\lambda-2}$$

$$\text{of voor } \lambda>2 \text{ en } t>\frac{\lambda}{\lambda-2}$$

Het eerste geval, waarbij t negatief is, zal hier buiten beschouwing gelaten worden. In het tweede ligt de hier verkregen grens steeds boven die, welke in het voorgaande punt door (29) gegeven werd. Het verschil tusschen beide waarden

$$\frac{\lambda}{\lambda-2}-\frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2}=\frac{\lambda}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}$$

is namelijk voor alle hier in aanmerking komende waarden van $\lambda(+2<\lambda<+\infty)$ positief.

e. Verhouding tusschen de snelheidstoenamen.

Voor de schroef in een onbegrensde strooming heeft de verhouding tusschen de snelheidstoename in den slipstroom op grooten afstand achter de schroef en die in den schroefcirkel de waarde 2. Bij gebruikmaking van de in (21) en (23) gegeven waarden van v_{2s} en v_{4s} blijkt zij hier te zijn:

$$\frac{v_{4s}-v_1}{v_{2s}-v_1}=1+\lambda \tag{31}$$

Zij is dus, evenals in het bovengenoemde geval, onafhankelijk van t en hier alleen afhankelijk van λ, dus van d/D.

7. Getallenvoorbeelden.

a. Algemeen.

In het volgende worden eenige getallenvoorbeelden besproken. De bedoeling hiervan is alleen een indruk te geven van het algemeene verloop der verschillende grootheden en, voor zoover de gecorrigeerde snelheid betreft, een voorloopige vergelijking met die in een gesloten tunnel mogelijk te maken. Er is echter van afgezien een zoo uitvoerig materiaal te geven, dat hier in voorkomende willekeurige gevallen de correctie gevonden kan worden.

In fig. 2 is het door (2) gegeven verband tusschen λ en de verhouding d/D van schroef- en tunnelmiddellijn uitgezet. Hieruit blijkt, dat bij kleine waarden van d/D λ slechts langzaam aangroeit bij toenemen van deze verhouding. De toename wordt echter voortdurend grooter om tenslotte bij groote waarden van d/D zeer snel te worden.

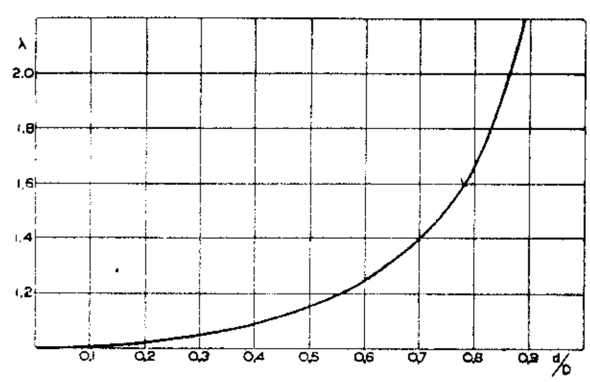


Fig 2. Het verband tusschen de parameter λ en de relatieve schroefmiddellijn d/D.

$$\lambda=\{1-(d/D)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

b. Grenswaarden voor d/D *en* t.

In punt 6c werd besproken, dat er voor een gegeven waarde van λ, en dus van d/D, een waarde van t bestaat, waarboven de verkregen oplossing niet meer geldt. In fig. 3 is het uit (28) volgende verband tusschen de „grenswaarden" voor d/D en t gegeven, hier verkregen door, uitgaande van verschillende waarden van t, met behulp van (30) en (2) de de bijbehoorende $(d/D)_{gr}$ te berekenen.

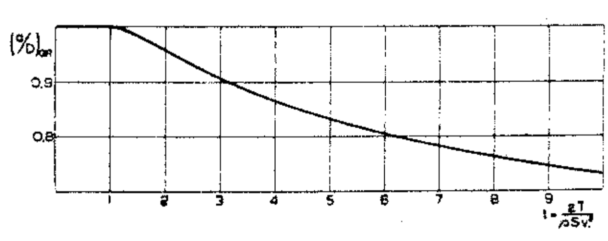


Fig. 3. De grenswaarden voor d/D en t.

$$\lambda_{gr}=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}$$

Voor normale schroeven kan $c_T=0{,}10$ als hoogste en $v_1/nd=0{,}25$ als laagste voorkomende waarde beschouwd worden. Hiermee komt dan volgens (4) ongeveer $t=4$ als hoogste waarde voor t overeen. De bijbehoorende grenswaarde van d/D is ongeveer 0,86. Zelfs in dit geval wordt de grenstoestand $v_2=0$ dus eerst bereikt met een schroefmodel, dat relatief zoo groot is, dat men het op grond van andere overwegingen (zie punt 8) toch niet zou gebruiken. De door $v_2=0$ gestelde grens is dus in normale gevallen van geen beteekenis, zoodat er alleen bij abnormaal hooge waarden van c_T of zeer lage van v_1/nd op gelet behoeft te worden.

c. De invloed van den gereduceerden schroeftrek t.

Voor een redelijk groote waarde van d/D(0,6, overeenkomend met $\lambda=1{,}25$) en praktisch mogelijke waarden van $t(0 \leqq t \leqq 5)$ werden de van belang zijnde grootheden volgens de in punt 5 gegeven formules berekend.

De uitkomsten van deze berekening zijn in fig. 4 uitgezet en wel de snelheden v_2, v_{2s} en v_{4s} in fig. 4a, de gecorrigeerde snelheid V in fig. 4b.

Eerstgenoemde snelheden vertoonen een regelmatig verloop. Zooals te verwachten was, beginnen zij allen bij v_1 voor $t=0$, overeenkomend met de niet door de schroef gestoorde strooming in den tunnel. Bij toenemende waarden van t nemen de snelheden in den slipstroom (v_{2s} en v_{4s}) toe, evenals dit bij de schroef in een onbegrensde strooming het geval is. Daarentegen neemt die buiten den slipstroom (v_2) af. De laatste bereikt hier echter nog lang niet de grenswaarde 0, deze ligt eerst bij $t=25$.

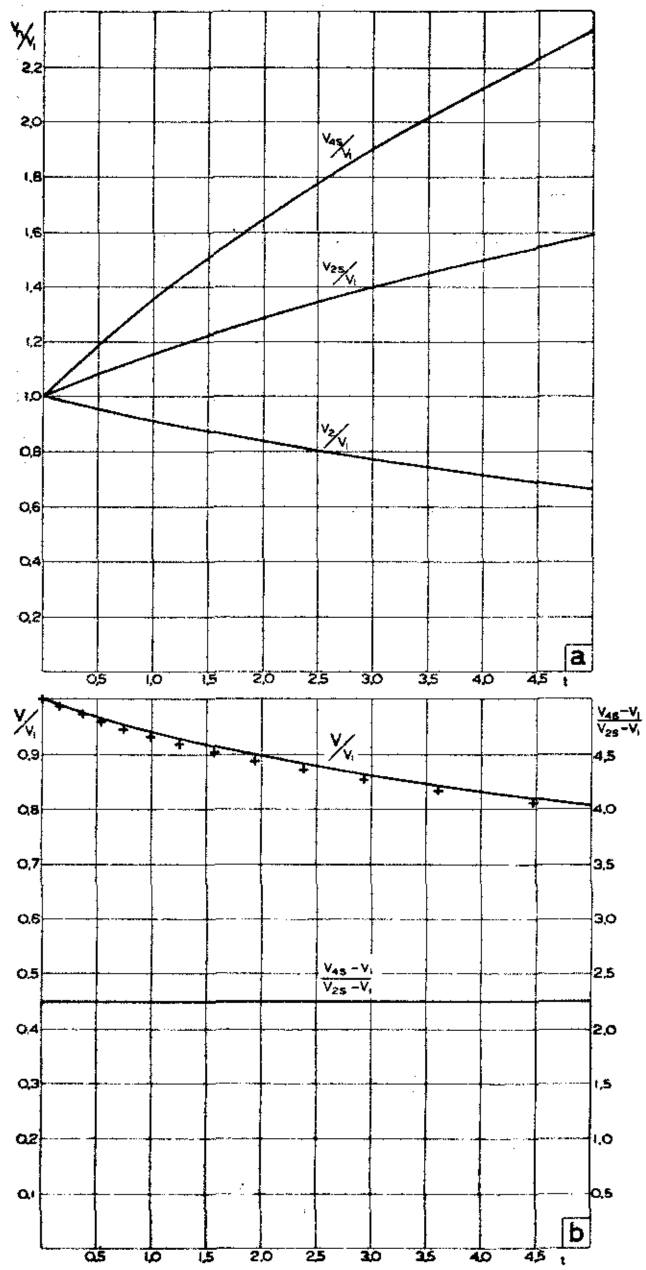


Fig 4. De snelheden in afhankelijkheid van de gereduceerde trek t voor de relatieve schroefmiddellijn $d/D=0.6(\lambda=1.25)$.

a. De snelheden binnen (v_{2s}, v_{4s}) en buiten (v_2) de slipstroom.

b. De gecorrigeerde tunnelsnelheid (V) en de verhouding van de snelheidstoenamen $\left(\frac{v_{4s}-v_1}{v_{2s}-v_1}\right)$.

— : gemengde tunnel.
+ : gesloten tunnel.

De gecorrigeerde snelheid V neemt, uitgaande van haar beginwaarde v_1 voor $t=0$, bij toenemende waarde van t geleidelijk af. Zij is ongeveer $0{,}9\, v_1$ bij $t=2$ en ong. $0{,}8\, v_1$ bij $t=5$. De correctie voor tunnelwandinvloed blijkt dus ook hier, evenals voor den gesloten tunnel (vergelijk punt 7e), bij schroeven van de boven aangegeven middellijn in het algemeen niet te verwaarloozen te zijn. Zooals reeds in punt 4 aangeduid werd, is dit vooral van belang bij het bepalen van het nuttig effect, daar correcties op de windsnelheid hierop een procentueel even grooten invloed hebben. De gecorrigeerde snelheid is steeds kleiner dan de windsnelheid in den tunnel. Waarden van het nuttig effect, berekend zonder correctie voor tunnelwandinvloed aan te brengen, zullen dus steeds te groot zijn.

In fig. 4b is voorts de verhouding tusschen de snelheidstoename in den slipstroom op grooten afstand achter de schroef ($v_{4s}-v_1$) en die in den schroefcirkel ($v_{2s}-v_1$) gegeven. Zooals onmiddellijk uit (31) volgt, is deze verhouding hier constant en grooter dan die voor de schroef in een onbegrensde strooming. Dit laatste zal altijd het geval zijn, daar λ steeds grooter dan 1, bijgevolg bedoelde verhouding grooter dan 2 is.

d. De invloed van de relatieve middellijn d/D van de schroef.

Naast het in het vorige punt besproken geval werd nog een ander doorgerekend, waarbij t constant gehouden werd, terwijl voor d/D verschillende waarden aangenomen werden. Hierbij werd $t=1{,}25$ gekozen, b.v. overeenkomend met ongeveer $v_1/nd=0{,}40$ en $c_T=0{,}08$, dus een waarde, die bij normale schroeven zeker voor kan komen. Voor d/D daarentegen werden ook waarden beschouwd, zoo hoog, dat zij zich in de praktijk wel nooit zullen voordoen. Dit geschiedde uit belangstelling voor de waarden, die de verschillende grootheden aannemen, wanneer d/D nadert tot de grenswaarde 0,9944....., waarvoor $v_2=0$ wordt.

De resultaten van de berekeningen zijn in fig. 5 uitgezet. Zooals het in punt 7a besproken verloop van λ (zie ook fig. 2) doet vermoeden, hebben veranderingen in d/D, zoolang deze grootheid klein is, slechts weinig invloed op de uitkomsten. Naarmate d/D grooter wordt, neemt deze invloed toe. Opvallend is de sterke afname van v_2 bij nadering van de grenswaarde voor d/D, terwijl die van v_{2s}, v_{4s} en V hier veel geringer is.

Eén punt vraagt nog om nadere toelichting. Bij toenemende waarde van d/D neemt zoowel v_2 als v_{2s} af. Bij oppervlakkige beschouwing schijnt dit in strijd met de continuiteit. Dit is echter niet het geval, hetgeen onmiddellijk volgt uit het feit, dat de verkregen oplossing voldoet aan de continuiteitsvoorwaarde (10) of (13), doch ook op de volgende wijze begrijpelijk gemaakt kan worden. Wordt, zonder dat hierbij de waarde t verandert, de schroef vervangen door een grootere, dan zal, hoewel v_{2s} als gevolg hiervan afneemt, deze snelheid toch grooter blijven dan de oorspronkelijke waarde van v_2. Door de ring, waarmede de schroefcirkel vergroot wordt, stroomt dus meer lucht dan in den oorspronkelijken toestand, waarin zij deel uitmaakte van het buitengebied. Daardoor is *het mogelijk, dat v_{2s} en v_2 beide afnemen, terwijl toch aan de continuiteitsvoorwaarde voldaan wordt.*

Uit de in fig. 5b gegeven waarden van V volgt de correctie, die op de tunnelsnelheid aangebracht moet worden. Deze bedraagt bij d/D=0,4 ong. 3% en bij d/D=0,6 ong. 7%, zoodat zij ook hier, vooral gezien haar reeds in het vorige punt besproken invloed op het nuttig effect, zeker niet verwaarloosd mag worden.

Overeenkomstig het aangroeien van λ met d/D neemt ook de verhouding tusschen de snelheidsvermeerderingen ($v_{4s}-v_1$) en ($v_{2s}-v_1$) toe met laatstgenoemde grootheid.

e. *Vergelijking met uitkomsten voor een gesloten tunnel*

Voor vergelijking van de uitkomsten voor het hier beschouwde geval van den „gemengden" tunnel met die voor een gesloten tunnel zijn in fig. 4 en 5 ook eenige resultaten voor laatstgenoemde gegeven. Deze vergelijking blijft beperkt tot de gecorrigeerde snelheid V, omdat deze de eenige grootheid van direct praktisch belang is.

Voor het eene geval, constante waarde van d/D en verschillende van t (fig. 4b), werd V/v_1 berekend met behulp van de door Glauert (lit. 4) hiervoor aangegeven formules. Voor het andere, constante t en veranderlijke d/D (fig. 5b), werd gebruik gemaakt van het eveneens door Glauert gegeven, beschikbare getallenmateriaal (lit. 6; Table 36, p. 299). Daarbij moet opgemerkt worden, dat tusschen de door Glauert en de hier gebezigde notaties het volgende verband bestaat:

$$\alpha = S/O = (d/D)^2$$

$$\tau = \tfrac{1}{2} t$$

Daar in genoemde tabel geen waarden voor t=1,25 gegeven zijn, werden die voor t=1,0 en t=2,0 in fig. 5b uitgezet.

Opvallend is, dat de waarden van V/v_1 voor de gesloten tunnel nagenoeg gelijk zijn aan die voor het in het voorgaande beschouwde geval. Dit blijkt het duidelijkst uit fig. 4b, doch is ook in fig. 5b zeer goed te onderkennen. Dit resultaat moet als een verrassing beschouwd worden. Immers het feit, dat de analoge behandeling van het vraagstuk voor de vrijstraal leidt tot een correctie nul, zou doen vermoeden, dat zij voor den gemengden tunnel belangrijk kleiner zou zijn dan voor den gesloten, hetgeen niet zoo blijkt te zijn. Weliswaar werd niet nagegaan of het hier geconstateerde geringe verschil tusschen beide gevallen in het geheele gebied, dat praktisch van belang is, bestaat. Er is echter reden om te vermoeden, dat zulks wel het geval zal zijn, daar de beide in fig. 4 en 5 gegeven groepen van uitkomsten „doorsneden in verschillende richting" door dit gebied *zijn.*

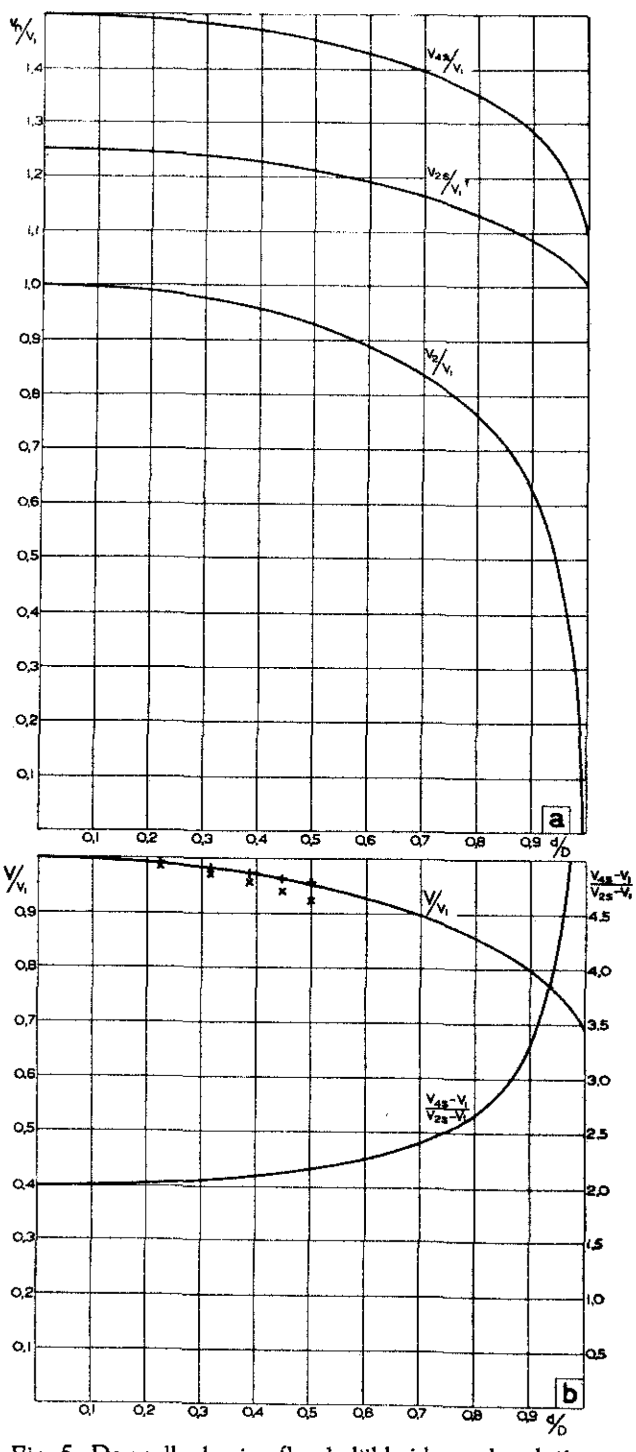


Fig. 5. De snelheden in afhankelijkheid van de relatieve schroefmiddellijn d/D voor constante gereduceerde trek t.

a. De snelheden binnen (v_{2s}, v_{4s}) en buiten (v_2) de slipstroom.

b. De gecorrigeerde tunnelsnelheid (V) en de verhouding der snelheidstoenamen $\left(\frac{v_{4s}-v_1}{v_{2s}-v_1}\right)$.

— : gemengde tunnel (t=1.25).
+ : gesloten tunnel (t=1.0).
x : gesloten tunnel (t=2.0).

Een voorloopig onderzoek naar den oorzaak der overeenstemming leidde tot nu toe niet tot een resultaat. Een dergelijk onderzoek wordt belemmerd door de omstandigheid, dat de vergelijkingen voor de schroef in een gesloten tunnel geen eenvoudige oplossing in gesloten vorm schijnen toe te laten. De indruk werd verkregen, dat de oplossingen voor V voor beide gevallen niet identiek zijn. Het boven besproken getallenmateriaal wijst trouwens in dezelfde richting. De verschillen zijn daarbij wel klein, doch zoo stelselmatig, dat zij niet als gevolgen van rekenonnauwkeurigheid beschouwd kunnen worden.

Ook van praktische zijde beschouwd is het verkregen resultaat van belang, daar het er op wijst, dat de gemengde tunnel met de schroef opgesteld aan het einde van de voorste tuit wat correctie, en dus wat meetnauwkeurigheid (zie punt 8) betreft, geen voordeelen biedt boven de gesloten tunnel.

Twee vragen, waarop hier niet nader ingegaan kan worden, blijven nog ter beantwoording open:

1e. Wat is de oorzaak van de hier geconstateerde overeenstemming? Heeft deze een dieperen mechanischen achtergrond, dan wel draagt zij een meer toevallig karakter?

2e. Hoe zal de correctie verloopen, wanneer de schroef in den gemengden tunnel verder naar achteren, dus in het vrijstraal-gedeelte, geplaatst wordt?

De laatste vraag is belangrijk met het oog op praktische toepassing, daar iedere z.g. vrijstraaltunnel feitelijk een gemengde is, omdat de strooming op een min of meer grooten afstand vóór de schroef toch door een vasten wand begrensd zal zijn.

8. Opmerkingen betrekking hebbende op praktisch gebruik.

In het bovenstaande werd uitgegaan van vereenvoudigende aannamen (zie punt 2), waarvan als belangrijkste die van de constante doorstroomsnelheid door den schroefcirkel genoemd moet worden. De verkregen uitkomsten mogen dus zeker niet als exact en algemeen geldig beschouwd worden. Er is echter veel voor te zeggen hier het door Glauert en Lock in het overeenkomstige geval van de schroef in den gesloten tunnel gehuldigde standpunt (lit. 2) over te nemen: zoolang de correctie klein blijft, is er weinig bezwaar tegen haar toe te passen en aan te nemen, dat de waarde van de gecorrigeerde snelheid de juiste is. Dit op grond van de overweging dat:

1e. bij de normale, d.w.z. de onder normale omstandigheden met behoorlijk rendement werkende, schroef de snelheidsverdeeling wel niet al te veel van een constante zal afwijken,

2e. zoolang de correctie klein blijft, het weinig invloed zal hebben, wanneer zij, tengevolge van verschillen tusschen werkelijken en aangenomen toestand, niet exact juist is.

Overigens blijft natuurlijk een experimenteele contrôle gewenscht, vooral om na te gaan tot welke grenzen van d/D en t en voor welke typen van schroeven de correctie als toelaatbaar beschouwd mag worden. Dit verlangt echter een uitvoerig onderzoek. Zoolang experimenteele resultaten ontbreken, lijkt het gewettigd de voor een schroef in een gesloten tunnel geldende grens over te nemen, daar voor beide de methode ter bepaling van de correctie op dezelfde aannamen berust en de correctie praktisch even groot is. Ook deze grens staat echter nog niet met zekerheid vast. Op grond van hetgeen tot nu toe bekend is (lit. 2) kan voor modellen van normale vliegtuigschroeven onder normale bedrijfsomstandigheden een waarde van d/D tot ong. 0,4 als toelaatbaar beschouwd worden.

Een geval, waarin niet voldaan wordt aan de aannamen, die het uitgangspunt voor bovenstaande beschouwingen vormden, is dat, waarin de schroef tezamen met een lichaam van niet te verwaarloozen afmetingen in de tunnel opgesteld is. Dit vraagstuk dient daarom in voorkomende gevallen nader bezien te worden.

9. Samenvatting en conclusies.

a. voor een schroef in een „gemengden" tunnel, waarbij de begrenzing van den luchtstroom vóór de schroef gevormd wordt door een vasten wand, er achter door een oppervlak van constanten druk (vrijstraal), worden de betrekkingen opgesteld, die bestaan tusschen den trek van de schroef en de drukken en snelheden in de van belang zijnde doorsneden (punt 3b, c).

b. Het blijkt, dat deze vergelijkingen op eenvoudige wijze in gesloten vorm opgelost kunnen worden (punt 3d).

c. Aan de hand van de uitkomsten wordt op eenige bijzonderheden van de strooming nader ingegaan, o.a. op den grenstoestand, waarbij de snelheid in den ring buiten de schroef nul wordt, en op de verhouding tusschen de snelheidstoenamen in den schroefcirkel en in den slipstroom (punt 6).

d. De resultaten worden gebezigd om, evenals dit voor schroefproeven in een gesloten tunnel gebruikelijk is, een „gecorrigeerde windsnelheid" te bepalen, zijnde die snelheid, waarbij de schroef in een onbegrensde strooming denzelfden trek en hetzelfde moment zal geven als bij het in de tunnel beschouwde geval (punt 4).

e. De invloed van de beide grootheden d/D en t, waarvan de stroomingstoestand blijkt af te hangen, wordt voor twee gevallen nagegaan (punt 7c, d).

f. Bij vergelijking van de uitkomsten voor de gecorrigeerde snelheid met de overeenkomstige voor een gesloten tunnel blijken deze nagenoeg gelijk te zijn. De kleine verschillen zijn stelselmatig (punt 7e).

g. De onder *f* genoemde overeenstemming heeft tengevolge, dat de hier beschouwde opstelling, wat grootte van de correctie en dus ook wat nauwkeurigheid van de meting betreft, geen voordeel biedt boven die in een gesloten tunnel (punt 7e).

h. Eenige vragen, die verband houden met het onder f aangegeven resultaat, worden aangeduid, doch niet verder besproken. Van praktisch standpunt bezien is hiervan de belangrijkste welke waarde de correctie zal hebben, wanneer de schroef verder naar achteren, dus in het vrijstaalgedeelte, opgesteld wordt (punt 7e).

i. De omvang van het gebied, waarbinnen de ontwikkelde correctie-methode gebruikt mag worden, wordt kort aangeduid (punt 8).

Notaties.

$c_T = \frac{T}{\varrho n^2 d^4}$ = trekcoëfficiënt,
d = middellijn van de schroef,
n = toerental van de schroef,
p = druk,
$t = \frac{2T}{\varrho S v_1^2}$ = gereduceerde trek,
v = stroomingssnelheid,
D = middellijn van den tunnel,

$O = \frac{1}{4} \pi D^2$ = oppervlak van de tunneldoorsnede,
$S = \frac{1}{4} \pi d^2$ = oppervlak van den schroefcirkel,
T = trekkracht van de schroef,
V = gecorrigeerde snelheid (zie punt 4),
$\lambda = \sqrt{\frac{O}{O-S}} = \frac{1}{\sqrt{1-(d/D)^2}}$
ϱ = massadichtheid van de lucht.

Indices.

De onderstaande indices geven grootheden aan, die betrekking hebben op de daarbij aangegeven doorsneden, gebieden of toestanden:

1, 2, 3, 4: resp. doorsneden 1, 2, 3 en 4 (zie fig. 1),
s : in den slipstroom,
∞ : schroef in onbegrensde strooming ($D = \infty$),
gr : grenstoestand $v_2 = 0$ (zie punt 6c).

Literatuur.

1. Wood and Harris: Some notes on the theory of an airscrew working in a wind channel. Adv. Comm. f. Aeron., R. and M. 662 (1920).
2. Glauert and Lock: On the advantages of an open jet type of wind tunnel for airscrew tests. Aeron. Res. Comm., R. and M. 1033 (1926).
3. Glauert: The elements of aerofoil and airscrew theory, (Cambridge 1926), Chapter XV.
4. Idem. Chapter XVII.
5. Glauert: Airplane propellers, Chapter II, in Durand: Aerodynamic Theory, Vol. IV, (Berlin, 1935).
6. Idem. Chapter IX.

RAPPORT A 649.
Nationaal Luchtvaartlaboratorium. Amsterdam.

De beweging van een trillend stelsel met één vrijheidsgraad onder invloed van een willekeurige uitwendige kracht

door

Ir. C. KONING.

RAPPORT A 649.

De beweging van een trillend stelsel met één vrijheidsgraad onder invloed van een willekeurige uitwendige kracht.

Uittreksel.

Op grond van mechanische overwegingen wordt de oplossing van de bewegingsvergelijking (1) gegeven in de vormen (9), (10) en (15), (16). *Hierbij zijn in (15), (16) λ en $\bar{\lambda}$ de beide* wortels van de frequentievergelijking (3a), terwijl in (9), (10) λ_1 en λ_2 resp. het reëele en het imaginaire deel van deze wortels voorstellen.

De uitkomsten geven de beweging als een samenstel van vrije trillingen, die ieder voor zich veroorzaakt zijn door de werking van de uitwendige kracht gedurende een kort tijdsverloop.

RAPPORT A 649.

Le mouvement d'un système oscillant à un degré de liberté sous l'action d'une force extérieure arbitraire.

Résumé.

Partant de considérations mécaniques la solution de l'équation du mouvement (1) est donnée sous les formes (9), (10) et (15), (16). En (15), (16) λ et $\bar{\lambda}$ sont les deux racines de l'équation (3a), tandis qu'en (9), (10) λ_1 et λ_2 sont les parties respectivement réelles et imaginaires de ces racines.

Les solutions donnent le mouvement comme le résultat de la superposition d'un nombre infini d'oscillations libres, dont chacune a été causée par l'action de la force extérieure pendant un temps très court.

REPORT A 649.

The motion of an oscillating system with one degree of freedom under the action of an arbitrary external force.

Summary.

By application of mechanical considerations the solution of the equation of motion (1) may be given in the forms (9), (10) and (15), (16). In the latter λ and $\bar{\lambda}$ are the two roots of the frequency equation (3a), whereas in the first λ_1 and λ_2 are the real and imaginary parts of these roots respectively.

The solutions give the motion as the result of superposition of free oscillations, each of which is caused by the action of the external force during a short time interval.

BERICHT A 649.

Die Bewegung eines schwingenden Systems mit einem Freiheitsgrad unter Einflusz einer willkürlichen äuszeren Kraft.

Zusammenfassung.

Auf Grund mechanischer Ueberlegungen wird die Lösung der Bewegungsgleichung (1) in den Formen (9), (10) und (15), (16) gegeben. Dabei sind in (15), (16) λ und $\bar{\lambda}$ die zwei Wurzeln der Frequenzgleichung (3a), während in (9), (10) λ_1 und λ_2 den reellen, bezw. imaginären Teil dieser Wurzeln darstellen.

Die Lösungen geben die Bewegung als zusammengesetzt aus freien Schwingungen, die jede für sich durch die Wirkung der äuszeren Kraft während einer kurzen Zeitdauer entstanden sind.

RAPPORT A 649.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

De beweging van een trillend stelsel met één vrijheidsgraad onder invloed van een willekeurige uitwendige kracht

door

Ir. C. KONING.

Overzicht.

Een algemeene oplossing van de bewegingsvergelijking voor bovengenoemd geval, waarbij de werking van de uitwendige kracht meer dan gebruikelijk op den voorgrond treedt, wordt afgeleid en besproken.

Inhoud.

1. Inleiding.

Voor het in den titel aangegeven vraagstuk zijn zoowel de bewegingsvergelijking als de oplossing ervan bekend. [1]) De vorm, waarin de oplossing meestal gegeven wordt, is echter zoodanig, dat hij weinig bijdraagt tot een nader inzicht in de mechanische zijde van het probleem.

In het volgende wordt daarom een andere vorm van oplossing besproken, die aan dit bezwaar tegemoet komt. Ook deze is niet nieuw [2]) doch, voor zoover bekend, werd tot nu toe niet de aandacht gevestigd op zijn mechanische beteekenis.

2. De bewegingsvergelijking.

Aangenomen wordt, dat het beschouwde stelsel zoodanig is, dat zijn uitslag x uit den evenwichtsstand voldoet aan de differentiaalvergelijking:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = p(t) \tag{1}$$

Hierin zijn dan m, k en c constanten, die afhankelijk zijn van den aard van het stelsel, terwijl $p(t)$ de met den tijd t veranderlijke uitwendige oorzaak is, die de beweging beinvloedt.

Het meest eenvoudige voorbeeld van een dergelijk stelsel is een massapunt, aangebracht aan het uiteinde van een massalooze veer. In dat geval zijn m de massa van het massapunt, $k\dot{x}$ de dempende, cx de door de veer uitgeoefende elastische en $p(t)$ de uitwendige kracht.

---

[1]) Voor het opstellen van de bewegingsvergelijking zie b.v.:
Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik. Bnd IV (Dynamik) (1914), S.24 bis 57;
voor het oplossen van deze vergelijking:
Riemann-Webers Differ ntialgleichungen der Physik. Bnd I (1925), S.227 bis 230.

[2]) Zie: Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik. Bnd I (1924), S.227.

Is het stelsel ingewikkelder, dan stellen de coëfficiënten m, k en c en de functie p(t) overeenkomstige grootheden voor, echter op de gebruikelijke wijze [3]) gereduceerd op de coördinaat x, die de afwijking van het stelsel uit den evenwichtsstand aangeeft.

Opgemerkt moet worden, dat de veronderstelling, dat vergelijking (1) de beweging van het stelsel bepaalt, insluit, dat de demping het karakter heeft van een vloeistofdemping bij kleine snelheden. Zij moet dus steeds tegen de bewegingsrichting in werken en evenredig zijn met de snelheid.

Naast de boven gegeven, z.g. niet-homogene vergelijking, is ook de homogene:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0 \tag{2}$$

van belang. Deze geldt voor het geval, waarin geen uitwendige kracht op het stelsel werkt en dit dus vrije trillingen uitvoert.

3. *De gedachtengang bij het oplossen van vergelijking (1).*

De bewegingsvergelijking van het stelsel is lineair in de coördinaat x en in de uitwendige kracht p(t). Bijgevolg zal de verandering in den bewegingstoestand, veroorzaakt door een gedurende een *zekeren tijdsduur* werkende *uitwendige kracht, steeds dezelfde zijn, onafhankelijk* ervan of het stelsel al dan niet in beweging is en of voor of na dien tijd er andere krachten op gewerkt hebben of zullen werken. De gevolgen van op verschillende tijdstippen werkende krachten mogen dus eenvoudig op elkaar gesuperponeerd worden.

Bij het oplossen van de vergelijking wordt nu de op het stelsel werkende kracht beschouwd als te bestaan uit een opeenvolging van afzonderlijke „stooten" p(t)dt. Ieder van deze stooten heeft een zekere verandering van den bewegingstoestand tengevolge. Integreeren van alle veranderingen veroorzaakt door de stooten gedurende den tijd, voorafgaande aan het tijdstip t, geeft dan den bewegingstoestand op dat oogenblik.

4. *De vrije trillingen.*

Zooals bekend is, wordt aan de homogene vergelijking (2) voldaan door oplossingen van het type:

$$x = Ce^{\lambda t}$$

waarin C een integratieconstante is en λ een der beide wortels van de frequentie-vergelijking

$$m\lambda^2 + k\lambda + c = 0 \tag{3a}$$

Deze wortels zijn:

$$\lambda = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2 - 4mc}{4m^2}} = \lambda_1 \pm i\,\lambda_2 \tag{3b}$$

met

$$\lambda_1 = -\frac{k}{2m} \tag{3c}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{4mc - k^2}{4m^2}} \tag{3d}$$

Bij de in het laatste lid van (3b) ingevoerde splitsing is aangenomen, dat de wortels λ complex zijn, dus dat de demping niet zoo sterk is, dat de vrije beweging van het stelsel geen trilling doch een aperiodisch gedempte is. Voor dit laatste geval zij verwezen naar een opmerking hierover aan het einde van punt 8.

De algemeene oplossing voor de vrije trillingen van het stelsel is nu:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} \sin \lambda_2 t + C_2 e^{\lambda_1 t} \cos \lambda_2 t \tag{4}$$

De hierin voorkomende integratie-constanten zijn afhankelijk van den begintoestand.

Bij een bestaand stelsel zullen λ_1 en λ_2 meestal het eenvoudigste gevonden kunnen worden door den trillingstijd T en het logarithmische decrement d_l door een proef te bepalen.

De trillingstijd T is de duur van een geheele slingering en dus gelijk aan

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_2} \tag{5}$$

---

[3]) Zie b.v. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik. Bnd VI (Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik) (1910), S.74 bis 88.

Het logarithmische decrement is de natuurlijke logarithme van de verhouding tusschen twee opeenvolgende overeenkomstige afwijkingen uit den evenwichtsstand, dus b.v. twee opeenvolgende maximumuitslagen naar dezelfde zijde.

Uit (4) volgt hiervoor:

$$d_l = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{e^{\lambda_1 t}\{C_1 \sin \lambda_2 t + C_2 \cos \lambda_2 t\}}{e^{\lambda_1 (t+T)}\{C_1 \sin \lambda_2 (t+T) + C_2 \cos \lambda_2 (t+T)\}} = \ln \frac{e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 (t+T)}} = \ln e^{-\lambda_1 T} = -\lambda_1 T \qquad (6)$$

Uit de op deze wijze verkregen waarden van λ_1 en λ_2 kunnen zoonoodig ook de verhoudingen tusschen de grootheden m, k en c gevonden worden met behulp van (3c, d). Hun absolute waarden kunnen echter eerst bepaald worden, wanneer één ervan op andere wijze vastgesteld is, b.v. c door een statische ijking.

5. *De door een stoot veroorzaakte beweging.*

Aangenomen wordt, dat het stelsel aanvankelijk in rust is en dat er op het tijdstip $t = 0$ een stoot S op werkt. Daar deze stoot, zooals in het begrip opgesloten is, zeer kort duurt, zal gedurende de werking van dezen de stand van het stelsel niet veranderen, zoodat $x = 0$ blijft. Daarentegen neemt de snelheid plotseling toe van $\dot{x} = 0$ tot $\dot{x} = S/m$. Na afloop van den stoot voert het stelsel een vrije slingering uit. De beginvoorwaarden hiervoor zijn, zooals uit het bovenstaande volgt:

$$t = 0: \qquad x = 0 \quad , \quad \dot{x} = S/m$$

De in (4) voorkomende integratie-constanten moeten bijgevolg voldoen aan de betrekkingen:

$$x(0) = \qquad C_2 \quad = \quad 0$$

$$\dot{x}(0) = C_1\lambda_2 + C_2\lambda_1 = S/m$$

en zijn dus:

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_2}\frac{S}{m} \qquad C_2 = 0$$

zoodat de slingering volgende op den stoot is:

$$t > 0: \qquad x = \frac{1}{\lambda_2}\frac{S}{m} e^{\lambda_1 t} \sin \lambda_2 t \qquad (7)$$

Werkt de stoot, onder overigens gelijke omstandigheden, niet op het tijdstip $t = 0$, doch op $t = \tau$ en is zijn waarde $S = p(\tau)d\tau$, dan is de beweging voor en na den stoot gegeven door

$$t < \tau: \qquad x = 0$$

$$t > \tau: \qquad x = \frac{1}{\lambda_2}\frac{p(\tau)}{m} e^{\lambda_1 (t-\tau)} \sin \lambda_2 (t-\tau) d\tau \qquad (8)$$

Hoewel uit het voorgaande reeds het verschil in beteekenis tusschen τ en t blijkt, lijkt het toch gewenscht hier nogmaals de aandacht erop te vestigen. τ geeft het oogenblik aan, waarop de stoot op het stelsel werkt, t daarentegen het willekeurige tijdstip, waarop de beweging van het stelsel beschouwd wordt.

6. *De beweging onder invloed van een willekeurige uitwendige kracht.*

Zooals reeds in punt 3 aangegeven werd, kan een willekeurige gedurende langeren tijd werkende uitwendige kracht als een opeenvolging van stooten opgevat worden, terwijl de uitwerkingen van deze stooten op het stelsel samengevat, dus geintegreerd, moeten worden om de beweging ervan te vinden. Is nu bedoelde uitwendige kracht gegeven door p(t), dan volgt uit (8) onmiddellijk:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_2}\int_{-\infty}^{t} \frac{p(\tau)}{m} e^{\lambda_1 (t-\tau)} \sin \lambda_2 (t-\tau) d\tau \qquad (9)$$

Na de opmerking over τ en t aan het einde van het vorige punt zal het duidelijk zijn, dat bij het berekenen van de integraal τ als integratie-variabele, daarnaast t als een constante beschouwd moet worden.

De gevraagde beweging is het resultaat van de werking van de uitwendige kracht gedurende het geheele tijdsverloop, dat aan het tijdstip t voorafgaat. Als onderste en bovenste grens van de integraal moeten dus resp. $-\infty$ en t genomen worden. Men is echter vrij als onderste grens een andere $t = t_0$ aan te nemen, mits rekening gehouden wordt met de mogelijkheid, dat op dat tijdstip het stelsel reeds in beweging is. Een dergelijke beginbeweging zet zich dan als vrije trilling voort, zoodat de beweging nu gegeven is door:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \sin \lambda_2 t + C_2 e^{\lambda_1 t} \cos \lambda_2 t + \frac{1}{\lambda_2} \int_{t_0}^{t} \frac{p(\tau)}{m} e^{\lambda_1 (t-\tau)} \sin \lambda_2 (t-\tau) d\tau \tag{10}$$

De constanten C_1 en C_2 moeten zoo bepaald worden, dat voor $t = t_0$ voldaan wordt aan de bekend veronderstelde beginvoorwaarden.

7. *Toepassingsvoorbeeld: het resonantie-geval.*

Het is bekend, dat, wanneer de uitwendige kracht periodisch is en haar frequentie geheel of ongeveer overeenstemt met die van de eigentrillingen, zeer groote uitslagen x kunnen optreden. In het denkbeeldige geval, waarin de *demping k nul is, zullen, wanneer de beide genoemde frequenties* gelijk zijn, de uitslagen tot oneindig groote kunnen aangroeien.

Laatstgenoemd geval zal hier als een eenvoudig toepassingsvoorbeeld van het bovenbesprokene worden beschouwd. Aangenomen wordt daarbij, dat het stelsel op het tijdstip $t_0 = 0$ in evenwicht en in rust is ($x = 0$, $\dot{x} = 0$) en, zooals reeds aangegeven werd, $k = 0$ en dus ook $\lambda_1 = 0$ is. De uitwendige kracht, die op den tijd $t_0 = 0$ begint te werken, zij gegeven door $p(t) = p_1 \sin \lambda_2 t$, waarin p_1 een constante is. Bij invoeren van deze gegevens gaat (10) over in:

$$x(t) = \frac{p_1}{m\lambda_2} \int_{0}^{t} \sin \lambda_2 \tau \sin \lambda_2 (t-\tau) d\tau$$

en na uitwerking van de hierin voorkomende integraal in

$$x(t) = \frac{p_1}{m\lambda_2} \left[\frac{1}{4\lambda_2} \sin \lambda_2 (2\tau - t) - \tfrac{1}{2}\tau \cos \lambda_2 t \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{p_1}{2m\lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t - t \cos \lambda_2 t \right).$$

Deze uitkomst toont, dat de beweging beschouwd kan worden als een bestaande uit twee deelen, waarvan het eerste een slingering met constante amplitude, het tweede eveneens een *periodische beweging*, echter met een met den tijd lineair toenemende amplitude is. De uitslagen van dit laatste deel, en daarmede ook die van de geheele beweging zullen dus inderdaad met den tijd onbeperkt aangroeien. Het eerste deel is in fase met de uitwendige kracht, het tweede loopt daarbij 90° achter.

8. *Een andere vorm van de in punt 6 gegeven oplossing.*

Een eenigszins andere vorm van uitkomst, die voor sommige toepassingen handiger is, wordt verkregen door de wortels van de *frequentie-vergelijking (3a) niet in hun reëele en imaginaire* deelen te splitsen. Met

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \qquad \bar{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2 \tag{11}$$

wordt de oplossing van de homogene vergelijking:

$$x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\bar{\lambda} t} \tag{12}$$

De beweging, veroorzaakt door den stoot S op het tijdstip $t = 0$, is dan gegeven door

$$\begin{aligned} t < 0: &\quad x = 0 \\ t > 0: &\quad x = \frac{S}{m(\lambda - \bar{\lambda})} (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}) \end{aligned} \tag{13}$$

en die tengevolge van den stoot $p(\tau) d\tau$ op het oogenblik $t = \tau$:

$$\begin{aligned} t < \tau: &\quad x = 0 \\ t > \tau: &\quad x = \frac{p(\tau)}{m(\lambda - \bar{\lambda})} \left\{ e^{\lambda (t-\tau)} - e^{\bar{\lambda}(t-\tau)} \right\} d\tau \end{aligned} \tag{14}$$

Op dezelfde wijze als boven volgt hieruit dan voor de beweging onder invloed van de willekeurige uitwendige kracht $p(\tau)$:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \int_{-\infty}^{t} \frac{p(\tau)}{m} \left\{ e^{\lambda (t-\tau)} - e^{\bar{\lambda}(t-\tau)} \right\} d\tau \tag{15}$$

of, wanneer de bewegingstoestand op het tijdstip $t = t_0$ als bekend aangenomen wordt:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\bar{\lambda} t} + \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} \int_{t_0}^{t} \frac{p(\tau)}{m} \left\{ e^{\lambda(t-\tau)} - e^{\bar{\lambda}(t-\tau)} \right\} d\tau \tag{16}$$

In tegenstelling met de in het vorige punt gegeven oplossing kan de hier afgeleide ook gebruikt worden, wanneer de frequentievergelijking reëele wortels heeft. Daarbij komen dan alleen in plaats van de complexe wortels λ, $\bar{\lambda}$ de twee reëele wortels.

9. *De mechanische beteekenis van de verkregen oplossing.*

De verkregen uitkomsten, in het bijzonder die in den vorm (9) en (10), geven de beweging van het stelsel onder invloed van een uitwendige kracht als bestaande uit vrije slingeringen, die ieder voor zich veroorzaakt zijn door de werking van de kracht gedurende een kort tijdsverloop. De beweging op het tijdstip t wordt dus beinvloed door het geheele daaraan voorafgaande verloop van de uitwendige kracht.

Genoemde slingeringen dempen echter op de gewone wijze uit. De invloed van veranderingen in de kracht zal zich dus minder doen gevoelen, naarmate de tijdsafstand tusschen het oogenblik, waarop zij plaats hadden en het tijdstip t, waarop de beweging beschouwd wordt, grooter en de demping sterker is.

RAPPORT A 676.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Vergelijking van de gemeten en berekende verdeeling van de belasting voor een tapschen vliegtuigvleugel

door

Ir. C. KONING en Ir. A. BOELEN.

RAPPORT A 676.

Vergelijking van de gemeten en berekende verdeeling van de belasting voor een tapschen vliegtuigvleugel.

Uittreksel.

Bovengenoemde vergelijking wordt uitgevoerd voor een vleugel, waarvan de verdeeling van den druk over het oppervlak door Cowley en Mc. Millan bepaald is (zie lit. 6).

Voor de berekening werd de door Lotz (zie lit. 4) aangegeven methode gebruikt. Deze methode en de door Prandtl ontwikkelde theorie voor den eindig breeden vleugel (lit. 1, 2 en 3), die het uitgangspunt voor de methode van Lotz vormt, worden kort besproken (punt 3). In punt 3c is het verband tusschen circulatie, aerodynamischen invalshoek, plaatselijke lift en plaatselijken gemiddelden druk gegeven.

De overeenkomst tusschen de gemeten en de berekende belastingverdeeling is vrij goed. De gevonden verschillen zijn max. 7%, indien niet omgerekend wordt naar gelijke totaalbelasting (fig. 6), en max. 3½ %, indien dit wel geschiedt (fig. 7). De verschillen tusschen het berekende buigende moment en het uit de metingen volgende zijn bij gelijke totaalbelasting onbelangrijk (fig. 8).

Tenslotte wordt besproken in hoeverre de uit dit onderzoek volgende conclusies geldig zijn voor andere vleugels (punt 8).

RAPPORT A 676.

Comparaison de la distribution de la portance pour une aile trapézoïdale déduite d'essais sur modèle et obtenue par calcul.

Résumé.

La comparaison susmentionnée fut fait pour une aile dont la distribution des pressions a été mesurée par Cowley et Mc. Millan (voir lit. 6).

La méthode de Lotz (voir lit. 4) fut employée pour le calcul. Cette méthode et la théorie de Prandtl (voir lit. 1, 2 et 3) pour l'aile d'envergure finie, qui est la base de la méthode de Lotz, sont décrites brièvement (point 3). Les relations entre la circulation, l'angle d'attaque effectif et la distribution de la portance et des pressions moyennes sont données dans le point 3c.

La concordance entre la distribution des pressions calculée et mesurée est assez bonne. Les différences sont tout au plus 7%, quand les résultats ne sont pas corrigés à même portance totale (fig. 6), et 3½ %, quand cette correction a été appliquée (fig. 7). Les différences entre le moment de flexion, déduit des calculs et des essais sur modèle, sont négligeables (fig. 8).

La validité des conclusions tirées de cette étude pour des ailes d'autre forme est discutée (point 8).

Les symboles employés sont les suivants:

ϱ = densité de l'air,
V = vitesse de l'air (= vitesse de vol),
x, ξ = ordonnée d'un élément de l'aile (voir fig. 1),
Γ, Γ_x, Γ_ξ = circulation,
t_x = profondeur de l'aile,
t_o = profondeur de l'aile dans le plan de symmétrie ($x = 0$),
b = envergure de l'aile,
O = surface totale de l'aile,
α_g, α_{gx} = angle d'attaque géométrique,
α_o = angle d'attaque géométrique dans le plan de symmétrie,
α_a, α_{ax} = angle d'attaque effectif,
α_i, α_{ix} = angle d'attaque induit,
a_x, a_ξ = portance locale (distribution de la portance suivant l'envergure),
p_x = pression moyenne locale (distribution de la pression moyenne suivant l'envergure),
A = portance totale,
c_a = coefficient de portance $= \dfrac{A}{\frac{1}{2}\varrho V^2 O}$,
c_1 $= \frac{1}{2} \dfrac{dc_a}{d\alpha}$ pour l'aile d'envergure infinie,
M_x = moment de flexion,
a_{en} = coefficient de la série de la circulation,
a_{gn} = coefficient de la série de l'angle d'attaque géometrique,
$\gamma_{2\nu}$ = coefficient de la série du corde de l'aile,
δ $= \arccos\left(-\dfrac{2x}{b}\right)$.

REPORT A 676.

Comparison of the measured and calculated load distribution for a tapered wing.

Summary.

The load distribution measured for a tapered wing by Cowley and Mc. Millan (see lit. 6) has been compared with the calculated distribution.

The method of Lotz (see lit. 5) has been used for the calculation. This method and the aerofoil theory of Prandtl for a three dimensional wing (see lit. 1, 2 and 3), on which the method of Lotz is based, are described briefly in point 3.

The relations between circulation, aerodynamic angle of incidence, lift distribution and local mean pressure are given in point 3c.

The agreement between the measured and calculated pressure distribution is rather good. The maximum difference is 7% when the results of measurement and calculation are not corrected to equal total lift (fig. 6) and 3½ % when they are corrected to equal lift (fig. 7). The calculated bending moment and that caused by the measured distribution differ only slightly (fig. 8).

The validity of the conclusions for other wings is discussed in point 8.

The following symbols are used:

ϱ = density of the air,
V = undisturbed velocity of the air (= flying speed),
x, ξ = ordinate of a wing element, measured along the span (see fig. 1),
$\Gamma, \Gamma_x, \Gamma_\xi$ = circulation,
t_x = chord,
t_o = chord in the middle of the wing ($x = 0$),
b = span,
O = wing area,
α_g, α_{gx} = local geometric angle of incidence,
α_o = geometric angle of incidence in the middle of the wing ($x = 0$),
α_a, α_{ax} = local effective or aerodynamic angle of incidence,
α_i, α_{ix} = local induced angle of incidence.
a_x, a_ξ = local lift,
p_x = local mean pressure,
A = total lift,
c_a = liftcoefficient = $\frac{A}{\frac{1}{2}\varrho V^2 O}$,
c_1 = $\frac{1}{2}\frac{dc_a}{d\alpha}$ for wing of infinite span,
M_x = bending moment,
a_{en} = coefficient of the series for the circulation,
a_{gn} = coefficient of the series for the geometric angle of incidence,
$\gamma_{2\nu}$ = coefficient of the series for the chord,
δ = $\cos^{-1}\left(-\frac{2x}{b}\right)$.

BERICHT A 676.

Vergleichung der gemessenen und berechneten Auftriebsverteilung eines Trapezflügels.

Zusammenfassung.

Obengenannte Vergleichung ist ausgeführt worden für einen Flügel, dessen Druckverteilung von Cowley und Mc. Millan gemessen ist (siehe lit. 6).

Für die Berechnung der Auftriebsverteilung wurde das von Lotz angegebene Verfahren benutzt. Dieses Verfahren und die Tragflügeltheorie von Prandtl, von welcher das Verfahren ausgeht, sind in Kürze beschrieben worden (Punkt 3). In Punkt 3c sind die Beziehungen zwischen Zirkulation, wirksamen Anstellwinkel, Auftriebsverteilung und Druckverteilung gegeben.

Die Uebereinstimmung zwischen die gemessene und die berechnete Auftriebsverteilung ist ziemlich gut. Die grössten Unterschiede sind 7% wenn nicht umgerechnet wird nach gleichem Gesamtauftrieb (Fig. 6) und 3,5 % wenn diese Umrechnung stattgefunden hat (Fig. 7). Die Unterschiede zwischen die berechneten biegenden Momente und die aus den Messungen folgenden Momente sind unwesentlich (Fig. 8).

Schliesslich wird die Gültigkeit der Schlussfolgerungen für andere Flügel besprochen (Punkt 8).

Die benutzten Formelzeichen sind im Allgemeinen denen von Lotz angepasst worden.

Es bedeutet:

ϱ = Dichte der Luft,
V = Anstromgeschwindigkeit,
x, ξ = Koordinate den Flügel entlang,
$\Gamma, \Gamma_x, \Gamma_\xi$ = Zirkulation an der Stelle x, ξ,
t_x = Flügeltiefe an der Stelle x,
t_o = Flügeltiefe an der Stelle $x = 0$,
b = Flügelbreite,
O = Flügelfläche,
α_g, α_{gx} = geometrischer Anstellwinkel an der Stelle x,
α_o = geometrischer Anstellwinkel in der Flügelmitte,
α_a, α_{ax} = wirksamer Anstellwinkel an der Stelle x,
α_i, α_{ix} = induzierter Anstellwinkel an der Stelle x,

α_x, α_ξ = Auftriebsverteilung (Auftrieb an der Stelle x),

p_x = Druckverteilung (mittlerer Druck an der Stelle x),

A = Gesamtauftrieb,

c_a = Auftriebsbeiwert $= \frac{A}{\frac{1}{2}\varrho V^2 O}$.

c_1 $= \frac{1}{2}\,\frac{dc_a}{d\alpha}$ für unendlich breiten Flügel,

M_x = biegendes Moment,

α_{en} = Koeffizienten der Reihenentwicklung für Zirkulation,

α_{gn} = Koeffizienten der Reihenentwicklung für geometrischen Anstellwinkel,

$\gamma_{2\nu}$ = Koeffizienten der Reihenentwicklung für die Flügeltiefe,

δ $= \arccos\left(-\frac{2x}{b}\right)$.

RAPPORT A 676.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Vergelijking van de gemeten en berekende verdeeling van de belasting voor een tapschen vliegtuigvleugel

door

Ir. C. KONING en Ir. A. BOELEN.

Overzicht.

De berekende en de experimenteel bepaalde verdeeling van de belasting over de breedte worden voor een tapschen vleugel vergeleken. Deze vergelijking heeft ten doel na te gaan of de resultaten van de berekening de werkelijkheid met voldoende nauwkeurigheid benaderen om als uitgangswaarden voor de sterkteberekening te mogen dienen. De wijze van berekenen en de theorie, waarop deze berust, worden kort besproken.

Inhoudsopgave.

1. *Inleiding.*

Voor de sterkte van vliegtuigvleugels is het noodig de verdeeling van de door de luchtkrachten veroorzaakte belasting over de vleugelbreedte te kennen. Bij rechthoekige vleugels kan deze in den regel met voldoende nauwkeurigheid door een eenvoudige verdeeling van vasten vorm benaderd worden. Bij de thans zeer veel gebruikte tapsche vleugels is dit niet mogelijk, zoodat hier de verdeeling door proeven of door berekening bepaald moet worden. De laatste weg is de goedkoopste doch is alleen dan toelaatbaar, wanneer vaststaat, dat de daarbij verkregen uitkomsten voldoende met de werkelijkheid overeenstemmen. Teneinde hiervan een indruk te verkrijgen werd voor een geval, waarvoor de belastingsverdeeling experimenteel bepaald was, deze vergeleken met de berekende.

Hoewel de berekeningsmethode en de theorie, waarop zij berust, in de bestaande literatuur uitvoerig behandeld worden, zullen zij ter inleiding hier in het kort besproken worden.

2. *Notaties.*

In het onderstaande worden de volgende symbolen in de daarbij aangegeven beteekenis gebruikt:

ϱ = massadichtheid van de lucht,
V = ongestoorde windsnelheid (= vliegsnelheid),
x, ξ = coördinaat van een element, gemeten langs den vleugel (zie fig. 1),
$\Gamma, \Gamma_x, \Gamma_\xi$ = circulatie,
t_x = koorde,
t_o = koorde van de middendoorsnede ($x = 0$),
q = verhouding tusschen eind- en middenkoorde,
b = vleugelbreedte,
O = vleugeloppervlak,
α_g, α_{gx} = meetkundige invalshoek,
α_o = meetkundige invalshoek van de middendoorsnede ($x = 0$),
α_a, α_{ax} = effectieve of aerodynamische invalshoek,

α_i, α_{ix} = geinduceerde invalshoek,
a_x, a_ξ = belasting per eenheid van breedte,
p_x = gemiddelde druk,
A = lift = totale vleugelbelasting,
c_a = liftcoëfficiënt $= \frac{A}{\frac{1}{2}\varrho V^2 O}$,
c_1 $= \frac{1}{2}\left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)$ voor oneindig breeden vleugel,
M_x = buigend moment,
a_{en} = coëfficiënt van de reeks voor de circulatie,
a_{gn} = coëfficiënt van de reeks voor den meetkundigen invalshoek,
$\gamma_{2\nu}$ = coëfficiënt van de reeks voor de koorde,
δ $= \text{bgcos}\left(-\frac{2x}{b}\right)$.

De indices x en ξ dienen om aan te geven, dat de beschouwde grootheid betrekking heeft op het element x, resp. ξ. Zij worden alleen daar gebezigd, waar in één formule grootheden naast elkaar voorkomen, die behooren bij verschillende elementen x en ξ, of waar het gewenscht is nadrukkelijk aan te geven, dat een afhankelijkheid van x of ξ bestaat.

3. *De methode voor het berekenen van de belastingsverdeeling.*

a. *De circulatie-vergelijking:*

De methode van berekenen berust op de door Prandtl ontwikkelde theorie van den eindig breeden vleugel (zie o.m. lit. 1, 2, 3) [1]). Uitgegaan wordt van de grondgedachten, dat:

1e. voor ieder element van een willekeurigen vleugel dezelfde betrekking tusschen circulatie en draagkracht geldt als door Joukowsky en Kutta voor den oneindig breeden vleugel in tweedimensionale strooming werd afgeleid.
2e. een verschil in circulatie tusschen twee naast elkaar gelegen elementen het optreden van een „vrijen wervel" in de strooming meebrengt,
3e. de circulatie, bij gegeven snelheid, profielvorm en -afmeting, alleen afhankelijk is van den hoek, die het beschouwde element maakt met de richting van de strooming ter plaatse.

Onder „element" wordt hier een deel van den vleugel verstaan, dat begrensd is door twee, op kleinen afstand van elkaar gelegen, vlakken, die loodrecht op de vleugelbreedte (x-as) staan (fig. 1).

De onder 1e. bedoelde betrekking luidt voor een element met de breedte dx:

$$a_x\,dx = \varrho\,V\,\Gamma_x\,dx \quad (1)$$

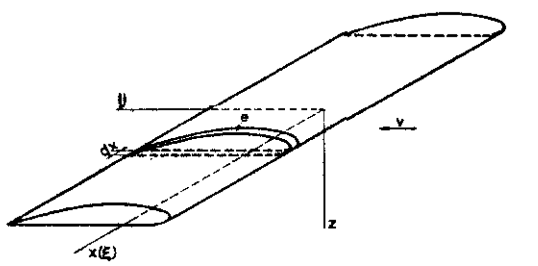


Fig. 1. Coördinaten en element (e) van den vleugel.

Bij een oneindig breeden vleugel met constanten profielvorm, koorddiepte en invalshoek (in het volgende kortweg aan te geven met: oneindig breede vleugel) heeft de circulatie Γ_x voor alle elementen dezelfde waarde. Bij een willekeurigen vleugel zal dit niet het geval zijn. Er treden dan in de strooming wervels op, die ongeveer aan den achterrand van den vleugel beginnen en zich naar achteren tot in het oneindige uitstrekken (fig. 2a).

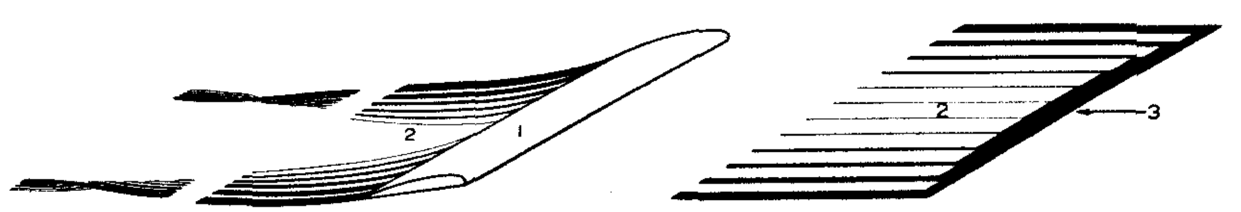


Fig. 2. Werkelijk (a) en geïdealiseerd (b) wervelstelsel. 1. vleugel; 2. vrije wervels; 3. gebonden wervel.

De sterkte van de wervels, die aan een element ontstaan, is daarbij gelijk aan de verandering in circulatie over dit element. Daar deze verandering niet sprongsgewijze, doch continu plaats heeft, vormen de wervels een aaneengesloten vlak achter den vleugel. Streng genomen vallen de wervellijnen samen met de stroomlijnen en rolt het wervelvlak zich op eenigen afstand achter den vleugel geleidelijk op tot twee ongeveer achter de vleugeluiteinden gelegen geconcentreerde wervelstaarten. Bij de berekening mogen echter beide laatstgenoemde bijzonderheden buiten beschouwing blijven. Als voldoend

[1]) De aanwijzingen lit. verwijzen naar de literatuuropgave aan het einde van het rapport.

nauwkeurige benadering wordt daarbij aangenomen, dat de wervellijnen rechten zijn, die van de x-as uitgaan en evenwijdig aan de richting van de ongestoorde strooming loopen (fig. 2b).

Hoewel hier niet van onmiddellijk belang, kan, ter verklaring van den naam „vrije wervels", gewezen worden op de omstandigheid, dat de vleugel, wat zijn invloed op de strooming betreft, op de in fig. 2b aangegeven wijze vervangen gedacht kan worden door een wervelstelsel. Daarbij nemen een of meerdere „dragende" of „gebonden wervels" met dezelfde circulatieverdeeling de plaats in van den vleugel. Tegenover deze denkbeeldige wervels staan dan de, ook in werkelijkheid voorkomende vrije wervels achter den vleugel.

Het bestaan van de vrije wervels heeft tengevolge, dat de richting van de strooming ter plaatse van een element van den vleugel niet gelijk is aan die voor het geval, dat dit element deel uitmaakt van een oneindig breeden vleugel. Dit richtingsverschil, de „geinduceerde invalshoek" α_i (zie fig. 3), is afhankelijk van de sterkte en de verdeeling van de vrije wervels en, op grond van het bovenstaande, dus van het verloop van de circulatie over de vleugelbreedte. In den regel zal het niet voor alle elementen van den vleugel gelijk zijn, als gevolg van de verschillende ligging van dezen ten opzichte van het wervelstelsel. Naast den „meetkundigen invalshoek" α_g, zijnde de hoek, dien het element maakt met de richting van de strooming op grooten afstand voor den vleugel, wordt nu een andere, de „effectieve" of „aerodynamische" α_a, ingevoerd. Deze is het verschil tusschen meetkundigen en geinduceerden invalshoek:

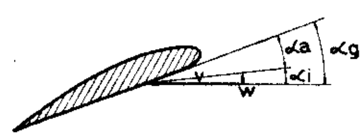


Fig. 3. Meetkundige (α_g), geinduceerde (α_i) en effectieve (α_a) invalshoek.

$$\alpha_g = \alpha_a + \alpha_i \tag{2}$$

en kan dus beschouwd worden als de hoek, dien het element maakt met de plaatselijke strooming.

Aangenomen wordt, dat de circulatie en daarmede ook de draagkracht van het element afhangt van den hoek α_a en wel zoo, dat zij overeenkomen met die voor hetzelfde element als onderdeel van een oneindig breeden vleugel bij een meetkundigen invalshoek gelijk aan α_a.

De betrekking (2) vormt het uitgangspunt voor het opstellen van de circulatie-vergelijking, waarbij dan zoowel α_i als α_a in de circulatie Γ uitgedrukt worden.

Zooals bekend verondersteld mag worden, kunnen de snelheden, behoorende bij een willekeurig wervelstelsel, berekend worden met behulp van de formule van Biot en Savart. Voor een vrijen wervel met sterkte 1 uitgaande van het punt ξ levert zij als „storingssnelheid" (= snelheidscomponent evenwijdig aan de z-as, (zie fig. 4)), in het punt x:

$$w_x = \frac{1}{4\pi\,(x-\xi)}$$

De wervelsterkte van de vrije wervels, die aan het element met de breedte $d\xi$ in het punt ξ ontstaan, is $\frac{d\Gamma_\xi}{d\xi}\,d\xi$, de bijbehoorende storingssnelheid:

$$dw_x = \frac{1}{4\pi}\,\frac{d\Gamma_\xi}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi}$$

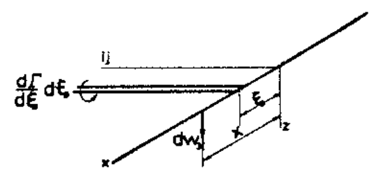


Fig. 4. Verband tusschen sterkte van de vrije wervels $\left(\frac{d\Gamma_\xi}{d\xi}d\xi\right)$ van element ξ en storingssnelheid dw_x voor element x.

In de storingssnelheid ter plaatse van het in punt x gelegen element dragen alle vrije wervels bij. Zij wordt dus gevonden door bovenstaande waarde over de geheele vleugelbreedte te integreeren:

$$w_x = \frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma_\xi}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi}$$

Hieruit volgt voor den geinduceerden invalshoek, daar deze als klein beschouwd mag worden:

$$\alpha_{ix} = \mathrm{bgtg}\,\frac{w_x}{V} = \frac{w_x}{V} = \frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma_\xi}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi} \tag{3}$$

De draagkracht van het element kan eenerzijds met behulp van (1) uitgedrukt worden in de circulatie, anderzijds op de gebruikelijke wijze in den liftcoëfficiënt, waarbij aangenomen wordt, dat deze evenredig is met den aerodynamischen invalshoek en dat de hoeken gemeten worden vanaf dien, waarbij de draagkracht nul is:

$$da_x = \varrho\, V^2 c_1\, \alpha_a\, t_x\, dx$$

Door gelijkstellen van beide uitdrukkingen wordt dan de betrekking tusschen aerodynamischen invalshoek en circulatie verkregen:

$$\alpha_{ax} = \frac{\Gamma_x}{c_1 V t_x} \tag{4}$$

Invoeren van (3) en (4) in (2) levert nu de circulatie-vergelijking:

$$\frac{1}{4\pi V}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma_\xi}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{\Gamma_x}{c_1 V t_x} = \alpha_{gx} \tag{5}$$

Deze vergelijking, die bekend is onder den naam: integraal-vergelijking van Prandtl, geeft het verband tusschen vorm en invalshoek van den vleugel en het verloop van de circulatie.

b. Het oplossen van de circulatie-vergelijking.

Exact oplossen van de circulatie-vergelijking is slechts in uitzonderingsgevallen mogelijk. Voor het bepalen van benaderingsoplossingen voor willekeurige gevallen zijn echter eenige methoden bekend. Daarbij wordt meestal òf grafisch te werk gegaan òf voor de circulatieverdeeling een machtreeks of goniometrische reeks ingevoerd, waarvan de coëfficiënten door oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen bepaald worden.

In het hier besproken geval werd de door Lotz ontwikkelde methode (lit. 4, 5) gebezigd, die haar bruikbaarheid in vele gevallen bewezen heeft. Daarbij worden de volgende drie reeksen ingevoerd:

$$\Gamma_x = V\, t_o\, c_1\, \alpha_o \sum_1^\infty \alpha_{en} \sin n\delta \tag{6a}$$

$$\alpha_{gx} \sin\delta = \alpha_o \sum_1^\infty \alpha_{gn} \sin n\delta \tag{6b}$$

$$\frac{t_o \sin\delta}{t_x} = \sum_0^\infty \gamma_{2\nu} \cos 2\nu\delta \tag{6c}$$

waarin $\delta = \text{bgcos}\left(-\frac{2x}{b}\right)$.

Na invoering van deze reeksen valt de circulatie-vergelijking uiteen in een stelsel van oneindig veel lineaire vergelijkingen met even zoovele onbekenden α_{en}. Dit stelsel kan onmiddellijk gesplitst worden in twee andere, waarvan het eene alleen die coëfficiënten omvat, die behooren bij het symmetrische deel van de circulatieverdeeling, het andere alleen die, welke betrekking hebben op het antisymmetrische deel. Bij berekeningen over symmetrische vleugels behoeft dus alleen eerstgenoemd stelsel beschouwd te worden. Voor praktische doeleinden is het in den regel voldoende van beide stelsels alleen de eerste tien vergelijkingen en de eerste tien onbekenden in beschouwing te nemen. De vergelijkingen kunnen dan met behulp van een iteratieproces, dat snel convergeert, opgelost worden.

c. Het verband tusschen circulatie, belasting, gemiddelden druk en buigend moment.

Uit de berekende circulatieverdeeling (6a):

$$\Gamma_x = V\, t_o\, c_1\, \alpha_o \sum_1^\infty \alpha_{en} \sin n\delta$$

kan met behulp van (1) de belasting per eenheid van breedte a_x bepaald worden:

$$a_x = \varrho V \Gamma_x = \varrho V^2 t_o c_1 \alpha_o \sum_1^\infty \alpha_{en} \sin n\delta \tag{7}$$

Hieruit wordt als gemiddelde druk p_x, d.i. de belasting per breedte-eenheid gedeeld door de plaatselijke koorde, gevonden:

$$p_x = \frac{a_x}{t_x} = \varrho V^2 \frac{t_o}{t_x} c_1 \alpha_o \sum_1^\infty \alpha_{en} \sin n\delta \tag{8}$$

De aerodynamische invalshoek α_a volgt eveneens uit de circulatieverdeeling en wel door gebruik te maken van (4):

$$\alpha_{ax} = \frac{\Gamma_x}{c_1 V t_x} = \alpha_o \frac{t_o}{t_x} \sum_1^\infty \alpha_{en} \sin n\delta \tag{9}$$

Deze laatste grootheid is zoowel voor het bestudeeren van de aerodynamische eigenschappen van den vleugel (gedrag bij grooten invalshoek) als voor de sterkteberekening (wringende momenten in den vleugel) van belang.

Opgemerkt moet worden, dat Γ_x en a_x slechts verschillen door den constanten (d.w.z. van x onafhankelijken) factor ϱV, p_x en α_{ax} door den, eveneens constanten, factor $\varrho V^2 c_1$.

Uit de belastingsverdeeling kunnen voorts nog de totale belasting van den vleugel (lift) A en het buigend moment M_x in de doorsnede x van den vleugel berekend worden. Eerstgenoemde grootheid is:

$$A = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} a_x \, dx = \frac{\pi}{4} \varrho V^2 b \, t_o \, c_1 \, \alpha_o \, \alpha_{e1}$$

en dus de liftcoëfficiënt

$$c_a = \frac{A}{\frac{1}{2} \varrho V^2 O} = \frac{\pi}{2} \frac{b \, t_o}{O} c_1 \, \alpha_o \, \alpha_{e1} \tag{10}$$

Het buigend moment is gelijk aan:

$$M_x = \int_x^{\frac{b}{2}} a_\xi \, (\xi - x) \, d\xi \tag{11}$$

Het is in beginsel mogelijk hierin de door (7) gegeven reeks in te voeren en daarna te integreeren. Eenvoudiger is echter eerst de getallenwaarden voor a_x te bepalen en daarna de integratie grafisch uit te voeren.

4. *De vleugel, waarvoor de uitkomsten vergeleken werden.*

Voor het experimenteel bepalen van de krachtenverdeeling moet de drukverdeeling over het geheele oppervlak van den vleugel gemeten worden. Dit verlangt een speciaal daarvoor ingericht model en vrij langdurige metingen. De hier gebruikte experimenteele gegevens werden daarom niet door het NLL bepaald, doch ontleend aan de uitkomsten van een Engelsch onderzoek (lit. 6).

De daarbij gebezigde vleugel was tapsch zonder prismatisch middenstuk en had afgeronde vleugeluiteinden. Bij de berekening werden deze uiteinden echter recht afgesneden gedacht en wel zoo, dat het vleugeloppervlak onveranderd bleef. In fig. 5 is de omtreksvorm van den vleugel met maten gegeven, zoowel voor den werkelijken toestand als voor dien, welke bij de berekening werd aangenomen. Voor laatstgenoemd geval is de slankheid $b^2/O = 7{,}42$, de verhouding van de eindkoorde tot de middenkoorde $q = 0{,}517$.

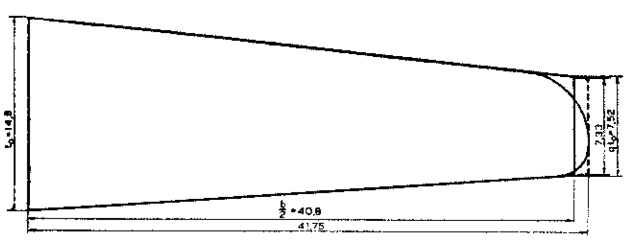


Fig. 5. Helft van het vleugelmodel.
Afgerond uiteinde = werkelijke vorm;
Recht afgesneden = bij berekening aangenomen vorm.
Maten in inches.

Op een afstand van ongeveer 0,1 b van het uiteinde had de vleugel het RAF34-profiel, in het midden een dikker profiel, dat daaruit afgeleid is.

De koorden van de profielen waren in alle doorsneden evenwijdig. De invalshoek, waarbij de draagkracht nul is, had voor alle profielen, waaruit de vleugel bestond, praktisch dezelfde waarde. Weliswaar vertoonen de uitkomsten van profielmetingen, d.w.z. metingen met prismatische vleugels, kleine verschillen in dezen hoek, doch deze zijn van dezelfde orde van grootte als de metingsspreiding (0,1°). Bijgevolg kan de meetkundige invalshoek, die, zooals in punt 3a werd aangegeven, vanaf den hoek voor lift nul gemeten moet worden, als over de vleugelbreedte constant worden beschouwd.

Zooals uit fig. 5 te zien is, had de vleugel geen pijlvorm, d.w.z. waren de vleugeluiteinden niet ten opzichte van de middendoorsnede naar voren of achteren verplaatst. Daar de proeven onder meer ten doel hadden den invloed van de ailerons op de krachtenverdeeling te leeren kennen, waren deze aan het model aangebracht. Zij vielen echter op de gebruikelijke wijze binnen den vleugelomtrek en werden bij de metingen, waarvan hier de resultaten gebruikt worden, steeds in den nulstand gehouden.

5. *De voor het berekenen van de circulatieverdeeling benoodigde grootheden.*

Om met behulp van de vergelijking (5) de circulatieverdeeling te kunnen berekenen, moeten bekend zijn: het verloop van de koorde en van den meetkundigen invalshoek, zoomede de waarde van den coëfficiënt c_1. Eerstgenoemd verloop is, zoodra de vorm van den vleugel gegeven is, bekend. Voor het vaststellen van dat van den invalshoek moet worden uitgegaan van den hoek voor lift nul van ieder element, welke hoek in het algemeen uit de resultaten van profielmetingen bepaald moet worden. Heeft echter, zooals hier (zie punt 4) de vleugel een constanten meetkundigen invalshoek, dan kan hij ook afgeleid worden uit de op den beschouwden vleugel werkende krachten. Ook voor

c_1 moet, streng genomen, voor ieder element de daarbij behoorende waarde in rekening gebracht worden. In vele gevallen kan echter volstaan worden met een voor den geheelen vleugel geldende gemiddelde waarde.

Bedoelde grootheden werden hier nu, omdat de totale op den vleugel werkende draagkracht niet gemeten was, afgeleid uit de gegeven verdeelingen van den gemiddelden druk en van de belasting over de vleugelbreedte. De hoek voor lift nul werd bepaald door tusschen de gegeven drukverdeelingen te interpoleeren en daarbij de hoek vast te stellen, waarbij de over de vleugelbreedte gemiddelde waarde nul was. Voor het berekenen van c_1 werd de liftcoëfficiënt c_a voor eenige invalshoeken α_0 door planimetreeren van de belastingsverdeeling bepaald. Daarna werd hieruit $\frac{dc_a}{d\alpha_0}$ afgeleid en door omrekenen op den oneindig breeden vleugel $c_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)_{b\,=\,\infty}$ bepaald. Als resultaten werden verkregen:

$$\alpha_{c_a=0} = -1{,}6^0 \quad ; \quad \frac{dc_a}{d\alpha_0} = 0{,}074/\text{graad} \quad ; \quad c_1 = 2{,}567/\text{rad.}$$

De meetkundige invalshoek en de koorde werden op de in punt 3b aangegeven wijze in reeksen ontwikkeld. De in de reeks (6c) voor de koorde voorkomende coëfficiënten $\gamma_{2\nu}$ werden met behulp van de bij de Fourier-reeksen gebruikelijke formules berekend. Teneinde het uitwerken van de hierbij voorkomende integralen te ontgaan, werd gebruik gemaakt van een recursie-formule, die voor het hier beschouwde geval het verband geeft tusschen deze voor drie opeenvolgende waarden van ν.

Daar de meetkundige invalshoek constant was, werden de coëfficiënten in de reeks (6b) voor dezen hoek:

$$\text{voor } n = 1: \quad \alpha_{g1} = 1 \quad , \quad \text{voor } n \neq 1: \quad \alpha_{gn} = 0$$

6. *De te vergelijken grootheden.*

De meest voor de hand liggende grootheden voor vergelijking zijn de belasting per eenheid van breedte a_x en de gemiddelde druk p_x. Daar deze slechts door den in de twee gevallen gelijken factor t_x verschillen, bestaat er geen aanleiding beide te beschouwen. De keuze van den gemiddelden druk p_x als vergelijkingsgrootheid levert een bijkomstig voordeel. De uitdrukking (8), die de berekende waarde voor p_x aangeeft, bevat den constanten factor $\varrho V^2 c_1 \alpha_0$, die, mits ook de experimenteele waarden erdoor gedeeld worden, weggelaten mag worden. Het deelen door α_0 maakt de uitkomsten voor verschillende invalshoeken onderling vergelijkbaar. Vergelijking met (9) toont nu aan, dat de grootheid, die overblijft, niet anders is dan α_a/α_0.

Komen bij deze wijze van vergelijken verschillen tusschen de berekende en de experimenteele uitkomsten voor, dan behoeven zij voor de sterkteberekening nog niet van belang te zijn. Immers wordt daarbij de totale belasting van den vleugel op grond van andere overwegingen vastgesteld. De absolute waarde van de drukken is dus van geen belang, alleen de vorm van hun verloop heeft beteekenis. Vergelijking hiervan kan geschieden door de uitkomsten om te rekenen op gelijke draagkracht, dus door de boven besproken grootheid $\frac{\alpha_a}{\alpha_0} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 \alpha_0}$ te vermenigvuldigen met α_0/c_a.

Tenslotte is, wederom van het standpunt van de sterkteberekening bezien, het buigend moment M_x, dat de luchtkrachten op den vleugel veroorzaken, het meest belangrijk. Daarom werd ook dit moment op de in punt 3c aangeduide wijze bepaald en omgewerkt op de, op gelijke totale vleugelbelasting betrokken, grootheid M_x/Ab.

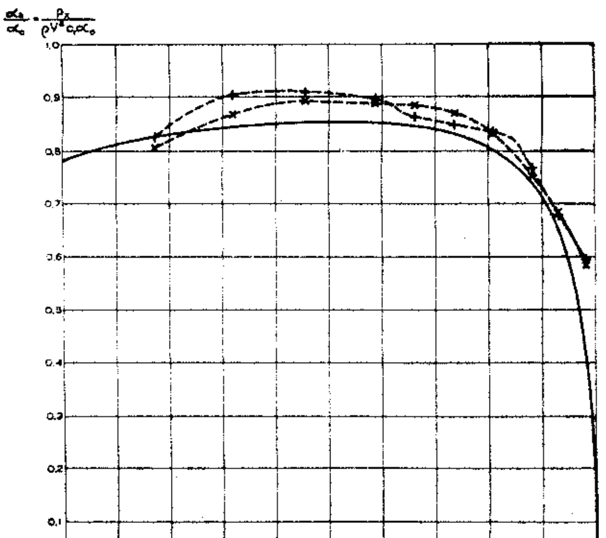


Fig. 6. Gemiddelde druk p_x en effectieve invalshoek α_a.

——— : berekende waarden.
+ - - - - + : } gemeten waarden voor $\alpha_0 = \left\{\begin{matrix}5{,}8^0\\9{,}9^0\end{matrix}\right.$
x - - - - x : }

7. *Bespreking van de uitkomsten.*

De uitkomsten van de berekening zijn in Tabel I en III, de uit de experimenteele resultaten afgeleide waarden in Tabel II en III gegeven, terwijl zij in fig. 6 t/m 8 tezamen uitgezet zijn.

Zooals uit fig. 6 blijkt, vertoonen de berekende en de gemeten waarden voor den gemiddelden druk p_x een redelijke overeenstemming; eerstgenoemde zijn praktisch over het geheele gebied iets lager. Het grootste verschil bedraagt ongeveer 7%. Worden de twee experimenteele gevallen afzonderlijk beschouwd en de verschillen uitgedrukt in effectieven invalshoek α_a, dan zijn zij voor beide ten hoogste 0,4°.

Deze verschillen mogen echter niet zonder meer als een tekort van de berekeningsmethode beschouwd worden. De verschillen tusschen de gemeten waarden voor de twee invalshoeken wijzen er op, dat experimenteele onnauwkeurigheden hier zeker invloed kunnen hebben. Als andere mogelijke oorzaken van de verschillen moeten de gebezigde waarden voor $\alpha_{c_a=0}$ en c_1 genoemd worden. De wijze, waarop deze bepaald werden, is in punt 5 besproken. Daarbij werd, wat eerstgenoemde grootheid betreft, uitgegaan van de veronderstelling, dat de invalshoek voor lift nul voor alle elementen dezelfde is. Deze behoeft echter niet geheel juist te zijn: verschillen van eenige $^1/_{10}$ graden zijn hier zeker mogelijk (vergelijk punt 4). Dergelijke verschillen zullen echter overeenkomstige van dezelfde orde van grootte in den effectieven invalshoek α_a veroorzaken en daardoor het verloop van deze grootheid kunnen beinvloeden. Ook tegen de eveneens gebezigde veronderstelling, dat c_1 voor alle elementen dezelfde waarde heeft, kan bezwaar gemaakt worden. Het lijkt niet waarschijnlijk, dat de invloed hiervan belangrijk zal zijn. De waarde van c_1 is echter eenigszins onzeker, doordat gegevens over den druk op het middendeel van den vleugel ($2x/b < 0{,}175$) ontbraken en dus geschat moesten worden. Een wijziging in deze grootheid geeft, zooals uit (8) blijkt, een daarmede evenredige in p_x en bovendien, door den invloed, dien zij op de coëfficiënten a_{en} heeft, een kleine verandering in de verdeeling ervan over de vleugelbreedte. Uit den aard der zaak worden alleen de berekende en niet de experimenteele waarden voor p_x door de keuze van $\alpha_{c_a=0}$ en c_1 beinvloed. Bij de in fig. 6 gegeven vergelijkingsgrootheden is, daar deze door $c_1\alpha_0$ gedeeld zijn, praktisch het tegenovergestelde het geval: de invloed op de experimenteele uitkomsten is groot, op de berekende blijft alleen een kleine van c_1 over. Tenslotte dient als mogelijke oorzaak van verschillen in de nabijheid van het vleugeleinde ($2x/b = 1$) de omstandigheid vermeld te worden, dat voor b steeds de in de berekening gebezigde waarde aangehouden werd, bijgevolg de werkelijke vleugel eenigszins buiten het punt $2x/b = 1$ uitsteekt.

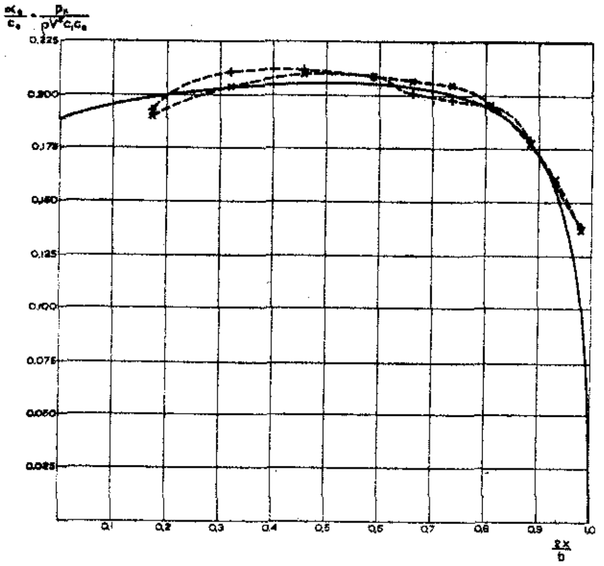


Fig. 7. Gemiddelde druk p_x en effectieve invalshoek α_a, omgerekend op gelijke draagkracht.
——— : berekende waarden.
+ - - - + : } gemeten waarden voor $\alpha_0 = \left\{ \begin{array}{l} 5{,}8^\circ \\ 9{,}9^\circ \end{array} \right.$
x - - - x : }

Wordt de gemiddelde druk op de in punt 6 besproken wijze gereduceerd op gelijke totale belasting (fig. 7), dan worden de verschillen kleiner en bedragen ten hoogste $3\frac{1}{2}$ %. Dit beteekent, dat, wanneer de sterkteberekening gebaseerd zou worden op de berekende inplaats van op de experimenteel bepaalde belastingsverdeeling en de laatste geheel juist zou zijn, fouten van hoogstens $3\frac{1}{2}$ % in de plaatselijke belastingen gemaakt zouden worden. Zooals uit fig. 8 blijkt, hebben deze afwijkingen slechts een onbelangrijken invloed (voor $2x/b < 0{,}6$ max. 2 %) op het buigende moment.

Samenvattend kan gezegd worden, dat in het hier beschouwde geval de berekende verdeeling van de krachten over de vleugelbreedte voldoende met de experimenteele overeenkomt om haar als uitgangspunt voor de sterkteberekening te mogen gebruiken.

Bij de vergelijking van de berekende en gemeten resultaten moeten de eerste in hoofdzaak gezien worden als uitkomsten van de circulatie-vergelijking en dus ook het hier besproken onderzoek als bedoeld ter contrôle de toelaatbaarheid van het gebruik daarvan. De vraag in hoeverre de oplossingsmethode bruikbaar is en een voldoend nauwkeurige benadering van de exacte oplossing der circulatie-vergelijking levert, zou op eenvoudiger wijze met behulp van een contrôle-berekening en zonder gebruik te maken van experimenteel materiaal behandeld kunnen worden. Daar zij, wat de hier gebezigde methode betreft, op grond van een uitgebreide ervaring bevestigend beantwoord kan worden, werd er hier niet verder op ingegaan.

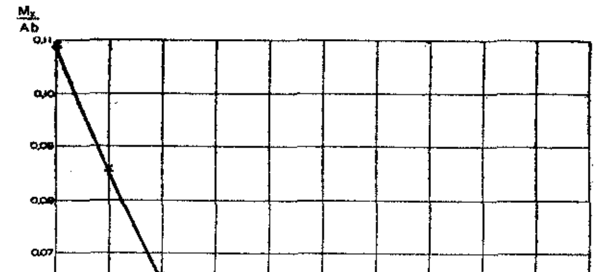


Fig. 8. Buigend moment M_x, omgerekend op gelijke draagkracht.
——— : berekende waarden.
+ : } gemeten waarden voor $\alpha_0 = \left\{ \begin{array}{l} 5{,}8^\circ \\ 9{,}9^\circ \end{array} \right.$
x : }

8. *De beteekenis van het verkregen resultaat voor andere gevallen.*

De in het vorige punt gegeven conclusie mag ook als geldig beschouwd worden voor andere vleugels, die van de onderzochte verschillen in slankheid, tapschheid, invalshoekverloop of door aanwezigheid van een prismatisch middenstuk, mits genoemde gegevens geen uitzonderlijk groote afwijkingen vertoonen. Voorbehoud dient echter gemaakt te worden met betrekking tot eenige speciale groepen van vleugels. Zij omvatten die gevallen, waarvoor de theorie in den in punt 3a gegeven vorm niet zonder meer geldt. Hiertoe behooren in de eerste plaats de vleugels, waarbij de diepte in de stroomingsrichting niet verwaarloosd mag worden, dus de vleugels met zeer kleine slankheid en die met belangrijken pijlvorm (verplaatsing van de vleugeluiteinden naar voren of achteren ten opzichte van de middendoorsnede), en die gevallen, waarin de vleugelstrooming geheel of ten deele loslaat. Vleugels met kleine slankheid zijn praktisch van weinig belang. Voor vleugels met pijlvorm is wel bekend, dat bij niet te grooten pijlhoek voor de totale op den vleugel werkende krachten een behoorlijke overeenstemming bestaat tusschen de berekende en gemeten waarden; materiaal om de krachtenverdeeling te kunnen vergelijken, ontbreekt echter nog. De circulatie-vergelijking in den hier gebezigden vorm geldt niet voor vleugels, waarbij de strooming loslaat, omdat hierbij de op een element werkende kracht niet lineair verloopt met den effectieven invalshoek. Uitbreiding van de vergelijking op zoodanige wijze, dat zij ook deze gevallen omvat, is in beginsel mogelijk; de oplossing ervan levert dan echter bezwaren op, die tot nu toe nog niet overwonnen zijn. Bijgevolg kan zeker de overeenstemming tusschen berekende en werkelijke waarden nog niet beoordeeld worden. Naast de aangegeven gevallen staat nog een andere groep, de vleugels met discontinuïteiten. De reden, waarom deze mogelijk niet aan de circulatie-vergelijking voldoen, is minder evident. Deze ligt daarin, dat de mogelijkheid bestaat, dat de beide deelen van den vleugel aan weerszijden van de discontinuïteit elkaar direct kunnen beinvloeden, een omstandigheid, waarmede de theorie geen rekening houdt. Sprongsgewijze verloop van de koorde komt praktisch niet voor, van den invalshoek daarentegen wel. Deze hoek moet, zooals in punt 3a aangegeven is, gemeten worden vanaf den hoek voor lift nul, zoodat alle vleugels met uitgeslagen ailerons of landingskleppen, voor zoover de laatsten zich niet over de geheele vleugelbreedte uitstrekken, discontinuïteiten in den meetkundigen invalshoek vertoonen.

Volledigheidshalve dient erop gewezen te worden, dat alle bovenstaande beschouwingen betrekking hebben op den afzonderlijken vleugel. De aan den vleugel bevestigde romp en motorgondels zullen de verdeeling van de op dezen werkende krachten beinvloeden. Aan de vraag, in hoeverre deze invloed praktisch beteekenis heeft, is tot dusver nog weinig aandacht geschonken. Wanneer echter verfijning van de sterkteberekening een nauwkeurige kennis van de verdeeling van de belasting gewenscht maakt, behoort zij zeker nader beschouwd te worden.

9. *Conclusies.*

a. Voor het hier beschouwde geval was de overeenstemming tusschen de berekende en de door meting bepaalde waarden voor de krachtenverdeeling over de breedte van den vleugel zoodanig, dat de eerstgenoemde zonder bezwaar als uitgangspunt voor de sterkteberekening gebezigd kunnen worden.

b. Voor andere vleugels, die van de onder *a.* bedoelde verschillen in slankheid, tapschheid, invalshoekverloop, of door aanwezigheid van een prismatisch middenstuk, mag een soortgelijke overeenstemming verwacht worden, mits genoemde gegevens geen uitzonderlijk groote afwijkingen vertoonen.

c. Conclusie *b.* mag zonder nader onderzoek niet uitgestrekt worden tot die gevallen, waarin de circulatie-vergelijking in den hier gegeven vorm niet geldig is of deze geldigheid nog niet vast staat. Hiertoe behooren: vleugels met zeer kleine slankheid, met belangrijken pijlvorm, met geheel of ten deele losgelaten strooming of met — door uitgeslagen kleppen of ailerons veroorzaakt — discontinu verloop van den invalshoek.

d. Aandacht moet worden besteed aan de mogelijkheid, dat aan den vleugel aangebrachte onderdeelen (romp, motorgondels) de krachtenverdeeling kunnen beinvloeden.

Literatuur.

1. Prandtl, L.: Tragflügeltheorie I; in: Prandtl—Betz. Vier Abhandlungen zur Hydro- und Aerodynamik (Göttingen 1927).

2. Glauert, H.: The elements of aerofoil and airscrew theory (Cambridge 1926). Chapter X, XI.

3. Von Kármán, Th. and Burgers, J. M.: General aerodynamic theory, Perfect fluids; in: Durand, Aerodynamic Theory, Vol. II (Berlin 1935), Chapter III, IVA.

4. Lotz, I. : Berechnung der Auftriebsverteilung beliebig geformter Flügel. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt (1931) S. 189.

5. : zie 3., Chapter IVA, Section 12.

6. Cowley, W. L. and Mc. Millan, G. A.: Pressure distribution on wings with ailerons. Aeron. Res. Comm., R. and M. 1625.

TABEL I.

Berekende waarden voor den gemiddelden druk p_x.

$\frac{2x}{b}$	$\frac{\alpha_a}{\alpha_o} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 \alpha_o}$	$\frac{\alpha_a}{c_a} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 c_a}$	$\frac{2x}{b}$	$\frac{\alpha_a}{\alpha_o} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 \alpha_o}$	$\frac{\alpha_a}{c_a} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 c_a}$
0	0,7826	0,1885	0,766	0.8209	0,1977
0,087	0,8094	0,1949	0.819	0.7948	0,1914
0,174	0,8260	0,1989	0.866	0,7572	0,1823
0,259	0,8377	0,2017	0,906	0,7020	0,1690
0,342	0,8470	0,2040	0.940	0,6248	0,1505
0,423	0.8530	0,2054	0.966	0,5207	0,1254
0,500	0,8550	0.2059	0,985	0,3826	0,0921
0,574	0,8538	0,2056	0,996	0,2056	0,0495
0,643	0,8490	0,2044	1,000	0	0
0,707	0,8387	0,2020			

Voor verklaring van de symbolen zie punt 2.

TABEL II.

Gemeten waarden voor den gemiddelden druk p_x.

$\frac{2x}{b}$	$\alpha_o = 5{,}8^0$		$\alpha_o = 9{,}9^0$	
	$\frac{\alpha_a}{\alpha_o} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 \alpha_o}$	$\frac{\alpha_a}{c_a} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 c_a}$	$\frac{\alpha_a}{\alpha_o} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 \alpha_o}$	$\frac{\alpha_a}{c_a} = \frac{p_x}{\varrho V^2 c_1 c_a}$
0,172	0,827	0,193	0,807	0,190
0.319	0,904	0,211	0,868	0,204
0,457	0,909	0,212	0,893	0.210
0,588	0,897	0,209	0,888	0,209
0,662	0,863	0,201	0,885	0.208
0,736	0,849	0,198	0,870	0,205
0,809	0,835	0,195	0,833	0,196
0.883	0,768	0,179	0,752	0,177
0,932	0,677	0,158	0,683	0,161
0,981	0.595	0,139	0,584	0.137

Voor verklaring van de symbolen zie punt 2.

TABEL III.

Berekende en gemeten waarden voor het buigend moment M_x.

$\frac{2x}{b}$	$\frac{M_x}{Ab}$		
	Berekend	Gemeten	
		$\alpha_o = 5{,}8^0$	$\alpha_o = 9{,}9^0$
0	0,1085	0,1087	0,1091
0,1	0,0851	0,0854	0.0859
0,2	0,0649	0,0650	0.0657
0,3	0,0477	0,0477	0,0484
0,4	0,0335	0,0333	0,0340
0,5	0,0220	0,0218	0,0224
0,6	0,0132	0,0129	0,0134
0,7	0,0068	0,0069	0,0070
0,8	0,0027	0,0028	0,0028
0,9	0,0006	0.0005	0,0006
1,0	0	0	0

Voor verklaring van de symbolen zie punt 2.

RAPPORT S 100.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Methode voor de onderlinge vergelijking van belastingsgevallen voor vliegtuigen (n - q - diagram).

door

Dr. Ir. A. VAN DER NEUT.

RAPPORT S 100.

Methode voor de onderlinge vergelijking van belastingsgevallen voor vliegtuigen. (n-q-diagram)

Uittreksel.

(Zie de samenvatting aan het eind van dit rapport).

Notaties.

a index, betrekking hebbend op de belasting A_0,
b „ „ „ „ „ „ B_0.
A_0 eenheidsbelasting, waarbij de luchtkrachten op den vleugel aangrijpen in het aerodynamisch centrum en de resulante van alle luchtkrachten gelijk is aan het vliegtuiggewicht,
B_0 eenheidsbelasting, waarbij de resultante van alle luchtkrachten gelijk is aan nul,
f spanning in een onderdeel,
$\bar{f}$, F toelaatbare spanningen,
n componente van de versnellingsfactor loodrecht op de vleugelkoorde,
q stuwdruk.

RAPPORT S 100.

Une méthode pour la comparaison des cas de vol des aéroplanes (le diagramme n-q).

Résumé.

L'étude suivante décrit une méthode destinèe à comparer les cas de vol, qui doivent être considérés dans le calcul de rèsistance des aéroplanes et à déterminer les conditions critiques. Il paraît que l'on puisse choisir quatre cas de vol, représentatifs pour tous les autres. La mèthode consiste en représentant chaque cas de vol par un point dans un diagramme dont l'abscisse est égale à la pression dynamique (q) et l'ordinate est égale à la composante (n) du coefficient d'accélération normale à la corde de l'aile.

Les possibilités d'application de ce diagramme suivent de sa propriété, que le contour de la région admissible des combinaisons n-q est concave par rapport à cette région. La propriété dénommée du diagramme n-q se base sur certaines suppositions.

En cas que ces suppositions ne soient pas satisfaites, la possibilité existe que le contour du diagramme n-q perd sa propriété charactéristique sur laquelle se base son applicabilité. Cependant ces circonstances défavorables ne se présentent pas toujours, de sorte que diverses suppositions ne limitent pas l'applicabilité du diagramme n-q. Quand aux autres suppositions, dont l'influence peut limiter l'application du diagramme, il faut envisager la signification pour chaque cas; cettes suppositions sont principalement les deux suivantes: que la charge tangentielle de l'aile puisse être négligée et que les efforts soient proportionnels à la charge extérieure. Pour quelques-unes des suppositions on n'a donnée que les conclusions, la discussion du calcul complet étant assez étendue.

Symboles.

a indice, exprimant la rélation au système de charge A_0.
b indice, exprimant la rélation au système de charge B_0.
A_0 système de charge unitaire, dans lequel la charge sur l'aile agit au centre aérodynamique et la résultante de toutes les charges aérodynamiques est égale au poids de l'avion.
B_0 système de charge unitaire, dans lequel la résultante des charges aérodynamiques est égale à zéro.
f effort dans un membre de la construction.
$\bar{f}$, F effort admissible.
n composante du coefficient d'accélération normale à la corde de l'aile.
q pression dynamique.

REPORT S 100

A method to compare flight conditions for aeroplanes (n-q diagram).

Summary.

A method is given to compare the flight loading conditions that must be investigated in the strength analyses of aeroplanes, in order to determine the critical conditions. It appears to be possible to choose four flight conditions, that cover all the other ones. The method consits of representing each condition by a point in a diagram, the abscissa being equal to the dynamic pressure (q) and the ordinate to the component (n) of the acceleration factor normal to the wing

chord. From the property, that the boundary of the allowable region of n-q combinations is concave with respect to this region, follow the possibilities of application. The said property of the n-q diagram depends on several suppositions. If these suppositions are not satisfied, the possibility may arise, that the boundary of the n-q diagram looses the characteristic property that forms the basis of its applications. However this unfavorable consequence is not always present, therefore some of these suppositions do not restrict the applicability of the n-q diagram. The suppositions, that may have a restricting influence, require an investigation of their consequences in each separate case. The following suppositions are mainly of importance in this respect: the neglect of the tangential wing loading and the proportionality between stress and external loading. In discussing some of the suppositions only the conclusions are given, the lengthy detailed discussion is omitted.

Notations.

- a indice, relating to load system A_0,
- b ,, ,, ,, ,, ,, B_0,
- A_0 unit load system with wing load acting in the aerodynamic center; the resulting air load is equal to the weight of the aeroplane,
- B_0 unit load system with resulting air loads equal to zero,
- f stress in a structural member,
- $\left.\begin{matrix}\bar{f}\\F\end{matrix}\right\}$ allowable stress,
- n component of the accelerationfactor normal to the wing chord,
- q dynamic pressure.

BERICHT S 100

Eine Methode zum Vergleich von Belastungsfällen für Flugzeuge (n-q Schaubild).

Zusammenfassung.

Es wird eine Methode gegeben zur Vergleichung der Flugstände, die in der Festigkeitsberechnung von Flugzeugen untersucht werden sollen, damit die maszgebenden Fälle bestimmt werden können. Es stellt sich heraus, dasz vier Belastungsfälle gewählt werden können die alle anderen decken. Die Methode besteht in der Darstellung jedes Belastungsfalles durch einen Punkt in einem Schaubild wo die Abscisse dem Staudruck (q) und die Ordinate der Komponente (n) des Beschleunigungsfaktors senkrecht auf der Flügelsehne gleich ist. Aus die Eigenschaft, dasz die Begrenzungslinie des zulässigen Gebietes von n-q Kombinationen in Beziehung auf diesem Gebiet konkaf ist, folgen die Anwendungsmöglichkeiten. Die genannte Eigenschaft vom n-q Schaubild beruht auf gewissen Voraussetzungen. Wenn diese Voraussetzungen nicht befriedigt sind, entsteht die Möglichkeit, dasz die Begrenzungslinie vom n-q Schaubild die kennzeichnende Eigenschaft, worauf die Brauchbarkeit stützt, verliert. Es stellt sich aber heraus, dasz dies nicht immer der Fall ist, sodasz verschiedene Voraussetzungen die Anwendungsmöglichkeit vom n-q Schaubild nicht einschränken. Die Voraussetzungen, welche die Anwendungsmöglichkeit in ungünstiger Hinsicht beeinflüssen, verursachen, dasz man sich bei der Anwendung des n-q Schaubildes von Fall zu Fall ihrer Bedeutung gerecht werden soll. Es sind hauptsächlich: die Vernachlässigbarkeit der tangentiellen Flügelbelastung und die Proportionalität zwischen Spannung und äuszerer Belastung. Bei der Besprechung einiger Voraussetzungen werden nur die Schluszfolgerungen gegeben, die detaillierte Argumentation ist ihrer Umständlichkeit wegen fortgelassen.

Formelzeichen.

- a Zeiger in Beziehung auf der Belastung A_0,
- b ,, ,, ,, ,, ,, ,, B_0,
- A_0 Einheitsbelastung, bei welcher die Flügelbelastung im aerodynamischen Mittelpunkt angreift, und die resultierende Luftkraft dem Flugzeuggewicht gleich ist.
- B_0 Einheitsbelastung, bei welcher die resultierende Luftkraft gleich Null ist,
- f Spannung in einem Bauteil,
- $\left.\begin{matrix}\bar{f}\\F\end{matrix}\right\}$ zulässige Spannung,
- n Komponente der Beschleunigungsfaktor senkrecht auf der Flügelsehne,
- q Staudruck.

RAPPORT S 100.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Methode voor de onderlinge vergelijking van belastingsgevallen voor vliegtuigen (n - q - diagram).

door

Dr. Ir. A. VAN DER NEUT.

Indeeling.

1. Inleiding.

Bij de berekening van vliegtuigen volgens verschillende belastingsgevallen, zooals deze zich in de vlucht kunnen voordoen, heeft men in het algemeen te maken met de complicatie, dat de veranderlijkheid der aerodynamische eigenschappen van den vleugel met den invalshoek het onmogelijk maken met weinig belastingsgevallen te kunnen volstaan.

De mate, waarin een onderdeel belast is, is namelijk niet slechts afhankelijk van de grootte der versnelling, die de massa's als gevolg van de krachten op den vleugel ondervinden, doch tevens speelt in het algemeen de vliegsnelheid, waarbij de versnelling optreedt, een belangrijke rol. Deze laatste invloed komt hieruit voort, dat het aangrijpingspunt der belasting op den vleugel (drukpunt) afhankelijk is van den invalshoek.

Ondat vliegtuigen volgens de voorschriften onderzocht moeten worden bij verschillende omstandigheden, doet zich de vraag voor of er niet een eenvoudig middel bestaat om belastingsgevallen, die van elkaar verschillen in grootte der versnelling en der snelheid, met elkaar te vergelijken en aldus te zien welke van deze belastingsgevallen als de maatgevende zijn te beschouwen.

Aldus zou het aantal der in de sterkteberekening te onderzoeken belastingsgevallen tot een minimum kunnen worden beperkt.

Zulk een methode is ook van voordeel, indien het er om gaat te beoordeelen of een vliegtuig, dat aan een bepaald stel voorschriften voldoet, ook voldoen zal aan een ander stel voorschriften met afwijkende belastingsgevallen. Dit geval doet zich voor, indien de vraag gesteld wordt of de sterkte van een vliegtuig, dat gebouwd is volgens buitenlandsche voorschriften, ook aan de Nederlandsche voorschriften voldoet.

In het volgende wordt een methode aangegeven, die in de meeste gevallen de gewenschte oplossing geeft. Voor zekere constructietypes is zij echter niet toepasbaar. Deze beperkingen op de geldigheid der methode worden nader besproken.

2. Analyse der uitwendige belastingen.

Veronderstellende, dat in de beschouwde belastingsgevallen het vliegtuig in evenwicht is en onder verwaarloozing van de krachten, die in de richting der vleugelkoorde werken, worden de op het vliegtuig aangrijpende aerodynamische belastingen gesplitst in 2 deelen *a* en *b*, die als volgt gedefinieerd zijn:

a. Een belastingsgeval, waarbij de luchtkrachten op den vleugel aangrijpen in het aerodynamisch centrum van het profiel, (onder aerodynamisch centrum wordt verstaan het punt van het profiel ten opzichte waarvan de momentencoëfficiënt in een groot gebied van invalshoeken constant is, en dat gelegen is ongeveer op 0,25 van de koorde achter den voorrand) en waarbij de staartlast zoo groot is, dat hij tezamen met de luchtkrachten op den vleugel een moment nul oplevert ten opzichte van het zwaartepunt van het vliegtuig. De resultante van de luchtkrachten op vleugel en staartvlakken, die dus door het zwaartepunt van het vliegtuig gaat, is gelijk aan de massa van het vliegtuig maal de versnelling, die het vliegtuig in het beschouwde belastingsgeval en de richting loodrecht op de vleugelkoorde ondergaat.

b. Een belastingsgeval, waarbij de resultante van de luchtkrachten op den vleugel en op de staartvlakken gelijk is aan nul. Dit geval komt dus overeen met den belastingstoestand in een duikvlucht, waarbij de vleugelkoorde verticaal gericht is, indien afgezien wordt van de belastingen in de richting van de vleugelkoorde.

Op deze wijze zijn de luchtkrachten, die op den vleugel werken gedeeld, voor wat betreft de normaalkracht (aangrijpende in het aerodynamische centrum) in N_a en N_b; voor wat betreft het moment (t.o.v. het aerodynamisch centrum) in 0 en M_b. De staartlast is gedeeld in T_a en T_b.

Deze grootheden kunnen op grond van hun definities uitgedrukt worden in de aerodynamische coëfficiënten van den vleugel:

$$\left.\begin{aligned} N_a &= c_{na}\, q\, F = nG.\frac{l}{l+z} \\ N_b &= c_{nb}\, q\, F \\ M_b &= c_{mo}\, q\, F\, t \\ T_a &= c_{na}\, q\, F\, \frac{z}{l} \\ T_b &= -c_{nb}\, q\, F. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Hierin is (zie fig. 1):

q = stuwdruk in het beschouwde belastingsgeval.
F = vleugeloppervlak.
t = gemiddelde aerodynamische koorde.
z = afstand van het aerodynamisch centrum tot het zwaartepunt.
F = afstand van het zwaartepunt tot het aangrijpingspunt van de staartlast.

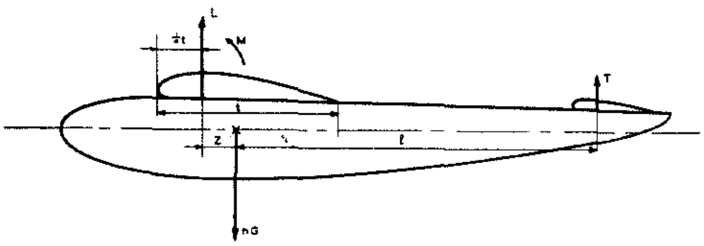


Fig. 1. Krachten, die op het vliegtuig werken.

Tusschen de aerodynamische coëfficiënten bestaat de betrekking, *die uit de definitie van geval b* volgt, namelijk uit het momentenevenwicht:

$$c_{nb} = c_{mo}\,\frac{t}{l+z}. \quad (2)$$

Dit beteekent, dat de belasting in geval *b* steeds op een zelfde invalshoek α_b betrekking heeft, waarbij de normaalkrachtscoëfficiënt de in (2) aangegeven waarde heeft, die onafhankelijk is van de snelheid. De belastingsverdeeling over vleugel en staartvlakken is dan gelijkvormig voor alle snelheden. Slechts de groote der krachten is afhankelijk van de snelheid.

Dit maakt het mogelijk de belasting *b* uit te drukken als veelvoud van een eenheidsbelasting. Voor deze eenheidsbelasting wordt gekozen de belasting bij maximale horizontale snelheid. De stuwdruk bij deze snelheid q_o en het bijbehoorende belastingssysteem B_o noemend, is de belasting van geval b in het algemeen:

$$B = \frac{q}{q_o}\, B_o. \quad (3)$$

Bij deze beschouwing over het geval *b* is stilzwijgend verondersteld, dat de belastingsverdeeling *niet beinvloed wordt door de vervormingen*, die de vleugel ten gevolge van de belasting ondergaat. De torsie van den vleugel zal namelijk maken, dat de invalshoek niet constant blijft, zoodat met verandering van snelheid gepaard gaat een verandering in de verdeeling van c_{ab} over de breedte van den vleugel, echter niet van haar gemiddelde waarde.

De belasting van geval a bestaat, voorzoover zij op den vleugel aangrijpt, uit de krachten, die toegevoegd worden, indien de invalshoek toeneemt van de waarde α_b tot de waarde α, die zij in het beschouwde belastingsgeval heeft.

Omdat de hiermee gepaard gaande krachten op den vleugel een vast aangrijpingspunt hebben, namelijk het aerodynamisch centrum, geven zij gelijkvormige veranderingen van de vleugelbelasting.

Omdat blijkens (1) de staartvlakbelasting en de vleugelbelasting in een constante verhouding tot elkaar staan, kan iedere belasting *a* uitgedrukt worden als veelvoud van een eenheidsbelasting van het type *a*. Voor deze eenheidsbelasting wordt gekozen het belastingsgeval, waarin de som der massakrachten loodrecht op de vleugelkoorde gelijk is aan het vliegtuiggewicht. Het bijbehoorend systeem van belastingen A_o noemend, is de belasting van geval *a* in het algemeen

$$A = n\,A_o, \tag{4}$$

waarbij onder n is te verstaan de componente in de richting loodrecht op de koorde van de zoogenaamde overbelastingsfactor, die de verhouding aangeeft tusschen de optredende versnelling en de versnelling der zwaartekracht. De belasting A is dus onafhankelijk van de snelheid.

Ook in deze beschouwing over geval *a* is weder verondersteld, dat ten gevolge van de belasting A geen vervormingen optreden, die de belastingsverdeeling beinvloeden. Er zal echter een torsie van den vleugel optreden, die in hoofdzaak evenredig is met n. De belastingsverandering, die van de plaatselijke invalshoekverandering het gevolg is, is evenredig met nq, zoodat zij niet in het schema van de belasting A past. De totale luchtkracht op den vleugel blijft echter ongewijzigd door dezen invloed.

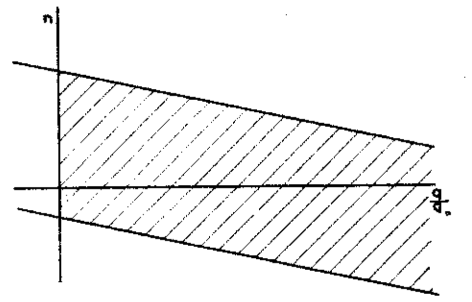


Fig. 2. Gebied van toelaatbare n-q waarden voor een onderdeel van het vliegtuig.

Voorts is verondersteld, dat bij iedere invalshoekverandering een zelfde wijze van verdeeling der circulatie langs de breedte van den vleugel behoort.

Op de aangegeven wijze en met de intusschen ingevoerde vereenvoudigende onderstellingen kan ieder belastingsgeval uitgedrukt worden in de eenheidsbelastingen A_o en B_o door te schrijven:

$$\text{belasting} = n\,A_o + \frac{q}{q_o}\,B_o. \tag{5}$$

3. *Het n-q-diagram.*

De spanning, die in eenig deel der constructie opgewekt wordt door de belastingen A_o en B_o resp. f_{ao} en f_{bo} noemend, wordt de totale spanning, onder de veronderstelling, dat de spanningen evenredig zijn met de belastingen,

$$f = n\,f_{ao} + \frac{q}{p_o}\,f_{bo}. \tag{6}$$

Indien de toelaatbare spanning voor spanningen van het type f_{ao} en van het type f_{bo} dezelfde is en de waarde $\bar{f}_1$ heeft als positieve spanning en $\bar{f}_2$ als negatieve spanning, worden toelaatbare combinaties van n en $\frac{q}{q_o}$ weergegeven door de vergelijking

$$\bar{f}_1 \leqq n\,f_{ao} + \frac{q}{q_o}\,f_{bo} \tag{7a}$$

$$\bar{f}_2 \leqq n\,f_{ao} + \frac{q}{q_o}\,f_{bo}. \tag{7b}$$

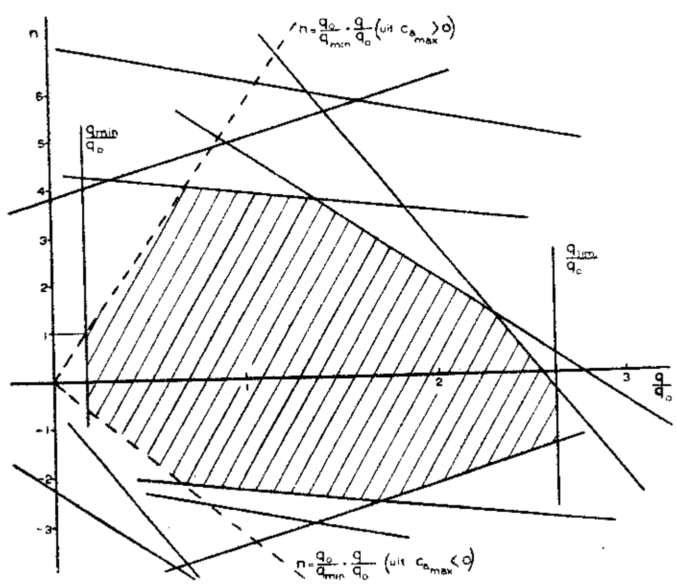


Fig. 3. Gebied van toelaatbare n-q waarden voor het geheele vliegtuig.

De grenswaarden van toelaatbare combinaties van n en $\frac{q}{q_o}$ staan tot elkaar in een lineair verband, zoodat zij met $\frac{q}{q_o}$ als abscis en n als ordinaat voorgesteld worden door een tweetal rechte evenwijdige lijnen volgens de vergelijkingen (7a) en (7b). Het gebied van toelaatbare n en $\frac{q}{q_o}$-waarden ligt aan de positieve zijde van de $\frac{q}{q_o}$-as tusschen de n-as en de beide grenslijnen (het gearceerde deel in fig. 2).

Voor ieder onderdeel van het vliegtuig kan men de beide grenslijnen bepalen. De toelaatbare combinaties van n en q/q_o voor het geheele vliegtuig worden dan gegeven door het gebied van het diagram dat omhuld wordt door al deze grenslijnen tezamen (fig. 3). Omdat de mogelijke combinaties van n en q/q_o aerodynamisch begrensd zijn door het bestaan van een maximale liftcoëfficiënt moet in fig. 3 ook nog de begrenzing aangegeven worden, die uit deze voorwaarde volgt en die luidt:

$$n = \frac{q_o}{q_{min}} \cdot \frac{q}{q_o}, \tag{8}$$

waarbij voor q_{min} 2 waarden gelden welke resp. op de bovenste en onderste grenswaarden van c_a betrekking hebben. Ten slotte moet nog opgemerkt worden, dat er nog 2 grenslijnen voorkomen, die volgen uit de omstandigheid, dat de snelheid niet kleiner kan zijn dan de minimale snelheid en niet grooter dan de limietsnelheid in duikvlucht. Het tusschen deze grenslijnen overblijvende geharceerde gebied van fig. 3 geeft aan welke combinaties van n en $\frac{q}{q_o}$ toelaatbaar en mogelijk zijn.

Uit de omstandigheid, dat het gebied van toelaatbare n- en $\frac{q}{q_o}$-waarden omhuld wordt door rechte lijnen volgt, dat de omhullende geen hoeken heeft, die grooter zijn dan 180°, m.a.w. *de grenslijn is ten opzichte van het omsloten gebied concaaf*. Op deze conclusie berusten de toepassingen van het n-q-diagram.

Opmerking:

De voorschriften geven in den regel de versnellingsfactor tengevolge van de resultante der luchtkrachten. Deze factor moet niet in het n-q-diagram worden uitgezet, doch haar componente loodrecht op de koorde. Indien men zulks wenscht, kan men uit het n-q-diagram, een diagram afleiden, dat de totale versnellingsfactor $\bar{n}$ geeft als functie van den stuwdruk. Men moet dan voor ieder punt van de begrenzingskromme met behulp van de vergelijkingen (2) en $N_a = n\,G\,\frac{1}{1+z} = c_{na}\,q\,F$, de normaalkrachtscoëfficiënt

$$c_n = c_{na} + c_{nb}$$

berekenen en de bijbehoorende tangentiaalkrachtscoëfficiënt c_t van het geheele vliegtuig bepalen. De totale versnellingsfactor $\bar{n}$ volgt dan uit

$$\bar{n} = n\sqrt{1 + \left[\frac{c_t\,l}{c_{na}(1+z)}\right]^2}.$$

Slechts voor de grootere invalshoeken wijkt $\bar{n}$ merkbaar van n af.

4. Toepassingen van het n-q-diagram.

I. *Uit het voorgaande volgt, dat indien* een vliegtuig voldoende sterkte heeft tegenover 2 belastingsgevallen C en D (fig. 4) het ook voldoende sterk is voor alle belastingsgevallen welke in het n-q-diagram afgebeeld worden binnen de driehoek OCD. Immers doorsnijdt de rechte lijn CD nooit de grenskromme.

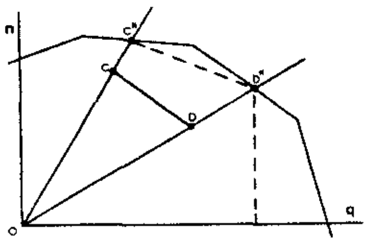


Fig. 4. Gebied van toelaatbare n-q waarden, dat gedekt wordt door twee belastingsgevallen.

II. De reserve aan sterkte is, indien het vliegtuig voor de gevallen C en D berekend is, bekend. Indien deze resp. c en d bedraagt, zijn de toelaatbare belastingen $(1+c)C$ en $(1+d)D$. Deze belastingen worden verkregen, indien zoowel n als q in de verhoudingen $1+c$ en $1+d$ vergroot worden. Zij hebben hun afbeelding in het n-q-diagram (fig. 4) in de *snijpunten van de grenskromme met de lijnen* OC *en* OD. Indien de grenskromme niet bekend is, wordt de afbeelding gevonden door uit O langs OC resp. OD een lengte uit te zetten gelijk aan $OC'' = (1+c)OC$ resp. $OD'' = (1+d)OD$.

Overeenkomstig de toepassing I volgt dan, dat alle punten binnen OC"D" toelaatbare belastingsgevallen afbeelden.

Hierbij wordt opgemerkt, dat punten buiten de driehoek OC"D" mogelijk ook gedekt worden door de toestanden C"D", doch om dit te kunnen beoordeelen zou men de grenslijn geheel moeten kennen. De onder punt 3 gevonden eigenschap van het n-q-diagram *levert hierover geen positieve uitspraak.*

III. Indien de sterkte onderzocht moet worden voor een groot aantal belastingsgevallen, kan het onderzoek beperkt worden tot een kleiner aantal. Uit het voorbeeld in fig. 5a, dat de omstandigheden voor een verkeersvliegtuig weergeeft, *blijkt, dat de berekening voor de 7 in de* voorschriften geven belastingsgevallen beperkt kan blijven tot 4 gevallen, waarbij inplaats van de gevallen a en f_1 genomen worden a' en f_1'.

In de plaats van het geval f_1' kan nog het fictieve belastingsgeval f_1'' gesteld worden. Dit heeft het voordeel, dat het op eenvoudige wijze uit het belastingsgeval a wordt afgeleid; immers zijn de drukpuntsliggingen gelijk.

Nog wordt opgemerkt, dat het onnoodig kan zijn met de verhoogde factor van het geval a' te rekenen Immers kan de grenslijn van het n-q-diagram zoodanig gekromd zijn, dat indien aan a en e_1 voldaan wordt automatisch ook aan c_1 voldaan wordt. In vele gevallen

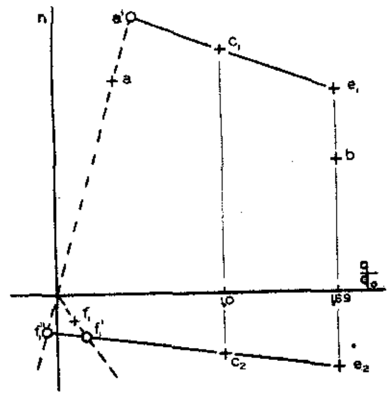


Fig. 5a. Bepaling van 4 maatgevende belastingsgevallen voor een verkeersvliegtuig.

zal men op eenvoudige wijze kunnen aantoonen, dat aan c_1 voldaan wordt, indien de factor van geval a wordt verhoogd tot de waarde, die zij in geval c_1 heeft. Indien men echter in geen geval zwaarder wil construeeren dan de voorschriften eischen, is men genoodzaakt behalve de gevallen a en e_1 ook het geval c_1 te beschouwen.

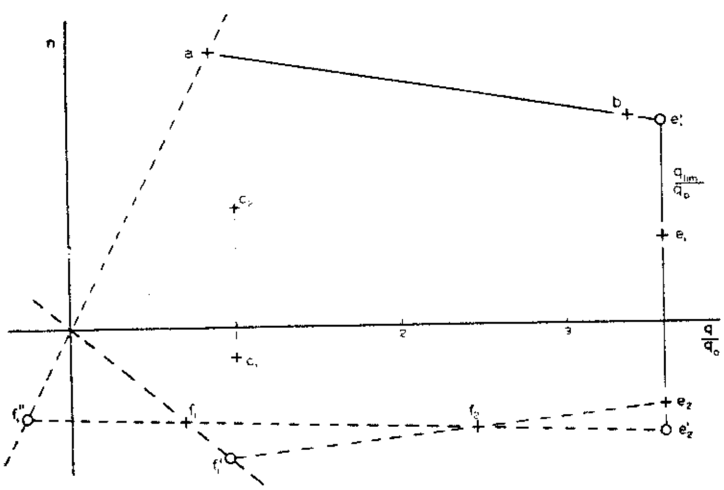


Fig. 5b. Bepaling van 4 maatgevende belastingsgevallen voor een acrobatievliegtuig.

Het voorbeeld in fig. 5b geeft de omstandigheden weer, die zich voordoen bij een acrobatievliegtuig, dat tot de limietsnelheid gedoken mag worden. De 8 belastingsgevallen, die de voorschriften veronderstellen, kunnen in de berekening teruggebracht worden tot het viertal a, e_1', e_2', f_1; a, e_1', e_2, f_1' of a, e_1', e_2', f_1''.

Het blijkt dus mogelijk te zijn de vlieggegevallen voor welke een vliegtuig berekend moet worden, op eenvoudige wijze terug te brengen tot een viertal, waarvan 2 gevallen betrekking hebben resp. op den toestand met de positieve en negatieve extreme waarden van den liftcoëfficiënt van den vleugel, en waarvan de overige 2 gevallen betrekking hebben op toestanden bij de in glij- of duikvlucht toelaatbare maximale snelheid.

Wegens den eenvoud van de uiteengezette methode, lijkt het beter deze methode niet bij voorbaat toe te passen op de voorschriften. Hierdoor zou wel bereikt worden, dat de voorschriften slechts een 4-tal vlieggevallen noemen. Doch zulk een maatregel sluit onvermijdelijk in, dat in zeker opzicht te zware eischen worden gesteld: het geval a zou bij voorbeeld een zoo hooge factor moeten hebben, dat het voor alle vliegtuigtypen het geval c_1 dekt. Den constructeur wordt meer vrijheid gelaten, indien hij uit het voorgeschreven grootere aantal belastingsgevallen, met behulp der hier aangegeven methode en eventueel met andere hem ten dienste staande overwegingen, een keus kan treffen omtrent de voor het beschouwde vliegtuig maatgevende belastingsgevallen.

5. *Beteekenis van de veronderstellingen, waarop de methode berust.*

Bij de afleiding van de besproken methode moesten enkele veronderstellingen worden ingevoerd, waarvan de beteekenis bezien dient te worden. Deze veronderstellingen zijn:

1°. De op het vliegtuig werkende luchtkrachten gaan door het zwaartepunt van het vliegtuig.

2°. De luchtkrachten in de richting van den vliegbaan zijn verwaarloosbaar.

3°. Er is een punt van het vleugelprofiel ten opzichte waarvan de momentencoëfficiënt constant is.

4°. De circulatieverdeelingen voor invalshoekveranderingen zijn gelijkvormig.

5°. De invloed van de vervormingen op de verdeeling der luchtkrachten is verwaarloosbaar.

6°. De toelaatbare waarde van de spanning in geval *a* is gelijk aan de toelaatbare waarde van de spanning in geval *b*.

7°. Bij evenredige vergrooting van de belasting nemen de spanningen in dezelfde reden toe.

Indien aan deze voorwaarden voldaan wordt, kan er geen bezwaar tegen de toepassing der methode bestaan. Echter wordt meestal niet exact aan al deze voorwaarden voldaan. Daarom is het de vraag, in de eerste plaats of de genoemde voorwaarden essentieel zijn en in de tweede plaats, — indien zij essentieel zijn — of hun invloed al of niet verwaarloosbaar moet worden geacht. In dit opzicht kan het volgende worden opgemerkt.

51. *Het evenwicht der luchtkrachten.*

In de vlieggevallen, die betrekking hebben op manoeuvres, wordt aan de voorwaarde voldaan, dat de resultante der luchtkrachten op vleugel en staartvlakken door het zwaartepunt van het vliegtuig gaat. Slechts in de remousgevallen wordt de voorwaarde niet vervuld. In de remousgevallen wordt in het algemeen ook een rotatie ten opzichte van het zwaartepunt opgewekt, die maakt dat de traagheidskrachten in de verschillende punten van het vliegtuig een verschillend veelvoud zijn van de gewichten. Bij het tegenwoordige stadium van kennis omtrent de remousgevallen is er echter geen bezwaar tegen om deze belastingsgevallen te denken als gevallen van evenwicht, waarbij de staartlast een zoodanige grootte gegeven wordt, dat de resultante van de luchtkrachten op vleugel en staartvlakken door het zwaartepunt gaat.

52. *De tangentieele luchtkrachten.*

Op den vleugel werken in de richting der vleugelkoorde de krachten $c_t\,q\,F$ en in vele gevallen ook de schroeftrek. Deze werden tot nu toe verwaarloosd. De met deze krachten verbondene versnellingen in koorde-richting geven in den regel rompbelastingen zonder buiging of dwarskracht, terwijl de normaalkracht tot zeer ondergeschikte spanningen leidt; het verwaarloozen der *driftbelasting* is daarom voor de rompconstructie wel als toelaatbaar te beschouwen.

In de meeste gevallen zijn ook de spanningen, die in den vleugel ten gevolge van de driftbelasting worden opgewekt, klein. De werkelijke spanning in een onderdeel is dan niet meer een lineaire functie van n en q. De toelaatbare combinaties van n en q zijn dan in het n-q-diagram niet langer rechte lijnen, doch zwak gekromde lijnen, die eventueel convex zijn ten opzichte van het omsloten gebied, zoodat de eigenschap van het n-q-diagram, dat de grenslijn concaaf is ten opzichte van het omsloten gebied, niet langer geldt.

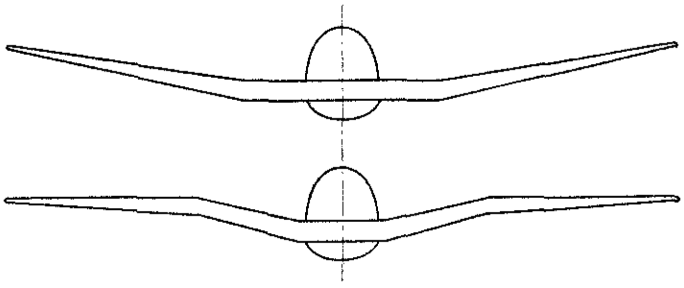


Fig. 6. Vleugelconstructies, bij welke de invloed van de tangentieele vleugelbelasting belangrijk kan zijn.

De afwijking van de rechte lijn is gering, indien de spanningen door belasting in koorde-richting gering zijn. In dit geval is de mogelijke fout, die gemaakt wordt bij toepassing van de bovengenoemde eigenschap, ook gering. Het buiten beschouwing laten van de driftbelasting is bij de onderlinge vergelijking van belastingsgevallen dan wel toelaatbaar.

Indien echter de sterkte van bijzondere deelen door de driftbelasting in belangrijker mate wordt beinvloed, zal men het n-q-diagram niet zonder meer mogen gebruiken. Dit geval doet zich b.v. voor wanneer een knik in de vleugelvorm er toe leidt, dat de tangentieele vleugelbelasting van het eene deel torsie in het deel aan de andere zijde van de knik veroorzaakt (zie fig. 6). Het kan in zulke gevallen noodig zijn bepaalde deelen van het vliegtuig nader te onderzoeken.

53. *Het constant zijn van den momentencoëfficiënt.*

De huidige vleugelprofielen blijken in een groot gebied een vrijwel constante momentencoëfficiënt te bezitten. Alleen bij $(c_n)_{max.}$ en $(c_n)_{min.}$ treden afwijkingen op, d.w.z. de momentencoëfficiënt ten opzichte van het aerodynamisch centrum $c_m \neq c_{mo}$. Vlieggevallen, die op dit gebied betrekking hebben kunnen in her n-q-diagram worden afgebeeld onder invoering van een fictieve stuwdruk q', die gedefinieerd is door de voorwaarde, dat zij tezamen met c_{mo} dezelfde krachten oplevert als de werkelijke stuwdruk q met de werkelijke momentencoëfficiënt c_m.

$$q' = \frac{c_m}{c_{mo}}\,q. \tag{9}$$

Uit de grenskromme, geleverd door het n-q'-diagram, kan men het werkelijke n-q-diagram bepalen door voor ieder punt van deze eerste grenskromme met behulp van de vergelijkingen (1) en (2) de fictieve c_n- en c_m-waarden c_n' en c_{mo} te berekenen. Vervolgens worden de werkelijke c_n- en c_m-waarden bepaald uit:

$$\frac{c_m}{c_n} = \frac{c_{mo}}{c_n'}. \tag{10}$$

Daarna geeft vergl. (9) de werkelijke waarde van q, die bij de beschouwde waarde van n behoort.

54. *De veranderlijkheid der circulatieverdeeling.*

De veronderstelling is gemaakt, dat het verloop van $\frac{dc_n}{d\alpha}$ langs de vleugelbreedte gelijkvormig is voor alle in aanmerking komende invalshoeken. Deze veronderstelling is gerechtvaardigd zoolang er geen loslating van de strooming optreedt. Zij geldt niet meer in de buurt van de kritische invalshoeken. De sterkteberekening heeft gewoonlijk alleen betrekking op de circulatieverdeeling, waarbij nog geen loslating optreedt, omdat met loslating in den regel een blijvende afname van de versnelling gepaard gaat. In deze gevallen is dit effect dus van geen belang. In bijzondere gevallen kan de toestand bij het overtrekken wel voor de sterkteberekening van belang zijn, namelijk indien de loslating bij het middendeel van den vleugel begint en aangenomen moet worden dat de versnelling in dezen toestand nog de waarde heeft, die voor het vlieggeval a wordt voorgeschreven. De lift zal zich daarbij meer naar buiten verplaatsen, hetgeen in den regel voor de constructie een verzwarende omstandigheid is. *Indien de sterkteberekening van deze liftverdeeling uitgaat, kan het n-q-diagram* veilig worden toegepast. Indien daarentegen de loslating bij de vleugeltippen begint en in de sterkteberekening voor het vlieggeval a de daarmede samenhangende circulatie-verdeeling zou zijn verondersteld, is de toepassing van het n-q-diagram onveilig. Men voorkomt dit door zooals gebruikelijk bij het vlieggeval a de loslating buiten beschouwing te laten.

Beinvloeding van de circulatieverdeeling door bijzondere inrichtingen, zooals spleten en landingskleppen leidt tot omstandigheden, die niet zonder meer in het n-q-diagram tot uitdrukking kunnen worden gebracht. In ieder afzonderlijk geval zal men zich rekenschap hebben te geven van deze omstandigheden.

55. *De invloed van de vervormingen op de circulatieverdeeling.*

De eenige vervorming, die de circulatieverdeeling beinvloedt, is de torsie van den vleugel. Gewoonlijk is de torsiestijfheid van moderne vliegtuigvleugels in verband met het gevaar van onstabiele trillingen zoo groot, dat de invloed van de vervormingen op de verdeeling der luchtkrachten in de sterkteberekening verwaarloosd kan worden.

Voor zoover de vervorming van belang is kan het volgende worden opgemerkt.

De extra-belastingen, die door de vervorming worden opgewekt, zullen in zekere constructiedeelen de spanning verhoogen en in andere deelen de spanning verlagen. Het kan worden aangetoond, dat het n-q-diagram veilig kan worden toegepast, indien de spanningen door de vervorming verhoogd worden; indien de spanningen verlaagd worden is het n-q-diagram begrensd door lijnen, die ten opzichte van het omsloten gebied convex zijn en is de hoofdeigenschap van het n-q-diagram dus niet van toepassing. Deze laatste ongewenschte omstandigheid kan men uitsluiten door spanningsverlagingen, die het gevolg zijn van vervorming, niet in rekening te brengen.

56. *Verscheidenheid van toelaatbare spanningen.*

Aan de voorwaarde, dat de toelaatbare spanning voor belastingstype A dezelfde is als voor belastingstype B wordt onder bepaalde omstandigheden niet voldaan, namelijk indien een onderdeel op meer dan één wijze belast kan worden b.v. in trek en op afschuiving (platen), of door normaalkracht en buiging (balken), of door buiging en wringing (buizen). Er zal dan voor ieder type van spanning f een toelaatbare waarde ter grootte van F zijn. Indien de twee soorten van spanning f_1 f_2 gelijktijdig voorkomen, geldt als voorwaarde voor de toelaatbaarheid van deze combinatie

$$\varphi\left(\frac{f_1}{F_1}, \frac{f_2}{F_2}\right) \leq 0. \tag{11}$$

Het kan bewezen worden, dat het n-q-diagram door rechte lijnen begrensd wordt, indien vergel. (11) de vorm heeft

$$\frac{f_1}{F_1} + \frac{f_2}{F_2} \leq 1.$$

Ook kan bewezen worden, dat de begrenzingen van het n-q-diagram concaaf zijn ten opzichte van het omsloten gebied, indien vergel. (11) de vorm heeft

$$\left(\frac{f_1}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{F_2}\right)^2 \leq 1.$$

Onder deze omstandigheden is het te verwachten, dat het n-q-diagram veilig kan worden toegepast, indien de betrekking geldt

$$\left(\frac{f_1}{F_1}\right)^m + \left(\frac{f_2}{F_2}\right)^n \leq 1,$$

waarin $m \geq 1$, $n \geq 1$. Daarentegen zou het n-q-diagram niet van toepassing zijn, indien $m < 1$, $n < 1$.

Deze conclusies lijken voorloopig waarschijnlijk, zij dienen echter nog nader gefundeerd te worden. Daar geen gevallen bekend zijn, waarin m en n kleiner zijn dan 1, zou de toepasbaarheid van het n-q-diagram door de hier besproken verscheidenheid van toelaatbare spanningen niet beperkt worden.

57. *Onevenredigheid van spanning en belasting.*

Niet lineaire toename van de spanning met de belasting doet zich voor bij slanke staven, die tegelijk door normaalkrachten en buigende momenten belast worden. De optredende spanning is dan niet meer lineair afhankelijk van n en q, zoodat de grenskrommen van het n-q-diagram niet meer uit rechte lijnen samengesteld zijn; zij zijn ten opzichte van het omsloten gebied convex of concaaf.

In geval de normaalkracht P druk in de staaf geeft is de grenslijn tusschen de punten A en B convex — en de toepassing van het n-q-diagram mitsdien niet veilig — indien $|P_B| < |P_A|$, terwijl $M_B > M_A$. Daarentegen is de grenslijn concaaf, indien $|P_B| < |P_A$ en $M_B < M_A$.

Indien de normaalkracht P een trekkracht voorstelt, is het n-q-diagram onveilig, wanneer $P_B < P_A$ en $M_B < M_A$. Deze conclusies maken, dat bij de toepassing van het n-q-diagram op verspannen vleugels voorzichtigheid moet worden betracht.

Onevenredigheid tusschen spanning en vervorming treedt ook op bij metalen constructies, waarin dunne platen voorkomen, die tot boven hun knikspanning belast worden. Naarmate de knik-grens verder overschreden is, zal de ondersteunende constructie hoogere spanningen krijgen in dien zin, dat de spanningen sneller toenemen dan de uitwendige belasting van het vliegtuig. Momenteel wordt met deze omstandigheid nog slechts zeer globaal rekening gehouden. Indien echter de sterkteberekeningen op dit punt worden verfijnd, zal het tevens noodig zijn de consequenties hiervan op de toepasbaarheid van het n-q-diagram nader onder oogen te zien.

6. *Samenvatting.*

Een methode wordt gegeven om de vlieggevallen, die men in de sterktebereking van vliegtuigen beschouwen moet, onderling met elkaar te vergelijken om op deze wijze tot een conclusie te komen over de maatgevende belastingsgevallen. *Het blijkt mogelijk te zijn 4 vlieggevallen te kiezen*, die alle andere dekken. De methode bestaat hierin, dat men in een diagram ieder belastingsgeval weergeeft door een punt, waarvan de abcis gelijk is aan de stuwdruk (q) en de ordinaat gelijk is aan de componente (n) van den versnellingsfactor *loodrecht op de vleugelkoorde*.

Uit de eigenschap, dat de grenslijn van het toelaatbare gebied van n-q-combinaties ten opzichte van dit gebied concaaf is, volgen de toepassingsmogelijkheden. De genoemde eigenschap van het n-q-diagram berust op zekere veronderstellingen. Indien niet aan deze veronderstellingen wordt voldaan, ontstaat de mogelijkheid, dat de grenslijn van het n-q-diagram de kenmerkende eigenschap, waarop zijn bruikbaarheid berust, mist. Dit blijkt echter niet steeds het geval te zijn, zoodat verscheidene veronderstellingen *geen beperking geven van de toepassingsmogelijkheid* van het n-q-diagram. De veronderstellingen, welke wel in ongunstigen zin invloed kunnen hebben, maken dat men bij de toepassing van het n-q-diagram zich van geval tot geval van hun beteekenis rekenschap moet geven. Het zijn voornamelijk: de *verwaarloosbaarheid der tangentieele* vleugelbelasting en de evenredigheid tusschen spanning en uitwendige belasting. Bij de bespreking van eenige veronderstellingen worden slechts de conclusies gegeven, de gedetailleerde argumentatie is in verband met haar uitvoerigheid weggelaten.

RAPPORT S 156.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Het torsiecentrum van balken onder belasting door dwarskrachten

door

Ir. W. T. KOITER.

RAPPORT S. 156.

Het torsiecentrum van balken onder belasting van dwarskrachten.

Uittreksel.

In deel I wordt de ligging van het torsiecentrum van enkel- en meervoudig samenhangende doorsneden uit de buigingstheorie van de St. Vénant afgeleid. Het torsiecentrum wordt daarbij gedefinieerd op een wijze, die aansluit bij de oplossing, die de St. Vénant aan het balkenprobleem gegeven heeft. Het blijkt dan, dat bij deze definitie van het torsiecentrum de totale vormveranderingsarbeid ongelijk is aan de som van die voor buiging en torsie afzonderlijk, welke voorwaarde gewoonlijk als definitie van het torsiecentrum wordt gesteld (Trefftz).

De ligging van het aldus gedefinieerde torsiecentrum wordt gegeven door vergel. (37). Deze verschilt van de door Trefftz gevonden ligging met een bedrag, dat afhankelijk is van het getal van Poisson (σ) en dat gelijk nul wordt, indien $\sigma=0$ (afwezigheid van dwarscontractie).

Volgens literatuur (5) is de lijnintegraal der schuifspanningen rond iedere cel bij balken met dunwandige meervoudig-samenhangende doorsnede gelijk nul $\left(\int_C \tau\, ds=0\right)$, indien de dwarskracht door het torsiecentrum gaat. Het blijkt, dat deze oplossing alleen juist is voor $\sigma=0$. Indien $\sigma \neq 0$ wordt $\int_C \tau\, ds$ gegeven door vergel. (38) bij de hier gegeven definitie van het torsiecentrum en door vergel. (43) bij de definitie volgens Trefftz. Daar de ligging van het torsiecentrum volgens de definitie van Trefftz onafhankelijk is van σ (vergel. (42)) volgt uit $\int_C \tau\, ds=0$ wel de juiste ligging van het torsiecentrum.

In deel II wordt op geheel analoge wijze de buigingstheorie voor liggers, in welke de dwarscontractie verhinderd wordt, opgebouwd. Deze verhindering der dwarscontractie treedt op in dunwandige doosliggers, waarin als dwarsverstijving zeer stijve schotten zijn aangebracht.

Het blijkt, dat in dit geval geen verschil bestaat tusschen de torsiecentra volgens de beide bovengenoemde definities en dat $\int_C \tau\, ds=0$, indien de dwarskracht in het torsiecentrum aangrijpt.

Deel III behandelt als mechanische toelichting een balk met 3-voudig samenhangende doorsnede, die zekere symmetrieeigenschappen bezit (fig. 5). Dit voorbeeld toont, dat de schuifspanningsverdeeling beïnvloed wordt door de ongelijkheid der verdraaiingen van de verschillende deelen der doorsnede, die het gevolg is van de dwarscontractie bij buiging. De schuifspanningsverdeeling blijkt uit de draaiingen berekend te kunnen worden.

RAPPORT S. 156.

Le centre de torsion des poutres, chargées de forces transversales.

Résumé.

Dans la partie I de l'étude suivante on a dérivé la position du centre de torsion des poutres à sections solides et de connection multiple de la théorie de flexion de de St. Vénant. Le centre de torsion a été défini d'une manière, qui est suggérée par la solution donnée par de St. Vénant au problême des poutres. Il paraît qu'avec cette définition du centre de torsion, l'énergie de déformation totale n'est pas égale à la somme de l'énergie de flexion et de celle de torsion, condition qui est posée ordinairement comme définition du centre de torsion (Trefftz).

La position du centre de torsion définie de cette manière est donnée par l'équation (37). Elle diffère de la position d'après Trefftz d'une somme, dépendant de la constante de Poisson (σ), et qui devienne zéro avec $\sigma=0$ (absence de contraction latérale).

D'après litérature (5) l'intégrale des efforts de cisaillement autour de chaque cellule pour les poutres à sections de connection multiple et à parois minces est zéro, quand la force transversale passe par le centre de torsion $\left(\int_C \tau\, ds=0\right)$. Cette solution n'est correcte que pour $\sigma=0$. Quand $\sigma \neq 0$ l'intégrale $\int_C \tau\, ds$ est donnée par l'équation (38) avec la définition du centre de torsion donnée ci-dessus et par l'équation (43) avec la définition de Trefftz. Comme la position du centre de torsion selon la définition de Trefftz est indépendante de σ (l'équation (42)), l'intégrale $\int_C \tau\, ds=0$ donne la position correcte du centre de torsion.

Dans la partie II la théorie de flexion des poutres, dans lesquelles la contraction latérale est

empêchée, a été donnée d'une manière complètement analogue. Cet empêchement de la contraction latérale existe dans les poutres creusses à parois minces avec des nervures très rigides. Dans ce cas il n'y pas de difference entre les centres de torsion selon les deux définitions données ci-dessus et $\oint\limits_C \tau\, ds = 0$ dans le cas que la force transversale passe par le centre de torsion.

La partie III, contenant un commentaire mécanique, traite le cas d'une poutre à section de connection triple, qui possède certaines qualités de symmétrie (fig. 5). Cet exemple montre, que la répartition des efforts de cisaillement est influencée par l'inégalité des rotations des parties diverses de la section transversale, comme suite de la contraction latérale due à la flexion. La répartition des efforts de cisaillement peut être dérivée de ces rotations.

REPORT S. 156.

The torsional center of beams, loaded by shearing forces.

Summary.

In part I the location of the torsional center of solid and multiply connected cross sections is determined from the bending theory of de St. Vénant. The torsional center is defined here in accordance with the solution given by de St. Vénant to the beam problem. With this definition of the torsional center the total energy of deformation appears to be unequal to the sum of those for bending and torsion separately, which condition is usually used as a definition of the torsional center (Trefftz).

The location of the torsional center, defined in this way, is given by equation (37). This location differs from that, found by Trefftz, by an amount, depending on Poisson's ratio (σ); this amount is reduced to zero when $\sigma=0$ (no lateral contraction).

According to literature (5) the line integral of the shearing stresses around each cell for beams with thin walled multiply connected cross sections is zero if the shear force passes through the torsional center $\left(\oint\limits_C \tau\, ds = 0\right)$. This solution appears to be correct only for $\sigma=0$. If $\sigma \neq 0$ $\oint\limits_C \tau\, ds$ is given by equation (38) for the definition of the torsional center given here and by equation (43) for the definition given by Trefftz. Since the location of the torsinal center following from Trefftz's definition does not depend on σ (equation (42)), $\oint\limits_C \tau\, ds = 0$ yields the correct location of the torsional center.

In part II the bending theory for beams, in which the lateral contraction is prevented, is given in a completely analogous way. This prevention of lateral contraction occurs with thin walled box beams, having very stiff ribs. It appears, that there is no difference between the torsional centers defined in both ways mentioned above, and that $\oint\limits_C \tau\, ds = 0$, if the shear force passes through the torsional center.

Part III considers as a mechanical illustration a beam with triply connected cross section, having certain properties of symmetry (fig. 5). This example shows, that the distribution of shear stresses is influenced by the unequality of the rotations of different parts of the cross section, caused by the lateral contraction with bending. The distribution of shear stresses can be computed from these rotations.

BERICHT S. 156.

Der Schubmittelpunkt von Balken unter Belastung durch Querkräften.

Zusammenfassung.

In Teil I wird die Lage des Schubmittelpunktes von einfach und mehrfach zusammenhängenden Querschnitten aus der Biegungstheorie von de St. Vénant hergeleitet. Der Schubmittelpunkt wird dabei definiert in einer Weise, die anschlieszt bei der Lösung, die de St. Vénant dem Balkenproblem gegeben hat. Es stellt sich dann heraus, dasz bei dieser Definition des Schubmittelpunktes die gesamte Formänderungsarbeit ungleich der Summe der Formänderungsarbeit aus Biegung und Torsion gesondert ist. welche Bedingung gewöhnlich als Definition des Schubmittelpunktes wird gebraucht (Trefftz). Die Lage des wie in der zweiten Zeile definierten Schubmittelpunktes wird gegeben durch Gl. (37). Diese Lage weicht von der von Trefftz gefundenen Lage um einen Betrag ab, der von der Poissonschen Zahl (σ), abhangt, und der verschwindet, wenn $\sigma=0$ (keine Querkontraktion).

Nach Litteratur (5) ist das Linienintegral der Schubspannungen rund jede Zelle bei Balken mit dünwändigen mehrfach zusammenhängenden Querschnitt gleich Null, wenn die Querkraft im

Schubmittelpunkt angreift $\left(\int\limits_C \tau\, ds = 0\right)$. Diese Lösung erweist sich nur als richtig wenn $\sigma = 0$. Wenn $\sigma \neq 0$, wird $\int\limits_C \tau\, ds$ gegeben durch Gl. (38) bei der hier gegebenen Definition des Schubmittelpunktes und durch Gl. (43) bei der Trefftz'schen Definition. Da die Lage des Schubmittelpunktes folgend aus der Trefftz'schen Definition unabhängig von σ ist (Gl. (42)), folgt aus $\int\limits_C \tau\, ds = 0$ wohl die richtige Lage des Schubmittelpunktes.

In Teil II wird auf ganz analoger Weise die Biegungstheorie für Balken, in welchen die Querkontraktion behindert wird, aufgebaut.

Diese Behinderung der Querkontraktion findet statt in dünnwändigen Kastenholmen, mit als Querversteifung sehr steifen Rippen.

Es stellt sich heraus, dasz in diesem Fall kein Unterschied besteht zwischen den Schubmittelpunkten nach den beiden genannten Definitionen und dasz $\int\limits_C \tau\, ds = 0$ ist wenn die Querkraft im Schubmittelpunkt angreift.

Teill III behandelt als mechanische Erläuterung einen Balken mit dreifach zusammenhängenden Querschnitt, der gewisse Symmetrieeigenschaften besitzt (Fig. 5).

Dieser Beispiel zeigt, dasz die Schubspanningsverteilung beeinfluszt wird von der Ungleichheit der Verdrehungen in den verschiedenen Teilen des Querschnittes, herrührend von der Querkontraktion bei Biegung.

Die Schubspannungsverteilung kann aus den Verdrehungen errechnet werden.

RAPPORT S 156.

Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam.

Het torsiecentrum van balken onder belasting door dwarskrachten

door

Ir. W. T. KOITER

Indeeling.

Inleiding.

Over de bepaling van het punt van de doorsnede van een balk, waar een dwarskracht moet aangrijpen, opdat de vervorming van de balk torsievrij zal zijn, zijn verscheidene verhandelingen gepubliceerd. Eggenschwyler heeft als eerste dit onderwerp bestudeerd, doch alleen voor balken, waarvan de dikte klein is in vergelijking tot de hoogte (lit. 1), Weber heeft het vraagstuk algemeener gesteld (lit. 2), terwijl Schwalbe (lit. 3) en Trefftz (lit. 4) de theorie verder uitgewerkt hebben. Van der Neut heeft voor dunwandige meervoudig samenhangende doorsneden een eenvoudige methode voor de bepaling van het torsiecentrum aangegeven (lit. 5). In al deze verhandelingen wordt er bewust of stilzwijgend van uitgegaan, dat de vormveranderingsenergie bij buiging en torsie de som is van de vormveranderingsenergieën bij torsie en torsievrije buiging afzonderlijk.

Leibenson (lit. 6) heeft aangetoond, dat de hoofdformule volgens lit. 5 niet in overeenstemming is met de strenge buigingstheorie van de Saint-Vénant, zonder evenwel op de physische oorzaak van dit onderscheid in te gaan.

In het eerste deel van deze verhandeling wordt de ligging van het torsiecentrum uit de buigingstheorie van de Saint-Vénant afgeleid. Het torsiecentrum wordt daarbij gedefinieerd op een wijze, die in overeenstemming is met de oplossing, die de Saint-Vénant aan het balkenprobleem gegeven heeft. Het blijkt dan, dat bij deze definitie van het torsiecentrum de totale vormveranderingsenergie ongelijk is aan de som van die voor buiging en torsie afzonderlijk.

In het tweede deel wordt op geheel analoge wijze de buigingstheorie voor liggers, in welke de dwarscontractie verhinderd wordt, opgebouwd. Deze verhindering der dwarscontractie treedt op in dunwandige doosliggers, waarin als dwarsverstijving oneindig stijve schotten zijn aangebracht. Het blijkt, dat voor zulke liggers de in lit. 5 aangegeven oplossing geldt.

In het derde deel wordt als mechanische toelichting een balk van eenvoudige doorsnede behandeld; dit voorbeeld toont duidelijk, dat de ongelijkheid der verdraaiingen van de verschillende deelen der doorsnede, die het gevolg is van de dwarscontractie bij buiging, oorzaak is van de door Leibenson gesignaleerde afwijking tusschen de exacte oplossing en de in lit. 5 aangegevene.

DEEL I.

Bepaling van het torsiecentrum uit de buigingstheorie van de Saint-Vénant.

1. Recapitulatie van de buigingstheorie van de Saint-Vénant.

We kiezen de x- en y-assen langs de hoofdassen der dwarsdoorsnede van den balk en beschouwen de belasting van den balk door een kracht W evenwijdig aan de x-as in de doorsnede $z=l$ (fig. 1). Op geheel analoge wijze kan het geval van een kracht evenwijdig aan de y-as behandeld worden, terwijl een willekeurige kracht in het vlak $z=l$ steeds in krachten evenwijdig aan de hoofdassen te ontbinden is.

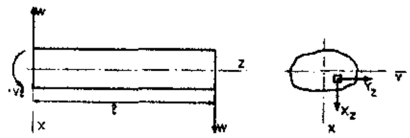


Fig. 1. Balk belast door dwarskracht; definitie der asrichtingen.

De spanningen worden gegeven door (zie lit. 7):

$$X_x = Y_y = X_y = Y_x = 0 \tag{1}$$

$$Z_z = -W(l-z)\frac{x}{I} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} X_z &= Gc\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\} \\ Y_z &= Gc\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + y\right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial X}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Hierin is:

I het traagheidsmoment der dwarsdoorsnede t.o.v. de Y-as:

$$I = \iint x^2 dx dy:$$

c de torsiehoek per eenheid van liggerlengte;

G de glijdingsmodulus;

σ het getal van Poisson.

Voor de definitie der spanningen wordt naar fig. 1b en lit. 7 verwezen.

De functie Φ is bepaald door:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{4a}$$

met als randvoorwaarde:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = y \cos(x,n) - x \cos(y,n). \tag{4b}$$

De functie X is bepaald door:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \tag{5a}$$

met als randvoorwaarde:

$$\frac{\partial X}{\partial n} = -\left\{\tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\}\cos(x,n) - (2+\sigma)xy\cos(y,n). \tag{5b}$$

In tegenstelling met lit. 7 wordt de positieve richting van de normaal naar binnen aangenomen.

De verplaatsingen in de coördinaatrichtingen worden, indien we afzien van verplaatsingen van het lichaam als geheel, gegeven door:

$$\left.\begin{aligned} u &= -cyz + \frac{W}{EI}\left\{\tfrac{1}{2}\sigma(l-z)(x^2-y^2) + \tfrac{1}{2}lz^2 - \tfrac{1}{6}z^3\right\} \\ v &= cxz + \frac{W}{EI}\sigma(l-z)xy \\ w &= c\Phi - \frac{W}{EI}\left\{x(lz - \tfrac{1}{2}z^2) + X + xy^2\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2. Definitie van torsievrije buiging.

We zullen de optredende vervorming als torsievrije buiging definieeren, indien de gemiddelde hoekverdraaiïng der dwarsdoorsnede nul is. Het torsiecentrum is dan gedefiniëerd als aangrijpingspunt van alle dwarskrachten, die torsievrije buiging opleveren.

De hoekverdraaiïng in een punt van de dwarsdoorsnede is:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = cz + \frac{W}{EI}\sigma(l-z)y. \tag{7}$$

In verband met $\iint y\,dx\,dy=0$, vinden we voor de gemiddelde hoekverdraaiïng:

$$\omega_m = cz. \tag{8}$$

Voor torsievrije buiging moet volgens onze definitie dus gelden:

$$c=0. \tag{9}$$

Hieruit vloeit dan verder voort:

1° Bij torsievrije buiging is de plaatselijke hoekverdraaiïng in het zwaartepunt nul;

2° bij torsievrije buiging ontbreken de torsieverplaatsingen uit de oplossing van de Saint-Vénant (n.l. $u=-cyz$, $v=cxz$, $w=c\Phi$).

Deze definitie van het torsiecentrum is dus een zoodanige, welke op grond van de buigingstheorie van de Saint-Vénant het meest voor de hand ligt.

Ook de onder lit. (2, 3, 4, 5) genoemde schrijvers bedoelen door hun definitie van het torsiecentrum de ligging van het aangrijpingspunt der dwarskracht aan te geven, waarbij geen verdraaiïng van de doorsnede optreedt. Bij Weber en Schwalbe is het niet geheel zeker of inderdaad de oplossing aan deze voorwaarde voldoet. Voor de oplossing, die Trefftz geeft, is echter blijkens hetgeen hier volgen zal de vervorming niet torsievrij ($c \neq 0$). Het door hem bepaalde torsiemoment is gedefinieerd door de voorwaarde, dat de totale vormveranderingsarbeid voor den door een dwarskracht belaste balk gelijk is aan de som van de vormveranderingsarbeid voor de evenwijdige verplaatste dwarskracht in het torsiecentrum en de vormveranderingsarbeid door het torsiemoment, dat bij de evenwijdige verplaatsing van de belasting naar het torsiecentrum wordt ingevoerd:

$$A = A_b + A_t.$$

Aan welke der beide definities den voorkeur moet worden gegeven is betrekkelijk onverschillig.

De definitie van Trefftz heeft het voordeel, dat zij de beide belastingssystemen, torsie en torsievrije buiging, orthogonaal maakt, d.w.z. dat de vervormingsarbeid geen gemengde bijdragen van torsiemoment en dwarskracht bevat. De hier voorgestane definitie biedt de voordeelen, dat zij nauw verband houdt met de oplossing van het balkenvraagstuk volgens de Saint-Vénant en dat zij als torsievrije vervorming een zoodanige definieert, die aanschouwelijker is.

In punt 7 wordt op het verschil in definities nog teruggekomen.

In het volgende wordt dus uitgegaan van de definitie, dat bij torsievrije buiging de gemiddelde hoekverdraaiïng van de dwarsdoorsnede nul is of kortweg $c=0$ volgens verg. (9).

Voor zuivere torsie is de vormveranderingsarbeid, indien t_x en t_y de schuifspanningen resp. evenwijdig aan X- en Y-as zijn, gegeven door:

$$A_t = \frac{1}{2G}\iint (t_x^2 + t_y^2)\,dx\,dy. \tag{10}$$

Voor torsievrije buiging is de vormveranderingsarbeid, indien τ_x en τ_y de schuifspanningen resp. evenwijdig aan X- en Y-as zijn, gegeven door:

$$A_b = \frac{1}{2E}\iiint Z_z^2\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{2G}\iint (\tau_x^2 + \tau_y^2)\,dx\,dy. \tag{11}$$

Bij gelijktijdige torsie en buiging is de vormveranderingsarbeid gegeven door:

$$A = \frac{1}{2E}\iiint Z_z^2\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{2G}\iint \left\{ (t_x + \tau_x)^2 + (t_y + \tau_y)^2 \right\} dx\,dy. \tag{12}$$

Indien we van (10) en (11) gebruik maken, gaat (12) over in:

$$A = A_t + A_b + \frac{1}{G}\iint (t_x \tau_x + t_y \tau_y)\,dx\,dy. \tag{13}$$

We zullen nu de in de derde term van (13) vervatte integraal berekenen en uit de gevonden waarde de ligging van het torsiecentrum afleiden.

3. *Berekening van* $\iint (t_x \tau_x + t_y \tau_y)\,dx\,dy$ *voor enkelvoudige samenhangende doorsneden.*

Uit de definitie van torsievrije buiging volgt voor t_x, t_y resp. τ_x, τ_y met (3):

$$\left.\begin{aligned} t_x &= G c \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y\right) \\ t_y &= G c \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\} \\ \tau_y &= -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial X}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Dus is:

$$\iint(t_x\tau_x+t_y\tau_y)\,dxdy=$$

$$=-Gc\frac{W}{2(1+\sigma)I}\iint\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\tfrac12\sigma x^2+(1-\tfrac12\sigma)y^2\right\}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)\left\{\frac{\partial X}{\partial y}+(2+\sigma)xy\right\}\right]dxdy. \qquad (16)$$

Nu is volgens de stelling van Green, indien de positieve richting van de normaal en van de raaklijn aan de randkromme volgens fig. 2 aangenomen worden:

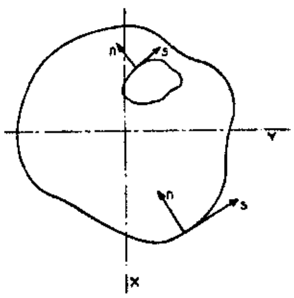


Fig. 2. Meervoudig samenhangende doorsnede; definitie der positieve richting van normaal en raaklijn der randkromme.

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)\frac{\partial X}{\partial x}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)\frac{\partial X}{\partial y}\right\}dxdy=-\int_C X\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds-\iint\left(y\frac{\partial X}{\partial x}-x\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (17)$$

waarin de lijnintegraal langs de begrenzing der doorsnede is te nemen.

Met behulp van de randvoorwaarde (4b) kunnen we het 2e lid van verg. (17) omvormen tot:

$$-\int_C X\left\{y\cos(x,n)-x\cos(y,n)\right\}ds-\iint\left(y\frac{\partial X}{\partial x}-x\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy.$$

Uit de stelling van Gausz vinden we nu:

$$-\int_C X\left\{y\cos(x,n)-x\cos(y,n)\right\}ds=\iint\left(y\frac{\partial X}{\partial x}-x\frac{\partial X}{\partial y}\right)dxdy,$$

waaruit tenslotte volgt:

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)\frac{\partial X}{\partial x}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+y\right)\frac{\partial X}{\partial y}\right\}dxdy=0. \qquad (18)$$

Het overblijvende deel van de integraal in het tweede lid van (16) kan als volgt geschreven worden:

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)\left\{\tfrac12\sigma x^2+(1-\tfrac12\sigma)y^2\right\}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)(2+\sigma)xy\right]dxdy=$$

$$=\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)y^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)2xy\right\}dxdy+\tfrac12\sigma\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)(x^2-y^2)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)2xy\right\}dxdy. \qquad (19)$$

De eerste dezer integralen herleiden we door te stellen $y^2=\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}$ en $2xy=\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}$ en vervolgens op het deel, dat de functie Φ bevat, de stelling van Green toe te passen tot:

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right\}dxdy=-\int_C xy^2\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds-\iint(y^3-2x^2y)\,dxdy.$$

Door invoering van de randvoorwaarde (4b) vinden we met behulp van de stelling van Gausz:

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)y^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)2xy\right\}dxdy=-\int_C xy^2\left\{y\cos(x,n)-x\cos(y,n)\right\}ds-\iint(y^3-2x^2y)\,dxdy=$$

$$=\iint(y^3-2x^2y)\,dxdy-\iint(y^3-2x^2y)\,dxdy=0. \qquad (20)$$

De tweede integraal in het tweede lid van (19) herleiden we door de geconjugeerde potentiaalfunctie ψ van Φ in te voeren, gedefinieerd door:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\quad,\quad\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}. \qquad (21)$$

Uit de randvoorwaarde (4b) volgt als randvoorwaarde voor de functie ψ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos(x,n)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos(y,n)=y\cos(x,n)-x\cos(y,n) \qquad (4b)$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}=-x\frac{dx}{ds}-y\frac{dy}{ds}$$

of

$$\psi-\tfrac12(x^2+y^2)=\text{constant}. \qquad (22)$$

Stellen we tenslotte nog:

$$\psi-\tfrac12(x^2+y^2)=F, \qquad (23)$$

dan luidt de randvoorwaarde voor F, voor enkelvoudig samenhangende doorsneden:

$$F=F_0\,(\text{constant}). \qquad (24)$$

Met behulp van de stellingen van Green en van Gausz kan de tweede integraal in (19) nu herleid worden tot:

$$\tfrac{1}{2}\sigma\iint\left\{\frac{\partial F}{\partial y}(x^2-y^2)-\frac{\partial F}{\partial x}2xy\right\}dxdy=-\tfrac{1}{2}\sigma\int_C F(x^2-y^2)\cos(y,n)\,ds+\sigma\iint F\,y\,dxdy+\sigma\int_C F\,xy\cos(x,n)\,ds+$$

$$+\sigma\iint F\,y\,dxdy=\sigma F_0\int_C\left\{xy\cos(x,n)-\tfrac{1}{2}(x^2-y^2)\cos(y,n)\right\}ds+2\sigma\iint F\,y\,dxdy=\sigma F_0\iint-2y\,dxdy+2\sigma\iint F\,y\,dxdy$$

Nu is $\iint y\,dxdy=0$, zoodat

$$\tfrac{1}{2}\sigma\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)(x^2-y^2)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)2xy\right\}dxdy=2\sigma\iint F\,y\,dxdy. \qquad (25)$$

Uit (16), (18), (19), (20) en (25) volgt:

$$\iint(t_x\tau_x+t_y\tau_y)\,dxdy=-\frac{\sigma}{1+\sigma}G\,c\frac{W}{I}\iint F\,y\,dxdy. \qquad (26)$$

We kunnen deze *uitkomst in een eenvoudigen meetkundigen vorm gieten*, welke vorm voor deze integraal reeds door Trefftz (lit. 4) is aangegeven. F stelt namelijk op een constanten factor na de ordinaten van een zeepvlies voor, dat gespannen is over een opening, waarvan de begrenzing der doorsnede de rand is, en dat belast is door een éénzijdigen overdruk (lit. 5). De intégraal $\iint F\,y\,dxdy$ is dan gelijk aan het statisch moment van het volume tusschen het F oppervlak en het vlak $F=F_0$ (of een hiermede evenwijdig vlak) t.o.v. de x-as.

4. Berekening van $\iint(t_x\tau_x+t_y\tau_y)\,dxdy$ *voor meervoudig samenhangende doorsneden.*

Voor meervoudig samenhangende doorsneden blijven de betrekkingen (18) en (20) gelden. De herleiding van de integraal, die het getal van Poisson als coëfficiënt bevat, moet echter herzien worden.

Zonder aan de algemeenheid te kort te doen, kunnen we op den buitenrand $F=0$ stellen. Noemen we op de n binnenranden de waarden van F: $F_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, dan geldt.

$$\tfrac{1}{2}\sigma\iint\left\{\frac{\partial F}{\partial y}(x^2-y^2)-\frac{\partial F}{\partial x}2xy\right\}dxdy=-\tfrac{1}{2}\sigma\int_C F(x^2-y^2)\cos(y,n)\,ds+\sigma\int_C F\,x\,y\cos(x,n)\,ds+2\sigma\iint_f F\,y\,dxdy. \qquad (27)$$

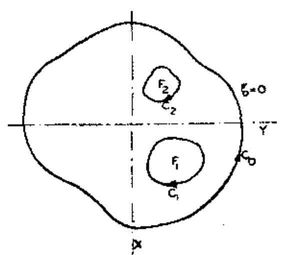


Fig. 3. Meervoudig samenhangende doorsnede: definitie der positieve omtreksrichting.

Hierin moet de oppervlakte integraal over het oppervlak der doorsnede genomen worden; de lijnintegralen moeten langs de gezamelijke randen genomen worden en wel in den in fig. 3 aangegeven zin.

Nu is:

$$-\tfrac{1}{2}\sigma\int_C F(x^2-y^2)\cos(y,n)\,ds+\sigma\int_C F\,x\,y\cos(x,n)\,ds=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\sigma F_0\int_{C_0}\left\{(x^2-y^2)\cos(y,n)-2xy\cos(x,n)\right\}ds+$$

$$+\tfrac{1}{2}\sigma\sum_{i=1}^{n}F_i\int_{C_i}\left\{(x^2-y^2)\cos(y,n)-2xy\cos(x,n)\right\}ds=2\sigma\sum_{i=1}^{n}F_i\iint_{O_i}y\,dxdy. \qquad (28)$$

Hierin moet de oppervlakte integraal $\iint_{O_i}y\,dxdy$ over het door den rand C_i omsloten oppervlak uitgestrekt worden.

We vinden dus bij meervoudig samenhangende doorsneden voor den integraal, die het getal van Poisson als coëfficiënt bevat:

$$\sigma\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)\tfrac{1}{2}(x^2-y^2)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)xy\right\}dxdy=2\sigma\iint_f F\,y\,dxdy+2\sigma\sum_{i=1}^{n}F_i\iint_{O_i}y\,dxdy. \qquad (29)$$

Uit (18), (20) en (29) volgt nu tenslotte:

$$\iint(t_x\tau_x+t_y\tau_y)\,dxdy=-\frac{\sigma}{1+\sigma}G\,c\frac{W}{I}\left[\iint_f F\,y\,dxdy+\sum_{i=1}^{n}F_i\iint_{O_i}y\,dxdy\right]. \qquad (30)$$

We kunnen deze uitkomst weer in een eenvoudigen meetkundigen vorm gieten. Men kan zich n.l. als volgt een beeld vormen van de functie F (verg. lit. 5). Men denke zich een opening in een plaat van den vorm van den buitenrand der doorsnede en een aantal stijve vlakke platen zonder gewicht, welker randen overeenkomen met de binnenranden van de doorsneden en die zich vrij in de richting loodrecht op de plaat bewegen kunnen. Men denke zich nu een door eenzijdigen overdruk belast vlies gespannen tusschen de verschillende platen, terwijl de zwevende platen eveneens door deze overdruk belast worden (zie fig. 4).

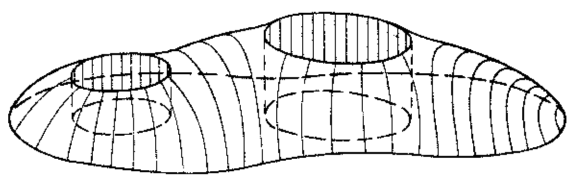


Fig. 4. Meervoudig samenhangende doorsnede, waarboven de functie F is uitgezet (zeepvliesmodel).

De platen, die de binnenranden voorstellen zullen zich nu, op een constanten factor na, op de juiste hoogte F_i instellen. Nu is $\iint_f F y\,dxdy + \sum_{i=1}^{n} F_i \iint_{O_i} y\,dxdy$ het statisch moment t.o.v. de x-as van het volume tusschen het vlak $F=0$ en het F oppervlak, waarbij de zwevende platen eveneens tot het F oppervlak behoorend gerekend worden.

De resultaten, die in de vergelijkingen (26) en (30) zijn weergegeven kunnen dus eenvoudig worden samengevat tot:

$$\iint (t_x \tau_x + t_y \tau_y)\,dxdy = -\frac{\sigma}{1+\sigma} G c \frac{W}{I} S_{Fx}. \tag{31}$$

Hierin is S_{Fx} het statisch moment t.o.v. de x-as van het volume tusschen het F oppervlak en het vlak door den buitenrand der doorsnede. Bij meervoudig samenhangende doorsneden moet voor de F-waarde in een uitsparing der doorsnede de F-waarde op den rand dezer uitsparing genomen worden.

Uit de verg. (31) blijkt, dat indien $\sigma=0$ is, de vormveranderingsarbeid bij gecombineerde buiging en torsie gelijk is aan de som der overeenkomstige arbeidshoeveelheden bij torsie en torsievrije buiging afzonderlijk. Ook wanneer $S_{Fx}=0$, zooals bij doorsneden, die t.o.v. de x-as symetrisch zijn, geldt de betrekking

$$A = A_b + A_t.$$

In het algemeen is S_{Fx} echter ongelijk nul. Hieruit volgt, dat er een verschil bestaat tusschen het torsiecentrum volgens Trefftz en het torsiecentrum volgens de hier aangenomen definitie.

5. Bepaling van het torsiecentrum.

In navolging van Trefftz bepalen we het torsiecentrum met behulp van de vergelxkingen (26) of (30), uit de integraal:

$$\iint (t_x \tau_x + t_y \tau_y)\,dxdy.$$

In plaats van de vergelijkingen (26) en (30) voert Trefftz echter op grond van zijn definitie van het torsiecentrum de voorwaarde in, dat deze integraal gelijk 0 is. Substitutie van (14) geeft:

$$\iint (t_x \tau_x + t_y \tau_y)\,dxdy = G c \iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\tau_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\tau_y\right) dxdy + G c \iint (-y\tau_x + x\tau_y)\,dxdy. \tag{32}$$

Nu is:

$$\iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\tau_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\tau_y\right) dxdy = -\iint \Phi \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x}\right) dxdy - \int_C \Phi \left\{\tau_x \cos(n,x) + \tau_y \cos(n,y)\right\} ds. \tag{33}$$

De lijnintegraal in het tweede lid van verg. (33) is nul, daar op den rand der doorsnede moet gelden:

$$\tau_x \cos(n,x) + \tau_y \cos(n,y) = 0.$$

Voor de berekening van de oppervlakteintegraal merken we op:

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + 2(1+\sigma)x\right],$$

of met gebruik van (5a):

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = -\frac{W}{I}x.$$

We vinden dus:

$$\iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\tau_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\tau_y\right) dxdy = \frac{W}{I}\iint \Phi\, x\,dxdy. \tag{34}$$

De integraal $\iint (-y\tau_x + x\tau_y)\,dxdy$ in verg. (32) stelt het moment van de schuifspanningon bij torsievrije buiging om den oorsprong, het zwaartepunt der doorsnede, voor. Dit moment kan geschreven worden als $-Wy_0$, waarin y_0 de y-coördinaat van het torsiecentrum is.

Voor enkelvoudig samenhangende doorsneden vinden we nu, indien we van (26), (32) en (34) gebruik maken:

$$-\frac{\sigma}{1+\sigma}\,G\,c\,\frac{W}{I}\iint F\,y\,dxdy = G\,c\,\frac{W}{I}\iint \Phi\,x\,dxdy - G\,c\,W\,y_0$$

of

$$y_0 = \frac{1}{I}\iint \Phi\,x\,dxdy + \frac{\sigma}{1+\sigma}\,\frac{1}{I}\iint F\,y\,dxdy. \tag{35}$$

Voor meervoudig samenhangende doorsneden vinden we uit (30), (32) en (34):

$$y_0 = \frac{1}{I}\iint_f \Phi\,x\,dxdy + \frac{\sigma}{1+\sigma}\,\frac{1}{I}\left[\iint_f F\,y\,dxdy + \sum_{i=1}^{n} F_i \iint_{O_i} y\,dxdx\right]. \tag{36}$$

De verg. (35) en (36) kunnen met behulp van (31) samengevat worden tot:

$$y_0 = \frac{1}{I}\iint \Phi\,x\,dxdy + \frac{\sigma}{1+\sigma}\,\frac{S_{Fx}}{I}. \tag{37}$$

6. De integraal der schuifspanningen langs een gesloten kromme.

Leibenson (lit. 6) heeft de lijnintegraal der schuifspanningen op de volgende wijze berekend:

$$\int_C \tau_s\,ds = \int_C \left\{X_z \cos(x,s) + Y_z \cos(y,s)\right\} ds = \int_C G\,c \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right\} ds - \int_C G\,c \left\{y\cos(y,n) + x\cos(x,n)\right\} ds -$$

$$- \int_C \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial X}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right\} ds - \int_C \frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\left\{\tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1-\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\}\cos(y,n) - (2+\sigma)xy\cos(x,n)\right] ds.$$

Hierin is de positieve richting van de normaal naar binnen aangenomen (fig. 2).

De functies Φ en X moeten eenwaardig zijn, dus is:

$$\int_C \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy\right) = \int_C \left(\frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy\right) = 0.$$

Door de stelling van Gausz op de overblijvende integralen toe te passen, vinden we

$$\int_C \tau_s\,ds = 2\,G\,c\,O + \frac{W}{2(1+\sigma)I}\iint_O \left\{(2-\sigma)y - (2+\sigma)y\right\} dxdy$$

of

$$\int_C \tau_s\,ds = 2\,G\,c\,O - \frac{\sigma}{1+\sigma}\,\frac{W}{I}\iint_O y\,dxdy. \tag{38}$$

De opperplakteintegraal moet over het oppervlak, omsloten door de lijn, langs welke $\int_C \tau_s\,ds$ bepaald is, uitgestrekt worden.

7. Trefftz' definitie van het torsiecentrum.

Indien het torsiecentrum gedefinieerd wordt als het aangrijpingspunt van de dwarskracht, waarvoor geldt:

$$A = A_b + A_t,$$

behooren bij het geval van belasting in het torsiecentrum schuifspanningen τ_{x1} en τ_{y1} van zoodanige grootte, dat overeenkomstig (13) voldaan wordt aan:

$$\iint (t_x\,\tau_{x1} + t_y\,\tau_{y1})\,dxdy = 0. \tag{40}$$

Deze schuifspanningen τ_{x1}, τ_{y1} kunnen verkregen worden door op de schuifspanningen τ_x, τ_y volgens (15) spanningen kt_x, kt_y te superponeeren, zoodat

$$\tau_{x1} = \tau_x + kt_x$$
$$\tau_{y1} = \tau_y + kt_y.$$

Uit (40) volgt dan:

$$k = -\frac{\iint (t_x\,\tau_x + t_y\,\tau_y)\,dxdy}{\iint (t_x^2 + t_y^2)\,dxdy}.$$

Hiervoor kan wegens (31) en na toepassing van de stelling van Green geschreven worden:

$$k=\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{1}{Gc}\frac{W}{I}\cdot\frac{S_{Fx}}{\iint\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy}=\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{1}{2Gc}\frac{W}{I}\frac{S_{Fx}}{\iint F\,dxdy},\tag{41}$$

waarin $\iint F\,dxdy$ op overeenkomstige wijze als S_{Fx} gedefinieerd is. De verschuiving van het torsiecentrum t.o.v. de in punt 5 berekende ligging is

$$\Delta y_0=-\frac{2kGc}{W}\iint F\,dxdy=-\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{S_{Fx}}{I},$$

zoodat de ligging van het torsiecentrum gegeven wordt door

$$y_1=\frac{1}{I}\iint \Phi x\,dxdy.\tag{42}$$

Dit resultaat stemt overeen met het in lit. 4 gevondene.

Voor de lijnintegraal der schuifspanningen volgt nu uit (38) voor torsievrije buiging, gedefinieerd volgens verg. (39):

$$\int_C \tau_{s1}\,ds=-\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{W}{I}\iint_O y\,dxdy+2Gck\iint_O dxdy$$

of

$$\int_C \tau_{s1}\,ds=-\frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{W}{I}\left[\iint_O y\,dxdy-\frac{S_{Fx}}{\iint F\,dxdy}\iint_O dxdy\right].\tag{43}$$

waarbij $\iint_O$ zich over het oppervlak uitstrekt, dat door de contour, waarop de lijnintegraal betrekking heeft, wordt ingesloten. De andere integraal strekt zich uit over het geheele oppervlak, dat door de buitencontour omsloten wordt.

Omdat de integralen $\iint_O y\,dxdy$ en $\iint_O dxdy$ niet in een constante verhouding staan voor verschillende contouren, is $\int_C \tau_{s1}\,ds$ in het algemeen ongelijk nul.

Er bestaat dus op grond van de definitie (39) van het torsiecentrum geen betrekking

$$\int_C \tau_{s1}\,ds=0,\ \text{tenzij } \sigma=0 \text{ is.}$$

8. Specialisatie voor meervoudig-samenhangende dunwandige doorsneden.

Voor dunwandige doorsneden heeft Van der Neut een methode aangegeven om het torsiecentrum en de schuifspanningsverdeeling te bepalen. Hij vindt daarbij (lit. 5) voor zuivere buiging:

$$\int_C \tau_s\,ds=0.\tag{44}$$

Deze methode is dus alleen exact, indien òf $\sigma=0$ òf $\iint_O y\,dxdy=0$ is, waarbij de oppervlakte integraal over het door de contour omsloten gebied uitgestrekt wordt.

De ligging van het torsiecentrum volgens de definitie van Trefftz (verg. 42) is onafhankelijk van σ en geldt dus ook voor $\sigma=0$, zoodat de liggingen van het torsiecentrum volgens Van der Neut en Trefftz overeenstemmen. Dit is een verrassend resultaat; immers uit (43) volgt, dat voor de definitie van het torsiecentrum met verg. (39), waaruit de ligging volgens Trefftz gevonden wordt, niet geldt $\int_C \tau_{s1}\,ds=0$, terwijl gebruik makend van deze vergelijking toch de juiste ligging van het torsiecentrum gevonden wordt. De schuifspanningsverdeeling, die men op grond van $\int_C \tau_{s1}\,ds=0$ vindt, is natuurlijk niet exact.

Uit de in punt 2 gegeven definitie van torsievrije buiging volgt voor de y-coördinaat van het torsiecentrum verg. (37). Bij dunwandige doorsneden is $\frac{\partial F}{\partial n}$ nagenoeg constant, zoodat

$$S_{Fx}=\sum_{i=1}^{n}F_i\iint_{A_i} y\,dxdy,\tag{45}$$

waarin A_i het oppervlak is, dat door de middellijn der wanden rondom cel i omsloten is. Dit is evident, indien men de in punt 4 gegeven meetkundige interpretatie van S_{Fx} in aanmerking neemt.

De y-coördinaat van het torsiecentrum wordt dus bepaald door:

$$y_o = \frac{1}{I}\iint \Phi x\,dxdy + \frac{\sigma}{1+\sigma}\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{n} F_i \iint y\,dxdy. \tag{46}$$

De constanten F_i kunnen berekend worden; immers geldt voor het geval van zuivere torsie, indien h de wanddikte is voor den wand tusschen de cellen i en j:

$$t_s h = G c (F_i - F_j).$$

Volgens (38) geldt verder:

$$\int_{\text{cel } i} t_s\,ds = 2\,G\,c\,A_i.$$

De n constanten F kunnen nu uit de n vergelijkingen voor de n cellen:

$$2A_i = \sum_j (F_i - F_j)\int_{ij}\frac{ds}{h}. \tag{47}$$

berekend worden; hierin heeft $\int_{ij}\frac{ds}{h}$ betrekking op den wand tusschen de cellen i en j en de sommatie gaat over de wanden i j rondom del i.

Voor een ééncellige buis volgt uit (47):

$F = \dfrac{2A}{\int_C \frac{ds}{h}}$, indien de waarde van F op den buitenwand van de buis weer nul gesteld wordt.

Verg. (46) gaat over in:

$$y_o = \frac{1}{I}\iint \Phi x\,dxdy + \frac{\sigma}{(1+\sigma)I}\frac{2A}{\int_C \frac{ds}{h}}\iint y\,dxdy. \tag{48}$$

De schuifspanningsverdeeling en het torsiecentrum worden op directe wijze met de methode volgens (lit. 5) gevonden, indien in plaats van de daar aangegeven vergelijking $\int_C \tau_s\,ds = 0$ vergelijking (38), waarin gesteld wordt $c=0$, voor elke cel wordt toegepast.

DEEL II.

De invloed van de verhindering van de vormverandering der dwarsdoorsneden op de spanningsverdeeling.

9. De spanningen.

We zullen nu onderzoeken of bij een lineaire buigspanningsverdeeling en verhinderde vervorming der dwarsdoorsneden (in het volgende kortweg aangeduid als verhinderde dwarscontractie) een schuifspanningsverdeeling mogelijk is, die in iedere doorsnede z als resultante de uitwendige belasting W oplevert. Het zal blijken, dat hiervoor op de lichaamselementen bepaalde massakrachten in het x—y vlak moeten werken, terwijl langs den rand van een doorsnede z oppervlakte spanningen in het x—y vlak op den buitenwand van het lichaam moeten inwerken. Voor een dunwandige doorsnede met oneindig stijve schotten kunnen al deze krachten bij benadering geleverd worden door de schotten, die alleen langs de randen der doorsneden hun krachten uitoefenen.

Overeenkomstig het voorgaande wordt gesteld:

$$Z_z = -\frac{W}{I}(l-z)\,x \qquad (49)$$

$$e_x = e_y = \gamma_{xy} = 0. \qquad (50)$$

De compatibiliteitsvoorwaarden voor de vormveranderingsgrootheden zijn (lit. 8):

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z},\ \text{cycl.}$$

$$2\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right),\ \text{cycl.} \qquad (52)$$

Uit de vergelijkingen (49) t/m (52) volgt:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x} = 0, \qquad 0 = 0$$

en

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 0.$$

Aan al deze voorwaarden wordt voldaan, indien we stellen:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{yz} &= c\,x + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= -c\,y + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Hierin is c een integratieconstante en Φ_0 een functie alleen van x en y. Het evenwicht in z-richting wordt uitgedrukt door:

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

of met (49) en (53):

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + \frac{2(1+\sigma)W}{EI}\,x = 0. \qquad (54)$$

We stellen als voorwaarde, dat op het buitenoppervlak geen schuifspanningen aangrijpen; deze voorwaarde wordt uitgedrukt door:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = c\left\{y\cos(x,n) - x\cos(y,n)\right\}. \qquad (55)$$

We stellen nu:

$$\Phi_0 = c\,\Phi - \frac{W}{EI}\left\{\Theta + 1/6\,\sigma x^3 + (1+\tfrac{1}{2}\sigma)\,x y^2\right\}, \qquad (56)$$

waarin Φ gedefinieerd is door verg. (4a) met als randvoorwaarde (4b) en Θ door:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \qquad (57a)$$

met als randvoorwaarde:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = -\left\{\tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1+\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\}\cos(x,n) - (2+\sigma)\,x y\cos(y,n). \qquad (57b)$$

Voor de schuifspanningen X_z en Y_z vinden we nu:

$$\left.\begin{aligned} X_z &= Gc\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)-\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\tfrac{1}{2}\sigma x^2+(1+\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\} \\ Y_z &= Gc\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)-\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial\Theta}{\partial y}+(2+\sigma)xy\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

De resultante der schuifspanningen in x-richting bedraagt:

$$\iint X_z\,dxdy=\iint\left\{X_z+x\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}\right)+\frac{Wx^2}{I}\right\}dxdy,$$

waaruit met de stelling van Gausz volgt:

$$\iint X_z\,dxdy=-\int_C X_z x\cos(x,n)\,ds-\int_C Y_z x\cos(y,n)\,ds+W=-\int_C x\left\{X_z\cos(x,n)+Y_z\cos(y,n)\right\}ds+W.$$

Indien in aanmerking genomen wordt, dat de schuifspanningen in een vlak z=const. langs den rand tangentiëel verloopen, volgt:

$$\iint X_z\,dxdy=W. \tag{59}$$

Op dezelfde wijze vinden we:

$$\iint Y_z\,dxdy=\iint\left\{Y_z+y\left(\frac{\partial X_z}{\partial x}+\frac{\partial Y_z}{\partial y}\right)+\frac{W}{I}xy\right\}dxdy=-\int_C y\left\{X_z\cos(n,x)+Y_z\cos(n,y)\right\}ds+\frac{W}{I}\iint xy\,dxdy$$

of

$$\iint Y_z\,dxdy=0. \tag{60}$$

De massakrachten, die in x en y-richting moeten werken, bepalen we als volgt. De normaalspanningen X_x en Y_y worden, wegens $e_x=e_y=0$ gegeven door:

$$X_x=Y_y=\frac{\sigma}{1-\sigma}Z_z. \tag{61}$$

Het evenwicht in x-richting eischt:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+X=0,$$

waarin X de massakracht per volumeeenheid voorstelt. Daar $X_y=0$ is en X_z onafhankelijk van z is, volgt met (49):

$$-\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{W}{I}(l-z)+X=0 \quad \text{of} \quad X=\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{W}{I}(l-z). \tag{62}$$

Op dezelfde wijze vinden we:

$$Y=0. \tag{63}$$

Aan den buitenrand van de doorsneden moeten normaalspanningen in het x—y vlak werken, groot:

$$\sigma_n=-\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{W}{I}(l-z)x. \tag{64}$$

De spanningen σ_n hebben per eenheid van lengte van den balk als resultante in x-richting:

$$-\int_C \sigma_n\cos(x,n)\,ds=-\iint\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{W}{I}(l-z)\,dxdy=-\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{W}{I}(l-z)\iint dxdy$$

en in y-richting:

$$-\int_C \sigma_n\cos(y,n)\,ds=0.$$

De krachten, noodig voor de verhindering van de vervorming der dwarsdoorsneden, vormen dus een evenwichtskrachtsysteem, daar de y-componente der resultanten van massakrachten en randspanningen ieder afzonderlijk nul zijn en de x-componenten van de resultante van massakrachten en randspanningen ook nul is.

We vinden dus, dat er voor balken met verhinderde dwarscontractie bij buiging door dwarskracht inderdaad een verdeeling der schuifspanningen bestaat, die van z onafhankelijk is.

10. De verplaatsingen.

Na integratie van de vergelijkingen, die het verband tusschen spanning en vervorminguitdrukken, worden de volgende verplaatsingsgrootheden gevonden:

$$\left.\begin{aligned} u &= -cyz + \frac{W}{EI}\frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}\left\{\tfrac{1}{2}lz^2 - 1/6\,z^3\right\} \\ v &= cxz \\ w &= c\Phi - \frac{W}{EI}\left\{\Theta + 1/6\,\sigma x^3 + (1+\tfrac{1}{2}\sigma)\,xy^2 + \frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}\,(lxz - \tfrac{1}{2}xz^2)\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

De hoekverdraaiïng is in elk punt der doorsnede

$$\omega_{xy} = cz. \qquad (66)$$

We vinden dus, dat bij zuivere buiging, waarvoor $c=0$ gesteld wordt, de hoekverdraaiïng in elk punt der dwarsdoorsnede nul is; dit was te voorzien, daar uit $e_x = e_y = \gamma_{xy} = 0$ volgt, dat elke doorsnede in zijn geheel moet draaien, zoodat, indien de gemiddelde verdraaiïng nul gesteld wordt, de verdraaiïng overal nul wordt.

11. Het torsiecentrum en de lijnintegraal der schuifspanningen.

Evenals in punt 3 berekenen we de integraal

$$\iint (t_x\tau_x + t_y\tau_y)\,dxdy.$$

Uit (58) volgt:

$$\iint (t_x\tau_x + t_y\tau_y)\,dxdy = -Gc\frac{W}{2(1+\sigma)I}\iint\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)\left\{\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1+\tfrac{1}{2}\sigma)y^2\right\} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)\left\{\frac{\partial\Theta}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right\}\right]dxdy = -Gc\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right\}dxdy + \right.$$

$$\left. + \iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)y^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)2xy\right\}dxdy + \iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)\tfrac{1}{2}\sigma(x^2+y^2) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)\sigma xy\right\}dxdy\right].$$

De eerste twee integralen worden op dezelfde wijze als de integralen onder (18) en (20) nul. Voor de laatste integraal schrijven we onder invoering van de functie F:

$$\tfrac{1}{2}\sigma\iint\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right)(x^2+y^2) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right)2xy\right\}dxdy = \tfrac{1}{2}\sigma\iint\left\{\frac{\partial F}{\partial y}(x^2+y^2) - \frac{\partial F}{\partial x}2xy\right\}dxdy.$$

Volgens de stelling van Green is dit te schrijven als:

$$-\tfrac{1}{2}\sigma\int_C\left\{F(x^2+y^2)\cos(y,n)ds - F\,2xy\cos(x,n)\right\}ds - \tfrac{1}{2}\sigma\iint(2Fy - 2Fy)\,dxdy =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sigma\left[F_o\int_{C_o}\left\{(x^2+y^2)\cos(y,n) - 2xy\cos(x,n)\right\}ds - \sum_{i=1}^{n} F_i\int_{C_i}\left\{(x^2+y^2)\cos(y,n) - 2xy\cos(x,n)\right\}ds.\right.$$

Met de stelling van Gausz gaat deze laatste uitdrukking over in:

$$\tfrac{1}{2}\sigma F_o\iint_{O_o}(2y-2y)\,dxdy - \tfrac{1}{2}\sigma\sum_{i=1}^{n}F_i\iint_{O_i}(2y-2y)\,dxdy = 0.$$

Dus geldt tenslotte:

$$\iint(t_x\tau_x + t_y\tau_y)\,dxdy = 0. \qquad (67)$$

Hieruit volgt voor de y-coördinaat van het torsiecentrum (verg. de in punt 5 gegeven beschouwingen):

$$y_o = \frac{1}{I}\iint\Phi x\,dxdy. \qquad (68)$$

Voor de berekening van de lijnintegraal der schuifspanningen maken we gebruik van de in punt 6 gegeven afleiding.

$$\int_C \tau_s ds = \int_C \left\{ X_z \cos(x,s) + Y_z \cos(y,s) \right\} ds = \int_C Gc \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \right) \cos(x,s) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \right) \cos(y,s) \right\} ds -$$

$$- \frac{W}{2(1+\sigma)I} \int_C \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \Theta}{\partial y} dy \right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I} \int_C \left[\left\{ \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1 + \tfrac{1}{2}\sigma) y^2 \right\} \cos(y,n) - (2+\sigma) xy \cos(x,n) \right] ds =$$

$$= Gc \int_C \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \right) - \frac{W}{2(1+\sigma)I} \int_C \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \Theta}{\partial y} dy \right) - Gc \int_C \left\{ y \cos(y,n) + x \cos(x,n) \right\} ds -$$

$$- \frac{W}{2(1+\sigma)I} \int_C \left[\left\{ \tfrac{1}{2}\sigma x^2 + (1 + \tfrac{1}{2}\sigma) y^2 \right\} \cos(y,n) - (2+\sigma) xy \cos(x,n) \right] ds.$$

De eerste twee integralen zijn nul in verband met de eenwaardigheid der functie Φ en Θ. De laatste twee integralen worden met de stelling van Gausz herleid tot:

$$2GcO + \frac{W}{2(1+\sigma)I} \iint \left\{ (2+\sigma) y - (2+\sigma) y \right\} dxdy = 2GcO.$$

Dus is:

$$\int_C \tau_s ds = 2GcO. \tag{69}$$

Hieruit blijkt, dat de in lit. 5 gegeven bepaling van de schuifspanningsverdeeling en het torsiecentrum bij balken met meervoudig samenhangende doorsnede juist is, indien de met buiging gepaard gaande dwarscontractie verhinderd wordt.

DEEL III.

12. Phsysische toelichting van den invloed der dwarscontractie.

Uit verg. (38) blijkt, dat tengevolge van de dwarscontractie de in lit. 5 afgeleide betrekking $\oint_C \tau_s\, ds = 0$ voor zuivere buiging haar geldigheid verliest. De oorzaak dezer ongeldigheid moet gezocht worden in de ongelijke hoekverdraaiïngen, die de verschillende punten der doorsnede tengevolge van de dwarscontractie ondergaan. Dit wordt met het volgende voorbeeld toegelicht.

Beschouwd wordt de in fig. 5 gegevene symmetrische dunwandigen ligger waarbij de schuifspanningsverdeeling volgens lit. 5 zóó is, dat $\oint_C \tau_s\, ds = 0$, waaruit volgt $\tau_1 = \tau_2$.

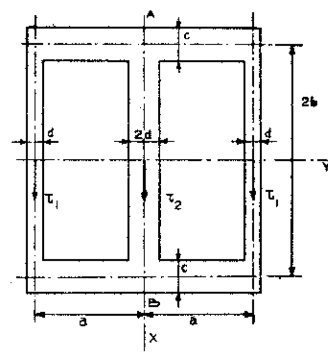


Fig. 5. Symmetrische 3-voudig samenhangende doorsnede, die opgebouwd is uit 2 op zich zelf symmetrische 2-voudig samenhangende doorsneden.

Indien deze ligger volgens de lijn AB wordt doorgesneden, worden 2 symmetrische doosliggers verkregen. Indien in het hart van elk dezer liggers de halve dwarskracht wordt aangebracht is de spanningsverdeeling eveneens symmetrisch, zoodat $\tau_1 = \tau_2$. Volgens lit. 5 zou er dus niets aan de spanningsverdeeling veranderen bij het doorsnijden van de ligger volgens AB, m.a.w. de beide liggers blijven aan elkaar passen.

Deze laatste conclusie nu is onjuist, hetgeen blijkt uit de vervorming van de dwarsdoorsnede der beide liggerhelften; die zullen zich namelijk ten gevolge van de dwarscontractie vervormen als aangegeven in fig. 6; de scheidingsvlakken maken daarbij ten opzichte van elkaar de hoek 2 φ.

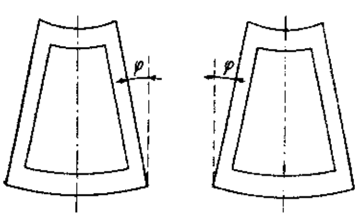


Fig. 6. Vervorming der 2-voudig samenhangende doorsneden van fig. 5 bij belasting door dwarskracht wegens dwarscontractie.

De trekspanning in den bovenwand en de drukspanning in den onderwand bedragen resp.

$$Z_z = \pm W (l - z) \frac{b}{I}, \tag{70}$$

waarin I het traagheidsmoment van de geheele balk t.o.v. de y-as is en W de belasting van de geheele balk.

De contractie van den bovenwand en onderwand bedragen nu resp.

$$\varepsilon_y = \pm \sigma W (l - z) \frac{b}{EI}. \tag{71}$$

De hoek φ in fig. 6 bedraagt dus:

$$\varphi = \sigma W \frac{a}{2\,EI} (l - z). \tag{72}$$

Om de liggerhelften weer aan elkaar te doen passen, moeten zij overeen specifieke wringingshoek

$$-\frac{d\varphi}{dz} = \sigma W \frac{a}{2\,EI} \tag{73}$$

naar elkaar toe getordeerd worden. Het hier vermelde teeken heeft betrekking op de linker helft. De extra schuifspanningen, die hiervoor noodig zijn worden bepaald uit de betrekking voor zuivere torsie:

$$\oint_C \tau_s\, ds = 2\,G\,c\,O.$$

In het onderhavige geval is

$$c = -\frac{d\varphi}{dz} = \sigma W \frac{a}{2\,EI}.$$

We vinden dus:

$$\oint_C \tau_s\, ds = 2\,G\,\sigma W \frac{a}{2\,EI}\, 2\,ab = \frac{\sigma}{1+\sigma} \frac{W}{I} a^2 b. \tag{74}$$

Deze betrekking, welke geldt voor de schuifspanningen in de linker cel van den ligger, blijkt in overeenstemming te zijn met verg. (38).

Literatuur.

1. A. Eggenschwyler: Biegungsachse. Schweiz. Bauz. Bd 76 (1920) S 266.

2. C. Weber: Biegung und Schub in geraden Balken. Zeitschr. für Angew. Math. und Mech. (ZAMM), Band 4, 1924, S 334-348.

3. W. L. Sehwalbe: Ueber den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken. ZAMM. Band 15, 1935, S 138-143.

4. E. Trefftz: Ueber den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken. ZAMM. Band 15, 1935, S 220-225.

5. A. van der Neut: Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers. De Ingenieur, 1931, no. 50 en Verslagen en Verhandelingen van den RSL, deel VII, rapport S 48.

6. L. S. Leibenson: On the flexural centre of closed thin-walled sections. Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'USSR, 1935, Vol. III (VIII), no. 5 (65).

7. A. E. H. Love: Mathematical Theory of Elasticity 4th edition, Ch. XV.

8. A. E. H. Love: Mathematical Theory of Elasticity 4th edition, Ch. I.