VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN

VAN HET

NATIONAAL LUCHTVAARTLABORATORIUM AMSTERDAM

DEEL X — 1941

VOORWOORD.

Het vraagstuk der onstabiele vleugeltrillingen wint met het toenemen der vliegsnelheden steeds meer aan belangrijkheid. Nadat het laboratorium reeds in den aanvang een bijdrage had geleverd tot de ontdekking en verklaring van dit verschijnsel, is het zich in de laatste jaren opnieuw op de studie ervan gaan toeleggen.

Van direct belang voor vliegtuigconstructeur en -gebruiker is de vraag, hoe de laagste snelheid, waarbij het optreden van onstabiele vleugeltrillingen bij een bepaald vliegtuig mogelijk is, kan worden berekend.

In dit deel der Verslagen en Verhandelingen wordt een rapport gepubliceerd, dat de methoden volgens welke dergelijke berekeningen kunnen worden uitgevoerd, behandelt.

Hierbij zij dank gebracht aan den Directeur van den Luchtvaartdienst, die door het verstrekken van een desbetreffende opdracht het opstellen van dit rapport mogelijk maakte en toestemming verleende om het in gedrukten vorm te doen verschijnen.

In de hierna volgende lijst zijn de N.L.L.-rapporten vermeld, die na de uitgave van Deel IX der Verslagen en Verhandelingen (November 1940) als „Technische Mededeelingen" zijn verschenen, terwijl achterin tevens uittreksels zijn opgenomen van de in deze Technische Mededeelingen behandelde stof.

Amsterdam, November 1941.

C. KONING,
Wetenschappelijk Directeur.

PUBLICATIES VAN HET NATIONAAL LUCHTVAARTLABORATORIUM, VERSCHENEN TUSSCHEN 1 NOVEMBER 1940 EN 1 NOVEMBER 1941.

Technische mededeelingen.

V. 1088 „Correctie van vliegprestaties in stationnaire symmetrische vlucht naar gewenschte omstandigheden van atmosfeer, gewicht en motorregeling" door Prof. dr. ir. H. J. van der Maas, ir. S. Wynia en ir. A. J. Marx.

V. 1234 „De standtrilling van den vleugel van vrijdragende eendekkers" door drs. J. H. Greidanus.

V. 1237 „De arbeid, die de luchtkrachten per tijdseenheid op een trillenden vleugel verrichten en de kritische trillingsvormen van een vleugel" door drs. J. H. Greidanus.

V. 1249 „Overzicht van de resultaten van rek- en versnellingsmetingen, uitgevoerd bij vliegtuigen op de K.L.M.-lijn Amsterdam—Bandoeng in het tijdvak September 1935 tot Mei 1940" door ir. T. van Oosterom en ir. A. J. Marx.

„Definities".

A. 674 „Reeksontwikkelingen voor het gebruik bij het berekenen van de circulatieverdeeling van een vleugel volgens de methode van Lotz" door ir. A. Boelen.

A. 767 „Circulatieverdeeling voor tapsche vleugels met prismatisch middenstuk. I Ongetordeerde vleugel met eindkoorde kleiner dan de halve middenkoorde" door ir. A. Boelen.

A. 768 „Circulatieverdeeling voor tapsche vleugels met prismatisch middenstuk. II Ongetordeerde vleugel met eindkoorde kleiner dan de halve middenkoorde (Interpolatiegrafieken)" door ir. A. Boelen.

A. 811 „De methode van Lotz voor het oplossen van de circulatievergelijking van Prandtl" door ir. A. Boelen.

S. 244 „Belastingen op neuswielonderstellen tijdens landingen. I." door dr. ir. A. van der Neut en ir. F. J. Plantema.

S. 245 „Belasting op neuswielonderstellen tijdens landingen. II." door ir. F. J. Plantema.

S. 247 „Het trekveld van in langs- en dwarsrichting verstijfde vlakke platen bij belasting door normaal- en dwarskracht" door dr. ir. A. van der Neut, ir. I. Binkhorst en ir. W. K. G. Floor.

Op blz. 91 is in het kort een overzicht gegeven van de in deze Technische Mededeelingen behandelde stof.

RAPPORT V 1252.

De berekening van de kritische snelheid voor onstabiele trillingen van vliegtuigvleugels

door

drs. J. H. GREIDANUS

Bericht V 1252: Die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit für Flatterschwingungen eines Flugzeugflügels

Report V 1252: The calculation of critical speed with respect *to flutter of airplane wings.*

Rapport V 1252. La calculation de la vitesse critique à l'égard d'oscillations instables de l'aile d'un avion.

Rapport V 1252.

DE BEREKENING VAN DE KRITISCHE SNELHEID VOOR ONSTABIELE TRILLINGEN VAN VLIEGTUIGVLEUGELS

door

drs. J. H. GREIDANUS.

Inhoud.

Tabellen, genummerd 1, 2, 3 en 4, bevinden zich aan het eind van het rapport (ná de literatuurlijst, doch vóór de Duitsche, Engelsche en Fransche uittreksels).

DE BEREKENING VAN DE KRITISCHE SNELHEID VOOR ONSTABIELE TRILLINGEN VAN VLIEGTUIGVLEUGELS

Voorwoord.

Dit rapport werd opgesteld ingevolge een aan het N.L.L. door den *Directeur van den Luchtvaartdienst* verstrekte opdracht, die als volgt kan worden geformuleerd:

> „Gevraagd wordt een *handleiding* samen te stellen voor de *numerieke bepaling* van de kritische snelheid voor onstabiele trillingen van een vliegtuigvleugel, in zoodanigen vorm, dat de toepassing zich zooveel mogelijk kan beperken tot de uitwerking van een gedetailleerd aangegeven proeven- en rekenschema. Tevens wordt de eisch gesteld, dat de uitkomsten betrouwbaar en nauwkeurig genoeg zullen zijn om een doeltreffende en voor de praktijk bevredigende *limiet* der t.a.v. onstabiele trillingen *veilige vliegsnelheden* te kunnen vaststellen."

Nu de binnen het kader van deze opdracht uitgevoerde studie (voorloopig) is afgesloten, moge bij voorbaat worden vermeld, in hoeverre aan de in deze opdracht vervatte eischen kon worden voldaan. In de eerste plaats de *positieve* resultaten: Deze verhandeling bevat een uitvoerige beschrijving van rekenmethoden, waarnaar alle ééndekkers — hoe ook geconstrueerd (vrijdragend, verspannen, vleugel zonder of mèt ingebouwde motoren, enz.) — zullen kunnen worden behandeld, en waarbij de uitkomst aan de daaraan gestelde eischen kan voldoen. En vervolgens de negatieve: hoewel alle berekeningen zoo uitvoerig zijn uitgewerkt, dat de numerieke uitvoering zooveel als slechts mogelijk is wordt vergemakkelijkt, en hoewel ook aanwijzingen zijn opgenomen voor de uitvoering der proeven, die getallen-grondslagen voor de berekening leveren, bleek het niet mogelijk de noodzakelijke bewerkingen tot *schema's* van naar den letter opvolgbare aanwijzingen samen te vatten.

Dit is *niet* het gevolg van b.v. een nog onbevredigenden stand van het *theoretisch* onderzoek, waarvoor *nadere* studie een oplossing zou kunnen brengen, maar van de *veelsoortigheid* der complicatie's en mogelijkheden, waarop men kan stuiten. Men mag verwachten, dat deze door de theoretische grondslagen der ontwikkelde methoden worden *gedekt*, d.w.z. dat de theoretische richtlijnen de oplossing van allerlei toevallige moeilijkheden mogelijk zullen maken, het is echter zonder ontoelaatbare uitvoerigheid *niet* mogelijk, hiermede binnen het kader van gedetailleerde voorschriftenschema's — waaruit ten behoeve van den niet-vakman de theoretische grondslagen *zijn* geëlimineerd — rekening te houden.

In verband met den bovenomschreven stand van zaken is er bij de opstelling van deze verhandeling *juist* naar gestreefd, ook de theoretische grondslagen der rekenmethoden uitvoerig en compleet naar voren te brengen. Het is van essentieel belang, dat men zich hiervan goed op de hoogte stelt, *zij* vormen een onontbeerlijk onderdeel van de beschikbare onderzoekingsmethoden.

Tenslotte moet worden gewezen op een *onvolledigheid*, die in deze verhandeling wordt aangetroffen. Deze bestaat uit het ontbreken van aanwijzingen voor de behandeling van gekoppelde trillingen van boven- en ondervleugel van een *tweedekker*. Hierbij doen zich verschillende bijzondere complicatie's voor, die wellicht later in een aparte verhandeling zullen worden uitgewerkt.

1. Inleiding.

De kritische snelheid van een bepaalden vliegtuigvleugel wordt steeds berekend door den werkelijken vleugel te vervangen door een — onder behoud van de meest essentieele eigenschappen — zooveel mogelijk vereenvoudigd *model* en de berekening voor dit model („vervangingsvleugel") door te voeren. Daarbij moet worden aangenomen, dat op den trillenden modelvleugel luchtkrachten werken, die door een strook-verdeeling onder uitsluiting van inductie kunnen worden ontleend aan berekeningen, die zijn uitgevoerd voor een trillenden *oneindig „breeden"* vleugel in een als tweedimensionaal op te vatten strooming van een onsamendrukbaar medium. Hoewel vanzelfsprekend niet geheel correct, moet deze aanname ook in deze verhandeling bij gebrek aan beter consequent worden aangehouden. *Zij schijnt binnen aannemelijke* grenzen door experimenteele ervaring te worden gedekt, vormt echter tevens het meest-onzekere punt in de heele theorie, dat door een behoorlijke veiligheidsmarge op berekende kritische snelheden in acht moet worden genomen.

Is er ten aanzien van de invoering der luchtkrachten op een trillenden vleugel bij alle berekeningen op het gebied der onstabiele trillingen niet veel keus, zoo is daarentegen een groote variatie mogelijk bij de constructie van den vervangingsvleugel. Een soort catalogiseering van de verschillende mogelijkheden bevat een publicatie van Teichmann: Gedankengänge zur Flatterberechnung (*lit.* 16). Al deze mogelijkheden uit te werken, zou tot een ongewenschte uitvoerigheid leiden, die bovendien overbodig is, daar verschillende mogelijkheden in hoofdzaak aequivalent zijn. Daarom is een keuze gemaakt, welke is gevallen op de meest algemeene werkwijze: de vervanging van den werkelijken vleugel door een model van „voorgeschreven vervormbaarheid". Het ongelimiteerde aantal der vervormingsmogelijkheden van den werkelijken vleugel wordt daarbij vervangen door vervormingen, die bestaan uit een superpositie van een gewoonlijk zeer beperkt aantal evenredig vergrootbare deformatie's van een vastgelegde en geschikt gekozen gedaante.

De bewegingsvergelijkingen van dezen modelvleugel worden vervolgens verkregen met behulp van de methode van Lagrange.

De keuze van de aan het model toe te kennen deformatiemogelijkheden dient vanzelfsprekend zoo te geschieden, dat de vervormingen, die het systeem in werkelijkheid vertoont, zoo goed mogelijk door de *toegelaten* deformatie's beschreven kunnen worden. Deze richtlijn laat echter een zekere mate van vrijheid bij de bedoelde keuze bestaan. Het blijkt mogelijk te zijn op tweeërlei wijze te werk te gaan: men kan buiging en torsie als twee verschillende complexen vervormingsmogelijkheden behandelen en voor ieder apart toegelaten deformatie's definieeren, en men kan de scheiding van buiging en torsie bij de definitie der deformatie-componenten achterwege laten. Beide mogelijkheden zullen worden uitgewerkt. Men verkrijgt in het eerste geval bewegingsvergelijkingen, die kunnen worden opgevat als Galerkinsche vergelijkingen voor een *benaderingsoplossing* van de *exacte* bewegingsvergelijkingen. Op deze wijze toont men aan dat de behandeling van het trillende systeem als systeem van voorgeschreven vervormbaarheid mathematisch overeenkomt met de behandeling van de bewegingsvergelijkingen van het volledige systeem volgens de in de trillingsleer zeer vruchtbaar en nauwkeurig gebleken benaderingsmethode van Galerkin.

In het tweede geval wordt een verdere vereenvoudiging verkregen, wanneer de deformatie-componenten worden aangepast bij z.g. *normaalcoördinaten* van het trillende systeem. Deze vereenvoudiging kan de toepassing der rekenmethoden zeer vergemakkelijken, voorwaarde is dan echter, dat de resultaten van een standtrillingsproef ter beschikking staan. Is dit niet het geval, dan past men de Galerkin'sche methode toe, in plaats van de standtrillingsproef kan dan een analyse van de verdeeling van buig- en torsie-stijfheid over den vleugel worden gesteld.

In het algemeen moet worden vastgesteld, dat het gebruik van materiaal, verkregen door een standtrillingsproef, berekeningen over onstabiele trillingen van den vleugel niet alleen vergemakkelijkt, maar ook betrouwbaarder maakt, zoodat de uitvoering van zoo'n proef, alvorens tot berekeningen wordt overgegaan, nadrukkelijk aanbeveling verdient. Hoewel beide mogelijkheden in het oog zullen worden gehouden, kan in deze verhandeling het geval, dat geen standtrillingsproef is uitgevoerd, niet in alle volledigheid worden uitgewerkt, voornamelijk omdat het niet in de bedoeling ligt, in te gaan op sterkte-berekeningen (analyse van elastische eigenschappen) van den vleugel.

Behalve het eerder genoemde belangrijke verschil, ingevoerd bij de definitie van toe te laten deformatiecomponenten, zullen de uit te werken rekenmethoden onderling verschillen vertoonen, veroorzaakt door verschillende keuze van het *aantal* deformatie-componenten, en/of door de invoering in het model van bepaalde andere deelen van het systeem dan den vleugel, die de trilling mede uitvoeren en soms beïnvloeden (b.v. rompbewegelijkheid en het daarmee samenhangende verschil tusschen symmetrische en antisymmetrische trillingsvormen.)

Wat het rolroer betreft, wordt in den regel aangenomen, dat dit buiten beschouwing kan worden gelaten (als een *vast deel* van den vleugel kan worden opgevat), wanneer het dynamisch gebalanceerd of óver-gebalanceerd is (massabalans). Dit is gewoonlijk het geval. Vanzelfsprekend zijn echter ook rekenmethoden beschreven, die het rolroer als afzonderlijk onderdeel van het systeem in rekening brengen. Zij worden niet alleen toegepast, wanneer het rolroer niet, of onvoldoende, is gebalanceerd, maar oók wanneer het erom gaat, de nauwkeurigheid der uitkomsten voor de kritische snelheid tot den hoogst bereikbaren graad op te voeren.

Wanneer een bepaalde vleugel moet worden onderzocht, kàn de keuze van de meest doelmatige methode op verschillende moeilijkheden stuiten, die men dan aan de hand van daartoe te vermelden richtlijnen moet trachten op te lossen. Daarbij wordt echter *steeds* tevens de *vereischte nauwkeurigheid* mede in overweging genomen. D.w.z. wanneer blijkt, dat een vleugel eigenschappen heeft, die de nauwkeurigheid der uitkomsten van de eenvoudigste, d.i. minst bewerkelijke, rekenmethode nadeelig kunnen beïnvloeden, dan kan deze methode soms *tòch* worden aangehouden, mits onder *doelmatige vergrooting van de veiligheidsmarge*. Zij b.v. de grootste snelheid van een vliegtuig, die om eenigerlei reden als *toelaatbaar* wordt opgevat, 400 km/h, en levert een berekening van de kritische snelheid, verkregen langs eenvoudigen, doch minder doeltreffend te achten weg, een uitkomst van b.v. 800 km/h, dan is het welhaast vanzelfsprekend in den regel overbodig, ten koste van veel werk een *betere benadering* van de kritische snelheid vast te stellen, daar de *marge van 100 %* de verminderde nauwkeurigheid wel altijd volledig dekt. Ware de uitkomst echter 500 km/h, dus aan de grens van de in den regel aan te houden veiligheidsmarge van 25 %, dan moet een verbeterde berekening wenschelijk worden genoemd [1]).

Wat de *bewerkelijkheid* van de berekeningen van kritische snelheden betreft, moet in het algemeen worden vastgesteld, dat de tijd, die de uitwerking eischt, zeer snel toeneemt met het aantal in aanmerking genomen eigenschappen van het trillende systeem. Al kan men daarom *in theorie* de nauwkeurigheid der uitkomsten, afgezien van de onnauwkeurigheid die geïntroduceerd wordt door niet geheel correcte formules voor de luchtkrachten op den vleugel, ongelimiteerd verbeteren, zoo stelt de *eisch der in de praktijk toelaatbare bewerkelijkheid* al gauw een grens aan de rekenmogelijkheden. In deze verhandeling is deze grens in overeenstemming met wat in de theorie der onstabiele trillingen gebruikelijk is geworden, vastgelegd door het voorschrift, dat de „karakteristieke vergelijking" een determinant mag zijn, die ten hoogste van de 3e orde is. Men kan zeggen dat, wanneer dit het geval is, het volledig uitwerken van de oplossing, nadat de *numerieke grondslagen* hiervoor verkregen

---

[1]) Tenzij men zich zekerheid heeft verschaft, dat de uitkomst *te klein* is.

zijn, nog ongeveer 2 tot 8 weken rekenwerk in beslag zal nemen (afhankelijk van de uitvoerigheid, waarin men de eigenschappen der oplossing wenscht vast te stellen). De rekenmachine is bij de uitwerking een onontbeerlijk hulpmiddel. De meer eenvoudige stabiliteitsberekeningen leiden tot een karakteristieke vergelijking, die een determinant van de 2e orde is. In deze gevallen kan de uitwerking in enkele uren tot een paar dagen geschieden, terwijl bovendien meestal van de rekenlineaal i.p.v. de rekenmachine gebruik kan worden gemaakt. Bij de voornoemde tijden moet steeds de tijd worden opgeteld, die noodig is voor de verzameling en uitwerking van het materiaal, waarvan de eigenlijke berekening uitgaat, en waarvoor moeilijk een schatting kan worden opgegeven. Deze voorbereidende werkzaamheden omvatten gewoonlijk een *gewichtsanalyse* van het systeem, en de uitvoering en uitwerking van een *standtrillingsproef*. I.p.v. de laatste kan eventueel ook een analyse van de *elastische eigenschappen (stijfheidsverdeelingen)* van het systeem worden gesteld. Een deel van dit voorbereidende werk kan meestal ook voor andere doeleinden worden gebruikt (onderzoek van de ligging van resonantie-punten, contrôle en beoordeeling van roerbalanceeringen, berekeningen over „omkeering van de rolroerwerking", enz.).

2. Eenige gegevens, ontleend aan de literatuur.

Afgezien van als verouderd op te vatten methoden ter berekening van kritische snelheden bevat de ter beschikking staande literatuur alleen voor de twee meest eenvoudige constructie's van het vleugelsysteem een volledig uitgewerkte oplossingsmethode, n.l. voor den „oneindig breeden" — uitsluitend slag- en draai-bewegingen uitvoerende — vleugel zonder rolroer, en voor een dergelijk systeem mèt bewegelijk aerodynamisch *niet* gebalanceerd rolroer. Beide systemen zijn op verschillende wijzen behandeld, het is echter voldoende de verhandeling van Kassner-Fingado (*lit.* 5) voor het eerste geval, en die van Ellenberger (*lit.* 8 en *lit.* 14) voor het tweede te vermelden. Beide rekenmethoden zijn experimenteel getoetst en in groote trekken correct bevonden. Wat dit betreft verdient vooral het werk van Voigt de aandacht (*lit.* 9, 10 en 15). In àlle moderne beschouwingen wordt de wiskundige formuleering van de luchtkrachten ontleend aan een theorie der instationnaire luchtkrachten op draagvlakken in een twee-dimensionale strooming, welke is opgezet door (Birnbaum en) Wagner (*lit.* 1) en door verschillende anderen is uitgewerkt (*lit.* 2, 5, 7, 8, 17, 18). Meer volledige principiëele aanwijzingen voor de extensie van de bestaande theorie op „werkelijke" vleugelsystemen zijn gegeven door Teichmann (*lit.* 16), echter in een door het ontbreken van iedere uitwerking tamelijk sterielen vorm.

Tenslotte moet als theoretisch belangrijke aanvulling van de meer volledige berekeningsmethoden worden genoemd het onderzoek van de de stabiliteit beheerschende energiebalans van het vleugelsysteem, welk onderzoek is aangevangen door Küssner (*lit.* 3), terwijl het eenvoudigste geval (oneindig breede vleugel zonder rolroer) in een N.L.L.-rapport (V 1237, *lit.* 23) zeer volledig is uitgewerkt.

De belangrijkste aan de literatuur te ontleenen conclusie's zijn:

1o. dat trillingen, die *uitsluitend* bestaan uit òf als buiging, òf als torsie op te vatten vervormingen van den vleugel, òf uit rolroerverdraaiingen alléén, nimmer onstabiel kunnen worden. De kritische trilling bestaat steeds uit door massa-, elastische- en aerodynamische-krachten *gekoppelde* buigings- en torsie-, alsmede eventueel rolroer-trillingen. De eliminatie der koppeling door traagheidskrachten tusschen twee componenten eener trilling schakelt in den regel de mogelijkheid van onstabiliteit eener combinatie van *die 2 componenten alléén* uit (massa-balans van het rolroer!).

2o. De *onstabiliteit, die van praktische beteekenis is*, ontwikkelt zich uit een combinatie der eenvoudigste trillingsvormen van het systeem, d.i. de frequentie van de kritische trilling stemt naar orde van grootte overeen met de laagste, of de beide laagste, buigingseigenfrequentie's van den vleugel (in stilstaande lucht) en met de laagste torsie-eigenfrequentie, zij ligt feitelijk altijd (bij vleugels van de tot nu toe gebruikelijke constructie's) *beneden* de *laatstgenoemde* eigenfrequentie. (Men moet hierbij de onderling onafhankelijke symmetrische en anti-symmetrische trillingen als geheel gescheiden trillingsmogelijkheden opvatten). Een gevolg hiervan is, dat wat de *trillingsvormen* betreft, alléén met die mogelijkheden rekening behoeft te worden gehouden, die bij frequentie's van deze grootte-orde een rol van beteekenis kunnen spelen. Daarom kan een heele reeks van gecompliceerde „hoogere" trillingsvormen van den continu-elastischen vleugel rustig buiten beschouwing worden gelaten.

Bovendien is het goed eraan te herinneren, dat de energiebalans een essentiëel *stabiliteitscriterium* levert, waarvan b.v. een enkele maal gebruik gemaakt zal worden, om uit een reeks benaderingsoplossingen de beste te kiezen.

3. De grondslagen der uit te werken rekenmethoden.

31. De behandeling van het mechanische systeem, dat de vleugel vormt.

De trillingen van den vleugel van een vliegtuig worden tengevolge van steeds aanwezige onderlinge koppelingen, in principe bepaald door de trillings-eigenschappen, die het heele vliegtuig bezit. De verhoudingen zijn het eenvoudigst bij den vrijdragenden éénmotorigen eendekker met relatief zwaren en stijven romp. Alleen in dit geval worden althans de symmetrische trillingen van den vleugel slechts in geringe mate op den zwaren romp overgebracht en maakt men *geen groote fout*, wanneer de romp als een *vaste inklemming* van den vleugel wordt opgevat, waarna de vleugel *op zichzelf* kan worden behandeld (zie ook rapport V1234, *lit.* 22). Voorloopig echter moge deze *onderstelling* (d.i. de romp als vaste vleugel-inklemming) eenvoudigheidshalve worden aangehouden.

Wat de *vervormingsmogelijkheden* van den vleugel betreft, kan men i.v.m. de beperktheid van het gebied der in aanmerking komende frequentie's, steeds aannemen, dat het vleugelprofiel overal *onvervormbaar* is. Daardoor worden de vleugelvervormingen beperkt tot de gebruikelijke *buigingen*

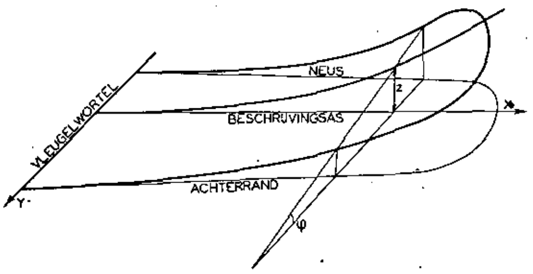


Fig. 1. Coördinaten en algemeene vleugeldeformatie.

en *tordeeringen*, die geen nadere beschrijving behoeven. Een *overigens* willekeurige vervorming van den vleugel kan dan wiskundig worden vastgelegd door twee deformatie-functie's. Men denke zich den vleugel tot een dunne, vlakke plaat geidealiseerd (een vereenvoudiging die bij alle te verrichten onderzoekingen kan worden toegelaten) en brenge in het vleugelvlak coördinaten $x; y$ aan, die worden vastgelegd door de keuze van een beschrijvings-as in het vleugelvlak, die loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig staat. Fig. 1 licht de definitie dezer coördinaten toe. Bij kleine vervormingen verplaatst ieder punt van den vleugel zich in een richting Z, loodrecht op dit vlak, en een willekeurige deformatie kan worden vastgelegd door

1o. een functie $z \equiv z(x)$, die de verplaatsing van de punten van de beschrijvings-as geeft.

2o. een functie $\varphi \equiv \varphi(x)$, die de draaing van de indeformabele *koorden* (profielen!) òm de beschrijvingsas geeft.

De verplaatsing van een willekeurig punt van den vleugel bedraagt, na het aanbrengen van de deformatie's $z = z_1(x)$; $\varphi = \varphi_1(x)$:

$$z_p = z_1(x) - y\,\varphi_1(x) \qquad (1)$$

De functie $\varphi(x)$ kan geacht worden steeds het *torsie-aandeel* eener vleugelvervorming te geven, de functie $z(x)$ geeft echter niet op analoge wijze de buiging, daar de buiging dan (bij gecombineerde buiging en torsie) af zou hangen van de plaats, waar de beschrijvings-as wordt gekozen. Het aandeel *„buiging"* eener vleugelvervorming kan eerst worden bepaald, nadat een as is *gedefinieerd*, waar deze zal worden gemeten. Het is gewoonte hiervoor „de" *elastische as* van den vleugel aan te wijzen, welke as echter, zooals later zal blijken, niet éénduidig en bevredigend vastligt (zie no. 6). Zij echter een „elastische as" in den vorm van een lijn, evenwijdig aan en op een afstand e *achter* de beschrijvings-as aanwezig, dan is het aandeel der buiging in de vervorming $z_1(x)$; $\varphi_1(x)$:

$$z_b(x) = z_1(x) - e\,\varphi_1(x) \qquad (2)$$

De *bewegingsvergelijkingen* van den in een vacuum opgestelden vleugel *zonder rolroer* (dus voor die gevallen, waarin luchtkrachten ontbreken) kunnen, mits ook *materiaaldemping* ontbreekt, hetgeen voorloopig eveneens het geval zij, worden afgeleid uit de Hamilton'sche variatiestelling:

$$\delta \int_0^T (E_{kin} - E_{pot})\,d\tau = 0 \qquad (3)$$

De kinetische energie van den vleugel kan gemakkelijk worden opgeschreven. Men verdeelt den vleugel in smalle strooken (door snijvlakken evenwijdig aan het symmetrievlak van het vliegtuig) en stelt door sommeering over alle strooken vast, dat[1])

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} \int [m(\dot{z} - s\dot{\varphi})^2 + I_\Lambda \dot{\varphi}^2]\,dx \qquad (4)$$

waarbij de integraal wordt uitgestrekt van den vleugel-wortel tot den tip. Deze uitdrukking is van den vorm:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} \int (m_{11}\dot{z}^2 - 2\,m_{12}\,\dot{z}\,\dot{\varphi} + m_{22}\dot{\varphi}^2)\,dx \qquad (5)$$

De coëfficienten zijn dan de navolgende functie's van x:

$$m_{11} \equiv m(x) \;;\quad m_{12} \equiv m(x).s(x) \;;$$
$$m_{22} \equiv I_\Lambda(x) + m(x).s^2(x) \qquad (6)$$

Welke vorm de uitdrukking voor de potentiëele energie (bij willekeurige vervorming) moet worden toegekend, is niet gemakkelijk vast te stellen. Om de gedachten te bepalen zij ondersteld, dat de vleugel twee liggers heeft, die evenwijdig aan de beschrijvings-as loopen, b.v. op afstanden e_v (voorligger) en e_a (achterligger) tot de beschrijvings-as (beide positief gerekend wanneer de beschrijvings-as vóór ligt). Dan bedraagt de *buiging* dezer liggers:

van den voorligger $\quad z_v = z - e_v\,\varphi$

van den achterligger $\quad z_a = z - e_a\,\varphi$

De door deze buigingen in de liggers opgehoopte potentiëele energie zal vermoedelijk in bevredigende benadering kunnen worden voorgesteld door de uitdrukking:

$$(E_{pot})_1 = \tfrac{1}{2} \int B_v(z'' - e_v\varphi'')^2\,dx + \\ + \tfrac{1}{2} \int B_a(z'' - e_a\varphi'')^2\,dx \qquad (7)$$

Bovendien echter worden de liggers zèlf, en de doos, gevormd door beide liggers en de huid ertusschen, *getordeerd*, waarmede men rekening zal kunnen houden door toevoeging van een aandeel in de potentiëele energie:

$$(E_{pot})_2 = \tfrac{1}{2} \int T\,\varphi'^2\,dx \qquad (8)$$

[1]) Zie de notatie-lijst.

De vervorming van andere deelen van den vleugel dan de hierboven genoemde zal men in eerste instantie in aanmerking kunnen nemen door een *toeslag* op de buigstijfheden B_v en B_a van de liggers en op de *torsiestijfheid T van het ligger-huid-systeem*. Voor *vele* vleugels zal men de totale potentiëele energie dus, vermoedelijk in goede benadering, kunnen voorstellen door een uitdrukking:

$$E_{pot}=\tfrac{1}{2}\int(b_{11}z''^2-2\,b_{12}z''\varphi''+ + b_{22}\varphi''^2+T\varphi'^2)dx \qquad (9)$$

waarin men aan de coëfficiënten de navolgende beteekenis kan toekennen:

$$\begin{aligned} b_{11}&=B_v+B_a\\ b_{12}&=e_vB_v+e_aB_a\\ b_{22}&=e_v^2B_v+e_a^2B_a \end{aligned} \qquad (10)$$

mits men zich realiseert dat B_a en B_v buigstijfheden „met toeslag" zijn.

De uitdrukking (9) voor de potentiëele energie zal gewoonlijk worden aangehouden.[1]) Daar, waar zij te onnauwkeurig mocht zijn, ligt een aanvulling voor de hand met integralen van *homogene quadratische functie's* van y' en φ', en/of van y''' en φ''', enz.

Wanneer de liggers niet evenwijdig aan de beschrijvings-as loopen (niet loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig staan), moeten in de uitdrukking voor de potentiëele energie termen van ander karakter worden verwacht, n.l. termen met producten $z'\varphi$; $z''\varphi$; $z''\varphi'$. (Men denke b.v. aan de uitdrukking (7) met *variabele* e's!).

De bewegingsvergelijkingen van den vleugel worden volgens (3), de uitdrukkingen (5) en (9) aanhoudend, verkregen uit de voorwaarde:

$$\tfrac{1}{2}\,\delta\int_0^\tau\!\!\int(m_{11}\dot z^2-2\,m_{12}\dot z\,\dot\varphi+m_{22}\dot\varphi^2-b_{11}z''^2+ +2\,b_{12}z''\varphi''-b_{22}\varphi''^2-T\varphi'^2)dx\,d\tau=0 \quad (11)$$

Men heeft

$$\delta\int_0^\tau E_{kin}d\tau=\int_0^\tau\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot z}\delta\dot z+\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot\varphi}\delta\dot\varphi\right)d\tau=$$

$$=\left|\frac{\partial E_{kin}}{\delta\dot z}\delta z+\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot\varphi}\delta\varphi\right|_0^\tau-\int_0^\tau\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot z}\right)\delta z+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial\dot\varphi}\right)\delta\varphi\right]d\tau \qquad (12)$$

waarin het „stuk tusschen de grenzen" volgens het Hamilton'sche voorschrift (géén variatie voor $\tau=0$ en voor $\tau=\tau$) nul dient te worden gesteld.

De potentiëele energie is (in de uitdrukking (11)) een functie van z'', φ' en φ'', dus:

$$\delta\int_0^\tau E_{pot}d\tau=\int_0^\tau\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial z''}\delta z''+\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi''}\delta\varphi''+\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi'}\delta\varphi'\right)d\tau \qquad (13)$$

De variatie's $\delta z''$, $\delta\varphi''$ en $\delta\varphi'$ moeten in δz en $\delta\varphi$ worden uitgedrukt. Dit geschiedt door de integraal naar x in de formule voor E_{pot} uit te werken:

$$\int\frac{\partial E_{pot}}{\partial z''}\delta z''\,dx=\int(b_{11}z''-b_{12}\varphi'')\delta z''\,dx=$$

$$=\left|(b_{11}z''-b_{12}\varphi'')\delta z'-\frac{d}{dx}(b_{11}z''-\right.$$

$$\left.-b_{12}\varphi'').\delta z\right|_{wortel}^{tip}+\int\frac{d^2}{dx^2}(b_{11}z''-b_{12}\varphi'')\delta z\,dx \qquad (14)$$

$$\int\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi''}\delta\varphi''\,dx=\int(-b_{12}z''+b_{22}\varphi'')\delta\varphi''\,dx=$$

$$=\left|(-b_{12}z''+b_{22}\varphi'')\delta\varphi'-\frac{d}{dx}(-b_{12}z''+\right.$$

$$\left.+b_{22}\varphi'')\delta\varphi\right|_{wortel}^{tip}+\int\frac{d^2}{dx^2}(-b_{12}z''+b_{22}\varphi'').\,\delta\varphi\,dx \qquad (15)$$

$$\int\frac{\partial E_{pot}}{\partial\varphi'}\delta\varphi'\,dx=\int T\varphi'\delta\varphi'\,dx=$$

$$=\left|T\varphi'\delta\varphi\right|_{wortel}^{tip}-\int\frac{d}{dx}(T\varphi')\,\delta\varphi\,dx \qquad (16)$$

Uit (11) volgt, in verband met (12) t/m (16), na bovendien (5) in (12) te hebben ingevoegd:

$$-\int_0^\tau\frac{d}{d\tau}\int(m_{11}\dot z-m_{12}\dot\varphi)\delta z\,dx\,d\tau-$$

$$-\int_0^\tau\frac{d}{d\tau}\int(-m_{12}\dot z+m_{22}\dot\varphi)\delta\varphi\,dx\,d\tau-$$

$$-\int_0^\tau\!\!\int\frac{d^2}{dx^2}(b_{11}z''-b_{12}\varphi'')\delta z\,dx\,d\tau-$$

$$-\int_0^\tau\!\!\int\frac{d^2}{dx^2}(-b_{12}z''+b_{22}\varphi'')\delta\varphi\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0\!\!\int\frac{d}{dx}(T\varphi')\delta\varphi\,dx\,d\tau-$$

$$-\int_0^\tau\left|(b_{11}z''-b_{12}\varphi'')\,\delta z'-\frac{d}{dx}(b_{11}z''-b_{12}\varphi'')\delta z+\right.$$

$$+(-b_{12}z''+b_{22}\varphi'')\delta\varphi'-$$

$$\left.-\frac{d}{dx}(-b_{12}z''+b_{22}\varphi'')\delta\varphi-T\varphi'\delta\varphi\right|_{wortel}^{tip}.d\tau=0$$

In verband met de willekeur der variatie's en van het interval τ worden hieruit de *bewegingsvergelijkingen:*

$$-m_{11}\ddot z+m_{12}\ddot\varphi-\frac{d^2}{dx^2}(b_{11}z''-b_{12}\varphi'')=0 \qquad (17)$$

---

1) Ook wanneer de berekeningen later toegespitst worden op de berekening van kritische snelheden, zal de onderstelling, dat de potentiëele energie wordt gegeven door een uitdrukking van het type (9), worden *aangehouden*. Dit geschiedt echter ook dan eigenlijk alleen om volledig bepaalde, en in veel gevallen *direct bruikbare* uitdrukkingen te verkrijgen. De *geldigheid* der te beschrijven methoden als geheel wordt er echter *in geenen deele* door *beperkt*. De elastische grootheden zullen later door gebruik te maken van *metingsresultaten* van de standtrillingsproef uit de formules worden verwijderd, en dit gelukt op later te beschrijven wijze, van *welken vorm de uitdrukking voor de potentiëele energie ook is* (mits zij binnen het kader der lineaire elasticiteitstheorie blijft vallen).

$$m_{12}\ddot{z} - m_{22}\ddot{\varphi} - \frac{d^2}{dx^2}(-b_{12}z'' + b_{22}\varphi'') + $$
$$+ \frac{d}{dx}(T\varphi') = 0 \qquad (18)$$

gewonnen, tezamen met de navolgende *randvoorwaarden* [1]) voor de functie's z en φ:

aan den vleugelwortel $(x=0)$:
$$z=0; \quad z'=0; \quad \varphi=0; \quad \varphi'=0 \qquad (19)$$
aan den vleugeltip $(x=b)$:
$$z''=0; \quad \varphi''=0; \quad b_{11}z''' - b_{12}\varphi''' = 0;$$
$$T\varphi' + b_{12}z''' - b_{22}\varphi''' = 0$$
Daarmede zijn de vergelijkingen, die de *vrije bewegingen* van den *in een vacuum* opgestelden vleugel zonder rolroer beheerschen, afgeleid. Men vindt voor de simultane partiëele vergelijkingen (17) en (18) gemakkelijk de *interpretatie*, dat (17) de som der krachten op een *smalle strook* van den vleugel geeft, en dat (18) de som der momenten op die strook om de beschrijvings-as nul stelt.

Het is duidelijk, dat eventueele luchtkrachten (vleugel in luchtstrooming) in (17) en (18) kunnen worden ingevoerd, door de nullen in de rechterleden te vervangen door Lagrange'sche *arbeidsfactoren K*, resp. *M* van de luchtkrachten. Een tweede noodzakelijke generalisatie, n.l. de invoering van de materiaaldemping, kan op een later te noemen wijze gemakkelijk worden verkregen. De mogelijkheid, dat ook bewegingen van een rolroer moeten worden beschreven, blijft voorloopig buiten beschouwing.

De als exact op te vatten vergelijkingen (17) en (18) hebben het bekende bezwaar, dat de uitwerking van eveneens exacte oplossingen praktisch onmogelijk is. Het is noodzakelijk, naar een benaderings-methode om te zien. Hiervoor zal, zooals reeds is vermeld, de zeer effectieve Galerkin'sche worden gebruikt. Voor een bespreking van het beginsel, waarop deze methode berust, van de verwantschap met andere methoden (Ritz'sche methode, kleinste quadraten, enz.), en voor een onderzoek van de convergentie naar de exacte oplossing, moet worden verwezen naar de desbetreffende literatuur (*lit.* 11, 12 en 13). Hier moge worden volstaan met de navolgende omschrijving:

De algemeene oplossing van de vergelijkingen (17), (18) is een ongedempte samengestelde trilling, die in het meer algemeene geval, dat b.v. ook (lineaire) luchtkrachten op het systeem werken, in een gedempte overgaat. Men stelt ter oplossing steeds, voor de eventueel gedempte harmonische componenten van de trilling de gebruikelijke complexe notatie toepassend [2]),
$$z = \bar{z}_0 e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad (\bar{z}_0 \equiv \bar{z}_0(x)) \qquad (20)$$
$$\varphi = \bar{\varphi}_0 e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad (\bar{\varphi}_0 \equiv \bar{\varphi}_0(x)) \qquad (21)$$
en verkrijgt door substitutie in (17) en (18) twee gewone simultane differentiaalvergelijkingen voor de functie's $\bar{z}_0(x)$ en $\bar{\varphi}_0(x)$, die geïntegreerd moeten worden onder inachtname van randvoorwaarden van het type (19). De *oplossing* bestaat uit een (oneindige) serie *eigenwaarden* voor den parameter $\bar{\nu}^2$, die in de vergelijkingen na verwijdering van de variabele τ blijft optreden, en een bijbehoorende (oneindige) serie *eigenfunctie's*. De eigenwaarden leveren de *eigenfrequentie's* van den vleugel, de eigenfunctie's de bijbehoorende *trillingsvormen*, d.i. de trillingsvormen van de reeks der harmonische (event. gedempte) componenten van de algemeenste trilling van den vleugel.

Men stelt nu volgens Galerkin:
$$\bar{z}_0 = \Sigma\, \bar{q}_{io} z_i \qquad \bar{\varphi}_0 = \Sigma\, \overline{Q}_{ko} \varphi_k$$
$$(i = 1 \ldots m; \; k = 1 \ldots n) \qquad (22)$$
waarin de functie's z_i en φ_k een *beperkt* systeem functie's vormen die de randvoorwaarden zooveel mogelijk bevredigen (d.i. die in ieder geval aan de randvoorwaarden bij den vleugelwortel, en bij voorkeur ook aan die voor den vleugeltip voldoen). Het is de bedoeling, met de reeksen (22) de *trillingsvormen* door juiste keuze van de waarden der $\bar{q}_{io}$'s en $\overline{Q}_{ko}$'s, zoo goed mogelijk voor te stellen, d.i. de exacte oplossing *te benaderen*. Voordat de Galerkin'sche voorschriften worden genoemd, moge worden vermeld, dat, voor zoover het mogelijk mocht zijn, een eigentrillingsvorm *exact* door de reeksen (22) voor te stellen, de Galerkin'sche methode voor *die* eigentrilling ook inderdaad deze exacte oplossing levert. Zij levert dan bovendien precies de juiste bijbehoorende *eigenfrequentie*. Een principiëel punt is ook, dat de methode slechts voor hoogstens zooveel eigentrillingen van het systeem een benadering kan leveren, als er lineair onafhankelijke termen in de reeksen (22) worden opgenomen. Dit is echter juist in het gegeven geval geen bezwaar, daar de frequentie van de onstabiele vleugeltrilling steeds laag is, zóó laag, dat hoogere trillingsvormen van den vleugel nauwelijks een merkbare rol kunnen spelen. Op grond hiervan kan bij voorbaat worden verwacht, dat het bij praktische toepassing toelaatbaar zal zijn, met zeer korte reeksen (b.v. van ieder 1 of 2 termen) reeds nauwkeurige resultaten te verkrijgen, mits slechts wordt zorg gedragen dat de functie's z_i en φ_i, die worden gebruikt, zoo geschikt mogelijk gekozen worden. Men kan bij deze keuze met voordeel gebruik maken van alle kennis van de door de reeksen voor te stellen trillingsvormen, die men bezit (b.v. de resultaten eener trillingsproef!).

De vergelijkingen, die de berekening van de constanten $\bar{q}_{io}$ en $\overline{Q}_{ko}$ in de reeksen (22), en van de eigenfrequentie's $\bar{\nu}_k^2$, mogelijk maken, verkrijgt men volgens het voorschrift van Galerkin, door de uitdrukkingen (22) in de vergelijkingen (17) en (18) te substitueeren [1]), de eerste daarna achtereenvolgens met z_1; z_2; .. z_m en de tweede achtereenvolgens met φ_1; φ_2; .. φ_n te vermenigvuldigen en tenslotte de $m + n$ uitdrukkingen, die zoo ontstaan, over den heelen vleugel geïntegreerd, *nul* te stellen, waardoor zij overgaan in $m + n$ lineaire homogene vergelijkingen voor de $m + n$ onbekenden $\bar{q}_{io}$;

1) Deze randvoorwaarden zorgen ervoor, dat het „stuk tusschen de grenzen" nul is, zooals verlangd wordt. Dit kan echter op verschillende manieren worden bereikt en het te noemen stelsel is dat, wat de aan den wortel vast ingeklemden en aan den tip vrijen vleugel beschrijft.

2) Hetgeen mogelijk is, omdat de vergelijkingen lineair zijn.

1) *Nadat* hieruit door substitutie van (20) en (21) de tijd als variabele verwijderd is.

$\overline{Q}_{ko}$. De gelijk 0 gestelde coëfficiënten-determinant levert de eigenfrequentie's $\bar{\nu}_h^2$ de vergelijkingen zelf bij iederen wortel $\bar{\nu}_h^2$ de $\bar{q}_{io}$'s en $\overline{Q}_{ko}$'s van den bijbehoorenden trillingsvorm.

De Galerkin'sche vergelijkingen, die hierboven werden aangeduid als mathematische benaderingsmethode van een reeks der oplossingen van de simultane vergelijkingen (17) en (18), kunnen ook langs meer directen weg worden verkregen, waardoor bovendien de mechanische beteekenis overzichtelijker wordt. Bedoeld wordt de *aequivalentie* van de Galerkin'sche *benaderingsmethode* met de *exacte* behandeling van het door beperking der vormveranderingsmogelijkheden vereenvoudigde mechanische systeem. Men stelle, dat de vleugel niet *willekeurig* kan vervormen, doch dat zich slechts zulke vormveranderingen kunnen voordoen, als door lineaire superpositie van een beperkt aantal elementaire, van te voren bekende deformatie's kunnen worden opgebouwd, daarbij echter de vervormingen z en φ als *afzonderlijke* complexen van elementaire deformatie's behandelend.

Het is duidelijk, dat, wanneer de „toegelaten" vervormingen zóó worden gekozen, dat zij de vervormingen die — b.v. bij de in aanmerking komende frequentie's — in het vrije systeem zouden optreden, exact, of met onbeteekenende wijzigingen mogelijk maken, de ingevoerde beperking nauwelijks invloed kan hebben op te berekenen resultaten.

Laat nu de toegelaten elementaire deformatie (deformatie-*componenten*) van het systeem worden vastgelegd door de — geschikt gekozen — deformatiefunctie's

$$\left.\begin{aligned} z &= z_1(x); = z_2(x); \;\ldots = z_m(x) \\ \varphi &= \varphi_1(x); = \varphi_2(x); \ldots. = \varphi_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

voor vervormingen z en φ afzonderlijke componenten-reeksen invoerend. Daar de exacte behandeling leert, dat *alle* vleugeldeformatie's, mathematisch gedefiniëerd, voldoen aan de randvoorwaarden (19), ligt het voor de hand dat het doelmatig is zorg te dragen, dat ook de functie's (23) deze voorwaarden bevredigen. De algemeenste door het systeem (23) toegelaten deformatie is

$$z = \Sigma q_i z_i \qquad \varphi = \Sigma Q_k \varphi_k \qquad (24)$$

waarin de q_i's en Q_k's eventueel van den tijd afhankelijke „*gegeneraliseerde dimensielooze coördinaten*" zijn.

Volgens (5) wordt de kinetische energie van den bewegenden vleugel met beperkte vormveranderingsmogelijkheid

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int [m_{11}(\Sigma \dot{q}_i z_i)^2 - 2\, m_{12}(\Sigma \dot{q}_i z_i)(\Sigma \dot{Q}_k \varphi_k) + \\ + m_{22}(\Sigma \dot{Q}_k \varphi_k)^2]\, dx$$

en de potentiëele volgens (9)

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}\int [b_{11}(\Sigma q_i z_i'')^2 - 2 b_{12}(\Sigma q_i z_i'')(\Sigma Q_k \varphi_k'') + \\ + b_{22}(\Sigma Q_k \varphi_k'')^2 + T(\Sigma Q_k \varphi_k')^2]\, dx$$

Vormt men nu, de q_i's en Q_k's als gegeneraliseerde coördinaten opvattend, de bewegingsvergelijkingen van Lagrange (voor den dempingsvrijen, in vacuum opgestelden, vleugel zonder rolroer)

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} = 0 \qquad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{Q}_k}\right) + \frac{\partial E_{pot}}{\partial Q_k} = 0$$

dan bestaat het resultaat uit de navolgende $m + n$ vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} &\int z_g [m_{11} \Sigma \ddot{q}_i z_i - m_{12} \Sigma Q_k \ddot{\varphi}_k]\, dx + \\ &\quad + \int z_g''[b_{11} \Sigma q_i z_i'' - b_{12} \Sigma Q_k \varphi_k'']\, dx = 0 \\ &\hspace{12em} g = 1 \ldots. m \\ &\int \varphi_h [- m_{12} \Sigma \ddot{q}_i z_i + m_{22} \Sigma \ddot{Q}_k \varphi_k]\, dx + \\ &\quad + \int \varphi_h'' [- b_{12} \Sigma q_i z_i'' + b_{22} \Sigma Q_k \varphi_k'']\, dx + \\ &\quad + \int \varphi_h' T \Sigma Q_k \varphi_k'\, dx = 0 \qquad h = 1 \ldots. n. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

In deze vergelijkingen kunnen ook luchtkrachten desgewenscht door bemiddeling van arbeidsfactoren worden ingevoerd. Stelt men

$$q_i \equiv \bar{q}_i = \bar{q}_{io}\, e^{i\bar{\nu}\tau}; \; Q_k \equiv \overline{Q}_k = \overline{Q}_{ko}\, e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad (26)$$

en bedenkt men, dat termen met producten $z_g''\, z_i''$, $z_g''\, \varphi_k''$, enz. door partiëele integratie onder gebruik van de randvoorwaarden (19) (mits het systeem (23) daaraan voldoet) kunnen worden omgevormd naar analogie van de bewerkingen (14) ... (16), dan *verifiëert* men, dat hét stelsel vergelijkingen *(25) exact overeenstemt met* de *Galerkin*'sche vergelijkingen voor de differentiaalvergelijkingen (17) en (18) met (22), wanneer de Galerkin'sche aanname (22) in overeenstemming met (24) wordt gekozen. De Galerkin'sche vergelijkingen zijn dus de exacte bewegingsvergelijkingen van het door inperking der deformatiemogelijkheden onder scheiding van buiging en torsie vereenvoudigde mechanische systeem. In het vervolg zal de *laatste* werkwijze steeds worden toegepast voor het winnen van de vergelijkingen, waaruit de te construeeren *benaderingen worden afgeleid.*

De vergelijkingen (25) bevatten de navolgende symmetrie-eigenschap:

De coëfficiënten van de „amplitude" Q_{k_o} in het eerste stel dezer vergelijkingen (waarin (26) gesubstitueerd gedacht wordt) luiden

$$m_{12}\, \bar{\nu}^2 \int z_g \varphi_k\, dx - \int b_{12}\, z_g''\, \varphi_k''\, dx \;\; ; \;\; g = 1 \ldots m \quad (27)$$

en de coëfficiënten van de „amplitude" $\bar{q}_{go}$ in het tweede stel:

$$m_{12}\, \bar{\nu}^2 \int z_g \varphi_h\, dx - \int b_{12}\, z_g''\, \varphi_h''\, dx \; ; \; h = 1 \ldots n. \quad (28)$$

Zij stemmen overeen wanneer $h = k$, waaruit men concludeert, dat *alle coëfficiënten,* waarin kruisproducten $z_a \cdot \varphi_b$; $z_a'' \cdot \varphi_b''$ optreden, in de vergelijkingen 2 × voorkomen. Deze symmetrie-eigenschap blijft in gegeneraliseerden vorm behouden, welken (mits quadratischen) vorm de uitdrukking voor de potentiëele energie ook heeft, zij geldt dus niet alleen voor den specialen *ondersteIden* vorm (9).

Overeenkomstig het in de inleiding beschreven programma zal vervolgens worden aangetoond, hoe een verdere vereenvoudiging van de bewegingsvergelijkingen van het systeem kan worden verkregen door een generalisatie van de methode van de beperking der vervormingsmogelijkheden.

Deze generalisatie bestaat uit de verwijdering van het voorschrift, dat de vervormingen z en φ als gescheiden complexen deformatie-componenten moeten worden behandeld.

Men stelle dienovereenkomstig, dat de *deformatie-componenten* worden gedefinieerd door de *paren* functie's.

$$(z_1, C_1\varphi_1)\,;\,(z_2, C_2\varphi_2)\,;\,\ldots\ldots(z_n, C_n\varphi_n) \quad (29)$$

waarin *constanten* $C_1 \ldots . C_n$ worden opgenomen om de functie's z_i, φ_k zoo noodig op willekeurig voor te schrijven wijze te kunnen normeeren.[1]) De algemeenste deformatie van het systeem wordt ditmaal gedefiniëerd door

$$z = \Sigma q_i z_i \quad \varphi = \Sigma q_k C_k \varphi_k \quad i, k = 1 \ldots . n. \quad (30)$$

Daarmede wordt volgens (5), resp. (9):

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int [\, m_{11}(\Sigma \dot{q}_i z_i)^2 - 2\, m_{12}(\Sigma \dot{q}_i z_i)(\Sigma \dot{q}_k C_k \varphi_k) + m_{22}(\Sigma \dot{q}_k C_k \varphi_k)^2]\, d\,x \quad (31)$$

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}\int [\, b_{11}(\Sigma q_i z_i'')^2 - 2\, b_{12}(\Sigma q_i z_i'')(\Sigma q_k C_k \varphi_k'') + b_{22}(\Sigma q_k C_k \varphi_k'')^2 + T(\Sigma q_k C_k \varphi_k')^2]\, d\,x \quad (32)$$

Voert men de afkortingen in:

$$U_{ig} = \int [\, m_{11} z_i z_g - m_{12} z_g C_i \varphi_i - m_{12} z_i C_g \varphi_g + m_{22} C_g \varphi_g C_i \varphi_i]\, d\,x = U_{gi} \quad (33)$$

$$V_{ig} = \int [\, b_{11} z_i'' z_g'' - b_{12} z_g'' C_i \varphi_i'' - b_{12} z_i'' C_g \varphi_g'' + b_{22} C_g \varphi_g'' C_i \varphi_i'' + T\, C_g \varphi_g' C_i \varphi_i']\, d\,x = V_{gi} \quad (34)$$

dan blijken de bewegingsvergelijkingen volgens Lagrange den navolgenden vorm aan te nemen

$$\sum_i U_{gi} \ddot{q}_i + \sum_i V_{gi} q_i = 0 \qquad i = 1 \ldots . n. \quad (35)$$

welke na substitutie van

$$q_i \equiv \bar{q}_i = \bar{q}_{io}\, e^{i\nu\tau} \quad (36)$$

overgaan in lineaire homogene vergelijkingen

$$\Sigma\,(V_{gi} - \nu^2 U_{gi})\, \bar{q}_{io} = 0 \quad (37)$$

Ook in de vergelijkingen (35) en (37) kunnen luchtkrachten door bemiddeling van arbeidscoëfficiënten worden ingevoerd.

Een vereenvoudiging van beteekenis bevatten de vergelijkingen (35), vergeleken bij de vergelijkingen (25) feitelijk *niet*. Integendeel: *op zichzelf* zijn zij *onbruikbaar*, daar men niet beschikt over richtlijnen voor een juiste keuze van de constanten C_i in (29). *Daarom* is een essentiëele voorwaarde voor het gebruik van de vergelijkingen (35), dat de resultaten eener standtrillingsproef bekend zijn. Dat zij *dan* de berekening belangrijk vereenvoudigen, berust op de omstandigheid, dat zij n eigentrillingen van den vleugel *exact* kunnen beschrijven, wanneer n deformatiecomponenten (29) *precies juist* zijn gekozen. Hetzelfde presteeren de vergelijkingen (25) eerst, wanneer in het algemeen $2n$ deformatiecomponenten geheel doeltreffend zijn geconstrueerd.

Wanneer de deformatie-*componenten* in de *algemeenste* toegelaten deformatie's

$$\bar{z}_o = \Sigma \bar{q}_{io} z_i; \quad \bar{\varphi}_o = \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k; \quad i, k = 1 \ldots . n \quad (38)$$

exact overeenkomen met n *eigentrillingsvormen*

$$\nu = \nu_i \qquad \bar{z}_{io} = z_i \qquad \bar{\varphi}_{io} = C_i \varphi_i \qquad i = 1 \ldots . n \quad (39)$$

van het systeem, verkrijgen de vergelijkingen (35) de navolgende bijzonder eenvoudige gedaante:

$$U_{ii} \ddot{q}_i + V_{ii} q_i = 0 \qquad i = 1 \ldots . n \quad (40)$$

d.w.z. alle U_{ik} en V_{ik} worden *nul* wanneer $i \neq k$.

Deze vergelijkingen hebben nog meer dan de vergelijkingen (35) slechts *formeele* beteekenis, wanneer het erom gaat de eigenschappen van het trillende systeem uit zijn „primitieve eigenschappen" af te leiden.

Het ietwat overbodige bewijs, dat

$$U_{ik} = 0 \text{ en } V_{ik} = 0 \text{ wanneer } i \neq k \text{ is} \quad (41)$$

en het stelsel deformatie's (29) de door (39) geformuleerde eigenschap heeft, kan explicite als volgt worden geleverd.

Volgens de exacte bewegingsvergelijkingen (17) en (18), waarvan het systeem functie's z_i en φ_i in (29) eveneens bij onderstelling *exacte* oplossingen vormen, is:

$$\nu_i^2 (m_{11} z_i z_k - m_{12} C_i \varphi_i z_k) - z_k \frac{d^2}{d\,x^2}(b_{11} z_i'' - b_{12} C_i \varphi_i'') = 0$$

$$\nu_i^2 (- m_{12} z_i C_k \varphi_k + m_{22} C_i \varphi_i C_k \varphi_k) - C_k \varphi_k \frac{d^2}{d\,x^2}(- b_{12} z_i'' + b_{22} C_i \varphi_i'') + C_k \varphi_k \frac{d}{d\,x}(T\, C_i \varphi_i') = 0$$

Tel beide vergelijkingen op en integreer over den heelen vleugel. Het resultaat is

$$\nu_i^2 U_{ik} = \int [\, z_k \frac{d^2}{d\,x^2}(b_{11} z_i'' - b_{12} C_i \varphi_i'') + C_k \varphi_k \frac{d^2}{d\,x^2}(- b_{12} z_i'' + b_{22} C_i \varphi_i'') - C_k \varphi_k \frac{d}{d\,x}(T\, C_i \varphi_i')]\, d\,x$$

Door partiëele integratie verifiëert men, van de randvoorwaarden gebruik makend, die voor de functie's z_i en φ_k moeten worden gesteld, (zie (19)), dat het rechterlid juist gelijk is aan V_{ik}.

Dus is $\qquad \nu_i^2 U_{ik} = V_{ik}$

en ook $\qquad \nu_k^2 U_{ki} = V_{ki}$

waaruit i.v.m. $U_{ik} = U_{ki}$ en $V_{ik} = V_{ki}$ (zie (33) en (34)), het gestelde (41) direct volgt.

32. De invoering van materiaaldemping.

In rapport V1234 (*lit.* 22) wordt aangetoond, dat materiaaldemping, gedacht in den vorm van een elliptische hysteresisdemping, wanneer de trilling van het systeem in den complexen vorm (26) wordt geschreven, in de vergelijkingen kan worden

1) Hoewel ook andere opvattingen mogelijk zijn, verdient het aanbeveling aan de functie's z_1, $z_2 \ldots .$ de dimensie van *lengten* toe te kennen, waarna φ_1, $\varphi_2 \ldots .;$ C_1, $C_2 \ldots .$ en q_1, $q_2 \ldots .$ dimensieloos gesteld kunnen worden.

ingevoerd door alle veerconstanten met complexe constanten $e^{i\alpha}$ te vermenigvuldigen, waarin α de voorloop-hoek is van de elastische kracht t.o.v. de vormverandering van de betreffende veer. In het gegeven geval worden de continu-verdeelde elastische krachten voorgesteld door uitdrukkingen van den vorm (verg. (17) en (18))

$$\frac{d^2}{dx^2}(b_{11}z'')\ldots\ldots\frac{d}{dx}(T\varphi')\ ,$$

zoodat de demping nu op geschikt te achten wijze zal kunnen worden ingevoerd, door de buig-stijfheden (b_{11}, b_{12} en b_{22}) met een complexe *constante* exp. $i\alpha_B$ en de torsiestijfheid T met exp. $i\alpha_T$ te vermenigvuldigen α_B is dan de dempingshoek op buigingstrillingen, terwijl de demping op torsietrillingen *mede* door α_T wordt bepaald. Deze werkwijze *kan en zal in den regel* worden aangehouden. Opgemerkt moet echter worden, dat het niet altijd doelmatig is, de „hoeken" α_B en α_T als *constanten* te behandelen. In het algemeen zou n.l. blijken, dat de demping op vleugeltrillingen afhangt van de *amplitude*, en soms van de frequentie. Met deze mogelijkheid zal men soms rekening moeten houden.

33. **De invoering van luchtkrachten.**

Op een smalle strook (breedte Δx) van een oneindig breeden vleugel zonder rolroer, *die een harmonische trilling uitvoert*, waarbij verticale verplaatsingen evenwijdig aan zichzelf, gesuperponeerd op draai-bewegingen, optreden, werken bij kleine amplituden eveneens harmonische, lineair van de amplituden afhankelijke luchtkrachten. Men *berekent* [1]) (zie b.v. *lit.* 5) dat deze luchtkrachten in twee groepen kunnen worden gesplitst; de krachten en momenten van de eerste groep kunnen worden opgevat als zuivere *traagheidswerkingen* van meetrillende lucht, die der tweede groep kunnen worden samengevat in van de stroomsnelheid afhankelijke krachten K_v en K_a, loodrecht op het vleugelvlak en aangrijpend resp. in het voorste en in het achterste neutrale punt van de strook. De krachten der eerste groep hangen *niet* af van de snelheid der luchtstrooming, zij kunnen steeds (binnen het kader der theorie) *exact* worden berekend uit de *aanname*, dat de lucht binnen de den vleugel omschreven cylinder als een vast aan den vleugel verbonden massa meetrilt. In de praktijk kan men *deze* krachten dan ook ten volle in rekening brengen door een gemakkelijk te bepalen (zie later, ook rapport V.1234, *lit.* 22) toeslag op de vleugelmassa en op het traagheidsmoment, alsmede door een geringe wijziging van de zwaartepuntsligging van den vleugel.

De krachten K_a en K_v hangen wel af van de stroomsnelheid v (vliegsnelheid), de formules kunnen echter met voordeel zoo worden geschreven, dat deze parameter uitsluitend in de combinatie $\frac{v}{\nu t}$ optreedt, welke breuk *gereduceerde snelheid* wordt genoemd (te noteeren: V). Men heeft (zie b.v. rapport V1237, *lit.* 23, formules (4) en (5)) in de complexe schrijfwijze: [2])

[1]) voor het geval dat het medium incompressibel is.

[2]) Men bedenke, dat $\bar{\varphi}=\bar{\varphi}_0 e^{i\nu\tau}$, $\bar{z}_a=(\bar{z}_a)_0 e^{i\nu\tau}$ is.

$$\overline{K}_a=m_L.\nu^2.iV.\bar{\varphi}t.\Delta x \tag{42}$$

$$\overline{K}_v=m_L\nu^2(-4iV\overline{P}\bar{z}_a+\bar{\varphi}t.4V^2\overline{P}).\Delta x \tag{43}$$

waarin $\overline{P}$ een gecompliceerde complexe functie van V alléén is, wier waarden het best aan tabellen kunnen worden ontleend. In deze formules is de vleugelbeweging vastgelegd gedacht door de verticale verplaatsingen z_a van het achterste neutrale punt en door de draaingen φ. Het product $m_L\Delta x$ is de massa van de lucht in de bij de beschouwde strook behoorende dunne schijf van den omschreven cylinder, d.i.

$$m_L\Delta x=\frac{\pi}{4}\varrho t^2.\Delta x.$$

Gesteld wordt, dat de bovengenoemde, op een strook van den oneindig breeden vleugel werkende luchtkrachten onveranderd mogen worden overgebracht op strooken van een willekeurigen vleugel (zonder rolroer).

In den regel zullen de krachten, die uit traagheidswerkingen van de meetrillende lucht bestaan, in de formules worden ingevoerd door de eerder genoemde verandering van de massa en massaverdeeling van den vleugel, d.i. door wijziging van de coëfficiënten m_{11}, m_{12} en m_{22} in de uitdrukking (5) voor de kinetische energie. Schrijft men ter onderscheiding voor de (oude) coëfficiënten *zonder toeslag* $(m_{11})_0$, $(m_{12})_0$ en $(m_{22})_0$, dan worden de nieuwe waarden, wanneer c_m de afstand voorstelt van het *midden van de koorde* van een strook van den vleugel tot de beschrijvings-as (c_m positief wanneer de beschrijvings-as vóór ligt)

$$m_{11}=(m_{11})_0+m_L \tag{44}$$

$$m_{12}=(m_{12})_0+m_Lc_m \tag{45}$$

$$m_{22}=(m_{22})_0+m_L(\tfrac{1}{8}t^2+c_m^2)\ ^{1)} \tag{46}$$

met

$$m_L=\frac{\pi}{4}\varrho t^2 \tag{47}$$

In het algemeen zijn t en c_m natuurlijk (evenals de m_0's) functie's van x.

De krachten K_a en K_v ((42) en (43)) worden als volgt behandeld:

Wanneer c_a de afstand is van het achterste neutrale punt van een smalle strook van den vleugel tot de beschrijvings-as (c_a positief, als de beschrijvings-as vóór ligt), dan is

$$\bar{z}_a=\bar{z}-c_a\bar{\varphi}\quad\text{(vergelijk (1))}$$

Dus:

$$\overline{K}_a=m_L\Delta x.\nu^2.iV\bar{\varphi}t=\bar{a}_{12}\bar{\varphi}.\Delta x \tag{48}$$

$$\overline{K}_v=m_L\Delta x.\nu^2[-4iV\overline{P}\bar{z}+4V\overline{P}(Vt+ic_a)\bar{\varphi}]=$$
$$=(\bar{a}_{21}\bar{z}+\bar{a}_{22}\bar{\varphi}).\Delta x \tag{49}$$

met

$$\bar{a}_{12}=m_L.\nu^2.iVt \tag{50}$$

$$\bar{a}_{21}=-m_L\nu^2.4iV\overline{P}$$
$$\bar{a}_{22}=4m_L\nu^2V\overline{P}(Vt+ic_a) \tag{51}$$

[1]) Want het traagheidsmoment van de lucht binnen een dunne schijf van den omschreven cylinder om een as, door zijn zwaartepunt (d.i. door het midden van de koorde) evenwijdig aan de beschrijvings-as, bedraagt per breedte-eenheid

$$\frac{1}{32}\pi\varrho t^4=\tfrac{1}{8}m_Lt^2.$$

Door deze formules worden de krachten K_a en K_v uitgedrukt in de trilling $\bar{z}$ van de beschrijvingsas, en in de torsietrilling $\bar{\varphi}$ om deze as.

De verplaatsingen van het aangrijpingspunt van K_v zijn:

$$z_v = z - c_v \varphi \tag{52}$$

De virtueele verandering van de uitwijking z_v bij een kleine virtueele wijziging δz van de functie z bedraagt dus:

$$\delta z_v = \delta z \tag{53}$$

en evenzoo $\qquad \delta z_a = \delta z$

Ondergaat (i.p.v. z) φ een kleine virtueele wijziging, dan wordt

$$\delta z_v = - c_v \delta \varphi \tag{54}$$

$$\delta z_a = - c_a \delta \varphi$$

Schrijf in aansluiting hierop voor den virtueelen arbeid, die de op een strook met de breedte *één* van den vleugel werkende luchtkrachten K_a en K_v verrichten bij de verplaatsingen δz, resp. $\delta\varphi$:

$$\begin{aligned}(\delta A)_1 &= \overline{K}_a \delta z_a + \overline{K}_v \delta z_v \\ &= (\overline{K}_a + \overline{K}_v)\,\delta z \\ &= \delta z\,[\bar{a}_{21}\bar{z} + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{22})\,\bar{\varphi}]\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}(\delta A)_2 &= -(c_v \overline{K}_v + c_a \overline{K}_a)\,\delta\varphi \\ &= -\delta\varphi\,[c_v \bar{a}_{21}\bar{z} + (c_a \bar{a}_{12} + c_v \bar{a}_{22})\,\bar{\varphi}]\end{aligned} \tag{56}$$

Deze uitdrukkingen zijn in het algemeen *onjuist*, omdat de formules (48) en (49) voor de luchtkrachten alleen juist zijn in het *speciale geval*, dat het systeem een harmonische trilling uitvoert. Leidt men dus uit de uitdrukkingen (55) en (56) Lagrange'sche arbeidsfactoren af voor de luchtkrachten, dan verkrijgt men een resultaat, dat alleen dan strikt correct kan zijn, wanneer de *oplossing* van de bewegingsvergelijkingen *juist* een harmonische trilling is (hetgeen in het algemeen natuurlijk geenszins het geval is: de oplossing is in den regel een positief of negatief gedempte trilling). Daar echter de *kritische* trillingen van een systeem juist overeenkomen met *harmonische oplossingen* van de bewegingsvergelijkingen, kunnen de eigenschappen van de kritische trilling (en ook de *kritische snelheid) exact'* worden berekend, uitgaande van bewegingsvergelijkingen met dergelijke niet geheel juiste arbeidscoëfficiënten.

De formules (55) en (56) leveren, het bovenstaande in het oog houdend, arbeidscoëfficiënten voor de volledige, exacte bewegingsvergelijkingen (17) en (18). Volgens het voorschrift van Lagrange moeten de nullen in de rechterleden van deze vergelijkingen worden vervangen door

$$-\frac{\delta A}{\delta z}\,,\ \text{resp.}\ -\frac{\delta A}{\delta\varphi} \qquad [1]$$

De bewegingsvergelijkingen voor den in een luchtstroom opgestelden vleugel, d.i. de grondvergelijkingen voor het onderzoek van de onstabiele trillingen van den vleugel, luiden dus:

$$\left.\begin{aligned} m_{11}\ddot{z} - m_{12}\ddot{\varphi} + \frac{d^2}{dx^2}(b_{11}z'' - b_{12}\varphi'') &= \\ = \bar{a}_{21} z + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{22})\varphi & \\ - m_{12}\ddot{z} + m_{22}\ddot{\varphi} + \frac{d^2}{dx^2}(-b_{12}z'' + b_{22}\varphi'') - & \\ - \frac{d}{dx}(T\varphi') = - c_v \bar{a}_{21}\bar{z} - (c_a \bar{a}_{12} + c_v \bar{a}_{22})\varphi & \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

waaraan de aanwijzing moet worden toegevoegd, dat de oplossing in de complexe schrijfwijze

$$z \equiv \bar{z} = \bar{z}_0 e^{i\nu t} \qquad \varphi \equiv \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 e^{i\nu t} \tag{58}$$

moet worden genoteerd. (anders zijn de formules (50) en (51) voor de $\bar{a}$'s niet bruikbaar).

Arbeidscoëfficiënten voor de vergelijkingen (25), d.i. voor de bewegingsvergelijkingen van het systeem met beperkte vormveranderingsmogelijkheden, kunnen worden bepaald door berekening van den virtueelen arbeid, verricht door K_v en K_a bij virtueele wijziging van één der coördinaten q_i, Q_k.

Men heeft volgens (24) en (52)

$$\delta z_v = z_g \delta q_g \qquad \delta z_v = - c_v \varphi_h \delta Q_h$$

en analoog

$$\delta z_a = z_g \delta q_g \qquad \delta z_a = - c_a \varphi_h \delta Q_h$$

De totale virtueele arbeid, verricht door K_a en K_v bij de virtueele coördinaatwijzigingen δq_g en δQ_h wordt nu geschreven (vergelijk ook (24)):

$$\begin{aligned}(\delta A)_1 &= \int (\overline{K}_v \delta z_v + \overline{K}_a \delta z_a)\,dx = \\ &= \int z_g \delta q_g [\bar{a}_{21} \Sigma q_i z_i + \bar{a}_{22} \Sigma Q_k \varphi_k + \\ &\quad + \bar{a}_{12} \Sigma Q_k \varphi_k]\,dx = \delta q_g \int [\bar{a}_{21} \Sigma q_i z_g z_i + \\ &\quad + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{22})\, \Sigma Q_k z_g \varphi_k]\,dx\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}(\delta A)_2 &= -\int \varphi_h \delta Q_h [(\bar{a}_{21} \Sigma q_i z_i + \bar{a}_{22} \Sigma Q_k \varphi_k)\, c_v + \\ &\quad + (\bar{a}_{12} \Sigma Q_k \varphi_k)\, c_a]\,dx = - \delta Q_h \int [c_v \bar{a}_{21} \Sigma q_i \varphi_h z_i + \\ &\quad + (c_a \bar{a}_{12} + c_v \bar{a}_{22}) \Sigma Q_k \varphi_h \varphi_k]\,dx\end{aligned} \tag{60}$$

De complete bewegingsvergelijkingen van het type (25), doch luchtkrachten in aanmerking genomen (via in de rechterleden op te nemen arbeidsfactoren $\frac{\delta A}{\delta q_g}; \frac{\delta A}{\delta Q_h}$), worden in verband met (59), (60) en de substitutie (26):

$$\begin{aligned} & -\bar{\nu}^2 \int z_g [m_{11} \Sigma \bar{q}_{io} z_i - m_{12} \Sigma \overline{Q}_{ko} \varphi_k]\,dx + \\ & \quad + \int z_g'' [b_{11} \Sigma \bar{q}_{io} z_i'' - b_{12} \Sigma \overline{Q}_{ko} \varphi_k'']\,dx = \\ & \quad = \bar{\nu}^2 \int m_L z_g (\bar{a}_{11} \Sigma \bar{q}_{io} z_i + \bar{a}_{12} t \Sigma \overline{Q}_{ko} \varphi_k)\,dx \\ & \qquad g = 1 \ldots . m \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} & -\bar{\nu}^2 \int \varphi_h [- m_{12} \Sigma \bar{q}_{io} z_i + m_{22} \Sigma \overline{Q}_{ko} \varphi_k]\,dx + \\ & \quad + \int \varphi_h'' [- b_{12} \Sigma \bar{q}_{io} z_i'' + b_{22} \Sigma \overline{Q}_{ko} \varphi_k'']\,dx + \\ & \quad + \int (\varphi_h' T \Sigma \overline{Q}_{ko} \varphi_k')\,dx = \bar{\nu}^2 \int m_L \varphi_h t (\bar{a}_{21} \Sigma \bar{q}_{io} z_i + \\ & \qquad + \bar{a}_{22} t \Sigma \overline{Q}_{ko} \varphi_k)\,dx \quad h = 1 \ldots . n \end{aligned} \tag{62}$$

---

[1] De min-teekens voor deze symbolen moeten worden toegevoegd omdat de vergelijkingen (17) en (18) kunnen worden opgevat als Lagrange-vergelijkingen met *negatief* teeken.

met de dimensielooze afkortingen (zie ook (50) en (51))

$$\bar{a}_{11} = -4 i \bar{P} V \qquad \bar{a}_{12} = V\left[4 \bar{P}\left(V + i\frac{c_a}{t}\right) + i\right] \qquad (63)$$

$$\bar{a}_{21} = \frac{c_v}{t} 4 i \bar{P} V$$

$$\bar{a}_{22} = -V\left[4\frac{c_v}{t}\bar{P}\left(V + i\frac{c_a}{t}\right) + i\frac{c_a}{t}\right] \qquad (64)$$

en waarbij eraan wordt herinnerd, dat de vleugelbeweging wordt gegeven door

$$\bar{z} = e^{i\bar{\nu}\tau}\Sigma\bar{q}_{io}z_i \qquad \bar{\varphi} = e^{i\bar{\nu}\tau}\Sigma\bar{Q}_{ko}\varphi_k \qquad (65)$$

Tenslotte moeten nog arbeidscoëfficiënten worden vastgesteld voor de vergelijkingen (35) (verg. ook (40)). Volgens (30) en (52) is nu:

$$\delta z_v = \delta q_g z_g - c_v \delta q_g C_g \varphi_g = \delta q_g (z_g - c_v C_g \varphi_g)$$

en analoog

$$\delta z_a = \delta q_g (z_g - c_a C_g \varphi_g)$$

zoodat

$$\delta A = \int (\bar{K}_v \delta z_v + \bar{K}_a \delta z_a) d x =$$
$$= \delta q_g \int [(\bar{a}_{21}\Sigma q_i z_i + \bar{a}_{22}\Sigma q_k C_k \varphi_k)(z_g - c_v C_g \varphi_g) +$$
$$+ (\bar{a}_{12}\Sigma q_k C_k \varphi_k)(z_g - c_a C_g \varphi_g)] d x =$$
$$= \delta q_g \int [\bar{a}_{21}(z_g - c_v C_g \varphi_g)\Sigma q_i z_i + \{(\bar{a}_{12} + \bar{a}_{22}) z_g -$$
$$- (c_a \bar{a}_{12} + c_v \bar{a}_{22}) c_g \varphi_g\} \Sigma q_k C_k \varphi_k] d x \qquad (66)$$

Dus worden de bewegingsvergelijkingen van het type (35), met in aanmerking genomen luchtkrachten en de substitutie (36) invoerend:

$$\Sigma (V_{gi} - \bar{\nu}^2 U_{gi}) \bar{q}_{io} = \bar{\nu}^2 \int m_L [\bar{a}_{11} z_g \Sigma \bar{q}_{io} z_i +$$
$$+ \bar{a}_{12} t . z_g \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k + \bar{a}_{21} t C_g \varphi_g \Sigma \bar{q}_{io} z_i +$$
$$+ \bar{a}_{22} t^2 . C_g \varphi_g \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k] d x ; \quad g = 1 \ldots . n \qquad (67)$$

$\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$, $\bar{a}_{21}$ en $\bar{a}_{22}$ zijn de door (63) en (64) gedefiniëerde dimensielooze luchtkrachtcoëfficiënten, de gevolgde omwerking van (66) naar deze coëfficiënten kan gemakkelijk worden gecontroleerd.

Er wordt aan herinnerd, dat de vleugelbeweging ditmaal wordt gegeven door:

$$\bar{z} = e^{i\bar{\nu}\tau}\Sigma\bar{q}_{io}z_i \qquad \bar{\varphi} = e^{i\bar{\nu}\tau}\Sigma\bar{q}_{ko}C_k\varphi_k \qquad (68)$$

4. Het gebruik van materiaal, verkregen door een standtrillingsproef.

Wanneer in de vergelijkingen, die de trillingen van het in een luchtstrooming opgestelde vleugelsysteem beschrijven, de *vliegsnelheid v nul* wordt gesteld en een *periodieke uitwendige kracht op het systeem wordt ingevoerd*, verkrijgt men vergelijkingen, die de *standtrilling* van den vleugel beschrijven. De overgang wordt in de vergelijkingen (57) en (61), (62) en (67) tot stand gebracht door de rechterleden dezer vergelijkingen te schrappen, en in plaats daarvan de symbolen te stellen, die de uitwendige periodieke kracht definiëeren. De door (44), (45) en (46) gedefiniëerde wijzigingen van de massa-parameters van het systeem dient men *aan te houden*, omdat ook bij de standtrilling een virtueele massavergrooting van het systeem door meetrillende lucht aanwezig is.

Wanneer een standtrillingsproef is uitgevoerd, kunnen de hierdoor verkregen resultaten (resonantie-frequentie's, bijbehoorende trillingsvormen) worden gebruikt *ter contrôle* van de standtrillingsvergelijkingen, en daarmede ook van de grondvergelijkingen, waarop het onderzoek der onstabiele trillingen wordt gebaseerd. Men kan echter ook *voorschrijven*, dat de standtrilling een oplossing *moet* vormen van de vergelijkingen, die geacht worden haar te beschrijven, en uit dezen *eisch* de waarden van bepaalde in de vergelijkingen optredende parameters *afleiden*. Dit laatste procédé heeft vele voordeelen: niet alleen kunnen bepaalde tijdroovende berekeningen worden *vervangen* door meetresultaten bij de standtrillingsproef, doch bovendien wordt op deze wijze

1o. goed experimenteel materiaal op de berekening „ge-ent", waardoor de betrouwbaarheid wordt verbeterd.

2o. het gebruik van bewegingsvergelijkingen van het type (67) mogelijk, met later te noemen voordeelen.

In het algemeen kan en zal van de resultaten van de standtrillingsproef een dusdanig gebruik worden gemaakt, dat een analyse van de stijfheid en de stijfheidsverdeeling van den vleugel overbodig wordt.

Op de samenkoppeling van standtrillingsproef en basis-vergelijkingen voor het onderzoek der kritische trillingen is een vereenvoudiging mogelijk, wanneer alleen gebruik wordt gemaakt van *resonantie-frequentie's en bijbehoorende trillingsvormen*, vastgesteld door de standtrillingsproef — hetgeen steeds het geval zal zijn [1]). In verband met de relatief geringe waarde van de bij de standtrilling in het spel zijnde materiaaldemping op de trilling van den vleugel, kunnen n.l. de *resonantie-frequentie's* geïdentificeerd worden met de *eigenfrequentie's* van het systeem, en de bijbehoorende *trillingsvormen* met overeenkomstige *eigentrillingsvormen*. Men kan daarom *deze* resultaten van de standtrillingsproef invoeren in (of in verband brengen met) de vergelijkingen, die de *vrije trillingen* van het systeem in stilstaande lucht beheerschen, d.w.z. men kan de invoering eener periodieke uitwendige kracht in de vergelijkingen achterwege laten. Tevens kan de materiaaldemping uit de vergelijkingen der vrije trillingen worden geschrapt. (De materiaaldemping wijzigt de resonantiefrequentie's t.o.v. de ongedempte eigenfrequentie's nagenoeg *niet*, men kan beide gevoegelijk gelijk stellen. Zie overigens onder no. 18. Voor een discussie van den geringen invloed van de demping op de resonantie-*trillingsvormen* wordt verwezen naar rapport V1234 — *lit.* 22).

De *formules*, waarmede de gemeten resonantiefrequentie's en -trillingsvormen zullen worden gekoppeld, luiden bij gebruik van het stelsel (61), (62):

---

[1]) Men kan aan de proef natuurlijk veel meer gegevens ontleenen, daar bij de proef een willekeurig frequentiegebied volledig bestreken kan worden. Andere gegevens dan de genoemde komen echter ter vereenvoudiging van het complete rekenprocédé niet in aanmerking. Het gebruik als meer volledige *contrôle* op de formules stuit af op te groote bewerkelijkheid (wil zij doeltreffend zijn).

$$-\nu^2\int z_g\,[m_{11}\,\Sigma\,\bar{q}_{io}\,z_i - m_{12}\,\Sigma\,\bar{Q}_{ko}\,\varphi_k]\,d\,x +$$
$$+\int z_g''\,[b_{11}\,\Sigma\,\bar{q}_{io}\,z_i'' - b_{12}\,\Sigma\,\bar{Q}_{ko}\,\varphi_k'']\,d\,x = 0 \qquad (69)$$

$$-\nu^2\int \varphi_h\,[-m_{12}\,\Sigma\,\bar{q}_{io}\,z_i + m_{22}\,\Sigma\,\bar{Q}_{ko}\,\varphi_k]\,d\,x +$$
$$+\int \varphi_h''\,[-b_{12}\,\Sigma\,\bar{q}_{io}\,z_i'' + b_{22}\,\Sigma\,\bar{Q}_{ko}\,\varphi_k'']\,d\,x +$$
$$+\int \varphi_h'\,T\,\Sigma\,\bar{Q}_{ko}\,\varphi_k'\,d\,x = 0 \qquad (70)$$

$$\bar{z} = e^{i\nu\tau}\,\Sigma\,\bar{q}_{io}\,z_i \qquad \bar{\varphi} = e^{i\nu\tau}\,\Sigma\,\bar{Q}_{ko}\,\varphi_k$$
$$i = 1\,\ldots\,m;\ k = 1\,\ldots\,n \qquad (71)$$

waarin de coëfficiënten m_{11}, m_{12} en m_{22} in overeenstemming met (44), (45) en (46) zijn bepaald, terwijl de stijfheidsparameters b_{11}, b_{12}, b_{22} en T reëel aangenomen kunnen worden.

Heeft de *standtrillingsproef* aangetoond, dat *eigentrillingen* van het systeem worden gegeven door[1])

$(\nu_{B1},\ z_{B1},\ \varphi_{B1})\ ;\ (\nu_{B2},\ z_{B2},\ \varphi_{B2})\ ;$ enz.

(„*buigings*"-eigentrillingen)

$(\nu_{T1},\ z_{T1},\ \varphi_{T1})\ ;\ (\nu_{T2},\ z_{T2},\ \varphi_{T2})\ ;$ enz.

(„*torsie*"-eigentrillingen)

dan moeten dit *oplossingen* zijn van de vergelijkingen (69), (70). Daartoe is in de eerste plaats noodig, dat het stelsel der deformatiefunctie's z_i, φ_k zoo is gekozen, dat de trillingsvormen

$$z_{B1}, \varphi_{B1}\ ;\ \ldots\ ;\ z_{T1}, \varphi_{T1}\ ;\ \ldots$$

er *althans in goede benadering* door kunnen worden beschreven. Voldoen deze functie's aan dezen eisch, dan kunnen reeksen worden opgesteld van den vorm:

$$(\bar{z}_{B1})_o \simeq \Sigma\,\bar{q}_{io}^{(B1)}\,z_i \qquad (\bar{\varphi}_{B1})_o \simeq \Sigma\,\bar{Q}_{ko}^{(B1)}\,\varphi_k \qquad (72)$$

enz,

$$(\bar{z}_{T1})_o \simeq \Sigma\,\bar{q}_{io}^{(T1)}\,z_i \qquad (\bar{\varphi}_{T1})_o \simeq \Sigma\,\bar{Q}_{ko}^{(T1)}\,\varphi_k \qquad (73)$$

enz.

wier coëfficiënten

$$\bar{q}_{io}^{(B1)}\ldots\ \bar{Q}_{ko}^{(B1)}\ldots\ q_{io}^{(T1)}\ldots\ Q_{ko}^{(T1)},$$

voor bijbehoorende waarden $(\nu_{B1},\ldots\nu_{T1},\ldots)$ van ν, de vergelijkingen (69) en (70) bevredigen. Iedere eigentrilling levert zoo $m + n$ betrekkingen, die kunnen worden opgevat als even zoovele vergelijkingen voor *coëfficiënten der bewegingsvergelijkingen*. Men vatte nu *die* coëfficiënten der vergelijkingen (69) en (70), die stijfheids-functie's $(b_{11}, b_{12}, b_{22}, T)$ bevatten, als *onbekenden* op. Het complete stelsel onbekenden luidt dan:

$$\int b_{11}\,z_g''\,z_i''\,d\,x \qquad g = 1\,\ldots\,m;\ i = 1\,\ldots\,m$$

$$\int b_{12}\,z_g''\,\varphi_k''\,d\,x \qquad g = 1\,\ldots\,m;\ k = 1\,\ldots\,n$$

$$\int b_{22}\,\varphi_h''\,\varphi_k''\,d\,x + \int T\,\varphi_h'\,\varphi_k'\,d\,x$$
$$h = 1\,\ldots\,n;\ k = 1\,\ldots\,n$$

zoodat er hoogstens

$$\tfrac{1}{2}\,m\,(m+1) + m\,n + \tfrac{1}{2}\,n\,(n+1) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(m+n)\,(m+n+1)$$

onbekenden zijn, die men als onderling onafhankelijk kan behandelen. Dus:

Wanneer de vormveranderingen van den vleugel door $m + n$ *onderling onafhankelijke deformatiefunctie's van het type* z_i, φ_k *worden beschreven, leveren p door de standtrillingsproef onderzochte resonantie's van het systeem* $p\,(m + n)$ *vergelijkingen tusschen de* $\frac{1}{2}\,(m + n)\,(m + n + 1)$ *coëfficiënten der bewegingsvergelijkingen van het systeem, die van de stijfheid en stijfheidsverdeeling afhangen.*

Hierbij wordt alléén verondersteld, dat de in de resonantie's optredende trillingsvormen door het stelsel der toegelaten vormveranderingen worden gedekt.

De vergelijkingen (69) en (70), met $m + n$ deformatiefunctie's opgesteld, leveren ook $m + n$ eigentrillingen. Kon men deze ook *alle* experimenteel vastleggen, dan zouden hieruit $(m + n)^2$ vergelijkingen tusschen $\frac{1}{2}\,(m + n)\,(m + n + 1)$ onbekenden kunnen worden gewonnen, zoodat alle onbekenden zouden kunnen worden opgelost en *bovendien* nog een *contrôle* op de vergelijkingen zou resteeren, omdat er *meer* vergelijkingen dan onbekenden zijn. In de praktijk blijkt een zoo volledige uitbuiting van de gegevens der standtrillingsproef echter om de navolgende reden niet mogelijk te zijn:

Wanneer *exact* geldige reeksontwikkelingen (72), (73) niet mogelijk zijn, beschrijven de vergelijkingen de eigentrillingen van het systeem slechts bij benadering. De *fouten*, waarmede de eigentrilling wordt beschreven, zijn, wat de eigenfrequentie's betreft, van de 2e orde, dus relatief gering, en in de trillingsvormen van de eerste orde, zoodat de trillingsvormen minder goed worden beschreven.

Deze verhouding wordt nog *versterkt* door de omstandigheid, dat de *eigentrillingsvormen* in tegenstelling tot de *eigenfrequentie's* ook tamelijk sterk worden beïnvloed door betrekkelijk kleine vereenvoudigingen begaan bij de constructie van het *model* van het systeem, aan de hand waarvan de vergelijkingen (69), (70) werden opgesteld. Een gevolg hiervan is, dat het gebruik van experimenteel bepaalde *trillingsvormen* ter bepaling van coëfficiënten der vergelijkingen onvruchtbaar kan worden. Dan blijven daarvoor echter alleen de in den regel *weinig vervalschte eigenfrequentie's* over, waaruit echter hoogstens $m + n$ betrekkingen kunnen worden gewonnen, dus te weinig om de

$$(m+n)\,.\,\frac{m+n+1}{2}$$

onbekenden te kunnen oplossen.

Men kan de situatie in theorie (de praktijk brengt weer andere moeilijkheden) verbeteren door

[1]) De hieronder vermelde vastlegging moet zóó worden opgevat, dat b.v. ν_{B1} de frequentie, en z_{B1}, φ_{B1} den trillingslingsvorm geven. Het ware wellicht beter, voor de laatste de meer gecompliceerde notatie $(\bar{z}_{B1})_o$, $(\bar{\varphi}_{B1})_o$ toe te passen. De onderscheiding van „buigings"- en „torsie"-eigentrillingen is nog niet gedefiniëerd, de beteekenis ervan is echter duidelijk genoeg en sluit aan bij een gebruikelijk geworden terminologie.

het systeem der deformatiefrequentie's z_i, φ_k *exact* met eigentrillingsvormen te laten overeenstemmen. Men kieze daartoe

$$z_1 \equiv (z_{B1})_o, z_2 \equiv (z_{B2})_o, \ldots,$$
$$z_{p+1} \equiv (z_{T1})_o, z_{p+2} \equiv (z_{T2})_o, \ldots$$
$$\varphi_1 \equiv (\varphi_{B1})_o, \varphi_2 \equiv (\varphi_{B2})_o, \ldots,$$
$$\varphi_{p+1} \equiv (\varphi_{T1})_o, \varphi_{p+2} \equiv (\varphi_{T2})_o, \ldots.$$

De p onderzochte resonantie's leveren, aldus te werk gaand, 2 p deformatie-functie's, dus $m + n = 2p$. Men kan nu *ook de trillingsvormen* gebruiken ter bepaling van onbekende coëfficiënten, die in getale $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) = 2p^2 + p$ aanwezig zijn. De p resonantie's leveren daarvoor $p(m+n) = 2p^2$ betrekkingen, dus opnieuw te weinig. Echter *kunnen in theorie* nog *juist* p vergelijkingen worden toegevoegd, door ook de *p eigenfrequentie's te meten*, die de vergelijkingen buiten de *p volledig beschrevene* opleveren. Men moet dan echter hopen, dat deze eenigszins redelijk door de vergelijkingen worden geleverd, hetgeen onzeker is, omdat men bij de constructie van de deformatiefuctie's geen vrijheid meer had, op eenigerlei wijze met de hier optredende trillingsvormen rekening te houden.

Samenvattend moet, mede op grond van praktische ervaring, worden vastgesteld dat het niet gemakkelijk is, bij gebruik van vergelijkingen van het type (69), (70), alle coëfficiënten, die van stijfheden en stijfheidsverdeelingen afhangen, op betrouwbare wijze uit bij de standtrillingsproef uitgevoerde *metingen* te berekenen. Daartegenover staat, dat wanneer een nauwe en betrekkelijk volledige overeenstemming tusschen de vergelijkingen en de proefresultaten blijkt te kunnen worden geconstrueerd, de vergelijkingen het gedrag van het systeem met zeer hooge nauwkeurigheid zullen beschrijven.

Veel gemakkelijker wordt de volledige verwerking van de resultaten eener standtrillingsproef in de berekening, wanneer bewegingsvergelijkingen van het type (35) worden gebruikt. Dan bestaat de mogelijkheid, het gedrag van het systeem te beschrijven in zijn *normaalcoördinaten* voor *stilstaande lucht*. (Tengevolge van aerodynamische koppelingen hangen de normaalcoördinaten van een in een luchtstroom opgesteld vleugelsysteem af *van de stroomsnelheid*). Daardoor wordt bereikt, dat de standtrillingsproef wordt gekoppeld aan bijzonder eenvoudige vergelijkingen van het type (40).

Het is duidelijk, hoe men te werk moet gaan. Men kiest de deformatiefunctie's (29) *in exacte overeenstemming met* de trillingsvormen, die in volledig onderzochte resonantiepunten optreden. (Men werkt dus hoogstens met *evenveel deformatiefunctie's, als er resonantiepunten* onderzocht zijn). De bewegingsvergelijkingen voor het complete, in een luchtstroom opgestelde systeem luiden dan volgens (40) (!), (36) en (67)

$$(V_{gg} - \bar{\nu}^2 U_{gg})\,\bar{q}_{go} = \bar{\nu}^2 \int m_L [\bar{a}_{11} z_g \Sigma \bar{q}_{io} z_i + \\ + \bar{a}_{12} t z_g \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k + \bar{a}_{21} t C_g \varphi_g \Sigma \bar{q}_{io} z_i + \\ + \bar{a}_{22} t^2 C_g \varphi_g \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k]\, dx\,;\quad g = 1 \ldots p \qquad (74)$$

en die van de *standtrilling* (tesamen met (36)):

$$(V_{11} - \bar{\nu}^2 U_{11}) q_{1o} = 0$$
$$(V_{22} - \bar{\nu}^2 U_{22}) q_{2o} = 0 \qquad (75)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(V_{pp} - \bar{\nu}^2 U_{pp}) q_{po} = 0$$

De eenige coëfficiënten in deze vergelijkingen, die van de *elastische eigenschappen* van het systeem afhangen, zijn (zie (33) en (34)) de V_{gg}'s. Deze kunnen echter worden berekend met behulp van de gemeten resonantie-*frequentie's* $\nu_1 \ldots \nu_p$ [1]). Immers volgens (75) is

$$V_{11} = \nu_1^2 U_{11}\,;\; V_{22} = \nu_2^2 U_{22}\,;\ldots\,;\; V_{pp} = \nu_p^2 U_{pp}$$

of, kort samengevat

$$V_{gg} = \nu_g^2 U_{gg} \qquad (76)$$

De bewegingsvergelijkingen (74) van het in een luchtstroom opgestelde systeem worden na substitutie van (76)

$$U_{gg}(\nu_g^2 - \bar{\nu}^2) = \bar{\nu}^2 \int m_L [\bar{a}_{11} z_g \Sigma \bar{q}_{io} z_i + \\ + \bar{a}_{12} t z_g \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k + \bar{a}_{21} t C_g \varphi_g \Sigma \bar{q}_{io} z_i + \\ + \bar{a}_{22} t^2 C_g \varphi_g \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k]\, dx\,;\quad g = 1 \ldots p \quad (77)$$

In deze vergelijkingen komen géén van elastische eigenschappen direct afhankelijke coëfficiënten meer voor. Deze zijn verwijderd door de volledige verwerking (trillingsvormen *en* bijbehoorende eigenfrequentie's) van bij de standtrillingsproef bepaalde *eigentrillingen* van het systeem. De gevolgde werkwijze kenmerkt zich bovendien door een grootst denkbaren eenvoud: het is niet eens noodig den aard der aangetroffen eigentrillingen te *identificeeren* (b.v. als fundamenteele —, eerste harmonische — enz. — buigings- of torsie-eigentrilling).

Men beschikt ook nu formeel over een contrôle op de juistheid van bepaalde deelen van de berekening, doordat men kan verifiëeren, of U_{gi} voor $g \neq i$ *inderdaad* nul is. Men controleert daarmede echter alléén de doeltreffendheid van de aan het model toegekende massa- en massaverdeeling (vergelijk (33)), en bovendien is de contrôle praktisch niet erg nauwkeurig, omdat op plaatsen, waar de massa's *groot* zijn, de amplituden vaak *klein* en daardoor bij de proef slechts *onnauwkeurig* te meten zijn. Het verband tusschen *standtrilling* en *vergelijkingen* levert dan ook een véél minder effectieve *contrôle* op de juistheid van de mathematische analyse van het probleem, dan mogelijk is bij gebruik van de eerder behandelde vergelijkingen (61), (62) als basis-vergelijkingen.

Aan de vergelijkingen (77) moge nog het navolgende commentaar worden toegevoegd:

1. Het is essentiëel, dat in de berekening slechts zooveel deformatie-mogelijkheden kunnen worden opgenomen, als er eigentrillingen van het systeem *experimenteel* onderzocht zijn.

---

1) De *nummering* van de ν's natuurlijk in overeenstemming kiezend met de nummering van de deformatiefunctie's (29).

2. Het ligt voor de hand, dat materiaaldemping in de formules zal kunnen worden opgenomen, door de eigenfrequentie's ν_g *complex* te stellen. Deze complexe getallen moeten zoo worden gekozen, dat zij *demping en frequentie* van de *vrije* uittrilling beschrijven van het systeem in stilstaande lucht. (Men denke aan formules van het type

$$e^{-\alpha\tau} e^{i\nu\tau} \equiv e^{i(i\alpha+\nu)\tau} \equiv e^{i\bar{\nu}\tau}). \qquad (78)$$

Deze werkwijze is volkomen aequivalent met de invoering van demping door middel van complexe stijfheidsparameters (overeenkomstig no. 32).

Dit hoofdstuk moge worden besloten met de navolgende opmerkingen over de nauwkeurigheid, waarmede de *benaderingsformules* (61), (62) en (67) de kritische trillingen van den in een luchtstroom opgestelden vleugel zullen beschrijven, wanneer metingen der standtrillingsproef daarin op de beschreven wijze worden verwerkt:

De theorie der gevolgde approximatiemethoden stelt als voornaamste eisch, dat de in de formules gebezigde reeksen zóó zijn gekozen, dat de vleugeldeformatie's, die zullen ontstaan, in goede benadering door deze reeksen kunnen worden voorgesteld. Aan dezen eisch zullen reeksen, die op de beschreven wijze in nauwe overeenstemming met de in de standtrilling van den vleugel optredende trillingsvormen zijn geconstrueerd, zeker voldoen, wanneer zij slechts genoeg termen bevatten. Want de in de standtrilling grootendeels ontbrekende belasting van den in een luchtstroom opgestelden vleugel door het systeem der aerodynamische krachten brengt in ieder geval geen wijziging in de *randvoorwaarden* voor de vleugeldeformatie, zoodat deze deformatie in principe zeker voor de gevolgde reeksontwikkeling toegankelijk is.

Aan den gestelden eisch kan echter ook voldaan zijn, wanneer de reeksen *slechts enkele* (b.v. één tot drie) geschikt gekozen termen bevatten, die uit de standtrillingsvormen van den vleugel zijn afgeleid. Door dat n.l. het gebied der *ook* voor de kritische trilling in aanmerking komende *frequenties* zoo klein is, kan men de deformaties, die in dit frequentie-interval door een belasting zouden worden veroorzaakt, die (zooals zulks in de standtrilling het geval is) uitsluitend uit traagheidskrachten bestaat, reeds goed met zeer korte reeksen beschrijven, juist op voorwaarde, dat deze reeksen aan de in dit gebied gevonden eigentrillingsvormen zijn ontleend. Wanneer men nu nagaat, welke verdeeling over de vleugelbreedte de bij de kritische trilling van den vleugel *extra* aanwezige belasting door aerodynamische krachten in het algemeen ongeveer zal vertoonen, dan lijkt het al onwaarschijnlijk, dat deze belasting den *vorm* der deformaties *ingrijpend* zou wijzigen. Echter zijn deze luchtkrachten, wellicht met uitzondering van gevallen, waarbij de kritische waarde van de elders genoemde gereduceerde snelheid uitzonderlijk hoog is, bovendien betrekkelijk klein, vergeleken bij de aan de trilling verbonden traagheidskrachten. Daarom is de conclusie gemotiveerd, dat de aerodynamische belasting van den vleugel in de kritische trilling de mogelijkheid, de deformatie van den vleugel met *korte*, naar gegeven aanwijzingen geconstrueerde reeksen te beschrijven, niet ernstig zal bemoeilijken. Deze conclusie kan ook zoo worden gesteld, dat de verwachting gerechtvaardigd is, dat de benaderingsformules de kritische trilling reeds met goede nauwkeurigheid zullen opleveren, wanneer blijkt, dat zij (de weinige) als *„naburig"* op te vatten standtrillingstoestanden correct — en eventueel zelfs exact — beschrijven.

Uit het voorgaande volgt tevens, dat de nauwkeurigheid der berekening in principe op twee manieren kan worden verbeterd, n.l.:

1o. door het gebruik van lange reeksen,

2o. door het gebruik van korte reeksen met door herhaalde benadering (iteratie) verbeterde deformatiefuncties.

De laatste methode is de beste en eigenlijk de eenig gangbare. Ook zij leidt echter tot uiterst lange berekeningen. Het wordt bovendien noodzakelijk, de elasticiteitsverdeeling van den vleugel ten volle mede in rekening te brengen, omdat de verbetering der deformatiefuncties na uitwerking van den eersten stap moet worden afgeleid uit de deformatie, die de uit de eerste oplossing verkregen luchtkrachtbelasting veroorzaakt. Die afleiding is echter alleen mogelijk bij volledig gegeven stijfheidsverdeeling.

Het is niet mogelijk, in deze verhandeling in te gaan op dergelijke verbeteringen van de berekening, vooral omdat het vermoeden bestaat, dat de te berekenen correctie het vele extra werk bijna nooit zal rechtvaardigen. Bovendien zullen de niet geheel juiste formules voor de luchtkrachten waarschijnlijk fouten veroorzaken, die van minstens gelijke grootte-orde zijn.

5. De elastische as van een vleugel en de keuze van de plaats van de beschrijvings-as.

In de literatuur over onstabiele vleugeltrillingen wordt bij de formuleering van de elastische eigenschappen van een vliegtuigvleugel vaak gebruik gemaakt van een „elastische as". De *mogelijkheid*, deze (gewoonlijk niet duidelijk gedefiniëerde) as in de beschouwingen in te voeren, blijkt (bij nadere analyse) te berusten op de *aanname*, dat de vleugeldeformatie's met recht kunnen worden gescheiden in een *buiging* en een *torsie*, en dat bewegingen in beide *groepen vervormingsmogelijkheden* onderling niet door elastische krachten, doch (in stilstaande lucht) *uitsluitend* door traagheidskrachten zijn gekoppeld. Ware deze stelling juist, dan zou het mogelijk moeten zijn de *zwaartspunts-as* van een vleugel zóó te verschuiven, (door „massabalanceering"), dat de vervormingen buiging en torsie (in stilstaande lucht) onderling *totaal onafhankelijk* worden. Deze mogelijkheid kan wiskundig aan de hand van de vergelijkingen (17) en (18) worden onderzocht. Wanneer n.l. buigings- en torsietrillingen onderling onafhankelijk zijn, moeten de variabelen z en φ door lineaire combinatie [1]) van deze beide vergelijkingen kunnen worden gescheiden. Vermenigvuldig de eerste dus met λ en trek af van de tweede:

$$(m_{12}+\lambda m_{11})\ddot{z}-(m_{22}+\lambda m_{12})\ddot{\varphi}+$$

$$+\frac{d^2}{dx^2}[(b_{12}+\lambda b_{11})z'']-\frac{d^2}{dx^2}[(b_{22}+\lambda b_{12})\varphi'']+$$

$$+\frac{d}{dx}(T\varphi')=0 \qquad (79)$$

[1]) Dus *zonder* differentiaaloperatie's toe te passen.

De zwaartepuntsligging van den vleugel wordt volgens (6) vastgelegd door den parameter m_{12}. De vraag is dus: kunnen de *functie* m_{12} en de *constante* λ zóó worden gekozen, dat de variabele z uit de bovenstaande vergelijking wegvalt?

Daartoe zou

$$m_{12} + \lambda m_{11} \equiv 0 \quad en \quad b_{12} + \lambda b_{11} \equiv 0$$

moeten zijn. De tweede voorwaarde toont reeds aan, dat de operatie in het algemeen *niet mogelijk* is, daar het quotiënt van b_{12} en b_{11} in het algemeen niet onafhankelijk van x is.

Daaruit volgt: de koppeling van buiging en torsie van een in vacuum opgestelden vleugel wordt geleverd door elastische krachten *èn* door traagheidskrachten. De elastische koppeling valt alleen dan weg, wanneer

$$\frac{b_{12}}{b_{11}} = \text{constant is,} \tag{80}$$

in welk geval een *totale* ontkoppeling kan worden verkregen, door de zwaartepunts-as zoo te verschuiven, dat (vergl. (6))

$$\frac{m_{12}}{m_{11}} = s \equiv \frac{b_{12}}{b_{11}} \tag{81}$$

is. Dit is een lijn, evenwijdig aan de beschrijvingsas, waaraan men met recht den naam *„elastische as"* kan toekennen.

De voorwaarde (80) kan met behulp van (10) in den vorm:

$$\frac{e_v B_v + e_a B_a}{B_v + B_a} = \text{constant} \tag{82}$$

worden gebracht. Teller en noemer van de links staande breuk moeten dus, afgezien van een constante, identieke functie's van x zijn, waaruit de te verwachten conclusie wordt getrokken, dat het quotiënt van de buigstijfheden van de beide vleugelliggers in iedere dwarsdoorsnede (x=const.) *dezelfde waarde* moet hebben. Dit is in de praktijk lang niet altijd het geval.

Hoewel een elastische as volgens het bovenstaande strikt genomen bijna nooit aanwezig is, kan in den regel wèl een lijn in het vleugelvlak, loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig worden aangewezen, die in *min of meer ruwe benadering* de eigenschappen van een elastische as heeft, en die het mogelijk maakt, in een vleugeldeformatie aandeelen *buiging* en *torsie* te onderscheiden, waartusschen althans *slechts een relatief kleine elastische* koppeling bestaat. Nu is tot nu toe de keuze van de *plaats* van de beschrijvings-as *vrijgelaten*, en in principe is deze keuze inderdaad betrekkelijk onverschillig. *Het blijkt echter, dat het in het algemeen aanbeveling verdient, deze as ongeveer zóó aan te brengen, dat zij tevens* overeenkomstig de eerder genoemde mogelijkheid *als een min of meer „goede" elastische as kan worden opgevat.* Groote nauwkeurigheid komt er hierbij uit den aard der zaak niet op aan, men vatte deze aanbeveling als een *richtlijn* voor de keuze van de plaats van de beschrijvings-as op. In het vervolg zal *niet* worden aangenomen, dat de beschrijvings-as zóó is gekozen, dat zij de *best-mogelijke* representant van een elastische as vormt, echter zullen — voornamelijk ter wille van den eenvoud — de *uitslagen* van den vleugel ter plaatse van de beschrijvings-as wel vaak als *buiging* worden betiteld, en de draaiingen om deze as als *torsie*. Een *principiëel* gebruik van eigenschappen, die aan de beschrijvings-as in verband met haar bovenomschreven *plaatsing* wellicht in zekere benadering zouden kunnen worden toegekend, zal nimmer worden gemaakt, zoodat hier geen benadering in de theorie wordt geïntroduceerd.

6. Aanwijzing voor de verwerking van de luchtkrachten in de vergelijkingen.

Zoowel de coëfficiënten van de vergelijkingen (61), (62), als die van de vergelijkingen (77), bevatten integralen over den vleugel, die in het algemeen natuurlijk door toepassing van numerische (Simpson'sche regel) of grafische (planimeter) methoden moeten worden bepaald. Dit is een nogal tijdroovend werkje, en het wordt hierbij als een *complicatie* aangevoeld, dat de gereduceerde snelheid V, waarvan de termen afhangen, die de luchtkrachten beschrijven, een in het algemeen van de variabele x afhankelijke grootheid is. In verband hiermede mogen functie's van V niet vóór de integraalteekens worden gebracht. De *waarden* van V echter, waarvoor deze integralen moeten worden uitgewerkt, zijn van te voren niet bekend, omdat de kritische snelheid v juist één der *onbekenden* van de berekening is. (Men heeft: $V = \frac{v}{\nu t} = \frac{v}{\nu t_o} \cdot \frac{t_o}{t} = V_o \cdot \frac{t_o}{t}$, waarin V_o een op één of andere willekeurig te kiezen koorde t_o *betrokken* gereduceerde snelheid is. V_o is dus *onafhankelijk* van x, het quotiënt $\frac{t_o}{t}$ beschrijft de afhankelijkheid van de gereduceerde snelheid van de coördinaat x. V is dus alléén voor den rechthoekigen vleugel een constante.)

De oplossing van de vergelijkingen — de bepaling dus van de kritische trilling — moet, daar de onbekende V op zeer gecompliceerde wijze in de vergelijkingen optreedt, eveneens langs numeriekgrafischen weg, d.i. in wezen door *probeeren*, worden bepaald. Het is daartoe noodzakelijk, aanvankelijk een min of meer omvangrijk complex getallen voor V_o in de vergelijkingen in te voeren. *Die integralen over den vleugel, wier integrand van V afhangt, zouden dan voor iedere getallenwaarde van V_o steeds opnieuw* moeten worden uitgewerkt.

Men kan dit door de onbekendheid van $V_{o\,krit}$ veroorzaakte extra aantal bewerkelijke integratie's op tweeërlei wijze *ontgaan*. Ten eerste kan men zich met de benadering vergenoegen, die kan worden verkregen door V als een *niet van x afhankelijke grootheid* te *behandelen*, en ten tweede kan men gebruik maken van een na „weinig" termen afgebroken Taylor-ontwikkeling van de luchtkracht-functie's in de omgeving van een *geschatte* oplossing $V_{o\,krit}$ (eventueel de oplossing, die langs den eerstgenoemden weg wordt gevonden). Een korte toelichting wordt hieronder gegeven.

61. **Behandeling van V als constante.**

Men brenge functie's van V-alléén *vóór* de integraalteekens, die integratie's over den vleugel formuleeren. De vergelijkingen kunnen dan numeriek/grafisch worden opgelost door „probeeren" van een aantal geschikt gekozen getallenwaarden voor V. Deze bewerking omvat géén integratie's meer. Men vindt voor V en voor ν als *oplossing* kritische waarden:

$$V = V_{krit} \;;\quad \nu = \nu_{krit} \tag{83}$$

waaruit men een *kritische snelheid* kan berekenen, wanneer men tevens een keuze heeft gemaakt voor eenals *effectief op te vatten vleugelkoorde.*

Immers:

$$V = \frac{v}{\nu t}, \text{ en dus } v_{krit} = V_{krit} \cdot \nu_{krit} \cdot t \tag{84}$$

Het lijkt aannemelijk dat een geschikte waarde van t op grond van de navolgende overweging zal kunnen worden aangewezen:

Wanneer de materiaaldemping op de vleugeltrilling wordt verwaarloosd (hetgeen in *eerste* benadering meestal wel geoorloofd is), *moet de kritische toestand de eigenschap hebben,* dat de ***arbeid, dien de luchtkrachten per tijdseenheid op het systeem verrichten, juist nul is.*** De kritische toestand is immers juist het *grensgeval* tusschen negatieven en positieven *energietoevoer* aan het trillende systeem.

De *waarde* van den *per seconde* door de luchtkrachten verrichten positieven arbeid wordt echter binnen het kader van ook in deze verhandeling steeds aanvaarde onderstellingen, volgens rapport V1237 (*lit.* 23. Zie de formule (14) op pag. 7) gegeven door de integraal:

$$E = \int m_L \nu^3 \varphi_o^2 t^2 V [-2A\xi_o^2 + \\ + \{(A - 2BV + \tfrac{1}{2})\cos\psi - \\ -(2AV + B)\sin\psi\}\xi_o - \tfrac{1}{4}]\,dx \tag{85}$$

waarin ξ_o en ψ eigenschappen van den *kritischen trillingsvorm* zijn, bepaald door de betrekking:

$$\xi_o e^{i\psi} = \left(\frac{\bar{z}_o - c_v \bar{\varphi}_o}{\varphi_o t}\right)_{krit}$$

of, gedachtig aan de twee manieren, waarop de vormveranderingen van den vleugel werden benaderd:

$$\xi_o e^{i\psi} = -\frac{c_v}{t} + \left(\frac{\Sigma \bar{q}_{io} z_i}{t \Sigma \bar{Q}_{ko} \varphi_k}\right)_{krit} = -\frac{c_v}{t} + \\ + \left(\frac{\Sigma \bar{q}_{io} z_i}{t \Sigma \bar{q}_{ko} C_k \varphi_k}\right)_{krit}. \tag{86}$$

A en B zijn functie's van V alléén, die met de eerder gebruikte complexe functie P (zie b.v. de formules (42) en (43)) overeenkomen volgens de formule

$$\bar{P} \equiv A - iB \tag{87}$$

z_o en φ_o zijn tenslotte vanzelfsprekend de reëele trillingsamplituden:

$$z_o = \sqrt{\bar{z}_o \, \bar{z}_o^*} \qquad \varphi_o = \sqrt{\bar{\varphi}_o \, \bar{\varphi}_o^*} \tag{88}$$

Men legge nu de *effectieve* vleugelkoorde t_{eff} vast door den *eisch* te stellen, dat $E = 0$ is. Deze eisch kan volgens (84) en (85) mathematisch als volgt worden geschreven $(N.B.: m_L = \frac{\pi}{4} \varrho t^2)$:

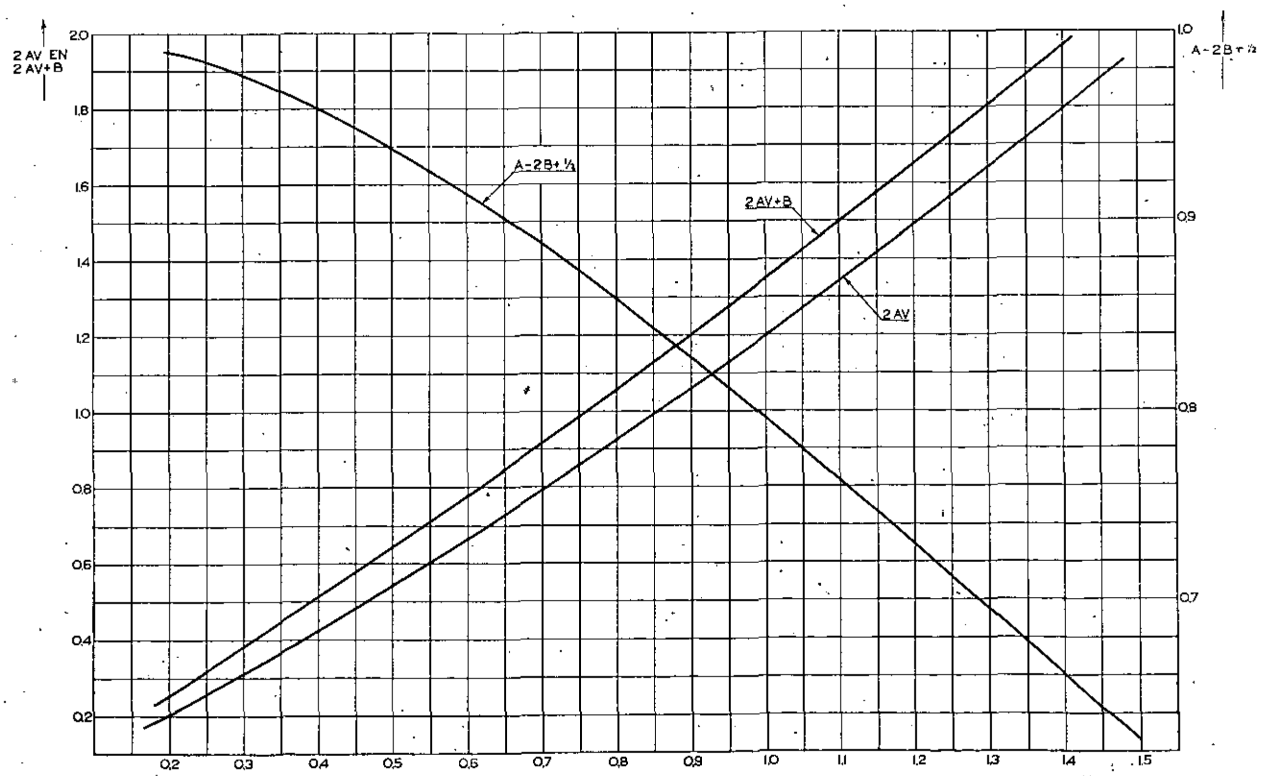


Fig. 2. Functie's van de gereduceerde snelheid, die optreden in de integraal, die de per tijdseenheid door luchtkrachten verrichte arbeid bepaalt.

$$\int \varphi_0^2 t^4 \Big[-2AV\xi_0^2 + \big\{ (A - 2BV + \tfrac{1}{2}) \cos\psi - $$
$$ - (2AV + B) \sin\psi \big\} \Big\{ V\xi_0 - \frac{V}{4} \Big] dx = 0 \quad (89)$$

met $\quad V = V_{krit} . \dfrac{t_{eff}}{t} \equiv V(x)$

en $\quad A \equiv A(V) \equiv A(x) \quad B \equiv B(V) \equiv B(x)$[1])

waarna $\quad v_{krit} = V_{krit} . \nu_{krit} . t_{eff}$

genomen wordt. Ten behoeve van de numerieke uitwerking zijn de grafieken van fig. 2 geconstrueerd, waaruit getallenwaarden voor de grootheden $2AV$, $A—2BV+\frac{1}{2}$ en $2AV+B$ direct kunnen worden afgelezen.

De betrekking (89) is een *vergelijking* voor t_{eff}, die opgelost kan worden door 2 geschatte waarden voor t_{eff} in te voeren, de integraal (door grafische of numerieke integratie) uit te werken, en aan de hand van de uitkomsten (lineair) te interpoleeren.

Een kleine verbetering van de uitkomst zal men waarschijnlijk nog kunnen verkrijgen, door bij de integratie (89) de uiterste tip van den vleugel uit te sluiten. Het is n.l. wel zeker, dat de formules voor de luchtkrachten aldaar incorrect worden, en dat *minder* arbeid wordt toegevoerd dan door de formule (85) wordt gegeven. Zij b de afstand van den vleugelwortel tot de uiterste tip, dan integreere men de uitdrukking (89) b.v. van $x=0$ tot $x=0{,}9b$, met de bedoeling daardoor een correctie aan te brengen, die het voornoemde in zekere mate in rekening brengt.

62. Taylor-ontwikkeling van de luchtkracht-functie's.

Men *kiest* een „gemiddelde vleugelkoorde" t_0. Deze wordt gelijk genomen aan een koorde van den vleugel, die tamelijk dicht bij den tip is gelegen, b.v. bij het *midden van het rolroer*, of nog iets meer naar buiten. Vervolgens ontwikkelt men iedere functie van V-alléén naar het Taylor'sche schema:

$$F(V) = F(V_0) + F'(V_0) . (V - V_0) + $$
$$ + \tfrac{1}{2} F''(V_0) . (V - V_0)^2 + \ldots \quad (90)$$

met $\quad V_0 = \dfrac{v}{\nu t_0}; \; V = \dfrac{v}{\nu t}; \; V - V_0 = V_0 \left(\dfrac{t_0}{t} - 1 \right) \quad (91)$

Dus

$$F(V) = F(V_0) + V_0 F'(V_0) . \frac{t_0 - t}{t} + $$
$$ + \tfrac{1}{2} V_0^2 F''(V_0) . \left(\frac{t_0 - t}{t} \right)^2 + \ldots . (92)$$

Deze reeks kan gevoegelijk tot de hierboven uitgeschreven termen worden beperkt. Na substitutie van de reeks kunnen de factoren, die uit functie's van V_0 *alléén* bestaan, voor integraalteekens, die integralen over den vleugel definiëeren, worden gebracht.

Daarmede is het gestelde doel — de verwijdering van functie's van V als variabele uit integralen over den vleugel — bereikt.

De hierbij begane fout is, binnen het kader van de theorie, in dit geval onbeteekenend.

[1]) Men behandelt dus V bij de bepaling van de integraal (85) *wel als een functie van* x!

Voor de uitwerking heeft men tabellen noodig, waaraan *ook* de waarden der afgeleiden $F'(V_0)$, $F''(V_0)$ kunnen worden ontleend.

7. De vleugel met twee toegelaten deformatie-componenten.

De in voorgaande nummers afgeleide vergelijkingen zullen in dit nummer worden uitgewerkt voor die gevallen, waarin het voldoende is slechts twee onderling onafhankelijke en verschillende vormveranderingsmogelijkheden aan den vleugel toe te staan. Dit zijn in wezen buiging en torsie. Men kan deze *uitwerking* toepassen ter berekening van de kritische snelheid voor gekoppelde *symmetrische* vleugelbuigings- en vleugeltorsie-trillingen met de *meest eenvoudige* trillingsvormen. Voorwaarde is, dat niet in aanmerking genomen eigenschappen van het systeem òf als verwaarloozing buiten beschouwing kunnen blijven (rompbewegelijkheid, draaiing van een *gebalanceerd* rolroer), òf een de kritische snelheid *verhoogend* effect hebben (vermoedelijk: de trillingsvorm der eerste buigingsboventoon van den vleugel), in welk geval men een vaak belangrijke *conservatieve* uitkomst voor de kritische *snelheid krijgt.*

71. Het procédé van Kassner-Fingado.

De meest simpele methode, om tot een kritische snelheid voor gekoppelde buigings- en torsie-trillingen van een vleugel te komen, is het zeer volledig uitgewerkte rekensysteem van Kassner-Fingado, gepubliceerd in Luftfahrtforschung, Bd. 13—1936 (*lit.* 5). Feitelijk wordt daar de behandeling ontwikkeld van den — slag- en draaitrillingen uitvoerenden — *oneindig breeden* vleugel, men kàn echter ook een categorie *eindig*-breede vleugels na een kleine omwerking precies volgens de daar gegeven aanwijzingen behandelen.

Een bezwaar is, dat de vleugel aan een aantal zeer bijzondere eischen moet voldoen, wil de methode betrouwbare resultaten opleveren. Strikt genomen moet n.l. voldaan zijn aan de navolgende *voorwaarden* [1])

a. de vleugel moet *rechthoekig* zijn (tapsheid *nul*).
b. de *knooplijnen*, die in de fundamenteele resonantie der vleugelbuiging en der vleugeltorsie optreden, moeten *rechte* lijnen zijn, evenwijdig aan de beschrijvings-as.

Men kan echter ook voor *tapsche* vleugels tot redelijke benaderingsuitkomsten komen door toepassing van de in 61 beschreven kunstgreep, die de gereduceerde snelheid V tot een van x niet afhankelijke *grootheid terugbrengt* (*hetgeen de feitelijke* voorwaarde is vóor de toepassing van Kassner-Fingado). Deze *benadering* accepteerend, kunnen de voorwaarden a en b worden samengevat in den eisch

ab. dat de beschrijvings-as zóó moet kunnen worden gekozen, dat de *voorste neutrale* as en de *knooplijnen der fundamenteele*

[1]) Deze voorwaarden moeten *buiten* de reeds in den aanhef van no. 7 genoemde, vervuld zijn.

buigings- en *torsie-resonantie* lijnen worden, die in iedere dwarsdoorsnee op een constant (niet van x afhankelijk) percentage van de plaatselijke koorde voor of achter de beschrijvings-as liggen. De betreffende constanten kunnen voor ieder der drie lijnen overigens willekeurig verschillend zijn.

De beteekenis van dezen eisch is duidelijk: *wanneer* eraan voldaan is zijn de bewegingen van alle vleugel-dwarsdoorsneden in zekeren zin *gelijkvormig*. De aan de knooplijnliggingen gestelde eisch kan ook worden opgevat als een eisch voor de verdeeling der buigings- en der torsie-amplituden over de vleugelbreedte. Immers: $\frac{\bar{z}_o}{\bar{\varphi}_o}$ geeft (wanneer dit quotiënt reëel is) den afstand van de knooplijn der trilling $\bar{z} = \bar{z}_o e^{i\nu\tau}; \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_o e^{i\nu\tau}$ tot de beschrijvings-as, deze moet als fractie van de koorde *constant* zijn, dus:

$$\frac{\bar{z}_o}{\bar{\varphi}_o t} = \text{reëel en constant.} \tag{93}$$

Beschrijf de beweging nu door bewegingsvergelijkingen van het type (61), (62), daarbij voor de vormveranderingen z en φ ieder slechts één gedaante toelatend, d.i. volgens (65):

$$\bar{z} = e^{i\bar{\nu}\tau} . \bar{q}_{1o} z_1 \qquad \bar{\varphi} = e^{i\bar{\nu}\tau} . \overline{Q}_{1o} \varphi_1 \tag{94}$$

en kies *bovendien*, naar aanleiding van (93):

$$z_1 = \varphi_1 t = (\text{ter afkorting})\ F. \tag{95}$$

Het resultaat is:

$$-\bar{\nu}^2 \int F \left[m_{11} \bar{q}_{1o} F - \frac{m_{12}}{t} \overline{Q}_{1o} F \right] d x + \int F'' \left[b_{11} \bar{q}_{1o} F'' - b_{12} \overline{Q}_{1o} \left(\frac{F}{t}\right)'' \right] d x = = \bar{\nu}^2 \int m_L F (\bar{a}_{11} \bar{q}_{1o} F + \bar{a}_{12} \overline{Q}_{1o} F) \, d x \tag{96}$$

$$-\bar{\nu}^2 \int F \left[-\frac{m_{12}}{t} \bar{q}_{1o} F + \frac{m_{22}}{t^2} \overline{Q}_{1o} F \right] d x + \int \left(\frac{F}{t}\right)'' . \left[-b_{12} \bar{q}_{1o} F'' + b_{22} \overline{Q}_{1o} \left(\frac{F}{t}\right)'' \right] d x + \int \left(\frac{F}{t}\right)' . T \overline{Q}_{1o} \left(\frac{F}{t}\right)' d x = = \bar{\nu}^2 \int m_L F (\bar{a}_{21} \bar{q}_{1o} F + \bar{a}_{22} \overline{Q}_{1o} F) \, d x. \tag{97}$$

Stel $\int F^2 d x = N$

en

$$\frac{1}{N}\int m_{11} F^2 d x = m \qquad \frac{1}{N}\int b_{11} F''^2 d x = c$$

$$\frac{1}{N}\int \frac{m_{12}}{t} F^2 dx = m s_o \qquad \frac{1}{N}\int b_{12} F'' \left(\frac{F}{t}\right)'' dx = e_o c \tag{98}$$

$$\frac{1}{N}\int \frac{m_{22}}{t^2} F^2 d x = m\,(s_o^2 + j_o^2)$$

$$\frac{1}{N}\left[\int b_{22} \left(\frac{F}{t}\right)''^2 d x + \int T \left(\frac{F}{t}\right)'^2 d x\right] = \frac{M_\varphi}{t_1^2} + e_o^2 c$$

benevens

$$\frac{1}{N}\int m_L F^2 d x = \frac{\pi}{4} \varrho\, t_1^2 = \frac{m}{\mu} \tag{99}$$

dan kan, de coëfficiënten $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$, $\bar{a}_{21}$ en $\bar{a}_{22}$ volgens de in no. 61 gegeven aanwijzingen *in hun geheel* voor de integraalteekens brengend[1]), in plaats van (96) en (97) worden geschreven:

$$\left(c - m\bar{\nu}^2 - \frac{m\bar{a}_{11}}{\mu}\bar{\nu}^2\right)\bar{q}_{1o} - -\left(e_o c - m s_o \bar{\nu}^2 + \frac{m\bar{a}_{12}}{\mu}\bar{\nu}^2\right)\overline{Q}_{1o} = 0 \tag{100}$$

$$-\left(e_o c - m s_o \bar{\nu}^2 + \frac{m\bar{a}_{21}}{\mu}\bar{\nu}^2\right)\bar{q}_{1o} + +\left(\frac{M_\varphi}{t_1^2} + e_o^2 c - m(s_o^2 + j_o^2)\bar{\nu}^2 - \frac{m\bar{a}_{22}}{\mu}\bar{\nu}^2\right)\overline{Q}_{1o} = 0 \tag{101}$$

Dus moet

$$\begin{vmatrix} c - m\bar{\nu}^2 - \frac{m\bar{a}_{11}}{\mu}\bar{\nu}^2 & -e_o c + m s_o \bar{\nu}^2 - \frac{m\bar{a}_{12}}{\mu}\bar{\nu}^2 \\ -e_o c + m s_o \bar{\nu}^2 - \frac{m\bar{a}_{21}}{\mu}\bar{\nu}^2 & \frac{M_\varphi}{t_1^2} + e_o^2 c - m\,(s_o^2 + j_o^2)\,\bar{\nu}^2 - \frac{m\bar{a}_{22}}{\mu}\bar{\nu}^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{102}$$

zijn. Vermenigvuldig de eerste *kolom* met $\frac{c_a}{t}$ en tel op bij de tweede. Vermenigvuldig in de resulteerende determinant de eerste *rij* met $\frac{c_v}{t}$ en tel op bij de tweede rij. Men verkrijgt dan, na bovendien alle elementen met —1 te hebben vermenigvuldigd, de volgende uitkomst:

$$\begin{vmatrix} -c + m\bar{\nu}^2 + \frac{m}{\mu}\bar{a}_{11}\bar{\nu}^2 & \left(e_o - \frac{c_a}{t}\right)c - m\left(s_o - \frac{c_a}{t}\right)\bar{\nu}^2 + \frac{m}{\mu}\left(\bar{a}_{11}\frac{c_a}{t} + \bar{a}_{21}\right)\bar{\nu}^2 \\ \left(e_o - \frac{c_v}{t}\right)c - m\left(s_o - \frac{c_v}{t}\right)\bar{\nu}^2 + \frac{m}{\mu}\left(\bar{a}_{11}\frac{c_v}{t} + \bar{a}_{21}\right)\bar{\nu}^2 & \begin{matrix} -\frac{M_\varphi}{t_1^2} - c\left(\frac{c_a c_v}{t^2} - e_o\frac{c_v}{t} - e_o\frac{c_a}{t} + e_o^2\right) + \\ + m\left(s_o^2 + j_o^2 - s_o\frac{c_a}{t} - s_o\frac{c_v}{t} + \frac{c_a c_v}{t^2}\right)\bar{\nu}^2 + \\ + \frac{m}{\mu}\left(\bar{a}_{22} + \frac{c_a}{t}\bar{a}_{21} + \frac{c_v}{t}\bar{a}_{12} + \frac{c_a c_v}{t^2}\bar{a}_{11}\right)\bar{\nu}^2 \end{matrix} \end{vmatrix} = 0 \tag{103}$$

Tusschen de hier gebruikte notatie voor de parameters, die de vleugelconstructie vastleggen, en de door Kassner-Fingado gevolgde bestaat het hieronder in een tabelletje samengevatte verband:

---

1) Men bedenke, dat $\frac{c_a}{t}$ en $\frac{c_v}{t}$ in het gegeven geval *constanten* zijn.

Enkele notatie's van Kassner-Fingado									
Kassner-Fingado	ε	σ_F	m_F	μ	m_L	ι_F	c	η^2	ν
aequivalent	$e_o - \frac{c_v}{t}$	$s_o - e_o$	m	μ	$\frac{m}{\mu}$	j_o	c	$\frac{M_\varphi}{c t_1^2}$	ν

Schrijft men de determinant (103) met de notaties van Kassner-Fingado, dan vindt men, mede lettend op de formules (63), (64), na een korte herleiding:

$$\begin{vmatrix} m_F\bar{\nu}^2 - c + m_L\bar{\nu}^2.4\,i\bar{P}V & -c(\tfrac{1}{2}-\varepsilon) + m_F(\tfrac{1}{2}-\varepsilon-\sigma_F)\bar{\nu}^2 + m_L\bar{\nu}^2(4\bar{P}V^2 + iV) \\ \varepsilon c - m_F(\varepsilon+\sigma_F)\bar{\nu}^2 & -c\left(\eta^2+\varepsilon^2-\frac{\varepsilon}{2}\right) + m_F\left[\iota_F^2 + (\varepsilon+\sigma_F)^2 - \frac{\varepsilon+\sigma_F}{2}\right]\bar{\nu}^2 - m_L\bar{\nu}^2.\tfrac{1}{2}iV \end{vmatrix} = 0 \quad (104)$$

In aanmerking genomen, dat de *traagheidswerking der meetrillende lucht* in de formules (96) en (97), waarvan de berekening uitging, *opgenomen is in de coëfficiënten* m_{11}, m_{12} en m_{22} (zie de formules (44) t/m (47)), blijkt de determinant (104) *exact overeen te stemmen* met de karakteristieke vergelijking van Kassner-Fingado (coëfficiëntendeterminant van de *laatste* vergelijking op pag. 381 en de *eerste* op pag. 382 in *lit.* 5). Hiermede is de mathematische aequivalentie van de geschetste behandeling van den vleugel van eindige breedte met de behandeling van den oneindig breeden vleugel van Kassner-Fingado aangetoond.

Voor de *numerieke oplossing* van de vergelijkingen (96), (97) zal men in verband met het bovenstaande zonder meer gebruik kunnen maken van de fraaie, door Kassner en Fingado uitgewerkte nomogrammen.

Het eenige, wat hierbij in het oog moet worden gehouden, is dat dan ditmaal de traagheidswerking van de meetrillende lucht niet in de coëfficiënten m_{11}, m_{12}, m_{22} *moet worden verwerkt, daar de genoemde nomogrammen zóó zijn geconstrueerd dat zij dit effect zèlf reeds in rekening brengen.*

De vergelijkingen (100), (101) bevatten *drie* constanten, die afhangen van de elastische eigenschappen van den vleugel, n.l. c, e_o en M_φ. Het aequivalent in de formule (104) wordt gevormd door de Kassner-Fingado'sche parameters c, ε en η^2. *Twee* dezer parameters kunnen steeds worden bepaald, door den eisch te stellen, dat de vergelijkingen (100), (101), wanneer hierin $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \bar{a}_{22} = 0$ wordt gesteld, eigenfrequentie's moeten leveren, die gelijk zijn aan de beide door de *standtrillingsproef* bepaalde. Zij ν_B de experimenteel vastgestelde fundamenteele eigenfrequentie der vleugelbuiging *en* ν_T die der vleugeltorsie, dan moet zoowel [1])

$$\begin{vmatrix} c - m\nu_B^2 & -e_o c + m s_o \nu_B^2 \\ -e_o c + m s_o \nu_B^2 & \frac{M_\varphi}{t_1^2} + e_o^2 c - m(s_o^2 + j_o^2)\nu_B^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (105)$$

als

$$\begin{vmatrix} c - m\nu_T^2 & -e_o c + m s_o \nu_T^2 \\ -e_o c + m s_o \nu_T^2 & \frac{M_\varphi}{t_1^2} + e_o^2 c - m(s_o^2 + j_o^2)\nu_T^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (106)$$

zijn. Dit zijn twee vergelijkingen voor de 3 onbekenden c, e_o en M_φ, die *steeds bruikbaar* zijn.

Volgens no. 4 kan een *derde* en een *vierde* betrekking uit de bij de standtrilling bepaalde trillingsvormen worden verkregen. Men heeft n.l. volgens (100):

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\bar{q}_{1o}}{\bar{Q}_{1o}}\right)_B &= \frac{e_o c - m s_o \nu_B^2}{c - m\nu_B^2} \\ \left(\frac{\bar{q}_{1o}}{\bar{Q}_{1o}}\right)_T &= \frac{e_o c - m s_o \nu_T^2}{c - m\nu_T^2} \end{aligned}\right\} \quad (107)$$

De waarden van de linkerleden dezer betrekkingen kunnen theoretisch worden ontleend aan de resultaten van de standtrillingsproef. Reeds is echter uiteengezet (no. 4), dat de uitkomsten van de formules (107) vaak van problematische waarde zijn. *In het gegeven geval geldt dit te meer,* daar een vleugel slechts zelden zóó nauwkeurig aan de voorwaarde (93) voldoet, dat zonder moeite éénduidige waarden voor $\left(\frac{\bar{q}_{1o}}{\bar{Q}_{1o}}\right)_B$ en $\left(\frac{\bar{q}_{1o}}{\bar{Q}_{1o}}\right)_T$ kunnen worden vastgesteld. Mocht dit laatste *wel* het geval zijn, en leveren de vergelijkingen (105) en (106) in combinatie met *ieder* der vergelijkingen (107) bovendien geheel of nagenoeg overeenstemmende waarden voor c, e_o en M_φ, (deze 3 onbekenden zijn door de 4 vergelijkingen overbepaald), dan mag het zeker worden geacht dat het procédé van Kassner en Fingado tot zeer nauwkeurige uitkomsten zal voeren.

Men kan het gebruik van de formules (107) ontgaan, door de constante e_o, die de plaats vastlegt van „de" elastische as van den vleugel, vast te stellen door een *torsieproef* met den vleugel [1]) (zie no. 19). Deze proef levert n.l. juist voor vleugels van het type, die volgens Kassner-Fingado op eenigszins redelijke wijze kunnen worden behandeld, in den regel bruikbare resultaten. De constanten c en M_φ worden dan uit de vergelijkingen (105), (106) opgelost.

Nadat de waarden van alle in de tabel op deze bladzij genoemde Kassner-Fingado'sche parameters zijn vastgelegd, leveren de nomogrammen van Kassner-Fingado (*lit.* 5) direct de *kritische waarden* van V en ν, voor het geval, dat *materiaaldemping kan*

[1]) Vanzelfsprekend moeten m, s_o en j nu *wel* worden bepaald, uitgaande van door *(44) t/m (47)* gegeven functie's m_{11}, m_{12} en m_{22}.

[1]) Nu moet de positie van de elastische as *nauwkeurig* worden vastgesteld. Zij behoeft natuurlijk niet samen te vallen met de beschrijvings-as, daar bij de keuze van de plaats van deze as volgens no. 5 slechts een *geschatte* ligging van de elastische as als *richtlijn* is gebruikt.

worden verwaarloosd. Is dit niet het geval, dan kan de grafische methode van Kassner, beschreven in *lit.* 6, worden gebruikt. Men kent aan de aldaar gebruikte parameters h, ε_d en η_d de uit de navolgende betrekkingen volgende waarden toe:

$$\varepsilon_d = \varepsilon = e_o - \frac{c_v}{t} \qquad (108)$$

$$h = a_B \text{ (zie no. 32 en 18)} \qquad (109)$$

$$\eta_d = \sqrt{\frac{a_\varphi}{a_B t_1^2}} \text{ (zie no. 18)} \qquad (110)$$

De kritische snelheid zelf volgt uit de formule

$$v_{krit} = V_{krit} \cdot \nu_{krit} \cdot t_{eff} \qquad (111)$$

De *effectieve koorde* t_{eff} wordt bepaald volgens de in no. *61* gegeven voorschriften.

Samenvattend gaat men als volgt te werk:

a. Men construeert aan de hand van amplitudemetingen tijdens de standtrillingsproef amplitudeverdeelingsfunctie's, die voldoen aan de betrekking (95). Verondersteld moet worden, dat dit op geschikte wijze met een redelijke nauwkeurigheid mogelijk is.

b. Men berekent, uitgaande van vleugelteekeningen en van een gewichtsanalyse van den vleugel, de navolgende constanten [1]):

$$\left.\begin{aligned} N &= \int F^2\,dx \\ s_o &= \frac{1}{N\,m}\int m_{12} F^2\,dx \\ t_1^2 &= \frac{1}{N}\int t^2 F^2\,dx \\ m &= \frac{1}{N}\int m_{11} F^2\,dx \\ j_o^2 &= \frac{1}{N\,m}\int m_{22} F^2\,dx - s_o^2 \end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Voor m, s_o en j_o^2 worden ieder *twee* waarden berekend, de *eerste* door de traagheidswerking van de meetrillende lucht volgens (44) t/m (47) in m_{11}, m_{12} en m_{22} op te nemen, de *tweede* door *geen massavergrooting* voor meetrillende lucht in aanmerking te nemen. Het eerste stel waarden wordt gebruikt bij aan de *standtrillingsproef* gekoppelde berekeningen, het tweede stel vormt een deel der getallengrondslagen voor de toepassing van de nomogrammen van Kassner-Fingado.

c. Men bepaalt de ligging van de elastische as van den vleugel door uitvoering van een torsieproef met den vleugel (zie no. 19). De grootheid e_o is gelijk aan het quotiënt van den afstand van deze as tot de beschrijvings-as (positief te rekenen wanneer de laatstgenoemde as vóór ligt) en de vleugelkoorde. Dit quotiënt is gewoonlijk eenigermate afhankelijk van de ligging van de dwarsdoorsnede van den vleugel, waarvoor het wordt bepaald. Men aanvaardt voor de *constante* e_o een doelmatig te achten gemiddelde. (geschikt is in het algemeen die waarde, die het quotiënt bij het midden van het rolroer heeft).

d. Men lost de constanten c en M_φ op uit de vergelijkingen (105) en (106), nadat daarin voor m, s_o en j_o de waarden zijn gesubstitueerd, berekend onder *inachtname* van de traagheidswerking der meetrillende lucht.

Deze determinanten leveren na uitwerking de vergelijkingen:

$$c\frac{M_\varphi}{t_1^2} - \left[c(s_o - e_o)^2 + c\,j_o^2 + \frac{M_\varphi}{t_1^2}\right] m\,\nu_B^2 + m^2 j_o^2 \nu_B^4 = 0$$

$$c\frac{M_\varphi}{t_1^2} - \left[c(s_o - e_o)^2 + c\,j_o^2 + \frac{M_\varphi}{t_1^2}\right] m\,\nu_T^2 + m^2 j_o^2 \nu_T^4 = 0$$

Men stelle

$$c\{(s_o - e_o)^2 + j_o^2\} + \frac{M_\varphi}{t_1^2} = x \qquad (113)$$

$$c\frac{M_\varphi}{t_1^2} = y \qquad (114)$$

en vindt:

$$x = m\,j_o^2(\nu_T^2 + \nu_B^2) \qquad y = m^2 j_o^2 \nu_B^2 \nu_T^2 \qquad (115)$$

Daaruit volgt voor c de *vierkantsvergelijking*

$$c^2 - \frac{x}{(s_o - e_o)^2 + j_o^2}\,c + \frac{y}{(s_o - e_o)^2 + j_o^2} = 0 \qquad (116)$$

Men neemt c gelijk aan de *kleinste* wortel. (Feitelijk: mits $\nu_B < \nu_T$ is, hetgeen echter steeds het geval is. De grootste wortel heeft geen beteekenis, tenzij $\nu_B > \nu_T$ zou zijn). Daarna volgt:

$$M_\varphi = \frac{y\,t_1^2}{c}\,.$$

e. Men verifiëert, of de bij de standtrilling gevonden fundamenteele *trillingsvormen* der vleugelbuiging en der vleugeltorsie globaal genomen de betrekkingen (107) toelaten. Is dit in geenen deele het geval, dan kon de Kassner-Fingado'sche methode niet met betrouwbaar resultaat worden toegepast.

f. Men berekent V_{krit} *en* ν_{krit} met de nomogrammen van Kassner-Fingado, of, wanneer materiaaldemping in acht moet worden genomen, volgens het recept van Kassner in *lit.* 6. Men gaat daarbij uit van constanten, berekend uit de betrekkingen van de tabel op pag. 19 en uit de formules (108), (109) en (110). Voor m, s_o en j_o worden daarbij *die* waarden gebruikt, waarin *geen* traagheidswerking van meetrillende lucht is verwerkt.

g. Men berekent v_{krit} volgens de formule (111), na t_{eff} te hebben bepaald in overeenstemming met onder 61 gegeven aanwijzingen.

Wanneer geen torsieproef met den vleugel is uitgevoerd, kan men e_o ook trachten af te leiden uit de betrekkingen (107), (tesamen met (105) en (106)). Schrijf ter afkorting:

$$\left(\frac{\bar{q}_{1o}}{\bar{Q}_{1o}}\right)_B = \lambda_B \quad ; \quad \left(\frac{\bar{q}_{1o}}{\bar{Q}_{1o}}\right)_T = \lambda_T \qquad (117)$$

dan vindt men uit (105), (106) en de *eerste* betrekking (107):

$$e_o = \frac{s_o \nu_B^2[(\lambda_B - s_o)^2 + j_o^2] + \lambda_B j_o^2(\nu_T^2 - \nu_B^2)}{\nu_B^2[(\lambda_B - s_o)^2 + j_o^2] + j_o^2(\nu_T^2 - \nu_B^2)}\,. \qquad (118)$$

[1]) Integratie's over den vleugel worden langs numerieken weg, of door planimetreering in een figuur, uitgevoerd.

Gebruikt men i.p.v. de *eerste* de *tweede* vergelijking (107), dan lost men op

$$e_o = \frac{s_o \nu_T^2 [(\lambda_T - s_o)^2 + j_o^2] - \lambda_T j_o^2 (\nu_T^2 - \nu_B^2)}{\nu_T^2 [(\lambda_T - s_o)^2 + j_o^2] - j_o^2 (\nu_T^2 - \nu_B^2)}. \quad (119)$$

Beide formules moeten *dezelfde* uitkomst opleveren (d.w.z. zij mogen in de praktijk *niet te zeer uiteenloopende* getallen geven!) Het komt vaak voor, dat slechts één der beide in de fundamenteele resonantie's gevonden knooplijnen redelijk nauwkeurig aan den gestelden eisch, op een constant percentage van de koorde t.o.v. de *beschrijvings-as te liggen*, voldoet. Men kan dan trachten e_o uit de *eene* „correcte" knooplijn af te leiden, en de andere buiten beschouwing laten. (d.w.z. men *gebruikt slechts één der formules* (118), (119).) Men controleere in een dergelijk geval echter steeds zooveel mogelijk, of de uitkomsten aannemelijk zijn!

72. Berekening, gebaseerd op de toelating van één vormveranderingscomponent voor vleugelbuiging en één voor vleugeltorsie.

Deze berekening sluit nauw aan bij de vorige, het eenige verschil is, dat de betrekking (95) vervalt: d.w.z. de vorm van de amplitudeverdeeling over den vleugel van de *buiging mag ditmaal willekeurig* verschillen van den vorm der torsieamplitude-verdeeling. De bewegingsvergelijkingen zijn van het type (61), (62), zij luiden:

$$-\bar{\nu}^2 \int z_1 [m_{11} \bar{q}_{10} z_1 - m_{12} \overline{Q}_{10} \varphi_1] dx +$$
$$+ \int z_1'' [b_{11} \bar{q}_{10} z_1'' - b_{12} \overline{Q}_{10} \varphi_1''] dx =$$
$$= \bar{\nu}^2 \int m_L z_1 (\bar{a}_{11} \bar{q}_{10} z_1 + \bar{a}_{12} t \overline{Q}_{10} \varphi_1) dx \quad (120)$$

$$-\bar{\nu}^2 \int \varphi_1 [- m_{12} \bar{q}_{10} z_1 + m_{22} \overline{Q}_{10} \varphi_1] dx +$$
$$+ \int \varphi_1'' [- b_{12} \bar{q}_{10} z_1'' + b_{22} \overline{Q}_{10} \varphi_1''] dx +$$
$$+ \int \overline{Q}_{10} T \varphi_1'^2 dx =$$
$$= \bar{\nu}^2 \int m_L \varphi_1 t (\bar{a}_{21} \bar{q}_{10} z_1 + \bar{a}_{22} t \overline{Q}_{10} \varphi_1) dx \quad (121)$$

Buiten de in den aanhef van no. 7 genoemde voorwaarden behoeft aan de vleugelconstructie in principe geen enkele bijzondere eisch te worden gesteld. Dit wil echter *niet* zeggen, dat de nauwkeurigheid van de uitkomsten altijd even goed zal zijn. Hier vormt de nauwkeurigheid, waarmede de *experimenteel* onderzochte fundamenteele eigentrillingen der vleugelbuiging en vleugeltorsie worden beschreven, weder de *toetssteen*.

Men kiest de deformatiefunctie z_1 gelijk aan de grootste uitwijkingen (amplituden) van de beschrijvings-as van den vleugel in de fundamenteele resonantie der vleugelbuiging, en de deformatiefunctie φ_1 overeenkomstig de verdeeling der torsie-amplituden in de fundamenteele resonantie der vleugeltorsie.

De voornoemde *amplitude-verdeelingen* worden door de standtrillingsproef vastgelegd. Is deze proef niet uitgevoerd, dan kieze men voor z_1 en φ_1 *aannemelijke, algebraïsch gedefiniëerde* functie's[1]).

[1]) Men gebruikt *in dit geval* algebraïsch gedefiniëerde deformatiefunctie's, teneinde *afgeleiden* van z_1 en φ_1 naar x, noodig voor de stijfheidsberekening, *analytisch* te kunnen bepalen.

Leiddraad bij deze constructie vormen in ieder geval de *randvoorwaarden* voor de deformatiefunctie's (zie b.v. (19)) en voor het overige de ervaring.

Het spreekt vanzelf, dat de heele berekening *beter* zal zijn, naarmate de vorm der vleugel*torsie*, die optreedt in de *fundamenteele buigingsresonantie*, *beter* blijkt overeen te komen met den deformatie-vorm φ_1, en naarmate de vorm der vleugel*buiging*, aanwezig in de *torsie-resonantie*, beter met z_1 overeenkomt. In het algemeen blijkt dit vaak vrij *goed het geval te zijn*, hoewel de *buiging*, *gevonden* in de torsieresonantie, moeilijkheden kan geven (door *„bijmenging"* van den trillingsvorm van den eersten buigings-boventoon in den trillingsvorm der torsie-resonantie).

De laatstgenoemde afwijking behoeft de nauwkeurigheid van de uitkomst voor de kritische snelheid niet aanmerkelijk te beïnvloeden (men verkrijgt vermoedelijk een *conservatieve* uitkomst), echter kan zij de afleiding van elastische constanten uit de samenkoppeling van formules en standtrillingsproef min of meer ernstig bemoeilijken.

Ter afkorting worden ingevoerd:

$$\int z_1 \varphi_1 dx = N$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{N}\int m_{11} z_1^2 dx = m & \frac{1}{N}\int b_{11} z_1''^2 dx = c \\ \frac{1}{N}\int m_{12} z_1 \varphi_1 dx = m\,s\,; & \frac{1}{N}\int b_{12} z_1'' \varphi_1'' dx = e\,c \\ \frac{1}{N}\int m_{22} \varphi_1^2 dx = m(s^2 + r^2) & \\ \frac{1}{N}\int b_{22} \varphi_1''^2 dx + \frac{1}{N}\int T \varphi_1'^2 dx = M_\varphi + e^2 c & \end{array}\right\} \quad (122)$$

Daarmede kan voor (120) en (121) worden geschreven:

$$(c - m\bar{\nu}^2)\bar{q}_{10} - (e\,c - m\,s\,\bar{\nu}^2)\overline{Q}_{10} =$$
$$= \frac{\bar{\nu}^2}{N} [\bar{q}_{10} \int m_L \bar{a}_{11} z_1^2 dx +$$
$$+ \overline{Q}_{10} \int m_L \bar{a}_{12} t z_1 \varphi_1 dx] \quad (123)$$

$$-(c\,e - m\,s\,\bar{\nu}^2)\bar{q}_{10} + [M_\varphi + e^2 c - m(s^2 + r^2)\bar{\nu}^2]\overline{Q}_{10} =$$
$$= \frac{\bar{\nu}^2}{N} [\bar{q}_{10} \int m_L \bar{a}_{21} t z_1 \varphi_1 dx +$$
$$+ \overline{Q}_{10} \int m_L \bar{a}_{22} t^2 \varphi_1^2 dx] \quad (124)$$

Wanneer geen standtrillingsproef is uitgevoerd, moeten *alle* constanten (122) worden *berekend* (Integratie's langs numerieken of grafischen weg). De functie's $m_{11} \ldots m_{22}$ worden overeenkomstig (44) t/m (47) genomen, men bepaalt hen in ieder geval „voor de luchtdichtheid der standtrillingsproef" *en* verder voor alle waarden van ϱ, waarvoor men de kritische snelheid wenscht te berekenen. (Men heeft volgens (44) en (47):

$$m = \frac{1}{N}\int (m_{11})_o z_1^2 dx + \frac{\pi}{4} \varrho \int t^2 z_1^2 dx.$$

Men berekent de beide integralen natuurlijk *apart* en vindt dan verder zonder moeite de waarde van m voor iedere gewenschte luchtdichtheid).

Is *wel* een standtrillingsproef uitgevoerd (en eventueel ook een torsieproef), dan worden de constanten e, c en M_φ uit den eisch afgeleid, dat (123) en (124) de twee fundamenteele eigentrillingen van den vleugel in stilstaande lucht moeten beschrijven.

De experimenteel bepaalde eigenfrequentie's ν_B en ν_T moeten voldoen aan de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} c - m\nu^2 & -(ec - ms\nu^2) \\ -(ec - ms\nu^2) & M_\varphi + e^2 c - m(s^2+r^2)\nu^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (125)$$

Dit geeft *twee* altijd bruikbare vergelijkingen voor e, c en M_φ.

De experimenteel bepaalde fundamenteele eigentrillingsvormen, vastgelegd door

$$\lambda_B = \left(\frac{\bar{q}_{10}}{\bar{Q}_{10}}\right)_B \text{ en } \lambda_T = \left(\frac{\bar{q}_{10}}{\bar{Q}_{10}}\right)_T \quad (126)$$

moeten voldoen aan de vergelijkingen:

$$\lambda_B = \frac{ec - ms\nu_B^2}{c - m\nu_B^2} \; ; \; \lambda_T = \frac{ec - ms\nu_T^2}{c - m\nu_T^2} \quad (127)$$

waardoor in het geheel 4 betrekkingen zijn verkregen, die de onbekenden e, c, M_φ *over* bepalen. [1]) Onderlinge overeenstemming verzekert hooge nauwkeurigheid van de formules. Het gebruik van (127) kan echter op de bekende bezwaren afstuiten. Men kan *dan* trachten gebruik te maken van een torsieproef en e gelijk stellen aan een *gemiddelde* van den afstand tusschen elastische as en beschrijvings-as (e wordt positief genomen wanneer de laatste as vóór ligt). Wanneer geen definitieve en betrouwbare waarde voor e kan worden gevonden, moet de heele rekenmethode in het betreffende geval minder geschikt worden geacht.

Om de kritische snelheid uit te kunnen rekenen, moeten ook de integralen in het rechterlid van (123) en (124) worden bepaald. Men volge hierbij één der onder no. 6 genoemde methoden.

721. Verwerking der luchtkrachten volgens in no. 61 gegeven aanwijzingen.

Valt de keuze op 61, dan wordt (zie (63), (64) en (87)):

$$\int m_L \bar{a}_{11} z_1^2\, dx = -4iV\bar{P}\int m_L z_1^2\, dx \equiv$$
$$\equiv -(4BV + 4iAV) \cdot \int m_L z_1^2\, dx$$

$$\int m_L \bar{a}_{12}\, t z_1 \varphi_1\, dx =$$
$$= (4\bar{P}V^2 + iV)\int m_L t z_1 \varphi_1\, dx +$$
$$+ 4iV\bar{P}\int m_L c_a z_1 \varphi_1\, dx \equiv [4AV^2 +$$
$$+ i(V - 4BV^2)]\int m_L t z_1 \varphi_1\, dx +$$
$$+ (4BV + 4iAV) \cdot \int m_L c_a z_1 \varphi_1\, dx. \quad (128)$$

$$\int m_L \bar{a}_{21}\, t z_1 \varphi_1\, dx = 4iV\bar{P}\int m_L c_v z_1 \varphi_1\, dx \equiv$$
$$\equiv (4BV + 4iAV)\int m_L c_v z_1 \varphi_1\, dx$$

$$\int m_L \bar{a}_{22}\, t^2 \varphi_1^2\, dx = -4\bar{P}V^2\int m_L c_v t \varphi_1^2\, dx -$$
$$-4i\bar{P}V\int m_L c_a c_v \varphi_1^2\, dx - iV\int m_L c_a t \varphi_1^2\, dx =$$
$$= -(4AV^2 - 4iBV^2)\int m_L c_v t \varphi_1^2\, dx -$$
$$-(4BV + 4iAV)\int m_L c_a c_v \varphi_1^2\, dx -$$
$$- iV\int m_L c_a t \varphi_1^2\, dx$$

Stel ter afkorting:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{N}\int m_L z_1^2\, dx &= \mu_{11} \\
\frac{1}{N}\int m_L t z_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{12} \\
\frac{1}{N}\int m_L c_a z_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{12}^a \\
\frac{1}{N}\int m_L c_v z_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{12}^v \\
\frac{1}{N}\int m_L c_a t \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^a \\
\frac{1}{N}\int m_L c_a c_v \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^{av} \\
\frac{1}{N}\int m_L c_v t \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^v
\end{aligned}\right\} \quad (129)$$

Al deze constanten kunnen gemakkelijk door numerieke of grafische integratie worden bepaald.

Stel vervolgens

$$\left.\begin{aligned} 4BV &= p_1 & 4AV &= p_1' \\ 4AV^2 &= p_2 & 4BV^2 &= p_2' \end{aligned}\right\} \quad (131)$$

Deze functie's zijn alle in tabel 1 (aan het eind van het rapport) in getallenvorm gegeven.

De determinant der vergelijkingen (123), (124) wordt dan:

$$\begin{vmatrix} c - m\bar{\nu}^2 + \mu_{11}\bar{\nu}^2(p_1 + ip_1') & \begin{aligned} &-ec + ms\bar{\nu}^2 - \mu_{12}\bar{\nu}^2[p_2 + i(V - p_2')] - \\ &\qquad - \mu_{12}^a\bar{\nu}^2 \cdot (p_1 + ip_1') \end{aligned} \\ -ec + ms\bar{\nu}^2 - \mu_{12}^v\bar{\nu}^2(p_1 + ip_1') & \begin{aligned} &M_\varphi + e^2c - m(s^2+r^2)\bar{\nu}^2 + \mu_{22}^v\bar{\nu}^2(p_2 - ip_2') + \\ &\qquad + \mu_{22}^{av}\bar{\nu}^2(p_1 + ip_1') + \mu_{22}^a\bar{\nu}^2 \cdot iV \end{aligned} \end{vmatrix} = 0 \quad (132)$$

In de vergelijkingen kan materiaaldemping worden ingevoerd door de elasticiteitsparameters c en M_φ complex te stellen:

$$\left.\begin{aligned} M_\varphi &\equiv \bar{M}_\varphi = M_\varphi(1 + i\alpha_\varphi) \\ c &\equiv \bar{c} = c(1 + i\alpha_B) \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

De dempingsparameters α_B en α_φ zijn altijd klein.

---

1) Men kan gebruik maken van naar analogie van (118) en (119) gevormde formules:

$$\begin{aligned} e &= \frac{s\nu_B^2[(\lambda_B - s)^2 + r^2] + \lambda_B r^2(\nu_T^2 - \nu_B^2)}{\nu_B^2[(\lambda_B - s)^2 + r^2] + r^2(\nu_T^2 - \nu_B^2)} \\ e &= \frac{s\nu_T^2[(\lambda_T - s)^2 + r^2] - \lambda_T r^2(\nu_T^2 - \nu_B^2)}{\nu_T^2[(\lambda_T - s)^2 + r^2] - r^2(\nu_T^2 - \nu_B^2)} \end{aligned} \quad (130)$$

t.o.v. de eenheid, zoodat quadraten en onderlinge producten ervan kunnen worden verwaarloosd.

De kritische trilling wordt door (132) bepaald: men stelt dat ν reëel is (*ongedempte* trilling!) en verkrijgt dan uit (132) twee *reëele* vergelijkingen voor de onbekenden V en ν. De *oplossingen* zijn *kritische* waarden van V en ν. Schrijft men voor (132) (eventueel (133) eerst substitueerend):

$$\begin{vmatrix} A_{11}+iA_{11}' & A_{12}+iA_{12}' \\ A_{21}+iA_{21}' & A_{22}+iA_{22}' \end{vmatrix} = 0 \qquad (134)$$

dan ontstaan hieruit door *uitwerking* en *splitsing* in reëel en imaginair de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} A_{11}A_{22}-A_{11}'A_{22}'-A_{12}A_{21}+A_{12}'A_{21}'=0 \\ A_{11}A_{22}'+A_{11}'A_{22}-A_{12}A_{21}'-A_{12}'A_{21}=0 \end{aligned}\right\} \quad (135)$$

Men heeft:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= c+\nu^2[-m+\mu_{11}p_1] \\ A_{12} &= -ec+\nu^2[ms-\mu_{12}p_2-\mu_{12}{}^a p_1] \\ A_{11}' &= a_B c+\nu^2.\mu_{11}p_1' \\ A_{12}' &= -e a_B c-\nu^2[\mu_{12}(V-p_2')+\mu_{12}{}^a p_1'] \\ A_{21} &= -ec+\nu^2[ms-\mu_{12}{}^v p_1] \\ A_{22} &= M_\varphi+e^2c+\nu^2[-m(s^2+r^2)+ \\ &\qquad +\mu_{22}{}^v p_2+\mu_{22}{}^{av}p_1] \\ A_{21}' &= -e a_B c-\nu^2.\mu_{12}{}^v p_1' \\ A_{22}' &= a_\varphi M_\varphi+e^2 a_B c+\nu^2[-\mu_{22}{}^v p_2'+ \\ &\qquad +\mu_{22}{}^{av}p_1'+\mu_{22}{}^a V] \end{aligned}\right\} \quad (136)$$

Men losse steeds eerst de vergelijkingen voor het dempingsvrije systeem op $(a_B = a_\varphi = 0)$. Deze oplossing levert een uitgangspunt voor de uitwerking van het systeem mét demping. De werkwijze is in principe de navolgende:

> Substitueer een aantal waarden voor V in (135). Los ν op uit de tweede vergelijking (135) voor àl die waarden van V. Substitueer de *wortels* in de eerste vergelijking (135) en maak een grafiek, die het linkerlid van deze vergelijking op V uitzet. Het nulpunt van die curve geeft V_{krit}.
>
> Men vindt daarbij (uit een grafiek van de wortels van de eerste vergelijking (135), op V. uitgezet) gemakkelijk ν_{krit}.

Tenslotte wordt

$$v_{krit} = V_{krit}.\nu_{krit}.t_{eff}$$

waarin t_{eff} volgens de in 61 gegeven aanwijzingen wordt vastgesteld.

722. Gebruik van Taylor-reeksen voor de functie's der luchtkrachten.

Behandelt men de termen die de luchtkrachten weergeven op de onder 62 geschetste wijze, dan wordt de uitwerking wat ingewikkelder, naar het zich laat aanzien echter in ruil voor *nauwkeuriger* uitkomsten. Het lijkt in den regel voldoende, in de nu naar het voorbeeld van (92) toe te passen *reeksontwikkelingen* slechts *twee* termen aan te houden. Alleen wanneer de vleugel zeer tapsch is kan het aanbeveling verdienen, drie termen in aanmerking te nemen. Hieronder wordt eenvoudigheidshalve alleen de ontwikkeling met reeksen van 2 termen uitgewerkt, men kan naar dit voorbeeld het meer volledige geval zoo noodig echter gemakkelijk zelf ontwikkelen.

Men kiest *volgens in 62 gegeven aanwijzingen* een gemiddelde vleugelkoorde t_o en denkt zich de gereduceerde snelheid V_o steeds *op die koorde* betrokken. Naar het voorbeeld van (92) vormt men vervolgens de na twee termen afgebroken Taylorreeksen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_1(V_o)+V_o\left(\frac{dp_1}{dV}\right)_{V_o}\frac{t_o-t}{t} = p_{1o}+p_{11}\frac{t_o-t}{t} \\ p_1' &= p_{1o}'+p_{11}'\frac{t_o-t}{t} \\ p_2 &= p_{2o}+p_{21}\frac{t_o-t}{t} \\ p_2' &= p_{2o}'+p_{21}'\frac{t_o-t}{t} \\ V &= V_o+V_o\frac{t_o-t}{t} \end{aligned}\right. \qquad (137)$$

De functie's $p_{1o} \ldots p'_{2o}$ komen overeen met de in tabel 1 opgenomen functie's $p_1 \ldots p'_2$ (alleen heet de variabele nu V_o), de functie's $p_{11} \ldots p'_{21}$ zijn in de tabel apart in getallenvorm opgenomen.[1])

Men vult nu het stelsel (129) aan met de afkortingen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N}\int m_L\frac{t_o-t}{t}z_1^2\,dx &= \lambda_{11} \\ \frac{1}{N}\int m_L(t_o-t)\,z_1\varphi_1\,dx &= \lambda_{12} \\ \frac{1}{N}\int m_L c_a\frac{t_o-t}{t}z_1\varphi_1\,dx &= \lambda_{12}{}^a \\ \frac{1}{N}\int m_L c_v\frac{t_o-t}{t}z_1\varphi_1\,dx &= \lambda_{12}{}^v \\ \frac{1}{N}\int m_L c_a(t_o-t)\,\varphi_1^2\,dx &= \lambda_{22}{}^a \end{aligned}\right\} \quad (138)$$

---

[1]) Wenscht men aan de reeksen (137) een derde, in $\frac{t_o-t}{t}$ quadratische, term toe te voegen, dan kan men schrijven

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{1o}+p_{11}\frac{t_o-t}{t}+p_{12}\left(\frac{t_o-t}{t}\right)^2 \\ p_1' &= p_{1o}'+p_{11}'\frac{t_o-t}{t}+p_{12}'\left(\frac{t_o-t}{t}\right)^2 \\ p_2 &= p_{2o}+p_{21}\frac{t_o-t}{t}+p_{22}\left(\frac{t_o-t}{t}\right)^2 \\ p_2' &= p_{2o}'+p_{21}'\frac{t_o-t}{t}+p_{22}'\left(\frac{t_o-t}{t}\right)^2 \\ V &= V_o+V_o\frac{t_o-t}{t}+\tfrac{1}{2}V_o{}^2\left(\frac{t_o-t}{t}\right)^2 \end{aligned} \qquad (137a)$$

Ook de functie's p_{12}, p'_{12}, p_{22} en p'_{22} zijn in tabel 1 in getallenvorm gegeven. De in de bovenstaande formules vervatte uitbreiding wordt, zooals zoo juist werd vermeld, in den tekst verder niet in aanmerking genomen. Zij kan echter gemakkelijk worden aangebracht.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{N}\int m_L c_a c_v \frac{t_o - t}{t} \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{22}^{av} \\ &\frac{1}{N}\int m_L c_v (t_o - t)\, \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{22}^{v}\end{aligned}\right\} \quad (138)$$

Al deze constanten kunnen weer gemakkelijk worden bepaald.

Na een korte herleiding vindt men vervolgens uit (128), (129), (137) en (138):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\int m_L \bar{a}_{11} z_1^2 \, dx = -\mu_{11}(p_{1o} + i p_{1o}') - \\
&\qquad -\lambda_{11}(p_{11} + i p_{11}') \\
&\frac{1}{N}\int m_L \bar{a}_{12} t z_1 \varphi_1 \, dx = \\
&\quad = \mu_{12}[p_{2o} + i(V_o - p_{2o}')] + \\
&\quad + \lambda_{12}[p_{21} + i(V_o - p_{21}')] + \\
&\quad + \mu_{12}^{a}(p_{1o} + i p_{1o}') + \lambda_{12}^{a}(p_{11} + i p_{11}') \\
&\frac{1}{N}\int m_L \bar{a}_{21} t z_1 \varphi_1 \, dx = \\
&\quad = \mu_{12}^{v}(p_{1o} + i p_{1o}') + \lambda_{12}^{v}(p_{11} + i p_{11}') \\
&\frac{1}{N}\int m_L \bar{a}_{22} t^2 \varphi^2 \, dx = -\mu_{22}^{v}(p_{2o} - i p_{2o}') - \\
&\quad -\lambda_{22}^{v}(p_{21} - i p_{21}') - \mu_{22}^{av}(p_{1o} + i p_{1o}') - \\
&\quad -\lambda_{22}^{av}(p_{11} + i p_{11}') - i V_o(\mu_{22}^{a} + \lambda_{22}^{a})
\end{aligned}\right\} \quad (139)$$

Substitueert men deze uitdrukkingen in de bewegingsvergelijkingen (123), (124), dan wordt de *coëfficiëntendeterminant* opnieuw een uitdrukking, die zich laat *splits*en in reëele vergelijkingen van het type (135). De formules (136) moeten dan echter worden *vervangen* door de navolgenden:

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= c + \nu^2[-m + \mu_{11} p_{1o} + \lambda_{11} p_{11}] \\
A_{11}' &= a_B c + \nu^2(\mu_{11} p_{1o}' + \lambda_{11} p_{11}') \\
A_{21} &= -e c + \nu^2[ms - \mu_{12}^{v} p_{1o} - \lambda_{12}^{v} p_{11}] \\
A_{21}' &= -e a_B c - \nu^2(\mu_{12}^{v} p_{1o}' + \lambda_{12}^{v} p_{11}') \\
A_{12} &= -e c + \nu^2[ms - \mu_{12} p_{2o} - \\
&\qquad -\lambda_{12} p_{21} - \mu_{12}^{a} p_{1o} - \lambda_{12}^{a} p_{11}]
\end{aligned}\right\} \quad (140)$$

$$A_{12}' = -e a_B c - \nu^2[\mu_{12}(V_o - p_{2o}') + \\ + \lambda_{12}(V_o - p_{21}') + \mu_{12}^{a} p_{1o}' + \lambda_{12}^{a} p_{11}']$$

$$A_{22} = M_\varphi + e^2 c + \nu^2[-m(s^2 + r^2) + \\ + \mu_{22}^{v} p_{2o} + \lambda_{22}^{v} p_{21} + \mu_{22}^{av} p_{1o} + \lambda_{22}^{av} p_{11}] \quad (140)$$

$$A_{22}' = a_\varphi M_\varphi + e^2 a_B c + \nu^2[-\mu_{22}^{v} p_{2o}' - \\ -\lambda_{22}^{v} p_{21}' + \mu_{22}^{av} p_{1o}' + \lambda_{22}^{av} p_{11}' + \\ + V_o(\mu_{22}^{a} + \lambda_{22}^{a})]$$

De oplossing van de vergelijkingen (135) met (140) geschiedt op de reeds eerder genoemde wijze, de uitkomsten zijn kritische waarden

$$(V_o)_{krit} \text{ en } \nu_{krit}$$

voor V_o en ν. De *kritische snelheid* wordt dan gevonden uit:

$$v_{krit} = (V_o)_{krit} \cdot \nu_{krit} \cdot t_o \quad (141)$$

73. Berekening, gebaseerd op 2 vormveranderingscomponenten, aangepast bij normaalcoördinaten van den vleugel in stilstaande lucht.

Men kan alle moeilijkheden, die zich bij de rekenmethoden 71 en 72 voordoen bij de bepaling van de elastische constanten e, c, M_φ (e_o, c, M_φ), ontgaan door de analyse te fundeeren op bewegingsvergelijkingen van het type (67). De consequentie hiervan is echter (zooals reeds eerder is vermeld), dat de standtrillingsproef dan geen goed-bruikbare contrôle meer levert op de formules. De nauwkeurigheid van de uitkomsten kàn zeer hoog zijn, in principe *beter* dan wordt bereikt met methoden 71 en 72.

In overeenstemming met bij de formule (74) gemaakte opmerkingen kieze men de 2 deformatiecomponenten

$$(z_1, C_1\varphi_1) \text{ en } (z_2, C_2\varphi_2)$$

in *exacte overeenstemming* met de beide door de standtrillingsproef bepaalde fundamenteele eigentrillingen van den vleugel. Volgens (74) luiden de bewegingsvergelijkingen dan:

$$(V_{11} - \bar{\nu}^2 U_{11})\,\bar{q}_{1o} = \\ = \bar{\nu}^2 \int m_L [\bar{a}_{11} z_1(\bar{q}_{1o} z_1 + \bar{q}_{2o} z_2) + \\ + \bar{a}_{12} t z_1(\bar{q}_{1o} C_1\varphi_1 + \bar{q}_{2o} C_2\varphi_2) + \\ + \bar{a}_{21} t C_1\varphi_1(\bar{q}_{1o} z_1 + \bar{q}_{2o} z_2) + \\ + \bar{a}_{22} t^2 C_1\varphi_1(\bar{q}_{1o} C_1\varphi_1 + \bar{q}_{2o} C_2\varphi_2)]\, dx \quad (142)$$

$$(V_{22} - \bar{\nu}^2 U_{22})\,\bar{q}_{2o} = \\ = \bar{\nu}^2 \int m_L [\bar{a}_{11} z_2(\bar{q}_{1o} z_1 + \bar{q}_{2o} z_2) + \\ + \bar{a}_{12} t z_2(\bar{q}_{1o} C_1\varphi_1 + \bar{q}_{2o} C_2\varphi_2) + \\ + \bar{a}_{21} t C_2\varphi_2(\bar{q}_{1o} z_1 + \bar{q}_{2o} z_2) + \\ + \bar{a}_{22} t^2 C_2\varphi_2(\bar{q}_{1o} C_1\varphi_1 + \bar{q}_{2o} C_2\varphi_2)]\, dx \quad (143)$$

De constanten U_{11} en U_{22} worden volgens (33) berekend uit:

$$U_{11} = \int [m_{11} z_1^2 - 2 m_{12} z_1 C_1\varphi_1 + m_{22} C_1^2 \varphi_1^2]\, dx \quad (144)$$

$$U_{22} = \int [m_{11} z_2^2 - 2 m_{12} z_2 C_2\varphi_2 + m_{22} C_2^2 \varphi_2^2]\, dx \quad (145)$$

Beide integralen kunnen gemakkelijk langs numerieken of grafischen weg worden bepaald. Vanzelfsprekend moeten de functie's m_{11}, m_{12} en m_{22} in overeenstemming met (44) t/m (47) worden geconstrueerd.

In dit verband moge tevens de eenige *contrôle* worden vermeld, die op de in dit nummer vermelde bewerkingen beschikbaar is. Deze wordt verkregen uit (41). Volgens deze formule moet, gebruik makend van (33):

$$\int [m_{11} z_1 z_2 - m_{12} z_1 C_2\varphi_2 - \\ - m_{12} z_2 C_1\varphi_1 + m_{22} C_1 C_2 \varphi_1\varphi_2]\, dx = 0 \quad (146)$$

zijn. De uitwerking van deze integraal *moet dus een uitkomst* opleveren, die *tenminste klein* is vergeleken bij U_{11} en U_{22}. Is dit niet het geval, dan zijn bij de modelconstructie deelen van het systeem geëlimineerd, die sterk meetrillen, of de gewichtsanalyse van den vleugel is niet correct, of wel de fundamenteele eigentrillingsvormen zijn niet goed vastgelegd.

De constanten V_{11} en V_{22} in (142) en (143) zijn met U_{11} en U_{22} verbonden door uitermate eenvoudige betrekkingen van het type (76), te weten

$$V_{11} = \nu_B^2 U_{11} \qquad V_{22} = \nu_T^2 U_{22} \qquad (147)$$

waarin ν_B en ν_T de experimenteel bepaalde fundamenteele eigenfrequentie's zijn. Ondersteld is daarbij, dat $(z_1\,;\,C_1\varphi_1)$ den trillingsvorm der buigingsresonantie geeft en $(z_2\,;\,C_2\varphi_2)$ die der torsie-resonantie. Hiermede zijn de experimenteel bepaalde fundamenteele eigentrillingen van den vleugel geheel in de formules verwerkt, met het bevredigend resultaat, dat alle van elastische eigenschappen afhankelijke parameters $(V_{11}$ en $V_{22})$ geëlimineerd zijn.

De vergelijkingen (142), (143), kunnen na substitutie van (147) in den navolgenden vorm worden gebracht:

$$\begin{aligned}
&\Big[(\nu_B^2 - \bar\nu^2)\,U_{11} - \bar\nu^2 \Big\{\int m_L\,\bar a_{11}\,z_1^2\,dx + \\
&\qquad + \int m_L t\,(\bar a_{12} + \bar a_{21})\,z_1 C_1 \varphi_1\,dx + \\
&\qquad\qquad + \int m_L t^2\,\bar a_{22}\,C_1^2 \varphi_1^2\,dx\Big\}\Big]\,\bar q_{10} - \\
&- \bar\nu^2 \Big\{\int m_L\,\bar a_{11}\,z_1 z_2\,dx + \int m_L t\,\bar a_{12}\,z_1 C_2 \varphi_2\,dx + \\
&\qquad + \int m_L t\,\bar a_{21}\,z_2 C_1 \varphi_1\,dx + \\
&\qquad + \int m_L t^2\,\bar a_{22}\,C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\,dx\Big\}\,\bar q_{20} = 0 \qquad (148)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \bar\nu^2 \Big\{\int m_L\,\bar a_{11}\,z_1 z_2\,dx + \int m_L t\,\bar a_{12}\,z_2 C_1 \varphi_1\,dx + \\
&\qquad + \int m_L t\,\bar a_{21}\,z_1 C_2 \varphi_2\,dx + \\
&\qquad + \int m_L t^2\,\bar a_{22}\,C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\,dx\Big\}\,\bar q_{10} + \\
&+ \Big[(\nu_T^2 - \bar\nu^2)\,U_{22} - \bar\nu^2 \Big\{\int m_L\,\bar a_{11}\,z_2^2\,dx + \\
&\qquad + \int m_L t\,(\bar a_{12} + \bar a_{21})\,z_2 C_2 \varphi_2\,dx + \\
&\qquad\qquad + \int m_L t^2\,\bar a_{22}\,C_2^2 \varphi_2^2\,dx\Big\}\Big]\,\bar q_{20} = 0 \qquad (149)
\end{aligned}$$

731. Behandeling van de luchtkracht-termen volgens 61.

Wanneer de termen in (148), (149), die de luchtkrachten weergeven, volgens de in no. 61 gegeven aanwijzingen worden behandeld, ga men als volgt te werk:

Stel ter afkorting:

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L\,z_1^2\,dx = \mu_{11} \\
&\int m_L\,z_1 z_2\,dx = \mu_{12} = \mu_{21} \\
&\int m_L\,z_2^2\,dx = \mu_{22} \\
&\int m_L t\,z_1 C_1 \varphi_1\,dx = \mu_{33} \\
&\int m_L t\,z_1 C_2 \varphi_2\,dx = \mu_{34}
\end{aligned}\right\} \qquad (150)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L t\,z_2 C_1 \varphi_1\,dz = \mu_{43} \\
&\int m_L t\,z_2 C_2 \varphi_2\,dx = \mu_{44} \\
&\int m_L (c_a + c_v)\,z_1 C_1 \varphi_1\,dx = \mu_{33}^{av} \\
&\int m_L c_a\,z_1 C_2 \varphi_2\,dx = \mu_{34}^{a} \\
&\int m_L c_a\,z_2 C_1 \varphi_1\,dx = \mu_{43}^{a} \\
&\int m_L (c_a + c_v)\,z_2 C_2 \varphi_2\,dx = \mu_{44}^{av} \\
&\int m_L c_v\,z_1 C_2 \varphi_2\,dx = \mu_{34}^{v} \\
&\int m_L c_v\,z_2 C_1 \varphi_1\,dx = \mu_{43}^{v} \\
&\int m_L c_a t\,C_1^2 \varphi_1^2\,dx = \mu_{55}^{a} \\
&\int m_L c_v t\,C_1^2 \varphi_1^2\,dx = \mu_{55}^{v} \\
&\int m_L c_a c_v\,C_1^2 \varphi_1^2\,dx = \mu_{55}^{av} \\
&\int m_L c_a t\,C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\,dx = \mu_{56}^{a} = \mu_{65}^{a} \\
&\int m_L c_v t\,C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\,dx = \mu_{56}^{v} = \mu_{65}^{a} \\
&\int m_L c_a c_v\,C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\,dx = \mu_{56}^{av} = \mu_{65}^{av} \\
&\int m_L c_a t\,C_2^2 \varphi_2^2\,dx = \mu_{66}^{a} \\
&\int m_L c_v t\,C_2^2 \varphi_2^2\,dx = \mu_{66}^{v} \\
&\int m_L c_a c_v\,C_2^2 \varphi_2^2\,dx = \mu_{66}^{av}
\end{aligned}\right] \qquad (150)$$

Deze 22 parameters kunnen alle door numerieke of grafische integratie worden bepaald. Mede volgens (131) wordt nu:

$$\begin{aligned}
&\int m_L\,\bar a_{11}\,z_1^2\,dx = -\mu_{11}(p_1 + i\,p_1') \\
&\int m_L t\,(\bar a_{12} + \bar a_{21})\,z_1 C_1 \varphi_1\,dx = \\
&\qquad = \mu_{33}[p_2 + i(V - p_2')] + \mu_{33}^{av}(p_1 + i\,p_1') \\
&\int m_L t^2\,\bar a_{22}\,C_1^2 \varphi_1^2\,dx = -\mu_{55}^{v}(p_2 - i\,p_2') \\
&\qquad\qquad - \mu_{55}^{av}(p_1 + p_1') - \mu_{55}^{a}\,.\,i\,V \\
&\overline{}\ \text{optellen} \\
&\text{som} = -(p_1 + i\,p_1')(\mu_{11} - \mu_{33}^{av} + \mu_{55}^{av}) + \\
&\quad + (p_2 - i\,p_2')(\mu_{33} - \mu_{55}^{v}) + i\,V(\mu_{33} - \mu_{55}^{a}) \qquad (151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int m_L\,\bar a_{11}\,z_1 z_2\,dx = -\mu_{12}(p_1 + i\,p_1') \\
&\int m_L t\,\bar a_{12}\,z_1 C_2 \varphi_2\,dx = \\
&\qquad = \mu_{34}[p_2 + i(V - p_2')] + \mu_{34}^{a}(p_1 + i\,p_1') \\
&\int m_L t\,\bar a_{21}\,z_2 C_1 \varphi_1\,dx = \mu_{43}^{v}(p_1 + i\,p_1') \\
&\int m_L t^2\,\bar a_{22}\,C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\,dx = -\mu_{56}^{v}(p_2 - i\,p_2') - \\
&\qquad\qquad - \mu_{56}^{av}(p_1 + i\,p_1') - \mu_{56}^{a}\,.\,i\,V \\
&\overline{}\ \text{optellen} \\
&\text{som} = -(p_1 + i\,p_1')(\mu_{12} \quad \mu_{34}^{a} - \mu_{43}^{v} + \mu_{56}^{av}) + \\
&\quad + (p_2 - i\,p_2')(\mu_{34} - \mu_{56}^{v}) + i\,V(\mu_{34} - \mu_{56}^{a}) \qquad (152)
\end{aligned}$$

$$\int m_L \bar{a}_{11} z_1 z_2 \, dx = -\mu_{21}(p_1 + i p_1')$$

$$\int m_L t \bar{a}_{12} z_2 C_1 \varphi_1 \, dx = \mu_{43}[p_2 + i(V - p_2')] + \\ + \mu_{43}^a (p_1 + i p_1')$$

$$\int m_L t \bar{a}_{21} z_1 C_2 \varphi_2 \, dx = \mu_{34}^v (p_1 + i p_1')$$

$$\int m_L t^2 \bar{a}_{22} C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2 \, dx = -\mu_{56}^v (p_2 - i p_2') - \\ - \mu_{56}^{av}(p_1 + i p_1') - \mu_{56}^a . iV$$

optellen

$$\text{som} = -(p_1 + i p_1')(\mu_{21} - \mu_{43}^a - \mu_{34}^v + \mu_{56}^{av}) + \\ + (p_2 - i p_2')(\mu_{43} - \mu_{56}^v) + iV(\mu_{43} - \mu_{56}^a) \quad (153)$$

$$\int m_L \bar{a}_{11} z_2^2 \, dx = -\mu_{22}(p_1 + i p_1')$$

$$\int m_L t (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{21}) z_2 C_2 \varphi_2 \, dx = \\ = \mu_{44}[p_2 + i(V - p_2')] + \mu_{44}^{av}(p_1 + i p_1')$$

$$\int m_L t^2 \bar{a}_{22} C_2^2 \varphi_2^2 \, dx = -\mu_{66}^v (p_2 - i p_2') - \\ - \mu_{66}^{av}(p_1 + i p_1') - \mu_{66}^a . iV$$

optellen

$$\text{som} = -(p_1 + i p_1')(\mu_{22} - \mu_{44}^{av} + \mu_{66}^{av}) + \\ + (p_2 - i p_2')(\mu_{44} - \mu_{66}^v) + iV(\mu_{44} - \mu_{66}^a) \quad (154)$$

De coëfficiëntendeterminant van (148), (149) schrijve men nu:

$$\begin{vmatrix} A_{11} + iA_{11}' & A_{12} + iA_{12}' \\ A_{21} + iA_{21}' & A_{22} + iA_{22}' \end{vmatrix} \quad (155)$$

welke, nul gesteld, de *reëele* vergelijkingen:

$$A_{11}A_{22} - A_{11}'A_{22}' - A_{12}A_{21} + A_{12}'A_{21}' = 0 \quad (156)$$

$$A_{11}A_{22}' + A_{11}'A_{22} - A_{12}A_{21}' - A_{12}'A_{21} = 0 \quad (157)$$

oplevert.

Materiaaldemping wordt ditmaal vanzelfsprekend ingevoerd, door ν_B en ν_T *complex* te stellen:

$$\nu_B^2 \equiv \bar{\nu}_B^2 = (\nu_B + i\alpha_B)^2 - \nu_B + 2i\alpha_B \nu_B \quad (158)$$

$$\nu_T^2 \equiv \bar{\nu}_T^2 = (\nu_T + i\alpha_T)^2 \simeq \nu_T + 2i\alpha_T \nu_T \quad (159)$$

Dan wordt, mede volgens (151) t/m (154) (ter oplossing van de kritische snelheid ν meteen reëel stellend):

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= \nu_B^2 U_{11} - \nu^2 [U_{11} - \\
&\quad - p_1(\mu_{11} - \mu_{33}^{av} + \mu_{55}^{av}) + p_2(\mu_{33} - \mu_{55}^v)] \\
A_{11}' &= 2\alpha_B \nu_B U_{11} + \nu^2 [p_1'(\mu_{11} - \mu_{33}^{av} + \mu_{55}^{av}) + \\
&\quad + p_2'(\mu_{33} - \mu_{55}^v) - V(\mu_{33} - \mu_{55}^a)] \\
A_{12} &= \nu^2 [p_1(\mu_{12} - \mu_{34}^a - \mu_{43}^v + \mu_{56}^{av}) - \\
&\quad - p_2(\mu_{34} - \mu_{56}^v)] \\
A_{12}' &= \nu^2 [p_1'(\mu_{12} - \mu_{34}^a - \mu_{43}^v + \mu_{56}^{av}) + \\
&\quad + p_2'(\mu_{34} - \mu_{56}^v) - V(\mu_{34} - \mu_{56}^a)] \\
A_{21} &= \nu^2 [p_1(\mu_{21} - \mu_{43}^a - \mu_{34}^v + \mu_{56}^{av}) - \\
&\quad - p_2(\mu_{43} - \mu_{56}^v)] \\
A_{21}' &= \nu^2 [p_1'(\mu_{21} - \mu_{43}^a - \mu_{34}^v + \mu_{56}^{av}) + \\
&\quad + p_2'(\mu_{43} - \mu_{56}^v) - V(\mu_{43} - \mu_{56}^a)] \\
A_{22} &= \nu_T^2 U_{22} - \nu^2 [U_{22} - \\
&\quad - p_1(\mu_{22} - \mu_{44}^{av} + \mu_{66}^{av}) + p_2(\mu_{44} - \mu_{66}^v)] \\
A_{22}' &= 2\alpha_T \nu_T U_{22} + \\
&\quad + \nu^2 [p_1'(\mu_{22} - \mu_{44}^{av} + \mu_{66}^{av}) + \\
&\quad + p_2'(\mu_{44} - \mu_{66}^v) - V(\mu_{44} - \mu_{66}^a)]
\end{aligned}\right\} \quad (160)$$

Op de bekende wijze worden uit (156) en (157) *kritische* waarden van V en ν opgelost. De kritische snelheid volgt dan uit

$$v_{krit} = V_{krit} \, \nu_{krit} \, t_{eff}$$

waarin t_{eff} volgens de in 61 beschreven methode wordt bepaald.

732. Behandeling van de luchtkracht-termen volgens 62.

Men kan de termen in (148), (149), die de luchtkrachten weergeven, met grooter nauwkeurigheid naar de in 62 gegeven aanwijzingen behandelen. De consequentie is, dat het reeds groote aantal integratie's van het type (150) dan nog belangrijk wordt uitgebreid, zoodat de heele berekening tamelijk bewerkelijk wordt. De noodzakelijke bewerkingen kunnen gemakkelijk worden opgeschreven. De grondslagen leveren de formules (137), (63), (64), (148), (149), en, als uitgangspunt voor een *analogieseering*: (150) en (160).

De reeksontwikkelingen voor de luchtkrachtcoëfficiënten worden in overeenstemming met (137) genomen: van iedere reeks worden dus weer slechts *twee* termen in aanmerking genomen. Men kiest een *gemiddelde koorde* t_o, en berekent de navolgende constanten:

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} z_1^2 \, dx = \lambda_{11} \; ; \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} z_1 z_2 \, dx = \lambda_{12} \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} z_2^2 \, dx = \lambda_{22} \\
&\int m_L (t_o - t) z_1 C_1 \varphi_1 \, dx = \lambda_{33} \\
&\int m_L (t_o - t) z_1 C_2 \varphi_2 \, dx = \lambda_{34} \\
&\int m_L (t_o - t) z_2 C_1 \varphi_1 \, dx = \lambda_{43} \\
&\int m_L (t_o - t) z_2 C_2 \varphi_2 \, dx = \lambda_{44} \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} (c_a + c_v) z_1 C_1 \varphi_1 \, dx = \lambda_{33}^{av} \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} c_a z_1 C_2 \varphi_2 \, dx = \lambda_{34}^a \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} c_a z_2 C_1 \varphi_1 \, dx = \lambda_{43}^a \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} (c_a + c_v) z_2 C_2 \varphi_2 \, dx = \lambda_{44}^{av} \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} c_v z_1 C_2 \varphi_2 \, dx = \lambda_{34}^v \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} c_v z_2 C_1 \varphi_1 \, dx = \lambda_{43}^v \\
&\int m_L (t_o - t) c_a C_1^2 \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{55}^a \\
&\int m_L (t_o - t) c_v C_1^2 \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{55}^v \\
&\int m_L \frac{t_o - t}{t} c_a c_v C_1^2 \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{55}^{av} \\
&\int m_L (t_o - t) c_a C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2 \, dx = \lambda_{56}^a
\end{aligned}\right] \quad (161)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L\,(t_o-t)\,c_v\,C_1\,C_2\,\varphi_1\,\varphi_2\,dx=\lambda_{56}{}^{v}\\
&\int m_L\,\frac{t_o-t}{t}\,c_a\,c_v\,C_1\,C_2\,\varphi_1\,\varphi_2\,d\,x=\lambda_{56}{}^{av}\\
&\int m_L\,(t_o-t)\,c_a\,C_2{}^2\,\varphi_2{}^2\,dx=\lambda_{66}{}^{a}\\
&\int m_L\,(t_o-t)\,c_v\,C_2{}^2\,\varphi_2{}^2\,dx=\lambda_{66}{}^{v}\\
&\int m_L\,\frac{t_o-t}{t}\,c_a\,c_v\,C_2{}^2\,\varphi_2{}^2\,d\,x=\lambda_{66}{}^{av}
\end{aligned}\right\}\qquad(161)$$

De vergelijking voor de kritische waarden van V_o en ν wordt dan van het type (155), splitsbaar in reëele vergelijkingen (156), (157). In plaats van (160) moeten nu echter de navolgende formules worden gesteld (zie ook (137)):

$$\left.\begin{aligned}
A_{11}=\;&\nu_B{}^2\,U_{11}-\nu^2\,[U_{11}-\\
&-p_{1o}\,(\mu_{11}-\mu_{33}{}^{av}+\mu_{55}{}^{av})-\\
&-p_{11}\,(\lambda_{11}-\lambda_{33}{}^{av}+\lambda_{55}{}^{av})+\\
&+p_{2o}(\mu_{33}-\mu_{55}{}^{v})+p_{21}\,(\lambda_{33}-\lambda_{55}{}^{v})]\\
A_{11}'=\;&2\alpha_B\,\nu_B\,U_{11}+\\
&+\nu^2\,[p_{1o}'\,(\mu_{11}-\mu_{33}{}^{av}+\mu_{55}{}^{av})+\\
&+p_{11}'\,(\lambda_{11}-\lambda_{33}{}^{av}+\lambda_{55}{}^{av})+\\
&+p_{2o}'\,(\mu_{33}-\mu_{55}{}^{v})+p_{21}'\,(\lambda_{33}-\lambda_{55}{}^{v})-\\
&-V_o\,(\mu_{33}-\mu_{55}{}^{a}+\lambda_{33}-\lambda_{55}{}^{a})]\\
A_{12}=\;&\nu^2\,[p_{1o}\,(\mu_{12}-\mu_{34}{}^{a}-\mu_{43}{}^{v}+\mu_{56}{}^{av})+\\
&+p_{11}\,(\lambda_{12}-\lambda_{34}{}^{a}-\lambda_{43}{}^{v}+\lambda_{56}{}^{av})-\\
&-p_{2o}\,(\mu_{34}-\mu_{56}{}^{v})-p_{21}\,(\lambda_{34}-\lambda_{56}{}^{v})]\\
A_{12}'=\;&\nu^2\,[p_{1o}'\,(\mu_{12}-\mu_{34}{}^{a}-\mu_{43}{}^{v}+\mu_{56}{}^{av})+\\
&+p_{11}'\,(\lambda_{12}-\lambda_{34}{}^{a}-\lambda_{43}{}^{v}+\lambda_{56}{}^{av})+\\
&+p_{2o}'\,(\mu_{34}-\mu_{56}{}^{v})+p_{21}'\,(\lambda_{34}-\lambda_{56}{}^{v})-\\
&-V_o(\mu_{34}-\mu_{56}{}^{a}+\lambda_{34}-\lambda_{56}{}^{a})]\\
A_{21}=\;&\nu^2\,[p_{1o}\,(\mu_{21}-\mu_{43}{}^{a}-\mu_{34}{}^{v}+\mu_{56}{}^{av})+\\
&+p_{11}\,(\lambda_{21}-\lambda_{43}{}^{a}-\lambda_{34}{}^{v}+\lambda_{56}{}^{av})-\\
&-p_{2o}\,(\mu_{43}-\mu_{56}{}^{v})-p_{21}\,(\lambda_{43}-\lambda_{56}{}^{v})]\\
A_{21}'=\;&\nu^2\,[p_{1o}'\,(\mu_{21}-\mu_{43}{}^{a}-\mu_{34}{}^{v}+\mu_{56}{}^{av})+\\
&+p_{11}'\,(\lambda_{21}-\lambda_{43}{}^{a}-\lambda_{34}{}^{v}+\lambda_{56}{}^{av})+\\
&+p_{2o}'\,(\mu_{43}-\mu_{56}{}^{v})+p_{21}'\,(\lambda_{43}-\lambda_{56}{}^{v})-\\
&-V_o\,(\mu_{43}-\mu_{56}{}^{a}+\lambda_{43}-\lambda_{56}{}^{a})]\\
A_{22}=\;&\nu_T{}^2\,U_{22}-\nu^2\,[U_{22}-\\
&-p_{1o}\,(\mu_{22}-\mu_{44}{}^{av}+\mu_{66}{}^{av})-\\
&-p_{11}\,(\lambda_{22}-\lambda_{44}{}^{av}+\lambda_{66}{}^{av})+\\
&+p_{2o}\,(\mu_{44}-\mu_{66}{}^{v})+p_{21}\,(\lambda_{44}-\lambda_{66}{}^{v})]\\
A_{22}'=\;&2\,\alpha_T\,\nu_T\,U_{22}+\\
&+\nu^2\,[p_{1o}'\,(\mu_{22}-\mu_{44}{}^{av}+\mu_{66}{}^{av})+\\
&+p_{11}'\,(\lambda_{22}-\lambda_{44}{}^{av}+\lambda_{66}{}^{av})+\\
&+p_{2o}'\,(\mu_{44}-\mu_{66}{}^{v})+p_{21}'\,(\lambda_{44}-\lambda_{66}{}^{v})-\\
&-V_o\,(\mu_{44}-\mu_{66}{}^{a}+\lambda_{44}-\lambda_{66}{}^{a})]
\end{aligned}\right]\qquad(162)$$

De kritische snelheid zelf wordt tenslotte gevonden uit de betrekking:

$$v_{krit}=(V_o)_{krit}\,.\,\nu_{krit}\,.\,t_o$$

8. De vleugel met drie toegelaten deformatiecomponenten.

Tegen de in no. 7 beschreven rekenmethoden kan het bezwaar worden aangevoerd, dat niet alle vervormingen, die de vleugel *binnen het in aanmerking komende gebied van frequentie's* kan vertoonen, in redelijke benadering door de toegelaten deformatie's worden gedekt. Een directe aanwijzing in deze richting geeft de standtrillingsproef: men vindt bij betrekkelijk lage frequentie's in den regel *drie* resonantie's met *symmetrischen* trillingsvorm, die men kan identificeeren als *fundamenteele* buigings-eigentrilling, *fundamenteele* torsie-eigentrilling en *eerste buigings-boventoon*. De frequentie van de laatstgenoemde resonantie kan tusschen de frequentie's van de beide eerstgenoemde in liggen! Het type van den in den eersten buigings-boventoon optredenden *trillingsvorm* wijkt sterk af van den trillingsvorm van den grondtoon.

In verband met het bovenstaande is het vermoeden gewettigd, dat de uitschakeling van den met den eersten boventoon der buiging overeenkomenden deformatie-vorm de uitkomsten der berekening — vergeleken bij de werkelijkheid — tamelijk sterk zal kunnen vervalschen. Dat hieraan in den regel geen aandacht wordt geschonken (er worden in de literatuur geen verhandelingen aangetroffen, waarin met de genoemde deformatie-mogelijkheid van den vleugel rekening wordt gehouden) berust op de overweging, dat de *onderdrukte* deformatievorm naar het zich laat aanzien *relatief ongevaarlijke* wijzigingen in den trillingsvorm mogelijk maakt. D.w.z.: men zal de uitkomst van een berekening, die slechts vervormingen, overeenkomend met de *fundamenteele* eigentrillingsvormen toelaat, vermoedelijk altijd als een conservatieve uitkomst (*te kleine* kritische snelheid!) kunnen opvatten. Het argument, dat tot deze conclusie voert, is dat de mogelijkheid eener onstabiele trilling nauw samenhangt met de aanwezigheid van de massakracht-koppeling tusschen als buiging- en torsie op te vatten deformatie's. Men kan zeggen, dat de kritische snelheid *hooger* wordt naarmate *deze* koppeling geringer is (massabalanceering van den *heelen vleugel!*). *Vergelijkt men nu de grootte van* deze koppeling bij deformatie's, overeenkomend met de trillingsvormen der *fundamenteele* buiging en torsie, en bij deformatie's, overeenkomend met den trillingsvorm van den eersten buigingsboventoon en de fundamenteele eigentrilling der torsie, dan blijkt zij in het *tweede* geval tengevolge van de *dan gedeeltelijk tegengesteld gerichte buigings*-amplituden *beduidend kleiner* te zijn, dan in het eerste geval. Daaruit volgt, dat de tweede combinatie vermoedelijk ongevaarlijk is, vergeleken bij de eerste.

Algemeene overwegingen leiden dus tot de slotsom, dat de mogelijkheid van deformatie's, overeenkomend met den trillingsvorm van den eersten buigings-boventoon, de kritische snelheid vermoedelijk zal verhoogen met een wellicht niet altijd onbeduidend bedrag. Daaruit volgt dan echter, dat een nader onderzoek van dit punt gerechtvaardigd kan zijn, zoodat het geschikt is, een methode daarvoor te ontwikkelen. De *mathematische opzet* van een dergelijke berekening kan het best weer op tweeërlei wijze geschieden, n.l. door keuze van bewegings-vergelijkingen van het type (61), (62), of van het type (67). In het laatste geval *moeten* weer resultaten van een standtrillingsproef beschikbaar zijn. Het is *dit* geval, dat hieronder zal worden uitgewerkt. De eerstgenoemde mogelijkheid *blijft* verder buiten beschouwing, het is duidelijk, dat men nog meer dan in no. 7 zal stuiten op moeilijkheden bij de vastlegging van elastische constanten met behulp van de standtrillingsproef.

Men construeert *drie* paren deformatie-functie's:

$$(z_1, C_1\varphi_1)\ ;\ (z_2, C_2\varphi_2)\ ;\ (z_3, C_3\varphi_3) \qquad (163)$$

exact overeenkomend met de amplitudeverdeelingen, aangetroffen bij de *standtrilling* resp. in de fundamenteele resonantie der buiging, in de eerste hoogere resonantie der buiging, en in de fundamenteele resonantie der torsie. De bijbehoorende eigenfrequentie's [1]) zullen worden genoteerd.

$$\nu_1\ ;\ \nu_2\ ;\ \nu_3 \qquad (164)$$

De *algemeenste deformatie* wordt geschreven

$$\begin{aligned} z &= q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 \\ \varphi &= q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2 + q_3 C_3 \varphi_3 \end{aligned} \qquad (165)$$

De *bewegingsvergelijkingen* luiden volgens (74):

$$\left.\begin{aligned}
&(V_{11} - \bar\nu^2 U_{11})\, \bar q_{10} = \\
&= \bar\nu^2 \int m_L [\bar a_{11} z_1 (\bar q_{10} z_1 + \bar q_{20} z_2 + \bar q_{30} z_3) + \\
&+ \bar a_{12} t z_1 (\bar q_{10} C_1 \varphi_1 + \bar q_{20} C_2 \varphi_2 + \bar q_{30} C_3 \varphi_3) + \\
&\quad + \bar a_{21} t C_1 \varphi_1 (\bar q_{10} z_1 + \bar q_{20} z_2 + \bar q_{30} z_3) + \\
&+ \bar a_{22} t^2 C_1 \varphi_1 (\bar q_{10} C_1 \varphi_1 + \bar q_{20} C_2 \varphi_2 + \bar q_{30} C_3 \varphi_3)]\, dx \\
&(V_{22} - \bar\nu^2 U_{22})\, \bar q_{20} = \\
&= \bar\nu^2 \int m_L [\bar a_{11} z_2 (\bar q_{10} z_1 + \bar q_{20} z_2 + \bar q_{30} z_3) + \\
&+ \bar a_{12} t z_2 (\bar q_{10} C_1 \varphi_1 + \bar q_{20} C_2 \varphi_2 + \bar q_{30} C_3 \varphi_3) + \\
&\quad + \bar a_{21} t C_2 \varphi_2 (\bar q_{10} z_1 + \bar q_{20} z_2 + \bar q_{30} z_3) + \\
&+ \bar a_{22} t^2 C_2 \varphi_2 (\bar q_{10} C_1 \varphi_1 + \bar q_{20} C_2 \varphi_2 + \bar q_{30} C_3 \varphi_3)]\, dx \\
&(V_{33} - \bar\nu^2 U_{33})\, \bar q_{30} = \\
&= \bar\nu^2 \int m_L [\bar a_{11} z_3 (\bar q_{10} z_1 + \bar q_{20} z_2 + \bar q_{30} z_3) + \\
&+ \bar a_{12} t z_3 (\bar q_{10} C_1 \varphi_1 + \bar q_{20} C_2 \varphi_2 + \bar q_{30} C_3 \varphi_3) + \\
&\quad + \bar a_{21} t C_3 \varphi_3 (\bar q_{10} z_1 + \bar q_{20} z_2 + \bar q_{30} z_3) + \\
&+ \bar a_{22} t^2 C_3 \varphi_3 (\bar q_{10} C_1 \varphi_1 + \bar q_{20} C_2 \varphi_2 + \bar q_{30} C_3 \varphi_3)\, dx
\end{aligned}\right] \qquad (166)$$

met

$$\begin{aligned}
U_{11} &= \int [m_{11} z_1^2 - 2 m_{12} z_1 C_1 \varphi_1 + m_{22} C_1^2 \varphi_1^2]\, dx \\
U_{22} &= \int [m_{11} z_2^2 - 2 m_{12} z_2 C_2 \varphi_2 + m_{22} C_2^2 \varphi_2^2]\, dx \\
U_{33} &= \int [m_{11} z_3^2 - 2 m_{12} z_3 C_3 \varphi_3 + m_{22} C_3^2 \varphi_3^2]\, dx
\end{aligned} \qquad (167)$$

Er zijn drie contrôle-formules, n.l.

$$U_{12} = 0\ ;\ U_{13} = 0\ ;\ U_{23} = 0 \qquad (168)$$

die naar het voorschrift van formule (33) moeten worden gevormd.

Volgens (76) heeft men verder

$$V_{11} = \nu_1^2 U_{11}\ ;\ V_{22} = \nu_2^2 U_{22}\ ;\ V_{33} = \nu_3^2 U_{33} \qquad (169)$$

in welke formules men ν_1, ν_2 en ν_3 complex moet stellen, wanneer materiaaldemping bij de berekening in aanmerking moet worden genomen. Men substitueere dan in (169):

$$\begin{aligned}
\nu_1^2 &\equiv \bar\nu_1^2 = \nu_1^2 + 2 i a_1 \nu_1\ ; \\
\nu_2^2 &\equiv \bar\nu_2^2 = \nu_2 + 2 i a_2 \nu_2\ ; \\
\nu_3^2 &\equiv \bar\nu_3^2 = \nu_3^2 + 2 i a_3 \nu_3
\end{aligned} \qquad (170)$$

De linkerleden van de vergelijkingen (166) gaan na substitutie van (169), (170) resp. over in:

$$\begin{aligned}
&(\nu_1^2 + 2 i a_1 \nu_1 - \bar\nu^2)\, U_{11}\, \bar q_{10} \\
&(\nu_2^2 + 2 i a_2 \nu_2 - \bar\nu^2)\, U_{22}\, \bar q_{20} \\
&(\nu_3^2 + 2 i a_3 \nu_3 - \bar\nu^2)\, U_{33}\, \bar q_{30}
\end{aligned} \qquad (171)$$

De uitwerking van de rechterleden eischt de bepaling van een groot aantal integraaltjes over den vleugel. Men ga te werk volgens de in 61 beschreven methode en beschouwe de gereduceerde snelheid dientengevolge als een niet van x afhankelijke grootheid. Dit is in het gegeven geval de eenige rationeele methode: de werkwijze 62 leidt tot een verdubbeling van het reeds onaangenaam groote aantal integratie's.

Men stelt:

$$\left.\begin{aligned}
\int m_L z_1^2\, dx &= \mu_{11} \\
\int m_L z_1 z_2\, dx &= \mu_{12} \\
\int m_L z_1 z_3\, dx &= \mu_{13} \\
\int m_L z_2^2\, dx &= \mu_{22} \\
\int m_L z_2 z_3\, dx &= \mu_{23} \\
\int m_L z_3^2\, dx &= \mu_{33} \\
\int m_L t z_1 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{44} \\
\int m_L c_a z_1 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{44}^a \\
\int m_L c_v z_1 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{44}^v \\
\int m_L t z_1 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{45} \\
\int m_L c_a z_1 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{45}^a \\
\int m_L c_v z_2 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{54}^v \\
\int m_L t z_1 C_3 \varphi_3\, dx &= \mu_{46} \\
\int m_L c_a z_1 C_3 \varphi_3\, dx &= \mu_{46}^a \\
\int m_L c_v z_3 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{64}^v \\
\int m_L t z_2 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{51} \\
\int m_L c_a z_2 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{54}^a \\
\int m_L c_v z_1 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{45}^v \\
\int m_L t z_2 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{55} \\
\int m_L c_a z_2 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{55}^a \\
\int m_L c_v z_2 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{55}^v
\end{aligned}\right] \qquad (172)$$

---

[1]) Die, behoudens een eventueel aan te brengen kleine correctie, met de *resonantie*-frequentie's overeenkomen.

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L t\, z_2\, C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{56}\\
&\int m_L c_a z_2\, C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{56}{}^{a}\\
&\int m_L c_v z_3\, C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{65}{}^{v}\\
&\int m_L t\, z_3\, C_1 \varphi_1\, d\,x = \mu_{64}\\
&\int m_L c_a z_3\, C_1 \varphi_1\, d\,x = \mu_{64}{}^{a}\\
&\int m_L c_v z_1\, C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{46}{}^{v}\\
&\int m_L t\, z_3\, C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{65}\\
&\int m_L c_a z_3\, C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{65}{}^{a}\\
&\int m_L c_v z_2\, C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{56}{}^{v}\\
&\int m_L t\, z_3\, C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{66}\\
&\int m_L c_a z_3\, C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{66}{}^{a}\\
&\int m_L c_v z_3\, C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{66}{}^{v}\\
&\int m_L c_v t\, C_1 \varphi_1 C_1 \varphi_1\, d\,x = \mu_{77}{}^{v}\\
&\int m_L c_a c_v C_1 \varphi_1 C_1 \varphi_1\, d\,x = \mu_{77}{}^{av}\\
&\int m_L c_a t\, C_1 \varphi_1 C_1 \varphi_1\, d\,x = \mu_{77}{}^{a}\\
&\int m_L c_v t\, C_1 \varphi_1 C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{78}{}^{v}\\
&\int m_L c_a c_v C_1 \varphi_1 C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{78}{}^{av}\\
&\int m_L c_a t\, C_1 \varphi_1 C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{78}{}^{a}\\
&\int m_L c_v t\, C_1 \varphi_1 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{79}{}^{v}\\
&\int m_L c_a c_v C_1 \varphi_1 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{79}{}^{av}\\
&\int m_L c_a t\, C_1 \varphi_1 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{79}{}^{a}\\
&\int m_L c_v t\, C_2 \varphi_2 C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{88}{}^{v}\\
&\int m_L c_a c_v C_2 \varphi_2 C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{88}{}^{av}\\
&\int m_L c_a t\, C_2 \varphi_2 C_2 \varphi_2\, d\,x = \mu_{88}{}^{a}\\
&\int m_L c_v t\, C_2 \varphi_2 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{89}{}^{v}\\
&\int m_L c_a c_v C_2 \varphi_2 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{89}{}^{av}\\
&\int m_L c_a t\, C_2 \varphi_2 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{89}{}^{a}\\
&\int m_L c_v t\, C_3 \varphi_3 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{99}{}^{v}\\
&\int m_L c_a c_v C_3 \varphi_3 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{99}{}^{av}\\
&\int m_L c_a t\, C_3 \varphi_3 C_3 \varphi_3\, d\,x = \mu_{99}{}^{a}
\end{aligned}\right] \quad (172)$$

Dit zijn 51 in principe gemakkelijk door numerieke of *grafische integratie te bepalen constanten.* (Het zal in de praktijk wel niet noodig zijn, voor iedere constante de vereischte bewerking „letterlijk" uit te voeren. Vele constanten zullen onderling slechts weinig verschillende waarden verkrijgen, en het is op grond daarvan aannemelijk, dat men zal kunnen volstaan met de berekening van een aantal geschikt gekozenen van de constanten (172), waarna men de waarden van de overigen wel *met voldoende nauwkeurigheid zal kunnen* schatten. Ook is het niet onmogelijk, dat men zonder fout van beteekenis $\varphi_2 \equiv \varphi_3$ zal kunnen nemen, wellicht zelfs $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3$. Een andere mogelijkheid is, dat $z_3 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ *blijkt te zijn, waarin* α_1 en α_2 *constanten* zijn. Tenslotte kunnen $\frac{c_a}{t}$ en/of $\frac{c_v}{t}$ constant of nagenoeg constant zijn.

Al deze mogelijkheden leiden tot min of meer belangrijke reductie's van het rekenwerk.)

Schrijf de bewegingsvergelijkingen (166) nu in den *vorm:*

$$\left.\begin{aligned}
&(A_{11} + i\,A_{11}')\, \bar{q}_{1o} +\\
&+ (A_{12} + i\,A_{12}')\, \bar{q}_{2o} + (A_{13} + i\,A_{13}')\, \bar{q}_{3o} = 0\\
&(A_{21} + i\,A_{21}')\, \bar{q}_{1o} +\\
&+ (A_{22} + i\,A_{22}')\, \bar{q}_{2o} + (A_{23} + i\,A_{23}')\, \bar{q}_{3o} = 0\\
&(A_{31} + i\,A_{31}')\, \bar{q}_{1o} +\\
&+ (A_{32} + i\,A_{32}')\, \bar{q}_{2o} + (A_{33} + i\,A_{33}')\, \bar{q}_{3o} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (173)$$

dan wordt, i.v.m. (63), (64) en (166), (ν weer reëel stellend met het oog op de berekening der kritische snelheid):

$$\left.\begin{aligned}
A_{11} &= \nu_1{}^2 U_{11} - \nu^2 [U_{11} - p_1 (\mu_{11} - \mu_{44}{}^{a} -\\
&\qquad - \mu_{44}{}^{v} + \mu_{77}{}^{av}) + p_2 (\mu_{44} - \mu_{77}{}^{v})]\\
A_{11}' &= 2\,\alpha_1 \nu_1 U_{11} +\\
&\quad + \nu^2 [p_1' (\mu_{11} - \mu_{44}{}^{a} - \mu_{44}{}^{v} + \mu_{77}{}^{av}) +\\
&\qquad + p_2' (\mu_{44} - \mu_{77}{}^{v}) - V (\mu_{44} - \mu_{77}{}^{a})]\\
A_{12} &= \nu^2 [p_1 (\mu_{12} - \mu_{45}{}^{a} - \mu_{54}{}^{v} + \mu_{78}{}^{av}) -\\
&\qquad - p_2 (\mu_{45} - \mu_{78}{}^{v})]\\
A_{12}' &= \nu^2 [p_1' (\mu_{12} - \mu_{45}{}^{a} - \mu_{54}{}^{v} + \mu_{78}{}^{av}) +\\
&\qquad + p_2' (\mu_{45} - \mu_{78}{}^{v}) - V (\mu_{45} - \mu_{78}{}^{a})]\\
A_{13} &= \nu^2 [p_1 (\mu_{13} - \mu_{46}{}^{a} - \mu_{64}{}^{v} + \mu_{79}{}^{av}) -\\
&\qquad - p_2 (\mu_{46} - \mu_{79}{}^{v})]\\
A_{13}' &= \nu^2 [p_1' (\mu_{13} - \mu_{46}{}^{a} - \mu_{64}{}^{v} + \mu_{79}{}^{av}) +\\
&\qquad + p_2' (\mu_{46} - \mu_{79}{}^{v}) - V (\mu_{46} - \mu_{79}{}^{a})]\\
A_{21} &= \nu^2 [p_1 (\mu_{12} - \mu_{54}{}^{a} - \mu_{45}{}^{v} + \mu_{78}{}^{av}) -\\
&\qquad - p_2 (\mu_{54} - \mu_{78}{}^{v})]\\
A_{21}' &= \nu^2 [p_1' (\mu_{12} - \mu_{51}{}^{a} - \mu_{45}{}^{v} + \mu_{78}{}^{av}) +\\
&\qquad + p_2' (\mu_{54} - \mu_{78}{}^{v}) - V (\mu_{54} - \mu_{78}{}^{a})]\\
A_{22} &= \nu_2{}^2 U_{22} - \nu^2 [U_{22} - p_1 (\mu_{22} - \mu_{55}{}^{a} -\\
&\qquad - \mu_{55}{}^{v} + \mu_{88}{}^{av}) + p_2 (\mu_{55} - \mu_{88}{}^{v})]\\
A_{22}' &= 2\,\alpha_2 \nu_2 U_{11} +\\
&\quad + \nu^2 [p_1' (\mu_{22} - \mu_{55}{}^{a} - \mu_{55}{}^{v} + \mu_{88}{}^{av}) +\\
&\qquad + p_2' (\mu_{55} - \mu_{88}{}^{v}) - V (\mu_{55} - \mu_{88}{}^{a})]\\
A_{23} &= \nu^2 [p_1 (\mu_{23} - \mu_{56}{}^{a} - \mu_{65}{}^{v} + \mu_{89}{}^{av}) -\\
&\qquad - p_2 (\mu_{56} - \mu_{89}{}^{v})]\\
A_{23}' &= \nu^2 [p_1' (\mu_{23} - \mu_{56}{}^{a} - \mu_{65}{}^{v} + \mu_{89}{}^{av}) +\\
&\qquad + p_2' (\mu_{56} - \mu_{89}{}^{v}) - V (\mu_{56} - \mu_{89}{}^{a})]\\
A_{31} &= \nu^2 [p_1 (\mu_{13} - \mu_{64}{}^{a} - \mu_{46}{}^{v} + \mu_{79}{}^{av}) -\\
&\qquad - p_2 (\mu_{64} - \mu_{79}{}^{v})]\\
A_{31}' &= \nu^2 [p_1' (\mu_{13} - \mu_{64}{}^{a} - \mu_{46}{}^{v} + \mu_{79}{}^{av}) +\\
&\qquad + p_2' (\mu_{64} - \mu_{79}{}^{v}) - V (\mu_{64} - \mu_{79}{}^{a})]
\end{aligned}\right] \quad (174)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{32} &= \nu^2 [p_1 (\mu_{23} - \mu_{65}{}^a - \mu_{56}{}^v + \mu_{89}{}^{av}) - \\ &\qquad - p_2 (\mu_{65} - \mu_{89}{}^v)] \\ A_{32}' &= \nu^2 [p_1' (\mu_{23} - \mu_{65}{}^a - \mu_{56}{}^v + \mu_{89}{}^{av}) + \\ &\qquad + p_2' (\mu_{65} - \mu_{89}{}^v) - V (\mu_{65} - \mu_{89}{}^a)] \\ A_{33} &= \nu_3{}^2 U_{33} - \nu^2 [U_{33} - p_1 (\mu_{33} - \mu_{66}{}^a - \\ &\qquad - \mu_{66}{}^v + \mu_{99}{}^{av}) + p_2 (\mu_{66} - \mu_{99}{}^v)] \\ A_{33}' &= 2 a_3 \nu_3 U_{11} + \\ &\qquad + \nu^2 [p_1' (\mu_{33} - \mu_{66}{}^a - \mu_{66}{}^v + \mu_{99}{}^{av}) + \\ &\qquad + p_2' (\mu_{66} - \mu_{99}{}^v) - V (\mu_{66} - \mu_{99}{}^a)] \end{aligned}\right\} \quad (174)$$

De kritische waarden van V en ν worden op de bekende wijze uit de gelijk nul gestelde coëfficiëntendeterminant van het stelsel (173) afgeleid.

De kritische snelheid wordt gevonden met de formule

$$v_{krit} = V_{krit} \cdot \nu_{krit} \cdot t_{eff}$$

De effectieve koorde t_{eff} wordt volgens de in 61 gegeven aanwijzingen berekend. De trillingsvorm van de kritische trilling kan op de bekende wijze uit twee (willekeurig gekozen) vergelijkingen (173) worden opgelost, nadat in de coëfficiënten

$$V = V_{krit} \text{ en } \nu = \nu_{krit}$$

is gesubstitueerd.

De geheele berekening wordt *vooral daardoor* zoo bewerkelijk, dat de determinant van het stelsel (173) een determinant van de *derde* orde is.

9. De inachtname van rompbewegelijkheid.

Het is duidelijk, dat de in werkelijkheid *bewegelijke* romp van een vliegtuig (in de vlucht) strikt genomen nooit een vaste inklemming voor den vleugel kan vormen. Eenige consequentie's hiervan zijn reeds in een eerder uitgekomen N.L.L.-rapport onderzocht (*lit.* 22). Het meest typische gevolg van de rompbewegelijkheid is, dat zij trillingen mogelijk maakt, die in twee geheel gescheiden, onderling onafhankelijke groepen uiteenvallen, n.l. symmetrische trillingen en antisymmetrische trillingen. Alleen de symmetrische sluiten, wanneer de romp zeer zwaar is vergeleken bij den vleugel, aan bij de trillingsmogelijkheden van den aan den wortel ingeklemden vleugel. Het is, wat *deze* trillingen betreft, slechts gewenscht de rompbewegelijkheid in aanmerking te nemen, wanneer buiten de romp massa's in het systeem aanwezig zijn, die naar de grootte met de rompmassa vergelijkbaar zijn. Dit geval doet zich o.a. voor, wanneer in den vleugel motoren zijn ondergebracht.

Van de antisymmetrische trillingen maken rompdraaiingen natuurlijk een essentieel bestanddeel uit. Deze trillingen moeten geheel apart worden onderzocht.

Het is gewenscht ermede rekening te houden, dat het ook in relatief gunstige gevallen in den regel niet mogelijk is, de trillingen van de romp bij de standtrillingsproef met bevredigende nauwkeurigheid te *meten*. Daarvoor blijven de amplituden gewoonlijk toch te klein. Het is dus noodig de *berekening* zoo in te richten, dat het niet noodig is dergelijke meetresultaten — die theoretisch natuurlijk mogelijk zijn — in de formules te verwerken.

91. De symmetrische trillingen.

911. De algemeene bewegings-vergelijkingen.

Ter berekening van den invloed, die de romptrilling op de eigenschappen van het heele systeem heeft, wordt de romp als een *star* lichaam opgevat, waaraan een bepaalde massa m_R, een bepaalde zwaartepuntsligging s_R t.o.v. de beschrijvings-as (aangenomen wordt, dat het zwaartepunt van den romp in het vlak van den vleugel ligt. Is dit niet het geval, dan projecteere men het rompzwaartepunt op dit vlak en behandele deze projectie bij de berekening als zwaartepunt) en een traagheidsmoment I_R om een as door het zwaartepunt, loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig, worden toegekend. Elastische eigenschappen van den romp blijven dus buiten beschouwing: zij worden geacht een correctie op een correctie te leveren.

De symmetrische *bewegingen* van den romp zullen worden vastgelegd door coördinaten Z en Φ, die resp. de verticale verplaatsingen van den romp ter plaatse van de beschrijvings-as, en de draaiingen van den romp om de beschrijvings-as vastleggen. De bewegingen van den vleugel zullen worden vastgelegd door gebruikelijke coördinaten z en φ, die nu echter verplaatsingen zullen geven t.o.v. van een vlak door de beschrijvings-as en de „bevestigingslijn" (wortelkoorde) van den vleugel aan den romp. De *totale* bewegingen van den vleugel worden dan vastgelegd door

$$z + Z \text{ en } \varphi + \Phi \qquad (175)$$

De totale *kinetische* energie van het systeem wordt[1])

$$\begin{aligned} E_{kin} = \tfrac{1}{2} \int [& m_{11} (\dot{z} + \dot{Z})^2 - 2 m_{12} (\dot{z} + \dot{Z}) (\dot{\varphi} + \dot{\Phi}) + \\ & + m_{22} (\dot{\varphi} + \dot{\Phi})^2] dx + \\ & + \tfrac{1}{2} (r_{11} \dot{Z}^2 - 2 r_{12} \dot{Z} \dot{\Phi} + r_{22} \dot{\Phi}^2) \qquad (176) \end{aligned}$$

waarin de functie's m_{11}, m_{12} en m_{22} de „oude" beteekenis hebben (zie (6)) en

$$r_{11} = m_R \; ; \; r_{12} = m_R s_R \; ; \; r_{22} = I_R + m_R s_R{}^2 \qquad (177)$$

is. De uitdrukking voor de potentiëele energie blijft onveranderd gelijk aan

$$\begin{aligned} E_{pot} = \tfrac{1}{2} \int [& b_{11} z''^2 - 2 b_{12} z'' \varphi'' + \\ & + b_{22} \varphi''^2 + T \varphi'^2] dx. \qquad (178) \end{aligned}$$

Op grond van (176) en (178) kunnen direct *twee* Lagrange'sche bewegingsvergelijkingen worden opgeschreven voor de coördinaten Z en Φ. Daar deze coördinaten in (178) niet voorkomen, heeft men eenvoudig

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{Z}} \right) = \int [& m_{11} (\ddot{z} + \ddot{Z}) - m_{12} (\ddot{\varphi} + \ddot{\Phi})] dx + \\ & + \tfrac{1}{2} (r_{11} \ddot{Z} - r_{12} \ddot{\Phi}) = K_Z \qquad (179) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\Phi}} \right) = \int [& - m_{12} (\ddot{z} + \ddot{Z}) + m_{22} (\ddot{\varphi} + \ddot{\Phi})] dx + \\ & + \tfrac{1}{2} (- r_{12} \ddot{Z} + r_{22} \ddot{\Phi}) = M_\Phi \qquad (180) \end{aligned}$$

---

1) In de volgende formule treedt vóór de termen, die de rompbijdrage tot de kinetische energie geven, een factor $\frac{1}{2}$ op, omdat de formule de kinetische energie van de zich aan één zijde van het symmetrievlak bevindende *helft* van het systeem weergeeft, en m_R en I_R massa en traagheidsmoment van den *heelen* romp zijn.

waarin K_Z en M_Φ *arbeidscoëfficiënten* voor de luchtkrachten zijn. Daar de *amplituden* van trillingen in de vrijheidsgraden Z en Φ altijd gering zijn, kan men K_Z en M_Φ in eerste benadering gevoegelijk *nul* stellen, de vergelijkingen (179) en (180) eischen dan (zooals te verwachten was!) dat de resultante van alle traagheidskrachten in het systeem en het resulteerend moment van deze krachten beide nul moeten zijn.

Het is voor het vervolg doelmatig, op andere coördinaten over te gaan, n.l.

$$z_{nieuw} = z + Z \qquad \varphi_{nieuw} = \varphi + \Phi \qquad (181)$$

Deze coördinaten leggen de *vleugel*bewegingen direct, *in hun geheel* vast. De index „nieuw" meteen weglatend, daar verwarring nauwelijks mogelijk is, gaat (176) over in de uitdrukking.

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int (m_{11}\dot z^2 - 2\, m_{12}\dot z\dot\varphi + m_{22}\dot\varphi^2)\, d\, x +$$
$$+ \tfrac{1}{4}(r_{11}\dot Z^2 - 2\, r_{12}\dot Z\dot\Phi + r_{22}\dot\Phi^2) \qquad (182)$$

terwijl (178) onveranderd kan worden aangehouden, daar Z en Φ geen functie's van x zijn, en dus

$$z'' \equiv z''_{nieuw} \quad \text{en} \quad \varphi'' \equiv \varphi''_{nieuw}$$

is.

Uit (179) en (180) volgt echter direct, K_Z en M_Φ nul stellend, door eenmalige integratie en invoering van de coördinaten (181) (de index „nieuw" meteen weer weglatend)

$$\int (m_{11}\dot z - m_{12}\dot\varphi)\, d\, x = -\tfrac{1}{2}(r_{11}\dot Z - r_{12}\dot\Phi) \qquad (182\text{a})$$

$$\int (-m_{12}\dot z + m_{22}\dot\varphi)\, d\, x = -\tfrac{1}{2}(-r_{12}\dot Z + r_{22}\dot\Phi) \qquad (182\text{b})$$

Hieruit lost men op:

$$\dot Z = \frac{2}{r_{12}^2 - r_{11}r_{22}}\Big[r_{22}\int (m_{11}\dot z - m_{12}\dot\varphi)\, d\, x +$$
$$+ r_{12}\int (-m_{12}\dot z + m_{22}\dot\varphi)\, d\, x\Big] \qquad (183)$$

$$\dot\Phi = \frac{2}{r_{12}^2 - r_{11}r_{22}}\Big[r_{12}\int (m_{11}\dot z - m_{12}\dot\varphi)\, d\, x +$$
$$+ r_{11}\int (-m_{12}\dot z + m_{22}\dot\varphi)\, d\, x\Big] \qquad (184)$$

Het is de bedoeling, deze uitdrukkingen in (182) te substitueeren. Dan ontstaat voor de kinetische energie een uitdrukking, die uitsluitend de steeds gebruikte coördinaten z en φ bevat. Men heeft, ter afkorting

$$\int (m_{11}\dot z - m_{12}\dot\varphi)\, d\, x = L_1 \text{ en}$$
$$\int (-m_{12}\dot z + m_{22}\dot\varphi)\, d\, x = L_2 \qquad (185)$$

stellend:

$$\tfrac{1}{4}\, r_{11}\dot Z^2 = \frac{r_{11}}{(r_{12}^2 - r_{11}r_{22})^2}(r_{22}^2 L_1^2 +$$
$$+ 2\, r_{12}r_{22}L_1L_2 + r_{12}^2L_2^2)$$

$$-\tfrac{1}{2}\, r_{12}\dot Z\dot\Phi = \frac{r_{12}}{(r_{12}^2 - r_{11}r_{22})^2}\big[-2\, r_{12}r_{22}L_1^2 -$$
$$- 2(r_{11}r_{22} + r_{12}^2)L_1L_2 - 2\, r_{11}r_{12}L_2^2\big]$$

$$\tfrac{1}{4}\, r_{22}\dot\Phi^2 = \frac{r_{22}}{(r_{12}^2 - r_{11}r_{22})^2}(r_{12}^2L_1^2 +$$
$$+ 2\, r_{11}r_{12}L_1L_2 + r_{11}^2L_2^2)$$

Door sommeering volgt

$$\tfrac{1}{4}(r_{11}\dot Z^2 - 2\, r_{12}\dot Z\dot\Phi + r_{22}\dot\Phi^2) =$$
$$= \frac{1}{(r_{12}^2 - r_{11}r_{22})^2}\big[r_{22}L_1^2(r_{11}r_{22} - 2\, r_{12}^2 + r_{12}^2) +$$
$$+ r_{11}L_2^2(r_{12}^2 - 2\, r_{12}^2 + r_{11}r_{22}) +$$
$$+ 2\, L_1L_2(r_{12}r_{11}r_{22} - r_{11}r_{22}r_{12} - r_{12}^3 + r_{11}r_{22}r_{12})\big] =$$
$$= \frac{1}{(r_{11}r_{22} - r_{12}^2)}(r_{22}L_1^2 + 2\, r_{12}L_1L_2 + r_{11}L_2^2) \qquad (186)$$

Op grond van (177) is

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = m_R I_R \doteq \text{(ter afkorting) } r \qquad (187)$$

terwijl volgens (185) en (186) voor (182) kan worden geschreven

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int (m_{11}\dot z^2 - 2\, m_{12}\dot z\dot\varphi + m_{22}\dot\varphi^2)\, d\, x +$$
$$+ \frac{r_{22}}{r}\Big[\int (m_{11}\dot z - m_{12}\dot\varphi)\, d\, x\Big]^2 +$$
$$+ \frac{r_{11}}{r}\Big[\int (-m_{12}\dot z + m_{22}\dot\varphi)\, d\, x\Big]^2 +$$
$$+ \frac{2\, r_{12}}{r}\Big[\int (m_{11}\dot z - m_{12}\dot\varphi)\, d\, x\Big]\Big[\int (-m_{12}\dot z +$$
$$+ m_{22}\dot\varphi)\, d\, x\Big] \qquad (188)$$

Het resultaat (188), tesamen met (178), brengt het gestelde probleem terug tot het niveau der in no. 7 uitgewerkte berekeningen. De rompbewegelijkheid *compliceert de uitdrukking voor de kinetische* energie, en daarmede de bouw der bewegingsvergelijkingen, men kan de uitwerking echter zonder moeilijkheden geheel parallel aan de in no. 7 beschreven bewerkingen uitvoeren.

Een complete uitwerking zal hieronder worden gegeven.

I. uitgaande van de aanname, dat de vleugelvervormingen beperkt zijn tot deformatie's

$$z = q_1 z_1 \;;\; \varphi = Q_1\varphi_1 \text{ (vergelijk no. 72)} \qquad (189)$$

II. uitgaande van de aanname, dat de vleugelvervormingen beperkt zijn tot deformatie's

$$z = q_1 z_1 + q_2 z_2 \;;\; \varphi = q_1 C_1 q_1 + q_2 C_2 \varphi_2$$
$$\text{(vergelijk no. 7›)} \qquad (190)$$

912. De vleugel met toegelaten deformatie's $q_1 z_1$ en $Q_1 \varphi_1$.

Substitueer (189) in (188) en in (178) en vorm de Lagrange-vergelijkingen. De uitkomst is, voor de luchtkrachten arbeidscoëfficiënten invoerend:

$$\ddot q_1\int m_{11}z_1^2\, d\, x - \ddot Q_1\int m_{12}z_1\varphi_1\, d\, x +$$
$$+ \frac{2\, r_{22}}{r}\int m_{11}z_1\, d\, x\,.\Big[\int (\ddot q_1 m_{11}z_1 - \ddot Q_1 m_{12}\varphi_1)\, d\, x\Big] -$$
$$- \frac{2\, r_{11}}{r}\int m_{12}z_1\, d\, x\,.\Big[\int (-\ddot q_1 m_{12}z_1 + \ddot Q_1 m_{22}\varphi_1)\, dx\Big] +$$
$$+ \frac{2\, r_{12}}{r}\int m_{11}z_1 dx\,.\Big[\int (-\ddot q_1 m_{12}z_1 + \ddot Q_1 m_{22}\varphi_1)\, d\, x\Big] -$$
$$- \frac{2\, r_{12}}{r}\int m_{12}z_1 dx\,.\Big[\int (\ddot q_1 m_{11}z_1 - \ddot Q_1 m_{12}\varphi_1)\, d\, x\Big] +$$
$$+ \int z_1''(b_{11}q_1 z_1'' - b_{12}Q_1\varphi_1'')\, d\, x = K_{q1} \qquad (191)$$

$$
\begin{aligned}
&-\ddot{q}_1\int m_{12}\,z_1\,\varphi_1\,d\,x+\ddot{Q}_1\int m_{22}\,\varphi_1^2\,d\,x-\\
&-\frac{2\,r_{22}}{r}\int m_{12}\,\varphi_1\,d\,x\,.\,[\int(\ddot{q}_1\,m_{11}\,z_1-\ddot{Q}_1\,m_{12}\,\varphi_1)\,d\,x]+\\
&+\frac{2\,r_{11}}{r}\int m_{22}\,\varphi_1\,d\,x\,.\,[\int(-\ddot{q}_1\,m_{12}\,z_1+\ddot{Q}_1\,m_{22}\,\varphi_1)\,d\,x]-\\
&-\frac{2\,r_{12}}{r}\int m_{12}\varphi_1\,dx\,.\,[\int(-\ddot{q}_1\,m_{12}\,z_1+\ddot{Q}_1\,m_{22}\,\varphi_1)\,d\,x]+\\
&+\frac{2\,r_{12}}{r}\int m_{22}\varphi_1\,dx\,.\,[\int(\ddot{q}_1\,m_{11}\,z_1-\ddot{Q}_1\,m_{12}\,\varphi_1)\,d\,x]+\\
&\qquad+\int\varphi_1''(-b_{12}\,q_1\,z_1''+b_{22}\,Q_1\,\varphi_1'')\,d\,x+\\
&\qquad\qquad+\int\varphi_1'\,T\,Q_1\,\varphi_1'\,d\,x=M_{Q1} \qquad (192)
\end{aligned}
$$

Nu kunnen vooreerst de arbeidscoëfficiënten K_{q1} en M_{Q1} *exact* uit no. 72 worden overgenomen [1]). Na substitutie van

$$q_1=\bar{q}_{10}\,e^{i\nu\tau} \qquad Q_1=\bar{Q}_{10}\,e^{i\nu\tau} \qquad (193)$$

in (191) en (192), en verwijdering van de e-macht, verkrijgt men vergelijkingen, wier rechterleden (K_{q1} en M_{Q1}) *identiek* zijn met de rechterleden van (120) en (121). Men stelle verder:

$$
\left.
\begin{aligned}
&N=\int z_1\,\varphi_1\,d\,x\\
&\frac{1}{N}\Big[\int m_{11}\,z_1^2\,d\,x+\frac{2\,r_{22}}{r}(\int m_{11}\,z_1\,d\,x)^2+\\
&\qquad+\frac{2\,r_{11}}{r}(\int m_{12}\,z_1\,d\,x)^2-\\
&\qquad-\frac{4\,r_{12}}{r}(\int m_{11}\,z_1\,d\,x)(\int m_{12}\,z_1\,d\,x)\Big]=m\\
&\frac{1}{N}\Big[\int m_{12}\,z_1\,\varphi_1\,d\,x+\\
&\qquad+\frac{2\,r_{22}}{r}(\int m_{11}\,z_1\,d\,x)(\int m_{12}\,\varphi_1\,d\,x)+\\
&\qquad+\frac{2\,r_{11}}{r}(\int m_{12}\,z_1\,d\,x)(\int m_{22}\,\varphi_1\,d\,x)-\\
&\qquad-\frac{2\,r_{12}}{r}\{(\int m_{11}\,z_1\,d\,x)(\int m_{22}\,\varphi_1\,d\,x)+\\
&\qquad\qquad+(\int m_{12}\,z_1\,d\,x)(\int m_{12}\,\varphi_1\,d\,x)\}\Big]=m\,s\\
&\frac{1}{N}\Big[\int m_{22}\,\varphi_1^2\,d\,x+\frac{2\,r_{22}}{r}(\int m_{12}\,\varphi_1\,d\,x)^2+\\
&\qquad+\frac{2\,r_{11}}{r}(\int m_{22}\,\varphi_1\,d\,x)^2-\\
&\qquad-\frac{4\,r_{12}}{r}(\int m_{12}\varphi_1\,d\,x)(\int m_{22}\varphi_1\,d\,x)\Big]=\\
&\qquad\qquad=m(s^2+r^2)\\
&\frac{1}{N}\int b_{11}\,z_1''^2\,d\,x=c\\
&\frac{1}{N}\int b_{12}\,z_1''\,\varphi_1''\,d\,x=e\,c\\
&\frac{1}{N}\int b_{22}\,\varphi_1''^2\,d\,x+\frac{1}{N}\int T\,\varphi_1'^2\,d\,x=M_\varphi+e^2\,c
\end{aligned}
\right] \quad (194)
$$

1) Mits men de traagheidswerking van de meetrillende lucht door een toeslag op m_{11}, m_{12} en m_{22} in rekening brengt. Dit wordt in het vervolg verondersteld te zijn geschied.

dan blijken de vergelijkingen (191), (192), na verwijdering van den tijd via substitutie van (193), *exact den vorm (123, (124) te verkrijgen.*

Men kan de heele verdere behandeling van het vraagstuk voortzetten naar de bij laatstgenoemde vergelijkingen aangegeven werkwijze. Het is daarmede *opgelost.*

Het blijkt dus, dat de *invloed van de rompbewegelijkheid* bij een systeem, dat met het in no. 72 beschrevene overeenkomt, *ten volle* in rekening kan worden gebracht door *correctie's* op de formules (122). De *grootte* dezer correctie's hangt volgens (194) áf van de „romp-parameters" r, r_{11}, r_{12}, r_{22}, en van de *vier* integralen

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int m_{11}\,z_1\,d\,x \qquad \int m_{12}\,\varphi_1\,d\,x\\
&\int m_{12}\,z_1\,d\,x \qquad \int m_{22}\,\varphi_1\,d\,x
\end{aligned}
\right\} \quad (195)
$$

die men gemakkelijk door numerieke of grafische integratie kan uitwerken.

913. De vleugel met toegelaten deformatie's $q_1\,z_1$, $q_2\,z_2$, $q_1\,C_1\,\varphi_1$ en $q_2\,C_2\,\varphi_2$.

Men kiest de deformatie's

$$(z_1\ ,\ C_1\,\varphi_1)\ ;\ (z_2\ ,\ C_2\,\varphi_2)$$

evenals in no. 73 geschiedde, in overeenstemming met de twee fundamenteele eigentrillings-vormen van het systeem in stilstaande lucht. De uitdrukking voor de kinetische energie *moet* dan uiteenvallen in een *som van twee quadraten:* (kinetische energie op normaalcoördinaten!)

$$E_{kin}=\tfrac{1}{2}(U_{11}\,\dot{q}_1^2+U_{22}\,\dot{q}_2^2) \qquad (196)$$

De coëfficiënten kunnen worden bepaald door (190) in (188) te substitueeren en de termen met $\dot{q}_1^2$, resp. $\dot{q}_2^2$ bij elkaar te zoeken. Men vindt:

$$
\begin{aligned}
U_{11}=&\int[m_{11}\,z_1^2-2\,m_{12}\,z_1\,C_1\,\varphi_1+m_{22}\,C_1^2\,\varphi_1^2]\,d\,x+\\
&+\frac{2\,r_{22}}{r}[\int(m_{11}\,z_1-m_{12}\,C_1\,\varphi_1)\,d\,x]^2+\\
&+\frac{2\,r_{11}}{r}[\int(-m_{12}\,z_1+m_{22}\,C_1\,\varphi_1)\,d\,x]^2+\\
&+\frac{4\,r_{12}}{r}[\int(m_{11}\,z_1-m_{12}\,C_1\,\varphi_1)\,d\,x][\int(-m_{12}\,z_1+\\
&\qquad+m_{22}\,C_1\,\varphi_1)\,d\,x] \qquad (197)\\
U_{22}=&\int[m_{11}\,z_2^2-2\,m_{12}\,z_2\,C_2\,\varphi_2+m_{22}\,C_2\,\varphi_2^2]\,d\,x+\\
&+\frac{2\,r_{22}}{r}[\int(m_{11}\,z_2-m_{12}\,C_2\,\varphi_2)\,d\,x]^2+\\
&+\frac{2\,r_{11}}{r}[\int(-m_{12}\,z_2+m_{22}\,C_2\,\varphi_2)\,d\,x]^2+\\
&+\frac{4\,r_{12}}{r}[\int(m_{11}\,z_2-m_{12}\,C_2\,\varphi_2)\,d\,x][\int(-m_{12}\,z_2+\\
&\qquad+m_{22}\,C_2\,\varphi_2)\,d\,x] \qquad (198)
\end{aligned}
$$

Het is duidelijk, dat het gestelde vraagstuk met de afleiding van de formules (197) en (198) reeds weder is opgelost. Men kan de heele verdere uitwerking blijkbaar aan de hand van de in no. 73 gegeven voorschriften uitvoeren, mits slechts de aldaar vermelde formules (144) en (145) door

(197) en (198) worden vervangen. De rompbewegelijkheid kan nu in rekening worden gebracht door het aanbrengen van correctie's op de door (144) en (145) gegeven waarden van U_{11} en U_{22}!

Men kan naast de formules (197) en (198) nog een contrôle-formule, overeenkomend met de natuurlijk niet meer exact geldige formule (146) afleiden, door in de uitdrukking voor de kinetische energie de coëfficiënt van het kruisproduct $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ bijeen te zoeken. De uitvoering van deze aanwijzing moge hier achterwege worden gelaten.

Het is wellicht goed er nog even de aandacht op te vestigen, dat alle functie's m_{11}, m_{12}, m_{22} in de gebruikte formules in overeenstemming met (44) t/m (47) moeten worden geconstrueerd.

92. **De antisymmetrische trillingen.**

De romp wordt, evenals hiervoor, als een star lichaam opgevat. Het traagheidsmoment om de langs-as wordt voorgesteld door I_R'. De rompbeweging wordt vastgelegd door een coördinaat Θ, gelijk aan den hoek tusschen een dwars-as van de romp en een „horizontaal" vlak. Leg de vleugelbeweging vast door coördinaten z_d en φ, waarbij φ als gewoonlijk is gedefiniëerd en waarin z_d de verplaatsing van den vleugel voorstelt ter plaatse van de beschrijvings-as, *doch t.o.v.* van een vlak, dat de *rompdraaingen mede uitvoert.*

De kinetische energie van het systeem wordt gelijk bevonden aan:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int [m_{11}(\dot{z}_d + x\dot{\Theta})^2 - 2m_{12}(\dot{z}_d + x\dot{\Theta})\dot{\varphi} + m_{22}\dot{\varphi}^2]\,dx + \tfrac{1}{4} I_R' \dot{\Theta}^2 \qquad (199)$$

en de potentiëele als gewoonlijk gelijk aan

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}\int [b_{11} z_d''^2 - 2 b_{12} z_d'' \varphi'' + b_{22}\varphi''^2 + T\varphi'^2]\,dx \qquad (200)$$

Men leidt uit de twee bovenstaande vergelijkingen direct een Lagrang'sche bewegingsvergelijking voor de coördinaat Θ af. Zij luidt:

$$\int [m_{11} x(\ddot{z}_d + x\ddot{\Theta}) - m_{12} x\ddot{\varphi}]\,dx + \tfrac{1}{2} I_R' \ddot{\Theta} = M_\Theta \qquad (201)$$

waarin M_Θ de arbeidscoëfficiënt is, die de luchtkrachten weergeeft.

Het zal in het algemeen *niet* geoorloofd zijn, de coëfficiënt M_Θ nul te stellen. Men berekent deze coëfficiënt volgens in no. 33 gegeven aanwijzingen: daar de in 33 gebruikte coördinaat z gelijk kan worden gesteld aan

$$z_d + x\Theta$$

is volgens (48) en (49)

$$\bar{K}_a = \bar{a}_{12}\varphi\,\Delta x \qquad (202)$$

$$K_v = (\bar{a}_{21} z_d + \bar{a}_{21} x\Theta + \bar{a}_{22}\varphi)\,\Delta x \qquad (203)$$

Verder is

$$z_a = z_d + x\Theta - c_a\varphi \;;\; z_v = z_d + x\Theta - c_v\varphi \qquad (204)$$

Dus

$$(\delta A)_{\delta\Theta} = \int (\bar{K}\,\delta z_a + \bar{K}_v\,\delta z_v) = \int [\bar{a}_{12}\varphi . x\,\delta\Theta + (\bar{a}_{21} z_d + \bar{a}_{21} x\Theta + \bar{a}_{22}\varphi)\, x\,\delta\Theta]\,dx$$

$$M_\Theta = \frac{\delta A}{\delta\Theta} = \int [\bar{a}_{21} z_d + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{22})\varphi + \bar{a}_{21} x\Theta]\, x\,dx \qquad (205)$$

Men stelle nu, *naar analogie* van de in no. *72* gevolgde werkwijze:

$$z_d = q_1 z_{d1} \qquad \varphi = Q_1\varphi_1 \qquad (206)$$

Substitueert men dit in (199) en (200), dan kunnen de navolgende Lagrange-vergelijkingen voor de gegeneraliseerde coördinaten q_1 en Q_1 worden opgeschreven:

$$\int [m_{11} z_{d1}(\ddot{q}_1 z_{d1} + x\ddot{\Theta}) - m_{12} z_{d1}\ddot{Q}_1\varphi_1]\,dx + \int z_{d1}''(b_{11} q_1 z_{d1}'' - b_{12} Q_1\varphi_1'')\,dx = K_{q1} \qquad (207)$$

$$\int [-m_{12}\varphi_1(\ddot{q}_1 z_{d1} + x\ddot{\Theta}) + m_{22}\varphi_1\ddot{Q}_1\varphi_1]\,dx + \int \varphi_1''(-b_{12} q_1 z_{d1}'' + b_{22} Q_1\varphi_1'')\,dx + \int \varphi_1' T Q_1\varphi_1'\,dx = K_{Q1} \qquad (208)$$

Men heeft i.v.m. (202), (203) en (204)

$$(\delta A)_{\delta q1} = \int [\bar{a}_{12} Q_1\varphi_1 . z_{d1}\,\delta q_1 + (\bar{a}_{21} q_1 z_{d1} + \bar{a}_{21} x\Theta + \bar{a}_{22} Q_1\varphi_1) z_{d1}\,\delta q_1]\,dx$$

Dus

$$K_{q1} = \frac{\delta A}{\delta q_1} = \int [\bar{a}_{21} q_1 z_{d1}^2 + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{22}) Q_1 z_{d1}\varphi_1 + \bar{a}_{21} x\Theta z_{d1}]\,dx \qquad (209)$$

Verder

$$(\delta A)_{\delta Q1} = -\int [\bar{a}_{12} Q_1\varphi_1 . c_a\varphi_1\,\delta Q_1 + (\bar{a}_{21} q_1 z_{d1} + \bar{a}_{21} x\Theta + \bar{a}_{22} Q_1\varphi_1) c_v\varphi_1\,\delta Q_1]\,dx$$

$$K_{Q1} = \frac{\delta A}{\delta Q_1} = -\int [\bar{a}_{21} q_1 c_v z_{d1}\varphi_1 + (\bar{a}_{12} c_a + \bar{a}_{22} c_v) Q_1\varphi_1^2 + \bar{a}_{21} c_v x\Theta\varphi_1]\,dx \qquad (210)$$

Substitueert men (206) tenslotte ook in (205), dan ontstaat nog:

$$M_\Theta = \int [\bar{a}_{21} q_1 x z_{d1} + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{22}) Q_1 x\varphi_1 + \bar{a}_{21} x^2\Theta]\,dx \qquad (211)$$

Volgens (50), (51), (63) en (64) is:

$$\bar{a}_{21} = m_L\bar{\nu}^2\bar{a}_{11} \qquad \bar{a}_{12} + \bar{a}_{22} = m_L\bar{\nu}^2 t\,\bar{a}_{12}$$

$$-\bar{a}_{21} c_v = m_L\nu^2 t\,\bar{a}_{21} \qquad -(\bar{a}_{12} c_a + \bar{a}_{22} c_v) = m_L\bar{\nu}^2 t^2\bar{a}_{22}$$

Dus

$$K_{q1} = \int m_L\bar{\nu}^2 [\bar{a}_{11} z_{d1}^2 . q_1 + \bar{a}_{12} t\varphi_1 z_{d1} . Q_1 + \bar{a}_{11} x z_{d1} . \Theta]\,dx \qquad (212)$$

$$K_{Q1} = \int m_L\bar{\nu}^2 [\bar{a}_{21} t z_{d1}\varphi_1 . q_1 + \bar{a}_{22} t^2\varphi_1^2 . Q_1 + \bar{a}_{21} t x\varphi_1 . \Theta]\,dx \qquad (213)$$

$$M_\Theta = \int m_L\bar{\nu}^2 [\bar{a}_{11} x z_{d1} . q_1 + \bar{a}_{12} t x\varphi_1 . Q_1 + \bar{a}_{11} x^2 . \Theta]\,dx \qquad (214)$$

Substitueer nu (206) in (201), en zet vervolgens

$$q_1 = \bar{q}_{10} e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad Q_1 = \bar{Q}_{10} e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad \Theta = \bar{\Theta}_0 e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad (215)$$

Dan volgt uit (201), (207) en (208)

$$-\bar{\nu}^2\int [m_{11} z_{d1}(\bar{q}_{10} z_{d1} + x\Theta_0) - m_{12}\bar{Q}_{10} z_{d1}\varphi_1]\,dx + \int z_{d1}''(b_{11} z_{d1}'' . q_{10} - b_{12}\varphi_1''\bar{Q}_{10})\,dx = \int m_L\bar{\nu}^2 [\bar{a}_{11} z_{d1}^2 . \bar{q}_{10} + \bar{a}_{12} t\varphi_1 z_{d1} . \bar{Q}_{10} + \bar{a}_{11} x z_{d1} . \bar{\Theta}_0]\,dx \qquad 216)$$

$$-\bar{\nu}^2\int[-m_{12}\varphi_1(\bar{q}_{10}z_{d1}+x\overline{\Theta}_0)+m_{22}\overline{Q}_{10}\varphi_1^2]\,dx+$$
$$+\int\varphi_1''(-b_{12}z_{d1}''.\bar{q}_{10}+b_{22}\varphi_1''.\overline{Q}_{10})\,dx+$$
$$+\int T\varphi_1'^2\overline{Q}_{10}\,dx=\int m_L\bar{\nu}^2[\bar{a}_{21}t\,z_{d1}\varphi_1\bar{q}_{10}+$$
$$+\bar{a}_{22}t^2\varphi_1^2.\overline{Q}_{10}+\bar{a}_{21}t\,x\varphi_1.\overline{\Theta}_0]\,dx \qquad (217)$$

$$-\bar{\nu}^2\int[m_{11}x(\bar{q}_{10}z_{d1}+x\overline{\Theta}_0)-m_{12}x\varphi_1.\overline{Q}_{10}]\,dx-$$
$$-\tfrac{1}{2}\bar{\nu}^2I_R'\overline{\Theta}_0=\int m_L\bar{\nu}^2[\bar{a}_{11}x\,z_{d1}.\bar{q}_{10}+$$
$$+\bar{a}_{12}t\,x\varphi_1\overline{Q}_{10}+\bar{a}_{11}x^2.\overline{\Theta}_0]\,dx \qquad (218)$$

Dit zijn drie lineaire homogene vergelijkingen voor de onbekenden $\bar{q}_{10}$, $\overline{Q}_{10}$, $\overline{\Theta}_0$.

Stel:

$$\left.\begin{aligned}
&\int z_{d1}\varphi_1\,dx=N\\
&\frac{1}{N}\int m_{11}z_{d1}\,dx=m\\
&\frac{1}{N}\int m_{11}x\,z_{d1}\,dx=m'\\
&\frac{1}{N}\int m_{11}x^2\,dx=m''\\
&\frac{1}{N}\int m_{12}z_{d1}\varphi_1\,dx=m\,s\\
&\frac{1}{N}\int m_{12}x\varphi_1\,dx=m'\,s'\\
&\frac{1}{N}\int m_{22}\varphi_1^2\,dx=m(s^2+r^2)\\
&\frac{1}{N}\int b_{11}z_{d1}''^2\,dx=c\\
&\frac{1}{N}\int b_{12}z_{d1}''\varphi_1''\,dx=e\,c\\
&\frac{1}{N}\int b_{22}\varphi_1''^2\,dx+\frac{1}{N}\int T\varphi_1'^2\,dx=M_\varphi+e^2c
\end{aligned}\right\} \qquad (219)$$

en

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\int m_L z_{d1}^2\,dx=\mu_{11}\\
&\frac{1}{N}\int m_L t\,z_{d1}\varphi_1\,dx=\mu_{12}\\
&\frac{1}{N}\int m_L c_a z_{d1}\varphi_1\,dx=\mu_{12}^a\\
&\frac{1}{N}\int m_L c_v z_{d1}\varphi_1\,dx=\mu_{12}^v\\
&\frac{1}{N}\int m_L c_v t\varphi_1^2\,dx=\mu_{22}^v\\
&\frac{1}{N}\int m_L c_a c_v\varphi_1^2\,dx=\mu_{22}^{av}\\
&\frac{1}{N}\int m_L c_a t\varphi_1^2\,dx=\mu_{22}^a\\
&\frac{1}{N}\int m_L x\,z_{d1}\,dx=\mu_{x1}\\
&\frac{1}{N}\int m_L t\,x\varphi_1\,dx=\mu_{x2}
\end{aligned}\right\} \qquad (220)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\int m_L c_a x\varphi_1\,dx=\mu_{x2}^a\\
&\frac{1}{N}\int m_L c_v x\varphi_1\,dx=\mu_{x2}^v\\
&\frac{1}{N}\int m_L x^2\,dx=\mu_{xx}
\end{aligned}\right\} \qquad (220)$$

Behandel nu de luchtkracht-termen volgens de in 61 beschreven werkwijze. De gereduceerde snelheid wordt dus behandeld als een niet van x afhankelijke grootheid. Met de afkortingen, gedefiniëerd door (220) kunnen de *rechterleden* van de vergelijkingen (216), (217) en (218), mede op grond van (131), dan respectievelijk in den vorm worden geschreven (na deeling door N):

$$[-(p_1+ip_1')\mu_{11}\bar{q}_{10}+\{(p_2+iV-ip_2')\mu_{12}+$$
$$+(p_1+ip_1')\mu_{12}^a\}\overline{Q}_{10}-(p_1+ip_1')\mu_{x1}\overline{\Theta}_0].\bar{\nu}^2$$
$$[(p_1+ip_1')\mu_{12}^v\bar{q}_{10}-\{(p_2-ip_2')\mu_{22}^v+$$
$$+(p_1+ip_1')\mu_{22}^{av}+iV\mu_{22}^a\}\overline{Q}_{10}+$$
$$+(p_1+ip_1')\mu_{x2}^v\overline{\Theta}_0].\bar{\nu}^2$$
$$[-(p_1+ip_1')\mu_{x1}\bar{q}_{10}+\{(p_2+iV-ip_2')\mu_{x2}+$$
$$+(p_1+ip_1')\mu_{x2}\}\overline{Q}_{10}-(p_1+ip_1')\mu_{xx}\overline{\Theta}_0].\bar{\nu}^2$$

Mede de afkortingen (219) in (216), (217) en (218) invoerend, kunnen deze vergelijkingen in den navolgenden geordenden vorm worden gebracht:

$$[-m\bar{\nu}^2+c+\bar{\nu}^2\mu_{11}(p_1+ip_1')]\bar{q}_{10}+$$
$$+[ms\bar{\nu}^2-ec-\bar{\nu}^2\{(p_2-ip_2'+iV)\mu_{12}+$$
$$+(p_1+ip_1')\mu_{12}^a\}]\overline{Q}_{10}+[-m'\bar{\nu}^2+$$
$$+(p_1+ip_1')\mu_{x1}\bar{\nu}^2]\overline{\Theta}_0=0 \quad (221)$$
$$[ms\bar{\nu}^2-ec-\bar{\nu}^2\mu_{12}^v(p_1+ip_1')]\bar{q}_{10}+$$
$$+[-m(s^2+r^2)\bar{\nu}^2+M_\varphi+e^2c+\bar{\nu}^2\{(p_2-$$
$$-ip_2')\mu_{22}^v+(p_1+ip_1')\mu_{22}^{av}+iV\mu_{22}^a\}]\overline{Q}_{10}+$$
$$+[m's'\bar{\nu}^2-(p_1+ip_1')\mu_{x2}^v\bar{\nu}^2]\overline{\Theta}_0=0 \quad (222)$$
$$[-m'\bar{\nu}^2+\bar{\nu}^2\mu_{x1}(p_1+ip_1')]\bar{q}_{10}+$$
$$+[m's'\bar{\nu}^2-\bar{\nu}^2\{(p_2-ip_2'+iV)\mu_{x2}+$$
$$+(p_1+ip_1')\mu_{x2}^a\}]\overline{Q}_{10}+[-m''\bar{\nu}^2-$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{I_R'}{N}\bar{\nu}^2+(p_1+ip_1')\mu_{xx}\bar{\nu}^2]\overline{\Theta}_0=0 \quad (223)$$

Uit de laatste dezer drie vergelijkingen kan $\bar{\nu}$ door deeling door $\bar{\nu}^2$ nog worden verwijderd. Het is duidelijk, dat de *gelijk nul* gestelde coëfficiënten-determinant van (221), (222) en (223), ν *reëel* stellend, twee reëele vergelijkingen oplevert, waaruit kritische waarden van V en ν kunnen worden opgelost. Hieruit kan de kritische snelheid zelf op de bekende wijze (na bepaling eener effectieve koorde volgens no. 61) worden berekend.

De numerieke uitwerking verloopt langs gebruikelijke wegen, wanneer bekend is hoe de functie z_{d1} moet worden geconstrueerd en hoe de van elastische eigenschappen afhankelijke constanten c, e en M_φ moeten worden bepaald. Het spreekt vanzelf, dat het antwoord op beide vragen het best uit de resultaten van de standtrillingsproef kan worden afgeleid. De vergelijkingen, die deze proef zouden moeten beschrijven, worden uit (221), (222) en (223) verkregen door *alle* coëfficiënten μ *nul* te stellen. [1])

De *laatste* vergelijking verkrijgt dan de simpele gedaante:

$$-m'\bar{q}_{10}+m's'\overline{Q}_{10}-\left(m''+\tfrac{1}{2}\frac{I_R'}{N}\right)\overline{\Theta}_0=0 \quad (224)$$

Van deze betrekking kan gebruik worden gemaakt om de functie z_{d1} te bepalen. Analoog aan reeds vroeger gegeven aanwijzingen leide men deze functie af uit den fundamenteelen antisymmetrischen eigentrillingsvorm der *vleugelbuiging*. Men kan deze eigentrilling gevoegelijk bepaald denken door

$$\bar{q}_{10}=1\,;\ \overline{Q}_{10}=(\overline{Q}_{10})_B\,;\ \overline{\Theta}_0=(\overline{\Theta}_0)_B \ \text{ en } \ \nu=\nu_B \quad (225)$$

Dan geldt *voor* $\nu=\nu_B$ volgens (224) en (219) (zie eventueel ook (218))

$$-\int m_{11}x\{z_{d1}+x(\overline{\Theta}_0)_B\}dx+$$
$$+Nm's'(\overline{Q}_{10})_B=\tfrac{1}{2}I_R'(\overline{\Theta}_0)_B \quad (226)$$

Nu kan de functie

$$z_{1B}=z_{d1}+x(\Theta_0)_B \quad (227)$$

direct uit de *amplitudemetingen* bij de proef worden vastgesteld, want (227) geeft eenvoudig de *amplitude-verdeeling ter plaatse van de beschrijvings-as*, gemeten t.o.v. een *vast* vlak. Men kan echter uit de bij de proef geconstateerde knooplijnligging gewoonlijk bovendien een doelmatige waarde van $(\overline{Q}_{10})_B$ afleiden. (Een zeer groote nauwkeurigheid is niet noodig.) Daar het product $Nm's'$ volgens (219) berekend kan worden uit m_{12}, x en φ_1 (φ_1 *wordt natuurlijk zonder moeite uit* de amplitudeverdeeling in de fundamenteele antisymmetrische eigentrilling der vleugeltorsie afgeleid), kan men zonder z_{d1} te kennen (daarvoor in de plaats komt de uit de metingen *direct* bepaalde functie z_{1B}) uit (226) afleiden [2])

$$(\overline{\Theta}_0)_B=\frac{2}{I_R'}[Nm's'(\overline{Q}_{10})_B-\int m_{11}xz_{1B}dx] \quad (228)$$

Dan echter kan z_{d1} met (227) worden vastgesteld.

Deze *omweg* over de formule (224) is *noodzakelijk*, omdat de amplitude $(\Theta_0)_B$ in den regel te klein zal zijn om bij de standtrillingsproef door meting te kunnen worden vastgesteld.

Stelt men nu:

$$\frac{Nm'}{Nm''+\frac{1}{2}I_R'}=\beta \quad (229)$$

dan is volgens (224) bij de standtrilling altijd

$$\overline{\Theta}_0=-\beta\bar{q}_{10}+\beta s'\overline{Q}_{10}$$

Daarmede volgt uit (221) en (222), alle μ's *nul* stellend (standtrilling!)

[1]) Voor m_{11}, m_{12} en m_{22} de door (44) t/m (47) gedefiniëerde functie's *aanhoudend*.

[2]) Aangenomen wordt, dat men I_R' door een gewichtsanalyse van den romp heeft bepaald.

$$[-(m-\beta m')\nu^2+c]\bar{q}_{10}+$$
$$+[(ms-\beta m's')\nu^2-ec]\overline{Q}_{10}=0 \quad (230)$$
$$[(ms-\beta m's')\nu^2-ec]\bar{q}_{10}+[-(mr^2+$$
$$+ms^2-\beta m's'^2)\nu^2+M_\varphi+e^2c]\overline{Q}_{10}=0 \quad (231)$$

Aan de gelijk nul gestelde coëfficiënten-determinant moeten ν_B en ν_T voldoen. Dat geeft *twee* vergelijkingen voor c. e en M_φ. Tenzij men de waarde van *e* kan afleiden *uit* een *torsieproef* (ligging elastische as), moet men trachten een *derde* vergelijking te verkrijgen door substitutie van één der eigentrillingsvormen [1]). Het is niet noodig, hierop uitvoerig in te gaan, daar men naar analogie van in *72* beschreven methoden te werk kan gaan.

Met de voorgaande berekening is een methode, om kritische snelheden van gekoppelde *antisymmetrische* buigings-torsie-trillingen van een vliegtuigvleugel te berekenen, volledig uitgewerkt. Zij heeft één onplezierige eigenschap, n.l. dat de *numerieke* uitwerking nogal bewerkelijk is (determinant van de *derde* orde!). Men kan de berekening sterk vereenvoudigen, wanneer men zich met een wat kleiner nauwkeurigheid tevreden stelt. Deze vereenvoudigingsmogelijkheid sluit aan bij de formule (201). Hiermede kan de rompdraaiing zonder meer worden berekend, wanneer $M_\Theta=0$ kan worden gesteld. *Dit is strikt genomen alleen toelaatbaar,* wanneer V_{krit} klein is en/of de vleugel relatief *zwaar* is (overheerschen van traagheidskrachten t.o.v. aerodynamische krachten). Het moet echter in den regel mogelijk zijn, de uitwerking van een eerste benadering op deze aanname te baseeren. Men heeft dan direct

$$\Theta=-\frac{2}{I_R'}\int[m_{11}x(z_d+x\Theta)-m_{12}x\varphi]\,dx$$

Substitueer dit in (199), en stel, aansluitend bij de in no. 73 beschreven werkwijze

$$z_d+x\Theta=q_1z_1+q_2z_2\,;\quad \varphi=q_1C_1\varphi_1+q_2C_2\varphi_2 \quad (232)$$

waarin

$(z_1, C_1\varphi_1)$ overeenkomt met den trillingsvorm in de fundamenteele antisymmetrische buigingsresonantie.

$(z_2, C_2\varphi_2)$ overeenkomt met den trillingsvorm in de fundamenteele antisymmetrische torsieresonantie. [2])

Dan wordt

$$E_{kin}=\tfrac{1}{2}\int[m_{11}(\dot{q}_1z_1+\dot{q}_2z_2)^2-$$
$$-2m_{12}(\dot{q}_1z_1+\dot{q}_2z_2)(\dot{q}_1C_1\varphi_1+\dot{q}_2C_2\varphi_2)+$$
$$+m_{22}(\dot{q}_1C_1\varphi_1+\dot{q}_2C_2\varphi_2)^2]\,dx+$$
$$+\frac{1}{I_R'}\Big[\int\{m_{11}x(\dot{q}_1z_1+\dot{q}_2z_2)-$$
$$-m_{12}x(\dot{q}_1C_1\varphi_1+\dot{q}_2C_2\varphi_2)\}dx\Big]^2 \quad (233)$$

[1]) Men lette erop, dat de ligging van de knooplijnen der trillingsvormen niet wordt gegeven door het quotiënt $\frac{\bar{q}_{10}z_{d1}}{\overline{Q}_{10}\varphi_1}$, doch door $\frac{\bar{q}_{10}z_{d1}+x\overline{\Theta}_0}{\overline{Q}_{10}\varphi_1}=\frac{\bar{q}_{10}(z_{d1}-x\beta)+\beta s'x\overline{Q}_{10}}{\overline{Q}_{10}\varphi_1}$

[2]) Men kan de vier functie's z_1, z_2, $C_1\varphi_1$, $C_2\varphi_2$ alle *direct* uit de resultaten van de standtrillingsproef bepalen.

en *deze uitdrukking* moet, daar normaalcoördinaten zijn gebruikt, in een som van twee quadraten uiteenvallen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\,(U_{11}\dot{q}_1^2 + U_{22}\dot{q}_2^2) \qquad (234)$$

Door bijeenzoeken van termen met $\dot{q}_1^2$ en $\dot{q}_2^2$ in (223) vindt men:

$$U_{11} = \int [m_{11}z_1^2 - 2\,m_{12}z_1C_1\varphi_1 + m_{22}C_1^2\varphi_1^2]\,dx +$$

$$+ \frac{2}{I_R'}\left[\int \{m_{11}xz_1 - m_{12}xC_1\varphi_1\}\,dx\right]^2 \quad (235)$$

$$U_{22} = \int [m_{11}z_2^2 - 2\,m_{12}z_2C_2\varphi_2 + m_{22}C_2^2\varphi_2^2]\,dx +$$

$$+ \frac{2}{I_R'}\left[\int \{m_{11}xz_2 - m_{12}xC_2\varphi_2\}\,dx\right]^2 \quad (235)$$

Met de afleiding van deze formules is het vraagstuk opgelost, daar de heele verdere uitwerking naar de in no. 73 gegeven aanwijzingen kan worden uitgevoerd, mits slechts de aldaar vermelde formules (144) en (145) door de beide bovenstaande worden vervangen. De rompbewegelijkheid kan dus, M_Θ in (201) verwaarloozend, wanneer een werkwijze wordt toegepast overeenkomend met de in no. 73 beschrevene, in rekening worden gebracht door eenvoudige correctie's op de waarden van U_{11} en U_{22}.

Het *aequivalent* van de vereenvoudiging $M_\Theta = 0$ wordt in de formules (221), (222), (223) verkregen, door in de derde vergelijking

$$\mu_{x1},\ \mu_{x2},\ \mu_{x2}^a \text{ en } \mu_{xx} = 0$$

te stellen. Daardoor ontstaat ook in die formules een ingrijpende vereenvoudiging.

10. Algemeene vergelijkingen voor symmetrische trillingen van een vleugel-rolroer-systeem.

10.1. Algemeene inleiding.

Wanneer het rolroer, doordat het niet is gebalanceerd of zelfremmend wordt bestuurd, aan de trillingen van het systeem als een *afzonderlijk onderdeel* van het systeem deelneemt, kunnen de hiervóór opgenomen berekeningen geen bruikbare uitkomsten voor de kritische snelheid van het complete systeem opleveren. In het normale geval wordt de kritische snelheid door een meetrillend ondergebalanceerd rolroer belangrijk *verlaagd*. Zoo zijn onstabiele trillingen eigenlijk aan een vleugel-*rolroer*-systeem *ontdekt*, en blijkt ook in verreweg de meeste in de praktijk waargenomen gevallen van onstabiele trillingen een ondergebalanceerd rolroer een essentiëele factor te zijn.

De *berekening* van de kritische snelheid van het *complete* vleugelrolroersysteem heeft de onaangename eigenschap, zoowel wat de theoretische als — en *vooral* — wat de numerieke uitwerking betreft, gecompliceerd en bewerkelijk te zijn. Er bestaat een zeer gebruikelijke methode, om hierin verbetering te brengen. Deze berust eenvoudig op de meest drastische beperking van aan den *vleugel* toegekende vervormingsmogelijkheden: n.l. de reductie van de deformatiecomponenten tot *slechts één*, waarvoor dan òf vleugelbuiging, òf vleugeltorsie (beide in voorgeschreven gedaante) wordt genomen. Men spreekt van „het probleem der gekoppelde vleugel*buigings*- en rolroertrillingen en van het probleem der gekoppelde vleugel*torsie*- en rolroer-trillingen". Beide leiden tot *karakteristieke vergelijkingen* (gelijk nul gestelde coëfficiëntendeterminanten der bewegingsvergelijkingen), die determinanten van de *tweede* orde zijn, waardoor de numerieke uitwerking relatief eenvoudig blijft. Tegen deze *onderverdeeling* van het *complete* probleem bestaat echter het ernstige bezwaar, dat zij *niet aansluit* (ook niet bij benadering!) bij het in de praktijk — in de werkelijkheid — aangetroffen geval. Zij kan dan ook, wanneer het erom gaat de *werkelijk* kritische snelheid zoo goed mogelijk vast te stellen, *feitelijk* nooit worden aangewend.

Naast de vereenvoudiging van de berekening voert men *vóór* de onderverdeeling het argument aan, dat de kritische trilling van een vleugel-rolroer-systeem vaak nauw aansluit (zoowel wat vorm als wat frequentie betreft) bij één der (gewoonlijk *fundamenteele*) eigentrillingsvormen van den vleugel in *stilstaande lucht*, en zelfs zou men vaak reeds *van te voren*, op grond van resultaten van de standtrillingsproef, dien „*gevaarlijken*" trillingsvorm kunnen aanwijzen.

Inderdaad is er iets voor te zeggen, met deze mogelijkheid rekening te houden. Dit zal in deze verhandeling echter niet geschieden door vleugelbuiging, of vleugeltorsie te onderdrukken, doch door de rolroerdraaiing te combineeren met den betreffenden *volledigen* eigentrillingsvorm, die dan in zijn geheel als één deformatiecomponent wordt behandeld.

Bij een vleugelrolroer-systeem worden vooral de uitdrukkingen voor de luchtkrachten nogal gecompliceerd. Bij de numerieke uitwerking moet daarom van een groot aantal getallentabellen voor allerlei algebraïsch min of meer ingewikkelde functie's gebruik worden gemaakt. Deze zijn alle in deze verhandeling opgenomen. Hierbij moge worden vermeld, dat al deze tabellen — direct, of door omwerking — werden ontleend aan een publicatie van Küssner en Schwarz (*lit.* 17). Het is een gelukkige omstandigheid, dat deze zeer recente publicatie reeds beschikbaar was, daar zij voor het eerst ook de inachtname van *aerodynamische balanceering* van een rolroer mogelijk maakt.

Evenals zulks bij de behandeling van den vleugel-alléén geschiedde, zal de berekening aanvankelijk worden opgezet voor den *symmetrischen* trillingsvorm van den *aan den wortel ingeklemden* vleugel. Later wordt de invloed van rompbewegelijkheid en de uitbreiding tot den antisymmetrischen trillingsvorm apart uitgewerkt.

10.2. Het mechanische systeem.

Bij het vleugel-rolroer-systeem kan de algemeenste deformatie geacht worden te bestaan uit:

a. buiging van den vleugel.

b. torsie van den vleugel.

c. deformatie's in het besturings-mechanisme van het rolroer door geforceerden rolroeruitslag.

d. buiging van het rolroer.
e. torsie van het rolroer.

Om de analyse niet te zeer te compliceeren, zal in het vervolg *consequent* worden aangenomen, dat in *voldoende benadering*

1o. de onder d. genoemde buiging van het rolroer *precies aansluit bij* de buiging van den vleugel. Wat de buiging betreft, wordt *de draai-as van het rolroer* dus als een vast onderdeel van den vleugel opgevat.

2o. dat de onder e genoemde torsie van het rolroer *nul* is.

Wordt de rolroerbesturing (aansluitend bij den toestand die zich bij *symmetrische* trillingen voordoet) *in de stuurhut van het vliegtuig vastgezet*, en wordt den vleugel vervolgens door een (b.v. bij den tip erop aangebracht) koppel getordeerd, waarbij echter *het rolroer zèlf niet* door uitwendige krachten wordt belast, dan zullen door de vleugeltorsie in het algemeen *hoeken* tusschen vleugel- en rolroer-profielen optreden. Hoewel die hoeken door de *vleugeltorsie* worden veroorzaakt, is het *niet strikt noodig* dat zij *precies gelijk zijn aan* de torsiehoeken van den vleugel. Dit is *alleen* het geval, wanneer het rolroer zich bij het aanbrengen van het tordeerende koppel steeds *zoo verplaatst*, dat alle rolroerkoorden precies evenwijdig aan zichzelf verplaatsen. In hoeverre dit het geval zal zijn, hangt af van de *constructie der rolroerbesturing*. Een *andere* mogelijkheid is b.v. dat het onbelaste rolroer zich bij vleugeltorsie zóó verplaatst, dat de *plaatselijke* hoek tusschen vleugel- en rolroerkoorde *nul* blijft in *die* dwarsdoorsnede, waarin de besturing van het rolroer *aan het rolroer is bevestigd*. In het algemeen kan *in ieder geval één dwarsdoorsnede van het vleugel-rolroer-systeem worden aangewezen, waar de koorde van den getordeerden vleugel evenwijdig is aan de* (i.v.m. onderstelling 2o. *alle onderling evenwijdige*) *rolroerkoorden* (aangenomen dat de rolroerbesturing in de stuurhut is vastgezet en het rolroer niet wordt belast). *Deze* doorsnede wordt vastgelegd door $x = b_1$. de aldaar aangetroffen torsiehoek van den vleugel zij φ_{b1}.

Wordt nu *ook het rolroer belast* (geforceerd versteld tegen de elasticiteit van zijn in de stuurhut

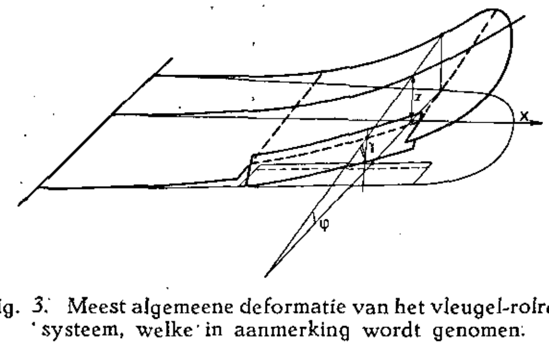


Fig. 3. Meest algemeene deformatie van het vleugel-rolroer-systeem, welke in aanmerking wordt genomen.

steeds vastgehouden stuurmechanisme in), dan zal de deformatie *van het stuurmechanisme (rek van* kabels, enz.) van het rolroer uitsluitend afhankelijk kunnen worden gesteld van den rolroeruitslag γ_1, *gemeten in de dwarsdoorsnede* $x = b_1$. Tevens zal de rolroeruitslag (hoek tusschen vleugel- en rolroer-koorde) γ in een *willekeurige* dwarsdoorsnede, naar aan de hand van fig. 3 kan worden vastgesteld, dan gelijk worden aan

$$\gamma = \gamma_1 + \varphi_{b1} - \varphi \qquad (237)$$

Men kan de dwarsdoorsnede $x = b_1$ althans theoretisch door een torsieproef vaststellen. Het vermoeden ligt voor de hand, dat deze doorsnede in het algemeen wel dicht bij den vleugelwortel, eventueel bij den *binnenrand* van het rolroer, zal zijn gelegen. De torsiehoek is aldaar nog gering, en kan wellicht bij benadering zonder groote fout soms *nul* worden gesteld. Vermoedelijk zal (237) daarom in bepaalde gevallen kunnen worden vervangen door de betrekking

$$\gamma = \gamma_1 - \varphi \qquad (237a)$$

Overeenkomstig de steeds gevolgde werkwijze wordt om te beginnen nagegaan, door welke formule de kinetische energie van het trillende systeem kan worden voorgesteld. Dit onderzoek geschiedt aan de hand van fig. 4, welke figuur een

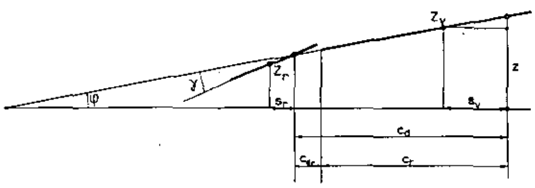


Fig. 4. Beweging van een smalle strook van het systeem tusschen dwarsdoorsneden x en $x + \Delta x$.

momentanen stand van een smalle strook van den vleugel geeft. Z_v is het zwaartepunt *van den vleugel alléén* (dus zonder rolroer), Z_r is het zwaartepunt van het *rolroer*. X is de *beschrijvings-as*.

Volgens de figuur is:

de translatiesnelheid van Z_v: $\dot z - s_v \dot\varphi$
de hoeksnelheid van de beweging òm Z_v: $\dot\varphi$
de translatiesnelheid van Z_r: $\dot z - (c_d + s_r)\dot\varphi - s_r \dot\gamma$
de hoeksnelheid van de beweging òm Z_r: $\dot\varphi + \dot\gamma$

dus

$$\begin{aligned}(E_{kin})_{strook} &= \tfrac{1}{2}\,\Delta x\,[m_v(\dot z - s_v\dot\varphi)^2 + I_v\dot\varphi^2 + \\ &\quad + m_r\{\dot z - (c_d + s_r)\dot\varphi - s_r\dot\gamma\}^2 + I_r(\dot\varphi + \dot\gamma)^2] \\ &= \tfrac{1}{2}\,\Delta x\,[m_v\dot z^2 - 2m_v s_v \dot z\dot\varphi + m_v s_v^2\dot\varphi^2 + \\ &\quad + I_v\dot\varphi^2 + m_r\dot z^2 + m_r(c_d + s_r)^2\dot\varphi^2 + \\ &\quad + m_r s_r^2\dot\gamma^2 - 2m_r(c_d + s_r)\dot z\dot\varphi - \\ &\quad - 2m_r s_r \dot z\dot\gamma + 2m_r s_r(c_d + s_r)\dot\varphi\dot\gamma + \\ &\quad + I_r\dot\varphi^2 + I_r\dot\gamma^2 + 2I_r\dot\varphi\dot\gamma] \qquad (238)\end{aligned}$$

Nu is

$(m_v + m_r)\Delta x$ de massa $m\Delta x$ van de *heele* strook, vleugel en rolroer samengenomen,

$$s = \frac{m_v s_v + m_r(c_d + s_r)}{m_v + m_r}$$

de zwaartepuntsligging van de *heele* strook en

$$I_1 + m s^2 = I_v + m_v s_v^2 + I_r + m_r(c_d + s_r)^2$$

het traagheidsmoment van de *heele* strook om de beschrijvings-as.

Voert men de voornoemde parameters in, dan kan men (238) in den vorm brengen:

$$\begin{aligned}(E_{kin})_{strook} = \tfrac{1}{2}\,\Delta x\,[m\dot{z}^2 - 2ms\dot{z}\dot{\varphi} + \\ + (I_1 + ms^2)\dot{\varphi}^2 + (I_r + m_r s_r^2)\dot{\gamma}^2 + \\ + 2(I_r + m_r s_r^2 + m_r s_r c_d)\dot{\varphi}\dot{\gamma} - 2 m_r s_r \dot{z}\dot{\gamma}]\end{aligned}$$

De totale kinetische energie volgt hieruit door integratie over den vleugel. (Het is bij deze integratie vanzelfsprekend in geen enkel opzicht een bezwaar, dat het rolroer niet dezelfde breedte behoeft te hebben als de vleugel).

Stel nu ter afkorting:

$$\left.\begin{aligned} m_{11}' = m \qquad m_{12}' = ms \qquad m_{13}' = m_r s_r \\ m_{22}' = I_1 + ms^2 \qquad m_{23}' = I_r + m_r s_r^2 + m_r s_r c_d \\ m_{33}' = I_r + m_r s_r^2 \end{aligned}\right\} \quad (239)$$

dan wordt

$$\begin{aligned}E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int [m_{11}'\dot{z}^2 - 2m_{12}'\dot{z}\dot{\varphi} - 2m_{13}'\dot{z}\dot{\gamma} + \\ + m_{22}'\dot{\varphi}^2 + 2m_{23}'\dot{\varphi}\dot{\gamma} + m_{33}'\dot{\gamma}^2]\,dx \quad (240)\end{aligned}$$

Uit deze formule kan de functie $\dot{\gamma}(x,t)$ worden verwijderd met behulp van de betrekking (237). Het is echter *doelmatiger*, de rolroerbeweging niet te beschrijven door de coördinaat γ_1, doch door een coördinaat

$$\gamma_r = \gamma + \varphi \quad (241)$$

welke hoek-coördinaat den stand van het rolroer t.o.v. de *wortelkoorde* van den vleugel vastlegt. Alleen wanneer $\varphi_{b1} \simeq 0$ wordt $\gamma_r \simeq \gamma_1$ (vergelijk (237a)!)

Substitueer dus in (240)

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_r - \dot{\varphi}$$

Het resultaat is:

$$\begin{aligned}E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int [m_{11}\dot{z}^2 - 2m_{12}\dot{z}\dot{\varphi} - 2m_{13}\dot{z}\dot{\gamma}_r + \\ + m_{22}\dot{\varphi}^2 + 2m_{23}\dot{\varphi}\dot{\gamma}_r + m_{33}\dot{\gamma}_r^2]\,dx \quad (242)\end{aligned}$$

met

$$\left.\begin{aligned} m_{11} = m_{11}' = m \qquad m_{12} = m_{12}' - m_{13}' = ms - m_r s_r \\ m_{13} = m_{13}' = m_r s_r \\ m_{22} = m_{22}' - 2m_{23}' + m_{33}' = I_1 + \\ + ms^2 - I_r - m_r s_r^2 - 2m_r s_r c_d \\ m_{23} = m_{23}' - m_{33} = m_r s_r c_d \\ m_{33} = m_{33}' = I_r + m_r s_r^2 \end{aligned}\right\} \quad (243)$$

De uitdrukking voor de potentiëele energie kan, aannemend dat de *vleugelvervorming* een potentiëele energie heeft, die door (9) kan worden voorgesteld, gemakkelijk worden opgeschreven. Aan de uitdrukking (9) moet slechts de in de *vervorming van de rolroerbesturing stekende energie* worden toegevoegd. Deze is afhankelijk van den hoek γ_1 (en niet van γ_r!). Onderstellend, dat de elastische organen in het stuurmechanisme van het rolroer als *massalooze* lineaire *veeren* mogen worden opgevat, kan voor hun aandeel in de potentiëele energie worden genoteerd (k_r = veerconstante)

$$\tfrac{1}{2}k_r\gamma_1^2 = \tfrac{1}{2}k_r(\gamma_r - \varphi_{b1})^2.$$

Dus

$$\begin{aligned}E_{pot} = \tfrac{1}{2}\int [b_{11}z''^2 - 2b_{12}z''\varphi'' + \\ + b_{22}\varphi''^2 + T\varphi'^2]\,dx + \tfrac{1}{2}k_r(\gamma_r - \varphi_{b1})^2 \quad (244)\end{aligned}$$

Uit de formules (244) en (240), of (242), kunnen de bewegingsvergelijkingen worden afgeleid voor het *in vacuo* opgestelde, *dempingsvrije* systeem.

De „exacte" vergelijkingen, de vergelijkingen dus, die overeenkomen met de formules (17), (18) van den vleugel zònder rolroer, zullen niet worden opgeschreven, daar zij toch niet kunnen worden gebruikt. Vroeger gevolgde omwegen vermijdend, moge reeds nu de vraag worden aangevat, welke op inperking der vervormingsmogelijkheden neerkomende *vereenvoudigingen* in aanmerking komen om *bij de heele analyse* te worden *aangehouden*. Eén antwoord ligt voor de hand. Men stelt

$$z = q_1 z_1 \qquad \varphi = Q_1\varphi_1 \qquad \gamma_r = \gamma_r \quad (245)$$

en behandelt het systeem daarmede als een combinatie van een vleugel met 2 resp. als buiging en als torsie op te vatten vervormingscomponenten, en een rolroer. z_1 definieert den vorm der buigingsdeformatie, φ_1 den vorm der torsiedeformatie. De aanname (245) maakt een volledige uitwerking mogelijk, zij impliceert echter het bekende bezwaar, dat met de deformatie's (245) de (fundamenteele) eigentrillingsvormen van den vleugel *niet exact* kunnen worden beschreven en dat (o.m. daardoor) moeilijkheden kunnen optreden bij de afleiding van bepaalde van de elastische eigenschappen van den vleugel afhankelijke parameters uit resultaten eener standtrillingsproef. Voor sommige vleugelroersystemen komen daarom andere mogelijkheden méér in aanmerking. De aannamen (245) vormen echter in ieder geval het meest doelmatige uitgangspunt voor de behandeling van vleugels, waarmede geen standtrillingsproef is uitgevoerd, die dan wordt vervangen door een analyse van de stijfheden en hun verdeeling over den vleugel.

Aansluitend bij vroeger gevolgde methoden schijnt als *tweede* mogelijkheid in aanmerking te komen de keuze van de deformatie-componenten in overeenstemming met eigentrillingsvormen van het systeem. Een voldoende *compleet* deformatiesysteem zou dan uit *drie* eigentrillingen moeten worden verkregen, te weten: de beide fundamenteele eigentrillingen van den vleugel (buiging en torsie) en de door de elastische besturing van het rolroer geïntroduceerde *rolroer-eigentrilling*. De algemeenste systeem-deformatie zal dan worden vastgelegd door

$$\begin{aligned} z = q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 \\ Q = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2 + q_3 C_3 \varphi_3 \\ \gamma_r = q_1 D_1 \gamma_1 + q_2 D_2 \gamma_2 + q_3 D_3 \gamma_3 \quad (246)\end{aligned}$$

Dit stelsel kan zoo zijn gekozen, dat

$q_1 = 1$ $q_2 = q_3 = 0$ de trillingsvorm is der fundamenteele buigings-eigentrilling.

$q_2 = 1$ $q_1 = q_3 = 0$ de trillingsvorm is der fundamenteele torsie-eigentrilling.

$q_3 = 1$ $q_1 = q_2 = 0$ de trillingsvorm is der rolroer-eigentrilling.

Naar het zich laat aanzien zal de aanname (246) i.v.m. het groote aantal functie's $z_1, z_2 \ldots \ldots \varphi_3$ tot zeer bewerkelijke berekeningen leiden, terwijl het bovendien noodig is, dat de drie eigentrillingsvormen nauwkeurig door de proef kunnen worden vastgesteld. Dat is echter om tweeërlei reden allerminst eenvoudig. In de eerste plaats moeten rolroeramplituden worden gemeten, hetgeen voldoende nauwkeurig alleen met speciale instrumenten mogelijk is (omdat de meeste gewoonlijk gebruikte meetapparaten de trilling van dit orgaan tijdens de meting te zeer verstoren). In de tweede plaats is de rolroerresonantie, wanneer de koppeling tusschen rolroer en vleugelbewegingen niet al te groot is (*kleine* onderbalans van het roer), mede door de vrij groote wrijvingsdemping op rolroerbewegingen, niet altijd zeer geprononceerd en daardoor scherp vast te leggen.

Het ligt daarom voor de hand, in plaats van de deformatie's (246) alleen de fundamenteele trillingsvormen van den *vleugel-alléén* als deformatiecomponenten in te voeren, en daaraan de rolroerdraaiing als „3e coördinaat" apart toe te voegen. D.w.z., men stelle

$$z = q_1 z_1 + q_2 z_2 \;;\; \varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2$$
$$\gamma_r = \gamma_r \quad (247)$$

welke deformatie's zoo gekozen zijn, dat $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\gamma_r = \gamma_{rB}$ den trillingsvorm in het fundamenteele resonantiepunt der vleugelbuiging geeft, en $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $\gamma_r = \gamma_{rT}$ die in het fundamenteele resonantiepunt der vleugeltorsie. De trillingsvorm in de rolroer-resonantie zal dan gewoonlijk in voldoende benadering kunnen worden beschreven door

$$q_1 = q_{1r} \;,\; q_2 = q_{2r} \;,\; \gamma_r = \gamma_{rr}.$$

Er moge op worden gewezen, dat de fundamenteele buigingseigentrilling in ieder der gevallen (246), (247) desgewenscht zonder meer kan worden vervangen door den eersten buigings-boventoon, hetgeen zin kan hebben wanneer er reden is om te verwachten, dat hij — b.v. ten gevolge van een extra groote koppeling met rolroerbewegingen — bijzonder gevaarlijke trillingsvormen zal mogelijk maken.

Het zijn de aannamen (245) en (247), die in deze verhandeling in completen vorm zullen worden uitgewerkt. De mogelijkheid (246) zal slechts een enkelen keer ter sprake worden gebracht.

De formules (245), (246) en (247) kunnen den grondslag leveren voor een *volledige* behandeling van het gestelde probleem. Echter bestaat de reeds terloops vermelde mogelijkheid, dat er reden is om aan te nemen, dat de kritische trilling nauw zal aansluiten bij een door de standtrillingsproef te voorschijn gebrachte *„gevaarlijke" eigentrilling* van het systeem in stilstaande lucht[1]). Het ligt voor de hand, de deformatie van het systeem dan samen te stellen uit den *gevaarlijken* trillingvorm en rolroerdraaiing. Dus

$$z = q_1 z_1 \qquad \varphi = q_1 C_1 \varphi_1 \qquad \gamma_r = \gamma_r \quad (248)$$

Ook de op deze aanname gebaseerde berekening zal volledig worden uitgewerkt. Zij vormt een vereenvoudiging van de aanname (247).

Door introductie van (245) in (242) ontstaat

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} \int [\dot{q}_1^2 m_{11} z_1^2 - 2 \dot{q}_1 \dot{Q}_1 m_{12} z_1 \varphi_1 -$$
$$- 2 \dot{q}_1 \dot{\gamma}_r m_{13} z_1 + \dot{Q}_1^2 m_{22} \varphi_1^2 +$$
$$+ 2 \dot{Q}_1 \dot{\gamma}_r m_{23} \varphi_1 + \dot{\gamma}_r^2 m_{33}]\, dx \quad (249)$$

Dezelfde substitutie, aangebracht in (244), geeft

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2} \int [b_{11} q_1^2 z_1''^2 - 2 b_{12} q_1 Q_1 z_1'' \varphi_1'' +$$
$$+ b_{22} Q_1^2 \varphi_1''^2 + T Q_1^2 \varphi_1'^2]\, dx +$$
$$+ \tfrac{1}{2} k_r \{ \gamma_r^2 - 2 \gamma_r Q_1 \varphi_1 (b_1) + Q_1^2 \varphi_1^2 (b_1) \} \quad (250)$$

want de hoek φ_{b1} wordt gelijk aan $Q_1 \varphi_1 (b_1)$.

Daaruit volgen de navolgende complete Lagrange'sche bewegingsvergelijkingen (de *luchtkrachten* door arbeidscoëfficiënten K_{q1}, M_{Q1}, $M_{\gamma 1}$ formeel invoerend):

$$\ddot{q} \int m_{11} z_1^2\, dx - \ddot{Q}_1 \int m_{12} z_1 \varphi_1\, dx -$$
$$- \ddot{\gamma}_r \int m_{13} z_1\, dx + q_1 \int b_{11} z_1''^2\, dx -$$
$$- Q_1 \int b_{12} z_1'' \varphi_1''\, dx = K_{q1} \quad (251)$$

$$- \ddot{q}_1 \int m_{12} z_1 \varphi_1\, dx + \ddot{Q}_1 \int m_{22} \varphi_1^2\, dx +$$
$$+ \ddot{\gamma}_r \int m_{23} \varphi_1\, dx - q_1 \int b_{12} z_1'' \varphi_1''\, dx +$$
$$+ Q_1 [k_r \varphi_1^2 (b_1) + \int (b_{22} \varphi_1''^2 + T \varphi_1'^2)\, dx] -$$
$$- \gamma_r k_r \varphi_1 (b_1) = M_{Q1} \quad (252)$$

$$- \ddot{q}_1 \int m_{13} z_1\, dx + \ddot{Q}_1 \int m_{23} \varphi_1\, dx +$$
$$+ \ddot{\gamma}_r \int m_{33}\, dx - Q_1 k_r \varphi_1 (b_1) + \gamma_r k_r = M_{\gamma r} \quad (253)$$

Door introductie van (247) in (242) verkrijgt men:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} \int [m_{11} (\dot{q}_1 z_1 + \dot{q}_2 z_2)^2 -$$
$$- 2 m_{12} (\dot{q}_1 z_1 + \dot{q}_2 z_2)(\dot{q}_1 C_1 \varphi_1 + \dot{q}_2 C_2 \varphi_2) -$$
$$- 2 m_{13} (\dot{q}_1 z_1 + \dot{q}_2 z_2) \dot{\gamma}_r + m_{22} (\dot{q}_1 C_1 \varphi_1 + \dot{q}_2 C_2 \varphi_2)^2 +$$
$$+ 2 m_{23} (\dot{q}_1 C_1 \varphi_1 + \dot{q}_2 C_2 \varphi_2) \dot{\gamma}_r + m_{33} \dot{\gamma}_r^2]\, dx \quad (254)$$

en, uit (244)

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2} \int [b_{11} (q_1 z_1'' + q_2 z_2'')^2 -$$
$$- 2 b_{12} (q_1 z_1'' + q_2 z_2'')(q_1 C_1 \varphi_1'' + q_2 C_2 \varphi_2'') +$$
$$+ b_{22} (q_1 C_1 \varphi_1'' + q_2 C_2 \varphi_2'')^2 + T (q_1 C_1 \varphi_1' +$$
$$+ q_2 C_2 \varphi_2')^2]\, dx + \tfrac{1}{2} k_r [\gamma_r - \{ q_1 C_1 \varphi_1 (b_1) +$$
$$+ q_2 C_2 \varphi_2 (b_1) \}]^2 \quad (255)$$

Stel ter afkorting

$$U_{gh} = \int [m_{11} z_g z_h - m_{12} (z_g C_h \varphi_h + z_h C_g \varphi_g) +$$
$$+ m_{22} C_g C_h \varphi_g \varphi_h]\, dx \quad g = 1, 2 \;;\; h = 1, 2. \quad (256)$$

---

1) Aangenomen wordt, dat deze „gevaarlijke eigentrilling" één der *fundamenteele* eigentrillingsvormen van den vleugel, *ofwel de eerste boventoon der vleugelbuiging is.*

$$W_{gh} = \int [b_{11} z_g'' z_h'' - b_{12}(z_g'' C_h \varphi_h'' + z_h'' C_g \varphi_g'') + b_{22} C_g C_h \varphi_g'' \varphi_h'' + T C_g C_h \varphi_g' \varphi_h'] \, dx + k_r C_g C_h \varphi_g(b_1) \varphi_h(b_1) \qquad g=1,2;\ h=1,2. \quad (257)$$

dan kunnen de Lagrange-vergelijkingen, af te leiden uit (254) en (255) in den navolgenden vorm worden geschreven (L_{q1}, L_{q2} en $L_{\gamma r}$ arbeidscoëfficiënten voor de luchtkrachten):

$$\ddot{q}_1 U_{11} + q_1 W_{11} + \ddot{q}_2 U_{12} + q_2 W_{12} + \ddot{\gamma}_r \int (-m_{13} z_1 + m_{23} C_1 \varphi_1) \, dx - \gamma_r k_r C_1 \varphi_1 (b_1) = L_{q1} \quad (258)$$

$$\ddot{q}_1 U_{21} + q_1 W_{21} + \ddot{q}_2 U_{22} + q_2 W_{22} + \ddot{\gamma}_r \int (-m_{13} z_2 + m_{23} C_2 \varphi_2) \, dx - \gamma_r k_r C_2 \varphi_2 (b_1) = L_{q2} \quad (259)$$

$$\ddot{q}_1 \int (-m_{13} z_1 + m_{23} C_1 \varphi_1) \, dx - q_1 k_r C_1 \varphi_1 (b_1) + \ddot{q}_2 \int (-m_{13} z_2 + m_{23} C_2 \varphi_2) \, dx - q_2 k_r C_2 \varphi_2 (b_1) + \ddot{\gamma}_r \int m_{33} dx + \gamma_r k_r = L_{\gamma r} \quad (260)$$

Dit zijn de bewegingsvergelijkingen voor het systeem met de deformatie's (247).

Voor een systeem met door (248) gedefiniëerde deformatiemogelijkheden geldt tenslotte, door introductie van (248) in (242) en in (244):

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} \dot{q}_1^2 \int [m_{11} z_1^2 - 2 m_{12} z_1 C_1 \varphi_1 + m_{22} C_1^2 \varphi_1^2] \, dx + \dot{q}_1 \dot{\gamma}_r \int [-m_{13} z_1 + m_{23} C_1 \varphi_1] \, dx + \tfrac{1}{2} \dot{\gamma}_r^2 \int m_{33} dx \quad (262)$$

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2} q_1^2 \left[\int (b_{11} z_1''^2 - 2 b_{12} z_1'' C_1 \varphi_1'' + b_{22} C_1^2 \varphi_1''^2 + T C_1^2 \varphi'^2) dx + k_r C_1^2 \varphi_1^2 (b_1) \right] - q_1 k_r \gamma_r C_1 \varphi_1 (b_1) + \tfrac{1}{2} k_r \gamma_r^2 \quad (263)$$

Noteert men voor de arbeidscoëfficiënten van de luchtkrachten ditmaal N_{q1} en $N_{\gamma r}$, dan resulteeren, gebruik makend van de afkortingen (256) en (257) voor $g = h = 1$, de Lagrange-vergelijkingen:

$$\ddot{q}_1 U_{11} + q_1 W_{11} + \ddot{\gamma}_r \int (-m_{13} z_1 + m_{23} C_1 \varphi_1) dx - \gamma_r k_r C_1 \varphi_1 (b_1) = N_{q1} \quad (264)$$

$$\ddot{q}_1 \int (-m_{13} z_1 + m_{23} C_1 \varphi_1) dx - q_1 k_r C_1 \varphi_1 (b_1) + \ddot{\gamma}_r \int m_{33} dx + \gamma_r k_r = N_{\gamma r} \quad (265)$$

Met (251), (252), (253); (258), (259), (260) en (264), (265), zijn de grondvergelijkingen voor het verdere onderzoek verkregen. Het is in de eerste plaats noodig, nu na te gaan, welken vorm aan de arbeidscoëfficiënten van de luchtkrachten moet worden toegekend.

10.3. De luchtkrachten op een vleugel met rolroer.

De *mathematische formuleering* van de op een harmonisch trillend vleugel-rolroer-systeem werkende niet-stationnaire luchtkrachten zal worden ontleend aan een publicatie van Küssner en Schwarz (*lit.* 17). De luchtkrachten worden aldaar berekend, uitgaande van de gebruikelijke geliniariseerde theorie, voor een in een als twee-dimensionaal op te vatten strooming geplaatsten vleugel met rolroer. Wat de roerconstructie betreft, worden bijna alle in de praktijk aangetroffen uitvoeringen in acht genomen (al dan niet aerodynamisch gebalanceerd roer, roer met hulproer, enz.).

De analyse stuit, voor het geval van een aerodynamisch gebalanceerd roer, op één typische moeilijkheid, die samenhangt met de noodzakelijke *idealiseering* van het systeem tot een „zeer dunnen" vleugel met roer. In dit ideale geval wordt n.l. een *strooming* door de *spleet*, die bij het gebalanceerde roer steeds tusschen vleugel en roer wordt aangetroffen, *niet belemmerd*, terwijl deze *doorstrooming* in de werkelijkheid *door de dikte-afmeting van den vleugel ter plaatse van de spleet* (die daardoor een lengte-afmeting krijgt) waarschijnlijk grootendeels wordt *opgeheven* („gesmoord"). Dit effect kan de theorie *niet* in rekening brengen, *tenzij* het zóó groot is, dat de strooming in de spleet *geheel* kan worden verwaarloosd (welk geval door een kunstgreep in een tot „dunnen" vleugel geïdealiseerd rekenmodel gerepresenteerd kan worden).

De situatie is meer uitvoerig de navolgende:

De door het *aerodynamisch gebalanceerde* roer te voorschijn geroepen krachten en momenten kunnen langs gebruikelijken theoretischen weg worden berekend voor het geval, dat de spleet tusschen vleugel en roer zeer smal is, vergeleken bij de vleugelkoorde. De breedte van de spleet kan (op één met een convergentie-moeilijkheid samenhangende uitzondering na) door een *limietovergang* op een uiterst smalle spleet expliciet uit de formule worden verwijderd, maar men verkrijgt daarbij *andere* uitkomsten, naarmate *aanvankelijk* een vrije doorstrooming van de spleet was toegelaten, dan wel een totale blokkeering tegen doorstrooming was aangenomen. Deze *beide* uitkomsten worden door Küssner en Schwarz medegedeeld. De „tusschengevallen", waarbij een *gehinderde* strooming door de spleet wordt toegelaten, is niet voor een analyse van den gebruikelijken aard toegankelijk.

Blijft de vraag, of de in de praktijk aangetroffen toestand door één der beide „limietgevallen" bevredigend zal worden gedekt. Dit zal afhangen van de *breedte* van de spleet. Het vermoeden bestaat, dat deze *meestal* zóó gering zal zijn, dat men de spleet als niet doorstroomd, d.i. als gesloten, zal kunnen opvatten. „Tusschenvormen" zullen zich echter zeker voordoen, en op de vraag, welke der beide berekeningen in zoo'n geval de best-benaderende uitkomsten zal leveren, kan in de gegeven omstandigheden geen definitief gemotiveerd antwoord worden gegeven. Men is hier aangewezen op een — op afschatting van den invloed van de vleugeldikte op de strooming door de spleet gebaseerde — *keuze*. Het is te verwachten, dat in de toekomst nadere gegevens beschikbaar zullen komen.

In deze verhandeling zullen ter wille van de volledigheid de *beide* serie's formules voor de luchtkrachten in aanmerking worden genomen. De numerieke uitwerking van de te ontwikkelen rekenmethoden voor de kritische snelheid eischt dus ook de bovenomschreven keuze. De beteekenis van *dit nog niet geheel* opgehelderde punt moge niet worden overdreven: het is te verwachten dat beide mogelijkheden tot uitkomsten zullen voeren, die slechts heel weinig verschillen [1]). Mocht volledige zekerheid eisch zijn, dan werke men *beide mogelijkheden geheel uit*! (*Hetgeen het rekenwerk* overigens behoorlijk uitbreidt!)

Het door Küssner en Schwarz eveneens bestudeerde geval, dat aan het rolroer nog een hulproer is bevestigd, wordt in deze verhandeling buiten beschouwing gelaten.

De berekeningen van Küssner en Schwarz, welke eerst zeer kort geleden werden gepubliceerd, zijn op geenerlei wijze *experimenteel gecontroleerd*. Zoo'n contrôle is wel is waar ook voor den vleugel-alleen niet in bevredigenden vorm beschikbaar, echter is voor *dit* geval, *en* voor het geval van een vleugel met aerodynamisch *niet* gebalanceerd rolroer, een bruikbare *indirecte* contrôle aanwezig in den vorm van *experimenteel getoetste* — door *berekening bepaalde* — *kritische snelheden*. Het *is* vooral het werk van Voigt, dat in dit opzicht de aandacht verdient. De door hem uitgevoerde fraaie experimenten hebben aangetoond, dat de berekening voor den *vleugel alléén* (in twee-dimensionale strooming: de *„slag"* en draai-bewegingen *uitvoerende* vleugel dus) *zeer goed* met het experiment overeenkomende kritische snelheden oplevert, doch dat, wanneer aan den vleugel een (niet aerodynamisch gebalanceerd) *rolroer* is bevestigd, de berekende kritische snelheden consequent *te laag* liggen. Op grond hiervan is de voor de hand liggende *onderstelling* naar voren gebracht, dat de werking van het roer minder *effectief* is, dan de theorie eischt, b.v. doordat de strooming aan het roeroppervlak (en vooral bij het *knikpunt*) door een vleugel een weinig *verstoord* is (*„ruw"* is geworden). Deze *hypothese* schijnt inderdaad in *zekere mate doeltreffend te zijn*, want in de onderzochte gevallen bleek *overeenstemming* tusschen berekening en experiment te kunnen worden verkregen door de berekening uit te voeren voor een systeem met (tegenover de werkelijkheid) *verkleinde koordeverhouding* van rolroer en vleugel. D.w.z.: zij t_r de rolroerkoorde en t zooals steeds de koorde van het heele systeem (vleugel + rolroer), dan leverde de berekening met het experiment kloppende, *kritische snelheden*, wanneer de berekening werd uitgevoerd voor een waarde van $\frac{t_r}{t}$, die ca. 20—25 % *kleiner* was, dan het systeem werkelijk vertoonde. De verminderde roerwerking zou dus *in rekening kunnen* worden *gebracht door een correctie van de koordeverhouding*.

Analoge experimenten zijn voor den vleugel met aerodynamisch gebalanceerd rolroer voor zoover bekend nog niet uitgevoerd. Het lijkt echter geschikt, met de reeds verkregen aanwijzingen rekening te houden. *Men voere in de berekeningen daarom een met ca. 20 % verkleinde koordeverhouding in.*

Beschouw nu een smalle strook van den vleugel (fig. 4, blz. 37). Overeenkomstig de aanwijzingen van Küssner vatte men de roerbeweging t.o.v. den *vleugel op als een superpositie van een draaiing om den neus* van het roer en een translatie, evenwijdig aan zichzelf, welke bewegingen zoodanig samenhangen, dat zij tezamen juist de roerdraaiing om de draai-as van het roer geven. De strook wordt ondersteld een harmonische *trilling uit te* voeren met de frequentie ν en de amplituden:

$\bar{z}_o$ voor de verplaatsingen der beschrijvings-as.
$\bar{\varphi}_o$ voor de draaiïngen om de beschrijvings-as.
$\bar{\gamma}_o$ voor de draaiïng van het roer t.o.v. den vleugel om een as door den neus van het roer.
$\bar{\zeta}_o$ voor de translatie van het roer.

De beide laatste trillingen geven de gewenschte draaitrilling van het roer *om zijn draai-as*, wanneer:

$$\bar{\gamma}_o(c_d - c_r) - \bar{\zeta}_o = 0 \qquad (266)$$

is, hetgeen dus steeds het geval moet zijn.

De amplitude van de verplaatsingen van het voorste neutrale punt van de strook wordt:

$$\bar{z}_{vo} = \bar{z}_o - c_v \bar{\varphi}_o \qquad (267)$$

Nu zij

$\overline{K}$ de kracht op den *geheelen* strook (roer inbegrepen)
$\overline{M}$ het moment van den *geheelen* strook om het voorste neutrale punt
$\overline{R}$ de kracht op de *roer-strook alléén*
$\overline{N}$ het moment van *de roer-strook* om den *neus* van het roer.

(268)

Voor deze twee krachten en deze twee momenten [1]) kan worden geschreven

$$\left.\begin{aligned}
\overline{K} &= \Delta x \,.\, m_L \nu^2 e^{i\nu\tau} (\bar{z}_{vo} k_z + \bar{\varphi}_o t \,.\, k_\varphi + \\
&\qquad + \bar{\gamma}_o t \,.\, k_\gamma + \bar{\zeta}_o k_\zeta) \\
\overline{M} &= \Delta x \,.\, m_L \nu^2 t\, e^{i\nu\tau} (\bar{z}_{vo} m_z + \bar{\varphi}_o t \,.\, m_\varphi + \\
&\qquad + \bar{\gamma}_o t \,.\, m_\gamma + \bar{\zeta}_o m_\zeta) \\
\overline{R} &= \Delta x \,.\, m_L \nu^2 e^{i\nu\tau} (\bar{z}_{vo} r_z + \bar{\varphi}_o t \,.\, r_\varphi + \\
&\qquad + \bar{\gamma}_o t \,.\, r_\gamma + \bar{\zeta}_o r_\zeta) \\
\overline{N} &= \Delta x \,.\, m_L \nu^2 t\, e^{i\nu\tau} (\bar{z}_{vo} n_z + \bar{\varphi}_o t \,.\, n_\varphi + \\
&\qquad + \bar{\gamma}_o t \,.\, n_\gamma + \bar{\zeta}_o n_\zeta)
\end{aligned}\right\} \qquad (269)$$

waarin de k's, m's, r's en n's dimensielooze coëffi-

---

[1]) Het is wellicht goed er de aandacht op te vestigen, dat de beschreven moeilijkheden zich *niet* voordoen, wanneer het roer *niet* aerodynamisch is gebalanceerd, d.w.z. wanneer het geacht kan worden uitsluitend één *knik* in den vleugel op te leveren, (doordat de draaias met den voorkant van het roer samenvalt).

[1]) Momenten worden gerekend positief te zijn, wanneer zij een vergrooting van de hoekcoördinaten trachten te bewerken. (Dus „staartlastig" zijn.)

ciënten zijn[1]), die met de door Küssner gebruikte samenhangen volgens de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} k_z &= -4\,V^2 k_a & k_\varphi &= 2\,V\cdot k_b \\ k_\gamma &= 2\,V^2 k_c & k_\zeta &= -4\,V^2 k_d \\ m_z &= 2\,V^2 m_a & m_\varphi &= -V^2 m_b \\ m_\gamma &= -V^2 m_c & m_\zeta &= 2\,V^2 m_d \\ r_z &= -4\,V^2 r_a & r_\varphi &= 2\,V^2 r_b \\ r_\gamma &= 2\,V^2 r_c & r_\zeta &= -4\,V^2 r_d \\ n_z &= 2\,V^2 n_a & n_\varphi &= -V^2 n_b \\ n_\gamma &= -V^2 n_c & n_\zeta &= 2\,V^2 n_d \end{aligned}\right\} \quad (270)$$

Al deze coëfficiënten blijken *uitsluitend afhankelijk te zijn* van de *gereduceerde snelheid* en van de *koordeverhouding* $\frac{t_r}{t} = \eta$ *van roer en vleugel*. De mathematische vorm van deze afhankelijkheid is vrij gecompliceerd en wordt bij de numerieke uitwerking ontleend aan getallentabellen voor de erin optredende functie's. Sommige coëfficiënten zijn afhankelijk van de breedte van de spleet tusschen vleugel en roer. Overeenkomstig het reeds eerder medegedeelde wordt alleen onderscheid gemaakt tusschen de toestanden »gesloten spleet« en »open spleet«. Die coëfficiënten, die in beide situatie's verschillend zijn, worden uit elkaar gehouden door toevoeging van „exponenten" + —, de exponent + voor de open spleet en de exponent — voor de gesloten spleet. Men heeft volgens *lit.* 17:

$$\left.\begin{aligned}
k_z &= \underline{1} - 4\,i\,\bar{P}\,V \\
k_\varphi &= \underline{-\frac{1}{4}} + 2\,\bar{P}\,V(2\,V + i) + i\,V \\
\pi\,k_\gamma &= \underline{-\frac{\Phi_4}{4}} + \bar{P}\,V(4\,\Phi_1 V + i\,\Phi_2) + i\,\Phi_3\,V \\
\pi\,k_\zeta^+ &= \underline{\Phi_3} - 4\,i\,\Phi_1\,\bar{P}\,V \\
\pi\,k_\zeta^- &= \underline{\Phi_3} - 4\bar{P}V(2\Phi_{13}V + i\Phi_1) - 2i\Phi_{14}V \\
m_z &= \underline{-\frac{1}{4}} \\
m_\varphi &= \underline{\frac{3}{32}} - \tfrac{1}{2}\,i\,V \\
\pi\,m_\gamma &= \underline{\frac{\Phi_7}{16}} - V(\Phi_5 V + \tfrac{1}{4}\,i\,\Phi_6) \\
\pi\,m_\zeta^+ &= \underline{-\frac{\Phi_6}{8}} + i\,\Phi_5\,V \\
\pi\,m_\zeta^- &= \underline{-\frac{\Phi_6}{8}} + 2\,V(\Phi_{15}\,V + i\,\Phi_5) \\
\pi\,r_z &= \underline{\Phi_3} - 4\,i\,\Phi_{31}\,\bar{P}\,V \\
\pi\,r_\varphi &= \underline{-\frac{\Phi_6}{8}} + 2\,\bar{P}V(2V + i)\,\Phi_{31} + i\,\Phi_{32}\,V \\
\pi^2\,r_\gamma &= \underline{-\frac{\Phi_{37}}{4}} + \Phi_{31}\,\bar{P}\,V(4\,\Phi_1\,V + i\,\Phi_2) + \\
&\qquad + 2\,\Phi_{35}\,V^2 + i\,V\,\Phi_{36} \\
\pi^2\,r_\zeta^+ &= \underline{\Phi_{17}} - 4\,i\,\Phi_1\,\Phi_{31}\,\bar{P}\,V - 2\,i\,\Phi_{35}\,V \\
\pi^2\,r_\zeta^- &= \underline{\Phi_{17}} - 4\,\bar{P}\,V(2\,\Phi_{13}\,V + i\,\Phi_1)\,\Phi_{31} - \\
&\qquad - 4(2\ln\eta_s + \Phi_{21})\,V^2 - 2\,i\,\Phi_{16}\,V \\
\pi\,n_z &= \underline{-\frac{\Phi_4}{4}} + i\,\Phi_8\,\bar{P}\,V \\
\pi\,n_\varphi &= \underline{\frac{\Phi_7}{16}} - \tfrac{1}{2}\,\bar{P}\,V(2\,V + i)\,\Phi_8 - \tfrac{1}{4}\,i\,\Phi_9\,V \\
\pi^2\,n_\gamma &= \underline{\frac{\Phi_{42}}{16}} + \tfrac{1}{2}\,\bar{P}\,V(2\,\Phi_1\,V + \tfrac{1}{2}\,i\,\Phi_2)\,\Phi_8 - \\
&\qquad - \Phi_{10}\,V^2 - \tfrac{1}{4}\,i\,\Phi_{11}\,V \\
\pi^2\,n_\zeta^+ &= \underline{-\frac{\Phi_{37}}{4}} + i\,\bar{P}\,V\,\Phi_1\,\Phi_8 + i\,\Phi_{10}\,V \\
\pi^2\,n_\zeta^- &= \underline{-\frac{\Phi_{37}}{4}} + \bar{P}\,V(2\,\Phi_{13}\,V + i\,\Phi_1)\,\Phi_8 + \\
&\qquad + 2\,\Phi_{18}\,V^2 + i\,\Phi_{19}\,V
\end{aligned}\right] \quad (271)$$

[1] Deze coëfficiënten zijn bovendien complex. De gebruikelijke *bovenstreeping* van complexe grootheden is bij deze symbolen *bij wijze* van uitzondering achterwege gelaten.

De Φ's zijn functie's van η *alléén*, die in *lit.* 17 getabelleerd zijn. In de formule voor r_ζ^- treedt de grootheid η_s op. Dit symbool stelt de breedte van de spleet tusschen vleugel en rolroer als fractie van de vleugelkoorde voor $\left(\eta_s = \frac{\text{spleetbreedte}}{t}\right)$. Deze term kan niet (zooals andere!) worden verwijderd door een limietovergang op $\eta_s = 0$, daar $\ln \eta_s$ dan $= -\infty$ wordt. Dit kan worden beschouwd als een gevolg van de omstandigheid, dat het bij de toegepaste idealiseering van het systeem tot een combinatie van twee „oneindig dunne" platen niet mogelijk is een spleet, die bij iederen roeruitslag om een naar achteren verlegd draaipunt (aerodynamische balanceering!) strikt geheel *gesloten is, doelmatig te representeeren*. De forceering, η_s consequent nul te stellen in het voor een smalle spleet berekende resultaat, leidt tot de in de term $\ln \eta_s$ vervatte divergentie.

Men berekene η_s niet uit de „werkelijke minimale breedte" van de spleet, doch houde met de dikte

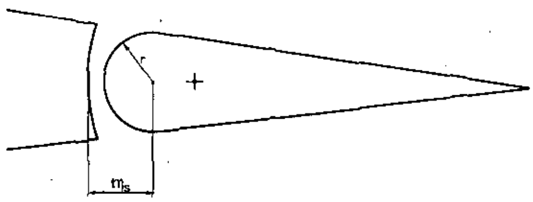


Fig. 5. De spleet tusschen vleugel en roer.

van vleugel en rolroer rekening door bij de werkelijke spleet de straal r van den cirkel van het profiel van den neus van het roer op te tellen, één en ander naar de toelichting van fig. 5.

Een andere — en naar het zich laat aanzien betere — mogelijkheid is, deze grootheid af te leiden uit *metingen* van *stationnaire* krachten op het roer. Deze vindt men uit (269) en (271) door *limieten* $\nu \longrightarrow 0$, $V \longrightarrow \infty$, $\nu V \longrightarrow \frac{v}{t}$, $\bar{P} = 1$ te vormen. Men neemt natuurlijk tevens $z = 0$, $\varphi = 0$ (meting bij invalshoek nul!) en vindt:

$$(R^-)_{stat} = \Delta x . m_L \left[\left(\frac{4}{\pi^2}\,\Phi_1\,\Phi_{31}\frac{v^2}{t^2} + \frac{2}{\pi^2}\,\Phi_{35}\frac{v^2}{t^2}\right)\gamma\,t + \right.$$
$$\left. + \left\{-\frac{8}{\pi^2}\,\Phi_{13}\,\Phi_{31}\frac{v^2}{t^2} - \frac{4}{\pi^2}(2\ln\eta_s + \Phi_{21})\frac{v^2}{t^2}\right\}\zeta\right]$$

waarin volgens (266) voor ζ wordt ingevuld: $+(c_d - c_r)\,\gamma$.

Dus, daar $m_L = \frac{1}{4}\pi\varrho t^2$ is:

$$(R^-)_{stat} = \Delta x \,.\, \frac{\varrho v^2}{\pi} [(\Phi_1 \Phi_{31} + \tfrac{1}{2}\Phi_{35}) t - $$
$$ - (c_d - c_r)\{2\,\Phi_{13}\Phi_{31} + 2\ln\eta_s + \Phi_{21}\}] \,.\, \gamma\ ^{1}) \qquad (272)$$

Het ligt voor de hand, dat η_s wordt berekend uit *de uit de metingen te bepalen waarde van*

$$\lim_{\gamma=0} (R^-)_{stat}\,.$$

Tenslotte moge de aandacht worden gevestigd op de *onderstreepte eerste termen* in de rechterleden van de formules (271). Zij formuleeren componenten van de krachten of momenten, die *niet afhangen* van de gereduceerde snelheid, en die volgens (269) *evenredig zijn* met $m_L v^2$. Al deze „componenten" kunnen[2]) worden opgevat als *traagheidswerkingen van meetrillende lucht*, zoodat ook bij het vleugel-rolroer-systeem een deel der krachten als traagheidswerkingen van meetrillende lucht kan worden afgesplitst.

Het zal ook nu geschikt zijn, *deze* krachten in de berekening op te nemen als *toeslagen* op de massa's van de onderdeelen van het systeem. Dit vereenvoudigt de reeds voldoende bewerkelijke numerieke uitwerking. De grootte van de toeslagen zal later precies worden opgegeven.

In de Lagrange'sche bewegingsvergelijkingen van den trillenden vleugel zijn de luchtkrachten en hunne momenten opgenomen in den vorm van arbeidscoëfficiënten. De vorm van deze coëfficiënten moet nu, uitgaande van (269), worden vastgesteld. Men vatte daartoe de krachten en momenten $\overline{K}, \overline{M}, \overline{R}, \overline{N}$ op als *resultanten* van een groot aantal krachtcomponenten K_i[3]) aangrijpend in gelijkmatig over de heele diepte van de beschouwde strook verdeelde punten P_i. (y_i = afstand van het aangrijpingspunt P_i van de kracht K_i tot de beschrijvings-as, positief te rekenen wanneer de laatste vóór ligt.) Symboliseert Σ_v een sommatie over den *vleugel alléén*, Σ_r een sommatie over het rolroer en Σ een sommatie over het *samenstel van beide*, dus over de heele strook, dan moet, volgens de definitie van K, M, R en N:

$$\Sigma K_i = K\,; \quad -\Sigma K_i(y_i - c_v) = M\,;$$
$$\Sigma_r K_i = R\,; \quad -\Sigma_r K_i(y_i - c_r) = N \qquad (273)$$

zijn.

De arbeid, die de luchtkrachten bij een kleine virtueele wijziging van de uitslagen verrichten, kan worden geschreven:

$$(\delta A)_{strook} = \Sigma K_i \delta z_i \qquad (274)$$

waarin δz_i de verschuiving is van het aangrijpingspunt P_i van K_i.

Voor *alle punten van den vleugel-alléén* is

$$\delta z_i = \delta z - y_i \delta\varphi \qquad (275)$$

en voor alle punten van het *rolroer*, mede volgens (241):

$$\delta z_i = \delta z - y_i \delta\varphi - (y_i - c_d)(\delta\gamma_r - \delta\varphi) \qquad (276)$$

Dus

$$(\delta A)_{strook} = \Sigma_v K_i(\delta z - y_i \delta\varphi) + \Sigma_r K_i [\delta z -$$
$$- y_i\delta\varphi - \delta\gamma_r(y_i - c_d) + \delta\varphi(y_i - c_d)] =$$
$$= \delta z \Sigma K_i - \delta\varphi \Sigma K_i y_i - \delta\gamma_r \Sigma_r K_i(y_i - c_d) +$$
$$+ \delta\varphi \Sigma_r K_i (y_i - c_d)$$

Gebruik makend van (273) schrijft men hiervoor

$$(\delta A)_{strook} = K\delta z + M\delta\varphi - c_v K\delta\varphi +$$
$$+ [N - c_r R + c_d R]\delta\gamma_r - (N - c_r R + c_d R)\delta\varphi =$$
$$= K\delta z + [M - c_v K - N - (c_d - c_r)R]\delta\varphi +$$
$$+ [N + (c_d - c_r)R]\delta\gamma_r \qquad (277)$$

Stel nu, *overeenkomstig (245)*

$$\delta z = z_1 \delta q_1 \qquad \delta\varphi = \varphi_1 \delta Q_1 \qquad \delta\gamma_r \equiv \delta\gamma_r$$

Dan wordt

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\delta A}{\delta q_1}\right)_{strook} &= K z_1 \\ \left(\frac{\delta A}{\delta Q_1}\right)_{strook} &= [M - c_v K - N - \\ &\qquad - (c_d - c_r)R]\varphi_1 \\ \left(\frac{\delta A}{\delta \gamma_r}\right)_{strook} &= N + (c_d - c_r)R \end{aligned}\right\} \qquad (278)$$

Substitueer in (269):

$$\bar{z}_{v0} e^{i\nu\tau} = z_v = z - c_v\varphi$$
$$\bar{\varphi}_0 e^{i\nu\tau} = \varphi$$

e.z.z.,

vervolgens, op grond van (266)

$$\zeta = +(c_d - c_r)\gamma = +c_{dr}\gamma,$$

en tenslotte volgens (241)

$$\gamma = \gamma_r - \varphi$$

Het resultaat luidt:

$$\left.\begin{aligned} \overline{K} &= \Delta x\,.\,m_L \nu^2 [z k_z + \varphi(k_\varphi t - c_v k_z - \\ &\qquad - k_\gamma t - c_{dr} k_\zeta) + \gamma_r(k_\gamma t + c_{dr} k_\zeta)] \\ \overline{M} &= \Delta x\,.\,m_L \nu^2 t [z m_z + \varphi(m_\varphi t - c_v m_z - \\ &\qquad - m_\gamma t - c_{dr} m_\zeta) + \gamma_r(m_\gamma t + c_{dr} m_\zeta)] \\ \overline{R} &= \Delta x\,.\,m_L \nu^2 [z r_z + \varphi(r_\varphi t - c_v r_z - \\ &\qquad - r_\gamma t - c_{dr} r_\zeta) + \gamma_r(r_\gamma t + c_{dr} r_\zeta)] \\ \overline{N} &= \Delta x\,.\,m_L \nu^2 t [z n_z + \varphi(n_\varphi t - c_v n_z - \\ &\qquad - n_\gamma t - c_{dr} n_\zeta) + \gamma_r(n_\gamma t + c_{dr} n_\zeta)] \end{aligned}\right\} \qquad (279)$$

Zet men hierin:

$$z = q_1 z_1 \qquad \varphi = Q_1 \varphi_1 \qquad \gamma_r = \gamma_r$$

en substitueert men het resultaat in (278), dan krijgt men na integratie over den vleugel *formeel*

---

1) Met behulp van later gedefiniëerde, in tabel 2 in *getallenvorm gegeven functie's* R_i (die met samenvattingen van functie's Φ overeenkomen), kan men hiervoor nog schrijven

$$(R_{stat}^-) = \Delta x\,.\,\pi\varrho v^2 [(R_{22}^- + \tfrac{1}{4}R_{25}^+) t -$$
$$- (c_d - c_r)(\tfrac{1}{4}R_{24}^- + R_{23}^-)]$$

2) Ook de phasen van deze krachten laten de te vermelden *opvatting* toe.

3) In de hierna volgende meer algemeen geldige berekeningen is de bovenstreeping van „complexe" grootheden, daar zij geen toelichting van beteekenis geeft, niet *consequent* aangehouden.

de arbeidscoëfficiënten voor de Lagrange-vergelijkingen (251), (252) en (253). De uitdrukkingen voor de coëfficiënten zijn, zooals ook vroeger het geval was, feitelijk alléén correct wanneer het systeem een harmonische trilling uitvoert, d.w.z. men kan er *de kritische trilling* binnen het kader der gemaakte onderstellingen exact mee behandelen.

Schrijft men (zie (251), (252) en (253))

$$\left.\begin{aligned}
K_{q1} &= \nu^2\int m_L(\bar{a}_{11}\, q_1 z_1 + \bar{a}_{12}\, t\, Q_1 \varphi_1 + \\
&\qquad + \bar{a}_{13}\, t\, \gamma_r) z_1\, dx \\
M_{Q1} &= \nu^2\int m_L(\bar{a}_{21}\, q_1 z_1 + \bar{a}_{22}\, t\, Q_1 \varphi_1 + \\
&\qquad + \bar{a}_{23}\, t\, \gamma_r) t\, \varphi_1\, dx \\
M_{\gamma r} &= \nu^2\int m_L(\bar{a}_{31}\, q_1 z_1 + \bar{a}_{32}\, t\, Q_1 \varphi_1 + \\
&\qquad \bar{a}_{33}\, t\, \gamma_r) t\, dx
\end{aligned}\right\} \quad (280)$$

dan wordt

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= k_z \\
\bar{a}_{12} &= k_\varphi - \frac{c_v}{t} k_z - k_\gamma - \frac{c_{dr}}{t} k_\zeta \\
\bar{a}_{13} &= k_\gamma + \frac{c_{dr}}{t} k_\zeta
\end{aligned}\right\} \quad (281)$$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a}_{21} &= m_z - \frac{c_v}{t} k_z - n_z - \frac{c_{dr}}{t} r_z \\
\bar{a}_{22} &= m_\varphi - \frac{c_v}{t} k_\varphi - n_\varphi - \frac{c_{dr}}{t} r_\varphi - \\
&\quad - \left(m_z - \frac{c_v}{t} k_z - n_z - \frac{c_{dr}}{t} r_z\right)\frac{c_v}{t} - \\
&\quad - \left(m_\gamma - \frac{c_v}{t} k_\gamma - n_\gamma - \frac{c_{dr}}{t} r_\gamma\right) - \\
&\quad - \left(m_\zeta - \frac{c_v}{t} k_\zeta - n_\zeta - \frac{c_{dr}}{t} r_\zeta\right)\frac{c_{dr}}{t} \\
\bar{a}_{23} &= m_\gamma - \frac{c_v}{t} k_\gamma - n_\gamma - \frac{c_{dr}}{t} r_\gamma + \\
&\quad + \left(m_\zeta - \frac{c_v}{t} k_\zeta - n_\zeta - \frac{c_{dr}}{t} r_\zeta\right)\frac{c_{dr}}{t}
\end{aligned}\right\} \quad (282)$$

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a}_{31} &= n_z + \frac{c_{dr}}{t} r_z \\
\bar{a}_{32} &= n_\varphi + \frac{c_{dr}}{t} r_\varphi - \left(n_z + \frac{c_{dr}}{t} r_z\right)\frac{c_v}{t} - \\
&\quad - \left(n_\gamma + \frac{c_{dr}}{t} r_\gamma\right) - \left(n_\zeta + \frac{c_{dr}}{t} r_\zeta\right)\frac{c_{dr}}{t} \\
\bar{a}_{33} &= n_\gamma + \frac{c_{dr}}{t} r_\gamma + \left(n_\zeta + \frac{c_{dr}}{t} r_\zeta\right)\frac{c_{dr}}{t}
\end{aligned}\right\} \quad (283)$$

Kiest men de coördinaten niet volgens (245), doch volgens (247) (met i.p.v. γ_1 den hoek γ_r), dan wordt:

$$\begin{aligned}
\delta z &= z_1 \delta q_1 + z_2 \delta q_2 \\
\delta \varphi &= C_1 \varphi_1 \delta q_1 + C_2 \varphi_2 \delta q_2 \\
\delta \gamma_r &\equiv \delta \gamma_r
\end{aligned}$$

Substitueert men dit in (277), dan blijkt dat

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta A}{\delta q_1}\right)_{strook} &= K z_1 + (M - c_v K - N - c_{dr} R) C_1 \varphi_1 \\
\left(\frac{\delta A}{\delta q_2}\right)_{strook} &= K z_2 + (M - c_v K - N - c_{dr} R) C_2 \varphi_2 \quad (284) \\
\left(\frac{\delta A}{\delta \gamma_r}\right)_{strook} &= N + c_{dr} R
\end{aligned}$$

Vervangt men nu in (279)

z door $q_1 z_1 + q_2 z_2$ en φ door $q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2$

dan leidt substitutie in (284) en integratie over den vleugel tot bruikbare uitdrukkingen voor de arbeidscoëfficiënten van de Lagrange'sche vergelijkingen (258), (259) en (260). Men vindt:

$$\begin{aligned}
L_{q1} = \nu^2 \int m_L [\{&\bar{a}_{11} z_1^2 + \\
&+ (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{21})\, t\, z_1 C_1 \varphi_1 + \bar{a}_{22} t^2 C_1^2 \varphi_1^2\} q_1 + \\
&+ (\bar{a}_{11} z_1 z_2 + \bar{a}_{12}\, t\, z_1 C_2 \varphi_2 + \bar{a}_{21}\, t\, z_2 C_1 \varphi_1 + \\
&\quad + \bar{a}_{22} t^2 C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2) q_2 + (\bar{a}_{13} z_1 + \\
&\quad + \bar{a}_{23}\, t\, C_1 \varphi_1)\, t\, \gamma_r]\, dx \quad (285)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{q2} = \nu^2 \int m_L [(&\bar{a}_{11} z_1 z_2 + \bar{a}_{12}\, t\, z_2 C_1 \varphi_1 + \\
&+ \bar{a}_{21}\, t\, z_1 C_2 \varphi_2 + \bar{a}_{22} t^2 C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2) q_1 + \\
&+ \{\bar{a}_{11} z_2^2 + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{21})\, t\, z_2 C_2 \varphi_2 + \\
&+ \bar{a}_{22} t^2 C_2^2 \varphi_2^2\} q_2 + (\bar{a}_{13} z_2 + \bar{a}_{23} t C_2 \varphi_2) t \gamma_r]\, dx \quad (286)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\gamma r} = \nu^2 \int m_L [(&\bar{a}_{31} z_1 + \bar{a}_{32}\, t\, C_1 \varphi_1)\, t\, q_1 + \\
&+ (\bar{a}_{31} z_2 + \bar{a}_{32}\, t\, C_2 \varphi_2)\, t\, q_2 + \bar{a}_{33} t^2 \gamma_r]\, dx \quad (287)
\end{aligned}$$

waarin de dimensielooze coëfficiënten $\bar{a}_{ik}$ de door (281), (282) en (283) gedefiniëerde beteekenis hebben.

De arbeidscoëfficiënten voor het laatste stelsel later te gebruiken Lagrange-vergelijkingen (264), (265) vindt men direct uit (285), (286) en (287) door daarin $q_2 = z_2 = \varphi_2 \equiv 0$ te stellen. Dan komt er

$$\begin{aligned}
N_{q1} &= \nu^2 \int m_L [\{\bar{a}_{11} z_1^2 + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{21})\, t\, z_1 C_1 \varphi_1 + \\
&+ \bar{a}_{22} t^2 C_1^2 \varphi_1^2\} q_1 + (\bar{a}_{13} z_1 + \bar{a}_{23}\, t\, C_1 \varphi_1)\, t\, \gamma_r]\, dx \quad (288) \\
N_{\gamma r} &= \nu^2 \int m_L [(\bar{a}_{31} z_1 + \bar{a}_{32}\, t\, C_1 \varphi_1)\, t\, q_1 + \\
&\qquad + \bar{a}_{33} t^2 \gamma_r]\, dx. \quad (289)
\end{aligned}$$

Tenslotte moge worden nagegaan, hoe groot de toeslagen op de massa van het systeem moeten zijn, om de onderstreepte termen in (271) *daardoor* in rekening te brengen. De sleutel leveren de vergelijkingen (251), (252) en (253), in combinatie met (280). Bij een *harmonische trilling* worden de traagheidskrachten in de drie eerstgenoemde vergelijkingen gegeven door:

$$\begin{aligned}
&-\nu^2 q_1 \int m_{11} z_1^2\, dx \;; \quad &&+\nu^2 Q_1 \int m_{12} z_1 \varphi_1\, dx \\
& &&+\nu^2 \gamma_r \int m_{13} z_1\, dx \\
&+\nu^2 q_1 \int m_{12} z_1 \varphi_1\, dx \;; \quad &&-\nu^2 Q_1 \int m_{22} \varphi_1^2\, dx \\
& &&-\nu^2 \gamma_r \int m_{23} \varphi_1\, dx \quad (290)
\end{aligned}$$

$$+\nu^2 q_1 \int m_{13} z_1 \, d x \; ; \qquad -\nu^2 Q_1 \int m_{23} \varphi_1 \, d x$$
$$-\nu^2 \gamma_r \int m_{33} \, d x$$

Ordent men de luchtkrachttermen in de rechterleden in een analoog schema:

$$\begin{matrix} P_{11} q_1 & P_{12} Q_1 & P_{13} \gamma_r \\ P_{21} q_1 & P_{22} Q_1 & P_{23} \gamma_r \\ P_{31} q_1 & P_{32} Q_1 & P_{33} \gamma_r \end{matrix} \qquad (291)$$

dan wordt volgens (280), (281), (282), (283) en (271), *in (271) alleen de onderstreepte termen in aanmerking nemend:*

$$\left.\begin{aligned}
P_{11} &= \nu^2 \int m_L z_1^2 \, d x \\
P_{12} &= \nu^2 \int m_L \left(-\frac{t}{4} - c_v + \frac{\Phi_v}{4\pi} t - c_{dr} \frac{\Phi_3}{\pi} \right) z_1 \varphi_1 \, d x \\
P_{13} &= \nu^2 \int m_L \left(-\frac{\Phi_4}{4\pi} t + c_{dr} \frac{\Phi_3}{\pi} \right) z_1 \, d x \\
P_{21} &= \nu^2 \int m_L \left(-\frac{t}{4} - c_v + \frac{\Phi_4}{4\pi} t - c_{dr} \frac{\Phi_3}{\pi} \right) z_1 \varphi_1 \, d x \\
P_{22} &= \nu^2 \int m_L \left(\frac{3}{32} t^2 + \tfrac{1}{2} c_v t - \frac{\Phi_7}{8\pi} t^2 + c_{dr} \frac{\Phi_6}{4\pi} t + \right. \\
&\quad + c_v^2 - c_v \frac{\Phi_4}{2\pi} t + 2 c_v c_{dr} \frac{\Phi_3}{\pi} - c_{dr} \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2} t + \\
&\quad \left. + \frac{\Phi_{12}}{16\pi^2} t^2 + c_{dr}^2 \frac{\Phi_{17}}{\pi^2} \right) \varphi_1^2 \, d x \\
P_{23} &= \nu^2 \int m_L \left(\frac{\Phi_7}{16\pi} t^2 + c_v \frac{\Phi_4}{4\pi} t - \frac{\Phi_{12}}{16\pi^2} t^2 + \right. \\
&\quad \left. + c_{dr} \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2} t - c_{dr} \frac{\Phi_6}{8\pi} t - c_v c_{dr} \frac{\Phi_3}{\pi} - c_{dr}^2 \frac{\Phi_{17}}{\pi^2} \right) \varphi_1 \, d x \\
P_{31} &= \nu^2 \int m_L \left(-\frac{\Phi_4}{4\pi} t - c_{dr} \frac{\Phi_3}{\pi} \right) z_1 \, d x \\
P_{32} &= \nu^2 \int m_L \left(\frac{\Phi_7}{16\pi} t^2 - c_{dr} \frac{\Phi_6}{8\pi} t + c_v \frac{\Phi_4}{4\pi} t - \right. \\
&\quad \left. - c_v c_{dr} \frac{\Phi_3}{\pi} - \frac{\Phi_{12}}{16\pi^2} t^2 + c_{dr} \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2} t - c_{dr}^2 \frac{\Phi_{17}}{\pi^2} \right) \varphi_1 \, d x \\
P_{33} &= \nu^2 \int m_L \left(\frac{\Phi_{12}}{16\pi^2} t^2 - c_{dr} \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2} t + c_{dr}^2 \frac{\Phi_{17}}{\pi^2} \right) d x
\end{aligned}\right| \quad (292)$$

Daar $P_{ik} = P_{ki}$ blijkt te zijn, kunnen de termen (292) inderdaad worden opgevat als toeslagen op de termen (290) van de „echte" traagheidskrachten. Wanneer later te definiëeren (zie de formules (315)) functie's R, welke samenvattingen van bepaalde Küssner'sche *functie's Φ vormen*, worden ingevoerd, leidt de *combinatie* der grootheden (290) en (291) tot de navolgende formules voor de „massaverdeelingsfunctie's *mèt* toeslag" van het systeem (de oorspronkelijke functie's — dus zònder toeslag — ter onderscheiding $(m_{ik})_o$ noteerend, evenals zulks in (44) t/m (47) geschiedde):

$$\left.\begin{aligned}
m_{11} &= (m_{11})_o + m_L \\
m_{12} &= (m_{12})_o + m_L (t R_{39} + c_v + c_{dr} R_9) \\
m_{13} &= (m_{13})_o + m_L (t R_{40} - c_{dr} R_9) \\
m_{22} &= (m_{22})_o + m_L (t^2 R_{41} + 2 c_v t R_{39} + \\
&\quad + c_{dr} t R_{42} + c_v^2 + 2 c_v c_{dr} R_9 + c_{dr}^2 R_{43}) \\
m_{23} &= (m_{23})_o + m_L (t^2 R_{44} + c_v t R_{40} + \\
&\quad + c_{dr} t R_{45} - c_v c_{dr} R_9 - c_{dr}^2 R_{43}) \\
m_{33} &= (m_{33})_o + m_L (t^2 R_{46} - c_{dr} t R_{47} + c_{dr}^2 R_{43})
\end{aligned}\right\} \quad (293)$$

Getallenwaarden van alle functie's R (welke, overeenkomstig met wat voor de Φ's geldt, *uitsluitend* afhangen van den parameter η) kunnen *aan* de tabellen 2 worden *ontleend.* [1])

Wanneer de functie's m_{ik} in overeenstemming met de bovenstaande formules worden geconstrueerd, kunnen in *alle later te gebruiken formules,* waarin de coëfficiënten $k_z, k_\varphi, \ldots n_\zeta$ direct of indirect vóórkomen, aan die coëfficiënten de waarden (271) onder *weglating* van de eerste, *onderstreepte,* termen worden toegekend.

Er wordt aan herinnerd, dat numerieke uitwerkingen kunnen worden vereenvoudigd door in ieder geval voor de grootheden R_i, *en voor* $\frac{c_{dr}}{t}$, *constante* waarden in te vullen, zoodat dergelijke grootheden, en producten of sommen daarvan, vóór integraalteekens, die integratie's over den vleugel definiëeren, kunnen worden gebracht.

10.4. **Materiaal- en wrijvings-demping.**

Het spreekt vanzelf, dat men de materiaaldemping op vervormingen van den *vleugel-alléén* op de gebruikelijke wijze — d.i. òf door toekenning van complexe waarden aan de stijfheidsparameters van den vleugel, òf, wanneer deze door gebruik van materiaal eener standtrillingsproef niet explicite in de formules optreden, door substitutie van *„complexe"* eigenfrequentie's van het systeem in stilstaande lucht — in rekening zal kunnen brengen. Het ligt voor de hand, dat men een (elliptische *hysteresis-*) demping op rolroerdraaiingen op analoge wijze zal kunnen weergeven door de *veerconstante k_r der rolroerbesturing* complex te nemen. Echter is de demping op *rolroerbewegingen* in werkelijkheid gewoonlijk voor een belangrijk deel een *wrijvingsdemping.* Dit *verschillend karakter* van de demping op rolroerbewegingen is, *wanneer vooropgesteld wordt dat afzonderlijke rolroerbewegingen werkelijk optreden,* weinig belangrijk, daar men de demping tòch zonder veel bezwaar door een *aequivalente* — d.i. per periode evenveel energie onttrekkende—hysteresisdemping zal kunnen vervangen [2]). De eenige consequentie is, dat het nu nog meer noodig kan zijn, de waarde van de dempingsconstante (= voorloophoek der hysteresis-kracht) afhankelijk te stellen van de *amplitude,* de berekening dus voor een *serie* waarden van de dempingsconstante door te voeren.

Er wordt verder de aandacht op gevestigd, dat *wrijvingsdemping* bij kleinere verstoringen *blokkeerend* kan werken, d.w.z. vrije rolroerbewegingen geheel onderdrukken kan. Een gevolg hiervan is, dat de vleugel zich voor *kleine* verstoringen nagenoeg als een systeem zònder rolroer zal kunnen gedragen, en dat eerst bij *grootere* verstoringen

---

1) Deze tabellen bevinden zich aan het eind van het rapport.

2) Van theoretisch standpunt is het eenige *bijkomstige* gevolg van wrijvingsdemping eigenlijk, dat de trilling niet strikt *sinusvormig* blijft. Het is echter onwaarschijnlijk, dat de *vervorming* van de trilling zoo groot zal zijn, dat daardoor berekeningen, die de demping als aequivalente hysteresisdemping in acht nemen, niet nauwkeurig genoeg zouden blijven.

het rolroer gaat medespelen. Daarmede bestaat *in het bijzonder* bij vleugels met dynamisch *ondergebalanceerd* rolroer de mogelijkheid, dat het *inzetten eener onstabiele trilling* is gekoppeld aan het optreden van een *grootere verstoring* (remous-tik) van het evenwicht van den vleugel.

Niet alleen de *aard*, maar ook de *invloed* van demping kan bij een vleugel-rolroer-systeem anders zijn dan bij buigings-torsie-trillingen van een vleugel alléén. In het laatste geval is zij vaak *betrekkelijk gering*, d.w.z. de kritische snelheid van het gedempte systeem blijkt bij normale vleugels dikwijls niet al te veel boven de kritische snelheid van het dempingsvrije systeem te liggen. (Dit is voornamelijk afhankelijk — behoudens van de grootte van de demping — van de *kritische* waarde der gereduceerde snelheid. Is deze klein, b.v. 0,5 à 0,7, dan kan de demping een verhooging van beteekenis, b.v. 20 à 30 %, van de kritische snelheid veroorzaken, is zij groot, b.v. ca. 1,0, dan speelt de demping meestal geen belangrijke rol). Men kan dan ook de demping bij *dergelijke* berekeningen eventueel in eerste instantie verwaarloozen, zonder dat daardoor waardelooze uitkomsten ontstaan.

Anders is het bij aanwezigheid van een rolroer. *De demping kan de kritische snelheid bij een vleugel-rolroer-systeem zoo sterk beïnvloeden, dat kritische snelheden, berekend zonder inachtname van demping, iedere directe praktische beteekenis verliezen.* Men neme dus, wanneer het erom gaat „goede" waarden voor de kritische snelheid van een vleugel-rolroer-systeem te berekenen, de demping *steeds* mede in aanmerking. *Feitelijk* is dit *ook* noodig voor het verkrijgen van een goed *theoretisch* inzicht in het gedrag der vleugeltrillingen. Het blijkt n.l., dat zich het interessante geval kan voordoen, *dat een kritische trillingsvorm door demping geheel wordt geëlimineerd.* De stand van zaken is dan de volgende:

De kritische snelheid berekenend zonder demping in aanmerking te nemen, vindt men *drie kritische toestanden*, d.w.z., men vindt drie verschillende stellen waarden voor V, ν en de parameters, die den trillingsvorm vastleggen, waarbij een *juist ongedempte* vleugeltrilling kan optreden. Men is natuurlijk geneigd, dan *die* trilling als *de „praktisch belangrijke" kritische* op te vatten, waarvoor het product $V_{krit}\ \nu_{krit}$ (d.w.z. de kritische snelheid) *minimaal* is. Herhaalt men nu de berekening onder inachtname van demping, daaraan verschillende waarden toekennend, dan worden de drie kritische trillingen aanvankelijk (bij kleine demping) teruggevonden, echter blijkt dat de twee met de laagste waarden van $V_{(krit)}$ „naar elkaar toe komen". D.w.z. de *kleinste* kritische snelheid wordt naar behooren verhoogd, de middelste echter *verlaagd*. Bij een bepaalde demping, die binnen het gebied der in de praktijk aangetroffen waarden kan liggen, vallen deze twee kritische trillingen tenslotte samen (zij worden *geheel* identiek, ook wat den trillingsvorm betreft), een geringe verdere verhooging van de demping *elimineert dan deze twee kritische trillingen geheel*. Bij groote demping blijft dus alleen de *derde*, oorspronkelijk *hoogste*, kritische snelheid (die door de demping verhoogd is) over, en deze blijkt inderdaad na overschrijding een niet door demping te elimineeren hevig-onstabiele trilling op te leveren.

Men kan het gedrag van het systeem nog anders interpreteeren, wanneer de demping zeer sterk afhangt van de amplitude van de trillingen. Men komt dan tot de conclusie, dat het voornoemde, langs den weg der berekening vastgestelde gedrag van het vleugel-rolroersysteem een theoretische basis geeft aan het reeds veel vroeger — in de praktijk van het vliegen — geconstateerde verschil tusschen „goedaardige" en „kwaadaardige" vormen van onstabiele trillingen (zie b.v. *lit.* 3). Het vermoeden ligt voor de hand, dat „goedaardige" onstabiele trillingen overeenkomen met het type trillingen, dat volgens de theorie door reeds relatief *kleine* demping kan worden onderdrukt.

10.5. Het gebruik van gegevens, ontleend aan de standtrillingsproef.

De mogelijkheden, die aanwezig zijn voor invoeging van uit de standtrillingsproef verkregen materiaal in de vergelijkingen der theoretische analyse ligt, op grond van vroegere mededeelingen, zoozeer voor de hand, dat het niet noodig is hierop nader in te gaan.

10.6. De behandeling der luchtkracht-termen bij de numerieke uitwerking.

De voor de numerieke uitwerking onaangename omstandigheid dat de gereduceerde snelheid bij een tapschen vleugel een functie van x is, kan vanzelfsprekend ook bij het systeem met rolroer worden ontgaan door een benadering van het het type, beschreven in no. 61 in te schakelen. Er zijn echter twee bezwaren: in de eerste plaats wordt de formule, die den per tijdseenheid door de luchtkrachten verrichten arbeid voorstelt, belangrijk gecompliceerder, en in de tweede plaats speelt de demping een veel belangrijker rol dan bij den vleugel-alléén het geval was. Daarom wordt het voordeel, verbonden aan de toepassing der in 61 beschreven werkwijze, betrekkelijk onbeteekenend. Voor den vleugel met rolroer zal de grondslag der numerieke berekening dan ook uitsluitend worden uitgewerkt naar de in no. 62 gegeven aanwijzingen. De Taylor-reeksen voor de luchtkrachtfunctie's zullen consequent achter de in V_0 lineaire termen worden afgebroken. De te gebruiken tabellen bevatten echter ook getallen, die de inachtname der in V_0 quadratische termen mogelijk maken, zoodat men deze uitbreiding desgewenscht zelf zonder te veel moeite kan aanbrengen. Er wordt op gewezen, dat men, wanneer de tapschheid van den vleugel slechts gering is, vele hierna volgende formules en bewerkingen zal kunnen vereenvoudigen door ook de in V_0 lineaire termen in de voornoemde Taylor-reeksen nul te stellen.

11. Het vleugel-rolroer-systeem met toegelaten vleugeldeformatie's $z = q_1 z_1$, $\varphi = Q_1 \varphi_1$, in den symmetrischen trillingsvorm.

11.1. Te stellen voorwaarden.

Voorwaarde voor de toepassing van de navolgende rekenmethode is, dat de bewegelijkheid van den romp de trillingen slechts in zoo geringe mate beïnvloedt, dat de opvatting, dat de romp een vaste inklemming voor den vleugel vormt, een gewettigde benadering is. Bovendien is het gewenscht, dat de fundamenteele trillingsvormen der vleugelbuiging en der vleugeltorsie in stilstaande lucht redelijk door de toegelaten deformatie's $q_1 z_1$, $Q_1 \varphi_1$ kunnen worden gereproduceerd. Men zie overigens no. 72.

11.2. **Uitwerking.**

De grondvergelijkingen, waarvan de berekening uitgaat, zijn de Lagrange-vergelijkingen (251), (252), (253) met arbeidscoëfficiënten, gegeven door (280). De functie's m_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ worden geacht te zijn geconstrueerd in overeenstemming met (293). Men stelle [1]):

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_{11} z_1^2 \, dx = M_{11} \\
&\int m_{12} z_1 \varphi_1 \, dx = M_{12} \\
&\int m_{22} \varphi_1^2 \, dx = M_{22} \\
&\int m_{13} z_1 \, dx = M_{13} \\
&\int m_{23} \varphi_1 \, dx = M_{23} \\
&\int m_{33} \, dx = M_{33} \\
&\int b_{11} z_1''^2 \, dx = \bar{c} \\
&\int b_{12} z_1'' \varphi_1'' \, dx = e\bar{c} \\
&k_r \varphi_1^2(b_1) + \int (b_{22} \varphi_1''^2 + T \varphi_1'^2) \, dx = \bar{E}_{22} \\
&k_r \varphi_1(b_1) = \bar{E}_{23}
\end{aligned}\right\} \quad (294)$$

dan luiden de bewegingsvergelijkingen, na substitutie van

$$q_1 = \bar{q}_{10} e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad Q_1 = \bar{Q}_{10} e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad \gamma_r = \bar{\gamma}_{r0} e^{i\bar{\nu}\tau} \quad (295)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{q}_{10}\left[\bar{c} - \bar{\nu}^2\left(M_{11} + \int m_L \bar{a}_{11} z_1^2 \, dx\right)\right] + \\
&+ \bar{Q}_{10}\left[-e\bar{c} + \bar{\nu}^2\left(M_{12} - \int m_L \bar{a}_{12} t z_1 \varphi_1 \, dx\right)\right] + \\
&\qquad + \bar{\gamma}_{r0} \bar{\nu}^2 \left(M_{13} - \int m_L \bar{a}_{13} t z_1 \, dx\right) = 0 \\
&\bar{q}_{10}\left[-e\bar{c} + \bar{\nu}^2\left(M_{12} - \int m_L \bar{a}_{21} t z_1 \varphi_1 \, dx\right)\right] + \\
&+ \bar{Q}_{10}\left[\bar{E}_{22} - \bar{\nu}^2\left(M_{22} + \int m_L \bar{a}_{22} t^2 \varphi_1^2 \, dx\right)\right] + \\
&+ \bar{\gamma}_{r0}\left[-\bar{E}_{23} - \bar{\nu}^2\left(M_{23} + \int m_L \bar{a}_{23} t^2 \varphi_1 \, dx\right)\right] = 0 \\
&\bar{q}_{10} \bar{\nu}^2 \left(M_{13} - \int m_L \bar{a}_{31} t z_1 \, dx\right) - \\
&- \bar{Q}_{10}\left[\bar{E}_{23} + \bar{\nu}^2\left(M_{23} + \int m_L \bar{a}_{32} t^2 \varphi_1 \, dx\right)\right] + \\
&+ \bar{\gamma}_{r0}\left[\bar{k}_r - \bar{\nu}^2\left(M_{33} + \int m_L \bar{a}_{33} t^2 \, dx\right)\right] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (296)$$

De vergelijkingen voor de standtrilling worden hieruit verkregen door $m_L = 0$ te stellen [1]). Men lost, *in dat geval*, uit de laatste vergelijking op:

$$\bar{\gamma}_{r0} = \frac{\bar{q}_{10} \nu^2 M_{13} - \bar{Q}_{10} (E_{23} + \nu^2 M_{23})}{\nu^2 M_{33} - k_r}$$

Substitueert men dit in de beide eerste vergelijkingen, dan vindt men dat voor de *standtrilling* moet gelden:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{q}_{10}\left[c - \nu^2\left(M_{11} - \nu^2 \frac{M_{13}^2}{\nu^2 M_{33} - k_r}\right)\right] + \bar{Q}_{10}\left[- \right. \\
&\left. - ec + \nu^2 \left\{M_{12} - \frac{(E_{23} + \nu^2 M_{23}) M_{13}}{\nu^2 M_{33} - k_r}\right\}\right] = 0 \\
&\bar{q}_{10}\left[-ec + \nu^2 \left\{M_{12} - \frac{(E_{23} + \nu^2 M_{23}) M_{13}}{\nu^2 M_{33} - k_r}\right\}\right] + \\
&+ \bar{Q}_{10}\left[E_{22} - \nu^2 M_{22} + \frac{(E_{23} + \nu^2 M_{23})^2}{\nu^2 M_{33} - k_r}\right] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (297)$$

Vormt men de coëfficiënten-determinant, en substitueert men vervolgens:

$$\nu = \nu_B \text{ of } \nu = \nu_T$$

dan verkrijgt men twee vergelijkingen voor onbekende stijfheidsparameters.

Er zijn 5 van die parameters, n.l.

$$c, \; ec, \; E_{22}, \; E_{23}, \; k_r,$$

doch E_{23} en k_r kunnen zonder al te veel moeite op *andere wijze* worden gevonden (k_r uit een *directe meting* van de stijfheid der rolroerbesturing, en E_{23} uit k_r en een torsieproef op den vleugel ter vaststelling van de ligging der dwarsdoorsnede $x = b_1$, waar de rolroerkoorde *precies* in het verlengde van de vleugelkoorde blijft.)

Men stuit dus op denzelfden toestand, die reeds bij de behandeling van den vleugel alléén in no. 72 is aangetroffen. Men kan probeeren, of substitutie

---

[1]) De formules voor de M_{ik}'s kunnen met behulp van later — door de formules (308) — gedefiniëerde afkortingen, *de uitdrukkingen* (293) *voor de* m_{ik}*'s substitueerend*, in den navolgenden vorm worden geschreven:

$$\left.\begin{aligned}
M_{11} &= \int (m_{11})_0 z_1^2 \, dx + \mu_{11} \\
M_{12} &= \int (m_{12})_0 z_1 \varphi_1 \, dx + \mu_{12} R_{39} + \\
&\qquad + \mu_{12}^{v} + \mu_{12}^{d} \cdot R_9 \\
M_{22} &= \int (m_{22})_0 \varphi_1^2 \, dx + \mu_{22} R_{41} + \\
&\qquad 2\mu_{22}^{v} R_{39} + 2\mu_{22}^{d} R_{42} + \mu_{22}^{vv} + \\
&\qquad + 2\mu_{22}^{vd} R_9 + \mu^{dd} R_{43} \\
M_{13} &= \int (m_{13})_0 z_1 \, dx + \mu_{13} R_{40} - \mu_{13}^{d} R_9 \\
M_{23} &= \int (m_{23})_0 \varphi_1 \, dx + \mu_{23} R_{44} + \mu_{23}^{v} R_{40} + \\
&\qquad + \mu_{23}^{d} R_{45} - \mu_{23}^{vd} R_9 - \mu_{23}^{dd} R_{43} \\
M_{33} &= \int (m_{33})_0 \, dx - \mu_{33}^{d} R_{47} + \\
&\qquad + \mu_{33}^{dd} R_{43} + \mu_{33} R_{46}
\end{aligned}\right\} \quad (294a)$$

[1]) Men kan bovendien de demping buiten beschouwing laten, en dus ν en de stijfheidsparameters reëel stellen. Tevens construeere men de functie's m_{ik} volgens (293), daarin

$$m_L = \tfrac{1}{4} \pi \varrho t^2 = \frac{1}{32} \pi t^2 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^2}$$

stellend. (normale luchtdichtheid!)

van één der eigentrillingsvormen [1]) plus de bijbehoorende eigenfrequentie, in (297) een bruikbare derde vergelijking oplevert.

Wanneer de vleugel een goed-definiëerbare elastische as heeft, kan uit de ligging hiervan soms een doelmatige waarde voor e worden afgeleid. In het gegeven geval moet aan de coëfficiënten-determinant van (296) en (297) ook de eigenfrequentie ν_r der rolroer-eigentrilling voldoen. Ook deze kan experimenteel zijn bepaald. Men gebruike de vergelijking, die door substitutie van ν_r in de coëfficiënten-determinant ontstaat, uitsluitend ter contrôle van de waarde van k_r of van M_{33}. Evenals zulks vroeger het geval was (zie no. 72), leveren de vergelijkingen (297) een zéér goeden grondslag voor verdere berekeningen, wanneer het mogelijk blijkt een nauwkeurige aansluiting dezer formules bij de standtrillingsproef te construeeren. Deze aansluiting vormt een toetssteen voor de nauwkeurigheid.

Enkele formules. Stel ter afkorting

$$\begin{aligned}
&\nu^2\left(M_{11}-\nu^2\frac{M_{13}^2}{\nu^2 M_{33}-k_r}\right)=F_{11}(\nu)\\
&\nu^2\left(M_{12}-\frac{(E_{23}+\nu^2 M_{23})M_{13}}{\nu^2 M_{33}-k_r}\right)=F_{12}(\nu) \qquad (298)\\
&\nu^2 M_{22}-\frac{(E_{23}+\nu^2 M_{23})^2}{\nu^2 M_{33}-k_r}=F_{22}(\nu)
\end{aligned}$$

F_{11}, F_{12} en F_{22} bevatten in het algemeen behalve de frequentie ν geen onbekenden.

Stel bovendien:

$$\left(\frac{\bar{q}_{10}}{\bar{Q}_{10}}\right)_{\nu=\nu_B}=\lambda_B \qquad \left(\frac{\bar{q}_{10}}{\bar{Q}_{10}}\right)_{\nu=\nu_T}=\lambda_T \qquad (299)$$

dan geldt

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_B(c-F_{11}(\nu_B))=e\,c-F_{12}(\nu_B)\\
&\lambda_T(c-F_{11}(\nu_T))=e\,c-F_{12}(\nu_T)\\
&\lambda_B(e\,c-F_{12}(\nu_B))=E_{22}-F_{22}(\nu_B)\\
&\lambda_T(e\,c-F_{12}(\nu_T))=E_{22}-F_{22}(\nu_T)
\end{aligned}\right\} \qquad (300)$$

Elimineer uit de beide rechtsche vergelijkingen λ_T:

$$E_{22}-F_{22}(\nu_T)=\frac{(e\,c-F_{12}(\nu_T))^2}{c-F_{11}(\nu_T)}$$

en los uit deze betrekking en de beide links staande der formule (300) de onbekende e op.

Uitkomst:

$$e=\frac{\begin{aligned}\lambda_B^2 F_{12}(\nu_B)\,[F_{11}(\nu_B)-F_{11}(\nu_T)]-\lambda_B[F_{12}^2(\nu_B)-F_{12}^2(\nu_T)]+\\+\{F_{11}(\nu_B)-F_{11}(\nu_T)\}\{F_{22}(\nu_B)-F_{22}(\nu_T)\}]+F_{12}(\nu_B)\{F_{22}(\nu_B)-F_{22}(\nu_T)\}\end{aligned}}{\begin{aligned}\lambda_B^2 F_{11}(\nu_B)\{F_{11}(\nu_B)-F_{11}(\nu_T)\}-2\lambda_B F_{11}(\nu_B)\{F_{12}(\nu_B)-F_{12}(\nu_T)\}+\\+\{F_{12}(\nu_B)-F_{12}(\nu_T)\}^2+F_{11}(\nu_T)\{F_{22}(\nu_B)-F_{22}(\nu_T)\}\end{aligned}} \qquad (301)$$

Men kan e ook in λ_T uitdrukken, en behoeft daartoe in de bovenstaande formule slechts λ_B door λ_T, en tegelijk ν_B door ν_T en ν_T door ν_B te vervangen.

De formule (301) en zijn λ_T bevattend analogon drukken de onbekende uit in de eigenfrequentie's en in de functie λ van *één* der trillingsvormen. Als de deformatie-functie's zóó konden worden gekozen, dat *beide* experimenteel bepaalde trillingsvormen er nauwkeurig mee kunnen worden gereconstrueerd, en als ook de *beide* formules voor e *dezelfde* uitkomst opleveren, bestaat er volledige zekerheid dat de formules zoo nauw als slechts mogelijk is bij het werkelijke systeem zijn aangepast. Is de buiging in de torsieresonantie niet behoorlijk evenredig met de uit de buigingsresonantie afgeleide deformatie z_1, doch kan de torsie in de buigingsresontie wèl door φ_1 worden beschreven — een geval dat zich nogal eens voordoet — zoo gebruike men alléén de formule (301) en niet de overeenkomstige formule, die λ_T bevat. Wordt de trilling van den vleugel — eventueel slechts in betrekkelijk kleine mate — beïnvloed door niet in aanmerking genomen eigenschappen van het systeem, dan kan zich het geval voordoen, dat geen der beide formules voor e bruikbaar blijkt te zijn. Men controleere steeds zooveel mogelijk, of uitkomsten voor e aannemelijk zijn en late e desnoods binnen zekere grenzen onbepaald. Men kan dan de kritische snelheid als functie van e vaststellen en zal vaak vinden, dat de variatie van v_{krit} binnen het gebied, waarin e moet vallen, niet zeer groot is, waardoor de uitkomsten goed bruikbaar blijven.

Wanneer e bekend is, kan men uit de coëfficiënten-determinanten:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} c-F_{11}(\nu_B) & -e\,c+F_{12}(\nu_B)\\ -e\,c+F_{12}(\nu_B) & E_{22}-F_{22}(\nu_B)\end{vmatrix}=0\\
&\text{en}\\
&\begin{vmatrix} c-F_{11}(\nu_T) & -e\,c+F_{12}(\nu_T)\\ -e\,c+F_{12}(\nu_T) & E_{22}-F_{22}(\nu_T)\end{vmatrix}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (302)$$

gemakkelijk de parameters c en E_{22} oplossen. Er moge tot slot op worden gewezen, dat de mate waarin het rolroer de vleugeltrilling wijzigt, vermoedelijk vaak zoo beperkt zal zijn dat c en ec geheel op de in no. 72 vermelde wijze kunnen worden bepaald. Wat E_{22} betreft, houde men in het oog, dat

$$E_{22}=M_\varphi+e^2 c+k_r\varphi_1^2(b_1) \qquad (303)$$

is. Men lette bovendien op den in (122) gebruikten reductiefactor N, die in (294) niet is ingevoerd!

Terugkeerende tot de vergelijkingen (296), moge nu worden nagegaan, waaraan de integralen, die luchtkrachtcoëfficiënten $\bar{a}_{ik}$ bevatten, gelijk worden. Men vindt volgens (281), (282), (283):

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L\bar{a}_{11}z_1^2\,dx=\int m_L k_z z_1^2\,dx\\
&\int m_L\bar{a}_{12}t\,z_1\varphi_1\,dx=\int m_L(k_\varphi-k_\gamma)\,t\,z_1\varphi_1\,dx-\\
&\qquad-\int m_L c_v k_z z_1\varphi_1\,dx-\int m_L c_{dr}k_z z_1\varphi_1\,dx\\
&\int m_L\bar{a}_{13}t\,z_1\,dx=\int m_L k_\gamma t\,z_1\,dx+\\
&\qquad+\int m_L c_{dr}k_z z_1\,dx
\end{aligned}\right\} \qquad (304)$$

[1]) De moeilijker meetbare component der rolroerdraaiing in de eigentrillingen is opzettelijk bij den overgang op (296) en (297) verwijderd en behoeft dus niet bekend te zijn.

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L \bar{a}_{21}\, t\, z_1 \varphi_1\, dx = \int m_L (m_z - n_z)\, t z_1 \varphi_1\, dx - \\
&\quad - \int m_L c_v k_z z_1 \varphi_1\, dx - \int m_L c_{dr} r_z z_1 \varphi_1\, dx \\
&\int m_L \bar{a}_{22}\, t^2 \varphi_1^2\, dx = \\
&\quad = \int m_L (m_\varphi - n_\varphi - m_\gamma + n_\gamma)\, t^2 \varphi_1^2\, dx - \\
&\quad - \int m_L c_v (k_\varphi + m_z - n_z - k_\gamma)\, t \varphi_1^2\, dx - \\
&\quad - \int m_L c_{dr} (r_\varphi - r_\gamma + m_\zeta - n_\zeta)\, t \varphi_1^2\, dx + \\
&\qquad + \int m_L c_{dr} c_v (r_z + k_\zeta)\, \varphi_1^2\, dx + \\
&\quad + \int m_L c_v^2 k_z \varphi_1^2\, dx + \int m_L c_{dr}^2 r_\zeta \varphi_1^2\, dx \\
&\int m_L \bar{a}_{23}\, t^2 \varphi_1\, dx = \int m_L (m_\gamma - n_\gamma)\, t^2 \varphi_1\, dx - \\
&\quad - \int m_L c_v k_\gamma\, t \varphi_1\, dx - \\
&\quad - \int m_L c_{dr} (r_\gamma - m_\zeta + n_\zeta)\, t \varphi_1\, dx - \\
&\quad - \int m_L c_v c_{dr} k_\zeta \varphi_1\, dx - \int m_L c_{dr}^2 r_\zeta \varphi_1\, dx
\end{aligned}\right\} \quad (305)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L \bar{a}_{31}\, t\, z_1\, dx = \\
&\qquad = \int m_L n_z\, t z_1\, dx + \int m_L c_{dr} r_z z_1\, dx \\
&\int m_L \bar{a}_{32}\, t^2 \varphi_1\, dx = \\
&= \int m_L (n_\varphi - n_\gamma)\, t^2 \varphi_1\, dx - \int m_L c_v n_z\, t \varphi_1\, dx + \\
&\qquad + \int m_L c_{dr} (r_\varphi - r_\gamma - n_\zeta)\, t \varphi_1\, dx - \\
&\quad - \int m_L c_v c_{dr} r_z \varphi_1\, dx - \int m_L c_{dr}^2 r_\zeta \varphi_1\, dx \\
&\int m_L \bar{a}_{33}\, t^2\, dx = \int m_L n_\gamma\, t^2\, dx + \\
&\quad + \int m_L c_{dr} (r_\gamma + n_\zeta)\, t\, dx + \int m_L c_{dr}^2 r_\zeta\, dx
\end{aligned}\right\} \quad (306)$$

In deze formules moeten vervolgens de betrekkingen (271) worden ingevoerd, waarna gebruik wordt gemaakt van de navolgende reeds vermelde vereenvoudigingen:

1o. Een functie $F(V)$ van V alléén wordt ontwikkeld in een reeks (92), die na 2 termen wordt afgebroken [1]). Dus

$$F(V) = F(V_o) + V_o F'(V_o) \cdot \frac{t_o - t}{t} \qquad (307)$$

Daartoe wordt een *gemiddelde koorde* t_o volgens in no. 62 gegeven aanwijzingen gekozen.

2o. De grootheid $\eta = \frac{t_r}{t}$ wordt geacht constant te zijn, en gelijk gekozen aan een gemiddelde van de werkelijke waarden van dit quotiënt (bepaald voor een heele serie dwarsdoorsneden) verminderd met ca. 20 %.

Stel nu:

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L z_1^2\, dx = \mu_{11} \\
&\int m_L\, t z_1 \varphi_1\, dx = \mu_{12} \\
&\int m_L c_v z_1 \varphi_1\, dx = \mu_{12}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} z_1 \varphi_1\, dx = \mu_{12}^{\Delta} \\
&\int m_L\, t z_1\, dx = \mu_{13} \\
&\int m_L c_{dr} z_1\, dx = \mu_{13}^{\Delta} \\
&\int m_L\, t^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22} \\
&\int m_L c_v\, t \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{v} \\
&\int m_L c_{dr}\, t \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{\Delta} \\
&\int m_L c_v c_{dr} \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{v\Delta} \\
&\int m_L c_v^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{vv} \\
&\int m_L c_{dr}^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{\Delta\Delta} \\
&\int m_L\, t^2 \varphi_1\, dx = \mu_{23} \\
&\int m_L c_v\, t \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{v} \\
&\int m_L c_{dr}\, t \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{\Delta} \\
&\int m_L c_v c_{dr} \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{v\Delta} \\
&\int m_L c_{dr}^2 \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{\Delta\Delta} \\
&\int m_L\, t^2\, dx = \mu_{33} \\
&\int m_L c_{dr}\, t\, dx = \mu_{33}^{\Delta} \\
&\int m_L c_{dr}^2\, dx = \mu_{33}^{\Delta\Delta}
\end{aligned}\right] \quad (308)$$

en na invoering van de afkorting:

$$\frac{t_o - t}{t} = \xi\,, \qquad (309)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L \xi z_1^2\, dx = \lambda_{11} \\
&\int m_L \xi\, t z_1 \varphi_1\, dx = \lambda_{12} \\
&\int m_L c_v \xi z_1 \varphi_1\, dx = \lambda_{12}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} \xi z_1 \varphi_1\, dx = \lambda_{12}^{\Delta} \\
&\int m_L \xi\, t z_1\, dx = \lambda_{13} \\
&\int m_L c_{dr} \xi z_1\, dx = \lambda_{13}^{\Delta} \\
&\int m_L \xi\, t^2 \varphi_1^2\, dx = \lambda_{22} \\
&\int m_L c_v \xi\, t \varphi_1^2\, dx = \lambda_{22}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} \xi\, t \varphi_1^2\, dx = \lambda_{22}^{\Delta}
\end{aligned}\right] \quad (310)$$

---

1) De derde term luidt: $\frac{1}{2} V_o^2 F''(V_o) \cdot \left(\frac{t_o - t}{t}\right)^2$

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L c_v c_{dr} \xi \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{22}^{v\Delta} \\
&\int m_L c_v^2 \xi \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{22}^{vv} \\
&\int m_L c_{dr}^2 \xi \varphi_1^2 \, dx = \lambda_{22}^{\Delta\Delta} \\
&\int m_L \xi t^2 \varphi_1 \, dx = \lambda_{33} \\
&\int m_L c_v \xi t \varphi_1 \, dx = \lambda_{23}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} \xi t \varphi_1 \, dx = \lambda_{23}^{\Delta} \\
&\int m_L c_v c_{dr} \xi \varphi_1 \, dx = \lambda_{23}^{v\Delta} \\
&\int m_L c_{dr}^2 \xi \varphi_1 \, dx = \lambda_{23}^{\Delta\Delta} \\
&\int m_L \xi t^2 \, dx = \lambda_{33} \\
&\int m_L c_{dr} \xi t \, dx = \lambda_{33}^{\Delta} \\
&\int m_L c_{dr}^2 \xi \, dx = \lambda_{33}^{\Delta\Delta}
\end{aligned}\right] \qquad (310)$$

De door (308) en (310) gedefiniëerde 40 constanten kunnen alle in principe gemakkelijk door numerieke of grafische integratie worden bepaald. Het spreekt vanzelf, dat men in de praktijk een aantal geschikt gekozene werkelijk zal berekenen, waarna vele andere eventueel kunnen worden geschat.

Heel vaak zal men althans $\frac{c_{dr}}{t}$ *als een niet van x afhankelijke c o n s t a n t e kunnen behandelen, in welk geval a l l e c o n s t a n t e n die de Δ in de „indiceerende exponent" bevatten exact op andere kunnen worden teruggevoerd. B.v.*

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{12}^{\Delta} &= \frac{c_{dr}}{t} \int m_L t z_1 \varphi_1 \, dx = \frac{c_{dr}}{t} \mu_{12} \\
\mu_{22}^{v\Delta} &= \frac{c_{dr}}{t} \int m_L c_v t \varphi_1^2 \, dx = \frac{c_{dr}}{t} \mu_{22}^{v}
\end{aligned}\right\} \qquad (311)$$

In dat geval wordt het aantal integratie's tot d e h e l f t gereduceerd.

Wanneer de *tapschheid* van den vleugel slechts gering is, zal men in (307) de tweede term rechts kunnen weglaten, waardoor de berekening van alle λ's vervalt. (Men rekent met $\xi \equiv 0$.) Is het noodig een derde term aan (307) toe te voegen, dan moeten de afkortingen (308) en (310) nog met een derde stel, dat ξ^2 bevat, worden aangevuld.

De luchtkrachtcoëfficiënten $k_z, k_\varphi \ldots\ldots n_\zeta$ bevatten de navolgende functie's van V:

$$\left.\begin{aligned}
&V \equiv V \\
&V^2 \equiv V^2 \\
&4 i \bar{P} V \equiv 4 i (A - iB) V = p_1 + i p_1' \quad \text{(zie (131))} \\
&4 \bar{P} V^2 \equiv 4 (A - iB) V^2 = p_2 - i p_2' \quad \text{(zie (131))}
\end{aligned}\right\} \qquad (312)$$

Refereerend aan (307) komen dientengevolge de navolgende reeksen voor [1])

$$\left.\begin{aligned}
&V = V_o + V_o \frac{t_o - t}{t} = V_o (1 + \xi) \quad \text{(zie (309))} \\
&V^2 = V_o^2 + V_o . 2 V_o . \frac{t_o - t}{t} = V_o^2 (1 + 2\xi) \\
&4 i \bar{P} V = p_{1o} + p_{11} \xi + i p_{1o}' + i p_{11}' \xi \quad \text{(zie (137))} \\
&4 \bar{P} V^2 = p_{2o} + p_{21} \xi - i p_{2o}' - i p_{21}' \xi
\end{aligned}\right\} \qquad (313)$$

Men heeft, volgens (271), de *onderstreepte* termen weglatend:

$$\begin{aligned}
k_z &= -(p_{1o} + i p_{1o}') - (p_{11} + i p_{11}') \xi \\
k_\varphi - k_\gamma &= \left(1 - \frac{\Phi_1}{\pi}\right) [(p_{2o} - i p_{2o}') + \\
&\qquad + (p_{21} - i p_{21}') \xi] + \\
&\qquad + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{\Phi_2}{4\pi}\right) [(p_{1o} + i p_{1o}') + \\
&\quad + (p_{11} + i p_{11}') \xi] + i \left(1 - \frac{\Phi_3}{\pi}\right) V_o (1 + \xi) \\
k_\xi^+ &= -\frac{\Phi_4}{\pi} [p_{1o} + i p_{1o}' + (p_{11} + i p_{11}') \xi] \\
k_\xi^- &= -2 \frac{\Phi_{13}}{\pi} [(p_{2o} - i p_{2o}') + \\
&\quad + (p_{21} - i p_{21}') \xi] - \frac{\Phi_1}{\pi} [p_{1o} + i p_{1o}' + \\
&\quad + (p_{11} + i p_{11}') \xi] - 2 i \frac{\Phi_{14}}{\pi} V_o (1 + \xi) \\
k_\gamma &= \frac{\Phi_1}{\pi} [p_{2o} - i p_{2o}' + (p_{21} - i p_{21}') \xi] + \\
&\quad + \frac{\Phi_2}{\pi} [p_{1o} + i p_{1o}' + (p_{11} + i p_{11}') \xi] + \\
&\qquad + i \frac{\Phi_3}{\pi} V_o (1 + \xi) \\
m_z - n_z &= -\frac{\Phi_8}{4\pi} [p_{1o} + i p_{1o}' + \\
&\qquad + (p_{11} + i p_{11}') \xi] \\
r_z &= -\frac{\Phi_{31}}{\pi} [p_{1o} + i p_{1o}' + (p_{11} + i p_{11}') \xi] \\
m_\varphi - n_\varphi - m_\gamma + n_\gamma &= \left(\frac{\Phi_8}{4\pi} - \frac{\Phi_1 \Phi_8}{4\pi^2}\right) [p_{2o} - i p_{2o}' + \\
&\quad + (p_{21} - i p_{21}') \xi] + \left(\frac{\Phi_8}{8\pi} - \frac{\Phi_2 \Phi_8}{16\pi^2}\right) [p_{1o} + i p_{1o}' + \\
&\quad + (p_{11} + i p_{11}') \xi] + \left(\frac{\Phi_5}{\pi} - \frac{\Phi_{10}}{\pi^2}\right) V_o^2 (1 + 2\xi) + \\
&\qquad + \left(\frac{\Phi_9}{4\pi} + \frac{\Phi_6}{4\pi} - \tfrac{1}{2} - \frac{\Phi_{11}}{4\pi^2}\right) i V_o (1 + \xi)
\end{aligned} \qquad (314)$$

---

[1]) Gebruikt men reeksen, die de *drie* eerste termen der Taylor-ontwikkelingen bevatten, dan komt er

$$\left.\begin{aligned}
&V = V_o (1 + \xi) \\
&V^2 = V_o^2 (1 + 2\xi + \xi^2) \\
&4 i \bar{P} V = p_{1o} + p_{11} \xi + p_{12} \xi^2 + \\
&\qquad + i (p_{1o}' + p_{11}' \xi + p_{12}' \xi^2) \\
&4 \bar{P} V = p_{2o} + p_{21} \xi + p_{22} \xi^2 + \\
&\qquad + i (p_{2o}' + p_{21}' \xi + p_{22}' \xi^2)
\end{aligned}\right\} \qquad (313a)$$

De functie's p_{12}, p'_{12}, p_{22} en p'_{22} zijn in tabel 2 naast de andere mede opgenomen.

$$k_\varphi + m_z - n_z - k_\gamma = \left(1-\frac{\Phi_1}{\pi}\right)[p_{20} - i p_{20}' + (p_{21} - i p_{21}')\xi] + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Phi_8}{4\pi} - \frac{\Phi_2}{4\pi}\right)[p_{10} + i p_{10}' + (p_{11} + i p_{11}')\xi] + i\left(1-\frac{\Phi_3}{\pi}\right)V_o(1+\xi)$$

$$r_\varphi - r_\gamma + m_\xi^+ - n_\xi^+ = \left(\frac{\Phi_{31}}{\pi} - \frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}\right)[p_{20}-ip_{20}' + (p_{21}-ip_{21}')\xi] + \left(\frac{\Phi_{31}}{2\pi} - \frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] - \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{32}}{\pi} - \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} + \frac{\Phi_5}{\pi} - \frac{\Phi_{10}}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi)$$

$$r_\varphi - r_\gamma + m_\xi^- - n_\xi^- = \left(\frac{\Phi_{31}}{\pi} - \frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2} - \frac{\Phi_{13}\Phi_8}{2\pi^2}\right)[p_{20} - ip_{20}' + (p_{21}-ip_{21}')\xi] + \left(\frac{\Phi_{31}}{2\pi} - \frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}' + (p_{11}+ip_{11}')\xi] + \left(\frac{2\Phi_{15}}{\pi} - \frac{2\Phi_{18}}{\pi^2} + \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}\right)V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{32}}{\pi} - \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} + \frac{\Phi_5}{\pi} - \frac{\Phi_{19}}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi)$$

$$r_z + k_\xi^+ = -\left(\frac{\Phi_{31}}{\pi} + \frac{\Phi_1}{\pi}\right)[p_{10} + ip_{10}' + (p_{11}+ip_{11}')\xi]$$

$$r_z + k_\xi^- = -\left(\frac{\Phi_{31}}{\pi}+\frac{\Phi_1}{\pi}\right)[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] - \frac{2\Phi_{13}}{\pi}[p_{20}-ip_{20}'+(p_{21}-ip_{21}')\xi] - i\frac{2\Phi_{14}}{\pi}V_o(1+\xi)$$

$$r_\xi^+ = -\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] - i\frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}V_o(1+\xi)$$

$$r_\xi^- = -\frac{2\Phi_{13}\Phi_{31}}{\pi^2}[p_{20}-ip_{20}'+(p_{21}-ip_{21}')\xi] - \frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] - i\frac{2\Phi_{16}}{\pi^2}V_o(1+\xi) - 4\frac{2\ln\eta_s + \Phi_{21}}{\pi^2}V_o^2(1+2\xi)$$

$$m_\gamma - n_\gamma = \frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}[p_{20}-ip_{20}'+(p_{21}-ip_{21}')\xi] + \frac{\Phi_2\Phi_8}{16\pi^2}[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] + \left(\frac{\Phi_{10}}{\pi^2} - \frac{\Phi_5}{\pi}\right)V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{11}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_6}{4\pi}\right)V_o(1+\xi) \qquad (314)$$

$$r_\gamma - m_\xi^+ + n_\xi^+ = \frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}[p_{20}-ip_{20}'+(p_{21}-ip_{21}')\xi] + \left(\frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2}+\frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] + \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{\Phi_5}{\pi} + \frac{\Phi_{10}}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi)$$

$$r_\gamma - m_\xi^- + n_\xi^- = \left(\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2} + \frac{\Phi_8\Phi_{13}}{2\pi^2}\right)[p_{20} - ip_{20}' + (p_{21}-ip_{21}')\xi] + \left(\frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2} + \frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] + \left(\frac{2\Phi_{18}}{\pi^2} - \frac{2\Phi_{15}}{\pi} + \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}\right)V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{2\Phi_5}{\pi} + \frac{\Phi_{19}}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi)$$

$$n_z = \frac{\Phi_8}{4\pi}[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi]$$

$$n_\varphi - n_\gamma = \left(\frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2} - \frac{\Phi_8}{4\pi}\right)[p_{20}-ip_{20}'+(p_{21}-ip_{21}')\xi] + \left(\frac{\Phi_2\Phi_8}{16\pi^2} - \frac{\Phi_8}{8\pi}\right)[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] + \frac{\Phi_{10}}{\pi^2}V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{11}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_9}{4\pi}\right)V_o(1+\xi)$$

$$r_\varphi - r_\gamma - n_\xi^+ = \left(\frac{\Phi_{31}}{\pi} - \frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}\right)[p_{20}-ip_{20}'+(p_{21}-ip_{21}')\xi] + \left(\frac{\Phi_{31}}{2\pi} - \frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] - \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{32}}{\pi} - \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{\Phi_{10}}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi)$$

$$r_\varphi - r_\gamma - n_\xi^- = \left(\frac{\Phi_{31}}{\pi} - \frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2} - \frac{\Phi_8\Phi_{13}}{2\pi^2}\right)[p_{20}-ip_{20}'+(p_{21}-ip_{21}')\xi] + \left(\frac{\Phi_{31}}{2\pi} - \frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}'+(p_{11}+ip_{11}')\xi] - \left(\frac{2\Phi_{18}}{\pi^2} + \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}\right)V_o^2(1+2\xi) + i\left(\frac{\Phi_{32}}{\pi} - \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{\Phi_{19}}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi) \qquad (314)$$

$$
\left.\begin{aligned}
+r_\gamma \quad n_\xi^{+} &= +\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}[p_{20}-ip_{20}'+\\
&\quad +(p_{21}-ip_{21}')\xi]+\\
&\quad +\left(\frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}+\frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}'+\\
&\quad +(p_{11}+ip_{11}')\xi]+\frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}V_o^2(1+2\xi)+\\
&\quad +i\left(\frac{\Phi_{10}}{\pi^2}+\frac{\Phi_{36}'}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi)\\
r_\gamma + n_\xi^{-} &= \left(\frac{\Phi_8\Phi_{13}}{2\pi^2}+\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}\right)[p_{20}-ip_{20}'+\\
&\quad +(p_{21}-ip_{21}')\xi]+\\
&\quad +\left(\frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}+\frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2}\right)[p_{10}+ip_{10}'+\\
&\quad +(p_{11}+ip_{11}')\xi]+\\
&\quad +\left(\frac{2\Phi_{18}}{\pi^2}+\frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}\right)V_o^2(1+2\xi)+\\
&\quad +i\left(\frac{\Phi_{19}}{\pi^2}+\frac{\Phi_{36}}{\pi^2}\right)V_o(1+\xi)\\
n_\gamma &= -\frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}[p_{20}-ip_{20}'+\\
&\quad +(p_{21}-ip_{21}')\xi]-\frac{\Phi_2\Phi_8}{16\pi^2}[p_{10}+ip_{10}'+\\
&\quad +(p_{11}+ip_{11}')\xi]-\frac{\Phi_{10}}{\pi^2}V_o^2(1+2\xi)-\\
&\quad -i\frac{\Phi_{11}}{4\pi^2}V_o(1+\xi)
\end{aligned}\right] \quad (314)
$$

Het ligt voor de hand, uit deze vrij lange uitdrukkingen die grootheden, die functie's van $\eta = \frac{t_r}{t}$ zijn, op doelmatige wijze samen te vatten tot een stelsel *te tabelleeren* functie's, die direct in de numerieke uitwerking kunnen worden ingevoerd en deze zooveel mogelijk bekorten. Deze functie's, die door te nummeren symbolen R zullen worden voorgesteld, kunnen op geschikte wijze als volgt uit de Küssner'sche Φ-functie's worden afgeleid:

$$
\left.\begin{aligned}
R_1 &= 1-\frac{\Phi_1}{\pi}\\
R_2 &= \tfrac{1}{2}-\frac{\Phi_2}{4\pi}\\
R_3 &= 1-\frac{\Phi_3}{\pi}\\
R_4{}^{+} &\equiv 0\\
R_4{}^{-} &= \frac{2\Phi_{13}}{\pi}\\
R_5{}^{+} &= \frac{\Phi_1}{\pi}\\
R_5{}^{-} &= \frac{\Phi_1}{\pi}\\
R_6{}^{+} &\equiv 0\\
R_6{}^{-} &= \frac{2\Phi_{14}}{\pi}\\
R_7 &= \frac{\Phi_1}{\pi}\\
R_8 &= \frac{\Phi_5}{\pi}\\
R_9 &= \frac{\Phi_3}{\pi}\\
R_{10} &= \frac{\Phi_8}{4\pi}\\
R_{11} &= \frac{\Phi_{31}'}{\pi}\\
R_{12} &= \frac{\Phi_8}{4\pi}-\frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\\
R_{13} &= \frac{\Phi_8}{8\pi}-\frac{\Phi_2\Phi_8}{16\pi^2}\\
R_{14} &= \frac{\Phi_5}{\pi}-\frac{\Phi_{10}}{\pi^2}\\
R_{15} &= \frac{\Phi_9}{4\pi}+\frac{\Phi_6}{4\pi}-\tfrac{1}{2}-\frac{\Phi_{11}}{4\pi^2}\\
R_{16} &= \tfrac{1}{2}-\frac{\Phi_8}{4\pi}-\frac{\Phi_2}{4\pi}\\
R_{17}{}^{+} &= \frac{\Phi_{31}}{\pi}-\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}\\
R_{17}{}^{-} &= \frac{\Phi_{31}}{\pi}-\frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}-\frac{\Phi_8\Phi_{13}}{2\pi^2}\\
R_{18}{}^{+} &= \frac{\Phi_{31}}{2\pi}-\frac{\Phi_2\Phi_{31}}{4\pi^2}-\frac{\Phi_1\Phi_8}{4\pi^2}\\
R_{18}{}^{-} &\equiv R_{18}{}^{+}\\
R_{19}{}^{+} &= -\frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}\\
R_{19}{}^{-} &= \frac{2\Phi_{15}}{\pi}-\frac{2\Phi_{18}}{\pi^2}-\frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}\\
R_{20}{}^{+} &= \frac{\Phi_{32}}{\pi}-\frac{\Phi_{36}}{\pi^2}+\frac{\Phi_5}{\pi}-\frac{\Phi_{10}}{\pi^2}\\
R_{20}{}^{-} &= \frac{\Phi_{32}}{\pi}-\frac{\Phi_{36}}{\pi^2}+\frac{\Phi_5}{\pi}-\frac{\Phi_{10}}{\pi^2}\\
R_{21}{}^{+} &= \frac{\Phi_{31}}{\pi}+\frac{\Phi_1}{\pi}\\
R_{21}{}^{-} &\equiv R_{21}{}^{+}\\
R_{22}{}^{+} &= \frac{\Phi_1\Phi_{31}}{\pi^2}\\
R_{22}{}^{-} &\equiv R_{22}{}^{+}\\
R_{23}{}^{+} &\equiv 0\\
R_{23}{}^{-} &= \frac{2\Phi_{13}\Phi_{31}}{\pi^2}\\
R_{24}{}^{+} &\equiv 0\\
R_{24}{}^{-} &= \frac{4\Phi_{21}}{\pi^2}+\frac{8\ln\eta_s}{\pi^2}\ (\text{N.B.!})\\
R_{25}{}^{+} &= \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2}\\
R_{25}{}^{-} &= \frac{2\Phi_{16}}{\pi^2}
\end{aligned}\right] \quad (315)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
R_{26} &= \frac{\Phi_1 \Phi_8}{4\pi^2} \\
R_{27} &= \frac{\Phi_2 \Phi_8}{16\pi^2} \\
R_{28} &= \frac{\Phi_{11}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_6}{4\pi} \\
R_{29}^{+} &= \frac{\Phi_1 \Phi_{31}}{\pi^2} \\
R_{29}^{-} &= \frac{\Phi_1 \Phi_{31}}{\pi^2} + \frac{\Phi_8 \Phi_{13}}{2\pi^2} \\
R_{30}^{+} &= \frac{\Phi_2 \Phi_{31}}{4\pi^2} + \frac{\Phi_1 \Phi_8}{4\pi^2} \\
R_{30}^{-} &\equiv R_{30}^{+} \\
R_{31}^{+} &= \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2} \\
R_{31}^{-} &= \frac{2\Phi_{18}}{\pi^2} - \frac{2\Phi_{15}}{\pi} + \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2} \\
R_{32}^{+} &= \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{\Phi_5}{\pi} + \frac{\Phi_{10}}{\pi^2} \\
R_{32}^{-} &= \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{2\Phi_5}{\pi} + \frac{\Phi_{19}}{\pi^2} \\
R_{33} &= \frac{\Phi_{10}}{\pi^2} \\
R_{34} &= \frac{\Phi_{11}}{4\pi^2} - \frac{\Phi_9}{4\pi} \\
R_{35}^{+} &= \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2} \\
R_{35}^{-} &= \frac{2\Phi_{18}}{\pi^2} + \frac{2\Phi_{35}}{\pi^2} \\
R_{36}^{+} &= \frac{\Phi_{32}}{\pi} - \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{\Phi_{10}}{\pi^2} \\
R_{36}^{-} &= \frac{\Phi_{32}}{\pi} - \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} - \frac{\Phi_{19}}{\pi^2} \\
R_{37}^{+} &= \frac{\Phi_{10}}{\pi^2} + \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} \\
R_{37}^{-} &= \frac{\Phi_{19}}{\pi^2} + \frac{\Phi_{36}}{\pi^2} \\
R_{38} &= \frac{\Phi_{11}}{4\pi^2} \\
R_{39} &= \tfrac{1}{4} - \frac{\Phi_4}{4\pi} \\
R_{40} &= \frac{\Phi_4}{4\pi} \\
R_{41} &= \frac{3}{32} - \frac{\Phi_7}{8\pi} + \frac{\Phi_{12}}{16\pi^2} \\
R_{42} &= \frac{\Phi_6}{4\pi} - \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2} \\
R_{43} &= \frac{\Phi_{17}}{\pi^2} \\
R_{44} &= \frac{\Phi_7}{16\pi} - \frac{\Phi_{12}}{16\pi^2} \\
R_{45} &= \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2} - \frac{\Phi_6}{8\pi} \\
R_{46} &= \frac{\Phi_{12}}{16\pi^2} \\
R_{47} &= \frac{\Phi_{37}}{2\pi^2}
\end{aligned}
\right\} \quad (315)
$$

De functie's R_{39} t/m R_{47} zijn toegevoegd ten behoeve van den overgang der vroeger afgeleide formules (292) op (293). Er wordt de aandacht op gevestigd, dat de functie R_{24}^{-}, behalve van η, ook van η_s afhangt. Aangenomen wordt, dat η_s als een (niet van x afhankelijke) *constante* kan worden behandeld, hetgeen overigens altijd het geval is. *Alle 47 + 19 functie's R zijn, om de numerieke uitwerking zooveel als slechts mogelijk is te vergemakkelijken, in tabel 2 in getallenvorm gegeven.*

Er wordt op gewezen, dat de overigens tamelijk willekeurige *indiceering* der functie's R zóó is gekozen, dat in alle volgende formules de indices *+ en — kunnen worden weggelaten.*

Combineert men de formules (304), (305), (306), (308), (310), (314) en (315), dan ontstaan formules, die de luchtkrachtintegralen *direct* in de getabelleerde functie's R en p, onder scheiding in reëele en imaginaire deelen, uitdrukken. Deze uitdrukkingen kunnen in de coëfficiëntendeterminant van de vergelijkingen (296) worden ingevoerd. Het resultaat zal onder vermijding van tusschenstappen meteen worden opgeschreven. Men stelle, om direct tot den meest algemeenen vorm van deze determinant te komen, eerst

$$
\left.
\begin{aligned}
\overline{c} &= c(1 + i\alpha_B) \\
\overline{E}_{22} &= E_{22}(1 + i\alpha_T) \\
\overline{k}_r &= k_r(1 + i\alpha_r)
\end{aligned}
\right\} \quad (316)
$$

waaraan eventueel $\overline{E}_{23} = E_{23}\,(1 + i\alpha_r)$ zou kunnen worden toegevoegd. Echter is E_{23} in den regel al klein, waardoor het product $\alpha_r E_{23}$ geheel onbeteekenend zal worden, zoodat voor $\overline{E}_{23}$ gevoegelijk $E_{23} = k_r \varphi_1(b_1)$ kan worden geschreven.

Schrijft men de coëfficiëntendeterminant van (296) in den gebruikelijken vorm

$$
\begin{vmatrix}
A_{11}+iA_{11}'; & A_{12}+iA_{12}'; & A_{13}+iA_{13}' \\
A_{21}+iA_{21}'; & A_{22}+iA_{22}'; & A_{23}+iA_{23}' \\
A_{31}+iA_{31}'; & A_{32}+iA_{32}'; & A_{33}+iA_{33}'
\end{vmatrix} = 0 \quad (317)
$$

en stelt men, meteen aanpassend bij de berekening der *kritische* trillingen, dat de frequentie ν *reëel* is, dan vindt men, alle door de formules (304) t/m (315) gedefiniëerde ontwikkelingen inschakelend, tenslotte *de in tabel 3 samengevatte uitkomsten.*

Met deze formules is het gestelde probleem tot de grens der numerieke uitwerking gevoerd. Men realiseere zich, dat de formules in den meest algemeenen vorm zijn ontwikkeld en dat de numerieke doorvoering der berekening niet zóó bewerkelijk is, als de lengte der formules op het eerste gezicht doet verwachten.

Tot besluit volgt hieronder de ontwikkeling van de determinant-vergelijking (317) tot 2 reëele vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} &A_{11}(A_{22}A_{33}-A_{22}'A_{33}'-A_{23}A_{32}+A_{23}'A_{32}')-A_{11}'(A_{22}A_{33}'+A_{22}'A_{33}-A_{23}A_{32}'-A_{23}'A_{32})-\\ &-A_{12}(A_{21}A_{33}-A_{21}'A_{33}'-A_{23}A_{31}+A_{23}'A_{31}')+A_{12}'(A_{21}A_{33}'+A_{21}'A_{33}-A_{23}A_{31}'-A_{23}'A_{31})+\\ &+A_{13}(A_{21}A_{32}-A_{21}'A_{32}'-A_{22}A_{31}+A_{22}'A_{31}')-A_{13}'(A_{21}A_{32}'+A_{21}'A_{32}-A_{22}A_{31}'-A_{22}'A_{31})=0 \end{aligned}\right\} \quad (319)$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{11}(A_{22}A_{33}'+A_{22}'A_{33}-A_{23}A_{32}'-A_{23}'A_{32})+A_{11}'(A_{22}A_{33}-A_{22}'A_{33}'-A_{32}A_{23}+A_{23}'A_{32}')-\\ &-A_{12}(A_{21}A_{33}'+A_{21}'A_{33}-A_{23}A_{31}'-A_{23}'A_{31})-A_{12}'(A_{21}A_{33}-A_{21}'A_{33}'-A_{23}A_{31}+A_{23}'A_{31}')+\\ &+A_{13}(A_{21}A_{32}'+A_{21}'A_{32}-A_{22}A_{31}'-A_{22}'A_{31})+A_{13}'(A_{21}A_{32}-A_{21}'A_{32}'-A_{22}A_{31}+A_{22}'A_{31}')=0 \end{aligned}\right\} \quad (320)$$

Het oplossen van deze twee simultane vergelijkingen voor V_o en ν is de meest tijdroovende bewerking, die de berekening van de kritische snelheid eischt.

12. Het vleugel-rolroer-systeem met toegelaten vleugeldeformatie's:

$$z = q_1 z_1 + q_2 z_2; \quad \varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2;$$

in den symmetrischen trillingsvorm.

12.1. Inleiding.

Het spreekt vanzelf, dat de rekenmethode, die in dit nummer zal worden ontwikkeld, evenals zulks bij den vleugel *zonder* rolroer het geval was (vergelijk no. 72 en no. 73), in het algemeen bewerkelijker wordt dan de in het voorgaande nummer beschrevene. Daartegenover staan enkele reeds bij herhaling vermelde, soms meer, soms minder belangrijke voordeelen. In het gegeven geval, dat bovendien een medespelend rolroer aanwezig is, kan hieraan nog het voordeel worden toegevoegd, dat het mogelijk wordt de stabiliteit te onderzoeken van de combinatie van torsietrillingen met buigingstrillingen in den trillingsvorm van den eersten boventoon. Voor *dit* onderzoek is de in no. 11 beschreven rekenwijze gewoonlijk niet geschikt.

12.2. Uitwerking.

De grondvergelijkingen voor de berekening worden gevormd door de Lagrange-vergelijkingen (258), (259) en (260), met door (285), (286) en (287) gegeven arbeidscoëfficiënten:

Stel

$$q_1 = \bar{q}_{1o} e^{i\nu\tau} \quad q_2 = \bar{q}_{2o} e^{i\nu\tau} \quad \gamma_r = \bar{\gamma}_{ro} e^{i\nu\tau} \quad (321)$$

en

$$\left.\begin{aligned} &\int(-m_{13}z_1 + m_{23}C_1\varphi_1)\,dx = u_{13} \\ &\qquad\qquad k_r C_1 \varphi_1(b_1) = w_{13} \\ &\int(-m_{13}z_2 + m_{23}C_2\varphi_2)\,dx = u_{23} \\ &\qquad\qquad k_r C_2 \varphi_2(b_1) = w_{23} \\ &\int m_{33}\,dx = u_{33} \qquad k_r = w_{33} \end{aligned}\right\} \quad (322)$$

dan luiden de vergelijkingen voor de *standtrilling* van het systeem, de luchtkrachten dus weglatend (behoudens de door (293) gegeven massatoeslagen die geacht worden in rekening te zijn gebracht [1])) en demping verwaarloozend (ν reëel):

$$\left.\begin{aligned} &\bar{q}_{1o}(W_{11}-\nu^2 U_{11}) + \bar{q}_{2o}(W_{12}-\nu^2 U_{12}) + \\ &\qquad + \bar{\gamma}_{ro}(-w_{13}-\nu^2 u_{13}) = 0 \\ &\bar{q}_{1o}(W_{21}-\nu^2 U_{21}) + \bar{q}_{2o}(W_{22}-\nu^2 U_{22}) + \\ &\qquad + \bar{\gamma}_{ro}(-w_{23}-\nu^2 u_{23}) = 0 \\ &\bar{q}_{1o}(-w_{13}-\nu^2 u_{13}) + \bar{q}_{2o}(-w_{23}-\nu^2 u_{23}) + \\ &\qquad + \bar{\gamma}_{ro}(w_{33}-\nu^2 u_{33}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (323)$$

De deformatie-componenten worden in overeenstemming gekozen met twee eigentrillingsvormen van den vleugel. Noteert men de bijbehoorende eigenfrequentie's ν_1 en ν_2, dan moeten de vergelijkingen (323) worden bevredigd door

$$\bar{q}_{1o} = 1 \quad \bar{q}_{2o} = 0 \quad \bar{\gamma}_{ro} = (\bar{\gamma}_{ro})_1 \quad \nu = \nu_1 \quad (324)$$

en door

$$\bar{q}_{1o} = 0 \quad \bar{q}_{2o} = 1 \quad \bar{\gamma}_{ro} = (\bar{\gamma}_{ro})_2 \quad \nu = \nu_2 \quad (325)$$

Los uit de 3e vergelijking (302) $\bar{\gamma}_{ro}$ op:

$$\bar{\gamma}_{ro} = \frac{w_{13}+\nu^2 u_{13}}{w_{33}-\nu^2 u_{33}}\bar{q}_{1o} + \frac{w_{23}+\nu^2 u_{23}}{w_{33}-\nu^2 u_{33}}\bar{q}_{2o}$$

Substitueer dit in de twee eerste:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{q}_{1o}\left[W_{11}-\nu^2 U_{11} - \frac{(w_{13}+\nu^2 u_{13})^2}{w_{33}-\nu^2 u_{33}}\right] + \\ &+\bar{q}_{2o}\left[W_{12}-\nu^2 U_{12} - \right. \\ &\qquad \left. -\frac{(w_{13}+\nu^2 u_{13})(w_{23}+\nu^2 u_{23})}{w_{33}-\nu^2 u_{33}}\right] = 0 \\ &\bar{q}_{1o}\left[W_{21}-\nu^2 U_{21} - \right. \\ &\qquad \left. -\frac{(w_{13}+\nu^2 u_{13})(w_{23}+\nu^2 u_{23})}{w_{33}-\nu^2 u_{33}}\right] + \\ &+\bar{q}_{2o}\left[W_{22}-\nu^2 U_{22} - \frac{(w_{23}+\nu^2 u_{23})^2}{w_{33}-\nu^2 u_{33}}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (326)$$

Ook aan deze vergelijkingen moeten de combinatie's (324) en (325) voldoen.

Substitutie van (324) leert, dat:

$$\left.\begin{aligned} &W_{11}-\nu_1^2 U_{11} - \frac{(w_{13}+\nu_1^2 u_{13})^2}{w_{33}-\nu_1^2 u_{33}} = 0 \\ \text{en } &W_{21}-\nu_1^2 U_{21} - \\ &\qquad -\frac{(w_{13}+\nu_1^2 u_{13})(w_{23}+\nu_1^2 u_{23})}{w_{33}-\nu_1^2 u_{33}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (327)$$

moet zijn, en substitutie van (325), dat:

$$\left.\begin{aligned} &W_{22}-\nu_2^2 U_{22} - \frac{(w_{23}+\nu_2^2 u_{23})^2}{w_{33}-\nu_2^2 u_{33}} = 0 \\ \text{en } &W_{21}-\nu_2^2 U_{21} - \\ &\qquad -\frac{(w_{13}+\nu_2^2 u_{13})(w_{23}+\nu_2^2 u_{23})}{w_{33}-\nu_2^2 u_{33}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (328)$$

moet zijn. Dit zijn *vier* vergelijkingen, waaruit men W_{11}, $W_{12} = W_{21}$, $U_{12} = U_{21}$ en W_{22} kan oplos-

---

1) waarbij de luchtdichtheid, waarmede m_L evenredig is (zie (47)), natuurlijk gelijk genomen wordt aan de dichtheid van de lucht, waarin de standtrilling plaats vindt, d.i. gelijk aan de normale zeeniveau-luchtdichtheid $\left(\frac{\frac{1}{8}\,\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}\right)$.

sen. Ter contrôle kan men $U_{12} = U_{21}$ *tevens* met de formule (256) *berekenen.* [1])

De oplossingen, die men voor W_{11}, $W_{12} = W_{21}$, $U_{12} = U_{21}$ en W_{22} vindt, luiden:

$$\left.\begin{aligned}
W_{11} &= \nu_1^2\, U_{11} + \frac{(w_{13} + \nu_1^2 u_{13})^2}{w_{33} - \nu_1^2 u_{33}} \\
W_{12} &= \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\, \frac{(w_{13} + \nu_1^2 u_{13})(w_{23} + \nu_1^2 u_{23})}{w_{33} - \nu_1^2 u_{33}} - \\
&\quad - \frac{\nu_1^2}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\, \frac{(w_{13} + \nu_2^2 u_{13})(w_{23} + \nu_2^2 u_{23})}{w_{33} - \nu_2^2 u_{33}} = W_{21} \\
W_{22} &= \nu_2^2\, U_{22} + \frac{(w_{23} + \nu_2^2 u_{23})^2}{w_{33} - \nu_2^2 u_{33}} \\
U_{12} &= \frac{1}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\, \frac{(w_{13} + \nu_1^2 u_{13})(w_{23} + \nu_1^2 u_{23})}{w_{33} - \nu_1^2 u_{33}} - \\
&\quad - \frac{1}{\nu_2^2 - \nu_1^2}\, \frac{(w_{13} + \nu_2^2 u_{13})(w_{23} + \nu_2^2 u_{23})}{w_{33} - \nu_2^2 u_{33}} = U_{21}
\end{aligned}\right\} \quad (329)$$

Ditmaal worden U_{12} en W_{12} *niet nul,* zooals vroeger het geval was. Dit komt natuurlijk doordat de gekozen coördinaten — omdat de rolroeruitslag als een op zichzelf staande variabele is toegevoegd — geen *normaalcoördinaten* van den vleugel in stilstaande lucht zijn. Het voordeel, dat de stijfheidsparameters W_{11}, W_{22} en W_{12} zonder eenige moeite met behulp van de *eigen-frequentie's* kunnen worden berekend, blijft echter, zooals hierboven werd aangetoond, behouden [2]). Met een elastische as heeft men niets te maken.

Het vermoeden ligt voor de hand, dat U_{12} en W_{12} wel niet nul worden, maar toch *klein* zullen blijven. Quadraten en onderlinge producten van deze parameters zal men derhalve vaak kunnen verwaarloozen, wellicht zelfs deze grootheden zèlf.

Het is, wat de uitwerking van de vergelijkingen (323) betreft, niet noodig aan het bovenstaande nog iets toe te voegen. Blijft over de bewerkelijke uitwerking van de luchtkracht-termen, die ter berekening van de kritische trillingen aan deze vergelijkingen moeten worden toegevoegd. Dit dient te geschieden door vervanging van de nullen in de rechterleden door de uitdrukkingen (285), (286) en (287). Door een zorgvuldige keuze der notatie's kunnen vele formules aan de hand van het onder nummer 11 afgeleide direct worden opgeschreven. Ter vorming van het analogon der formules (308) wordt daarom afgesproken:

- — integralen over massa-coëfficiënten, vermenigvuldigd met deformatiefunctie's z_1, φ_1 met de nummers 1, 2, 3 te *indiceeren.*
- — integralen over massa-coëfficiënten, vermenigvuldigd met „gemengde" producten van deformatiefunctie's (bedoeld zijn producten $z_1 z_2$, $z_1 C_2 \varphi_2$, $z_2 C_1 \varphi_1$, $C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2$) met de nummers 4, 5, 6 te indiceeren.
- — *integralen over massa-coëfficiënten, vermenigvuldigd* met deformatiefunctie's z_2, φ_2 met de nummers 7, 8, 9 te indiceeren.

Men stelle dienovereenkomstig:

$$\left.\begin{aligned}
\int m_L z_1^2\, dx &= \mu_{11} \\
\int m_L z_1 z_2\, dx &= \mu_{44} \\
\int m_L z_2^2\, dx &= \mu_{77}
\end{aligned}\right\} \quad (330)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int m_L t z_1 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{12} \\
\int m_L c_v z_1 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{12}^{v} \\
\int m_L c_{dr} z_1 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{12}^{d}, \\
\int m_L t z_1 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{45} \\
\int m_L c_v z_1 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{45}^{v} \\
\int m_L c_{dr} z_1 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{45}^{d} \\
\int m_L t z_2 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{54} \\
\int m_L c_v z_2 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{54}^{v} \\
\int m_L c_{dr} z_2 C_1 \varphi_1\, dx &= \mu_{54}^{d} \\
\int m_L t z_2 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{78} \\
\int m_L c_v z_2 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{78}^{v} \\
\int m_L c_{dr} z_2 C_2 \varphi_2\, dx &= \mu_{78}^{d}
\end{aligned}\right\} \quad (331)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int m_L t z_1\, dx &= \mu_{13} \\
\int m_L c_{dr} z_1\, dx &= \mu_{13}^{d} \\
\int m_L t z_2\, dx &= \mu_{79} \\
\int m_L c_{dr} z_2\, dx &= \mu_{79}^{d}
\end{aligned}\right\} \quad (332)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int m_L t^2 C_1^2 \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22} \\
\int m_L c_v t C_1^2 \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^{v} \\
\int m_L c_{dr} t C_1^2 \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^{d} \\
\int m_L c_v c_{dr} C_1^2 \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^{vd} \\
\int m_L c_v^2 C_1^2 \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^{vv} \\
\int m_L c_{dr}^2 C_1^2 \varphi_1^2\, dx &= \mu_{22}^{dd}
\end{aligned}\right\} \quad (333)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int m_L t^2 C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\, dx &= \mu_{55} \\
\int m_L c_v t C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\, dx &= \mu_{55}^{v} \\
\int m_L c_{dr} t C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\, dx &= \mu_{55}^{d} \\
\int m_L c_v c_{dr} C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2\, dx &= \mu_{55}^{vd}
\end{aligned}\right\} \quad (333)$$

---

[1]) Waarbij men massatoeslagen in aanmerking moet nemen! De te gebruiken formule, waarin deze toeslagen zijn verwerkt, is onder de formules (337) opgenomen.

[2]) Ten overvloede moge er aan worden herinnerd (zie no. 11), dat k_r gemakkelijk door een directe meting kan worden bepaald, waarna w_{13} en w_{23} vastliggen, wanneer door een torsieproef op den vleugel bovendien de afstand b_1 is vastgesteld.

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L c_v^2 C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2 \, d x = \mu_{55}^{vv} \\
&\int m_L c_{dr}^2 C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_1 \, d x = \mu_{55}^{dd} \\
&\int m_L t^2 C_2^2 \varphi_2^2 \, d x = \mu_{88} \\
&\int m_L c_v t \, C_2^2 \varphi_2^2 \, d x = \mu_{88}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} t \, C_2^2 \varphi_2^2 \, d x = \mu_{88}^{d} \\
&\int m_L c_v c_{dr} C_2^2 \varphi_2^2 \, d x = \mu_{88}^{vd} \\
&\int m_L c_v^2 C_2^2 \varphi_2^2 \, d x = \mu_{88}^{vv} \\
&\int m_L c_{dr}^2 C_2^2 \varphi_2^2 \, d x = \mu_{88}^{dd}
\end{aligned}\right\} \quad (333)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L t^2 C_1 \varphi_1 \, d x = \mu_{23} \\
&\int m_L c_v t \, C_1 \varphi_1 \, d x = \mu_{23}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} t \, C_1 \varphi_1 \, d x = \mu_{23}^{d} \\
&\int m_L c_v c_{dr} C_1 \varphi_1 \, d x = \mu_{23}^{vd} \\
&\int m_L c_{dr}^2 C_1 \varphi_1 \, d x = \mu_{23}^{dd} \\
&\int m_L t^2 C_2 \varphi_2 \, d x = \mu_{89} \\
&\int m_L c_v t \, C_2 \varphi_2 \, d x = \mu_{89}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} t \, C_2 \varphi_2 \, d x = \mu_{89}^{d} \\
&\int m_L c_v c_{dr} C_2 \varphi_2 \, d x = \mu_{89}^{vd} \\
&\int m_L c_{dr}^2 C_2 \varphi_2 \, d x = \mu_{89}^{dd}
\end{aligned}\right\} \quad (334)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int m_L t^2 \, d x = \mu_{33} \\
&\int m_L c_{dr} t \, d x = \mu_{33}^{d} \\
&\int m_L c_{dr}^2 \, d x = \mu_{33}^{dd}
\end{aligned}\right\} \quad (335)$$

In het algemeenste geval zouden dus 2×50 integralen over den vleugel moeten worden uitgewerkt, want aan de bovenstaande 50 formules kunnen nog 47 *overeenkomstige* voor de coëfficiënten λ worden *toegevoegd*. Vanzelfsprekend zal men in de praktijk het aantal werkelijk uit te voeren integratie's door invoering van benaderingen $\left[\frac{c_{dr}}{t} = \right.$ constant, $\left.\varphi_1 = \varphi_2\right)$ en door gebruik te maken van op „interpolatie" berustende schattingen (b.v. μ_{55} uit μ_{22} en μ_{88}) drastisch trachten te beperken.

De formules voor bij de bovenomschreven constanten μ aansluitende λ's zullen niet explicite worden opgeschreven. Men verkrijgt ze, door de μ's in de rechterleden van (330) t/m (335) door geheel identiek geïndiceerde λ's te vervangen en door in alle links staande integralen onder het integraalteeken een faktor ξ toe te voegen (zie (309).) Wanneer de tapschheid van den vleugel gering is, vervallen alle λ's.

Nu herinnert men zich, dat een groot aantal integralen, in wier integrand een factor $\bar{a}_{ik}$ optreedt, reeds in no. 11.2 zijn uitgewerkt en dat de uitkomsten dezer integralen in meest-doelmatig gerangschikten vorm aan de in tabel 3 getabelleerde elementen van de determinant (317) kunnen worden ontleend. *Deze elementen komen immers volgens (296), wanneer de termen in de tweede kolom van tabel 3, worden weggelaten, na omkeering van alle teekens stuk voor stuk overeen met exemplaren uit de in (296) optredende „luchtkracht-integralen".* De integralen (285), (286) en (287) echter bestaan uit sommen van met de integralen (304), (305) en (306) *nauw overeenkomende* termen.

Men kan de uitkomst van de invoering van (285), (286) en (287) in (323) dan ook aan de hand van tabel 3, de formules (330) t/m (335) en de voor de constructie van een overeenkomstig stelsel λ's gegeven aanwijzing in het oog houdend, *direct opschrijven*. Het resultaat kan meteen worden samengevat tot een nieuwe coëfficiëntendeterminant

$$\begin{vmatrix}
A_{11} + i A_{11}' & A_{12} + i A_{12}' & A_{13} + i A_{13}' \\
A_{21} + i A_{21}' & A_{22} + i A_{22}' & A_{23} + i A_{23}' \\
A_{31} + i A_{31}' & A_{32} + i A_{32}' & A_{33} + i A_{33}'
\end{vmatrix} = 0 \quad (336)$$

van de vergelijkingen (323) met door (285), (286) en (287) vervangen rechterleden. De uitkomst is, gespecialiseerd op de berekening der kritische trilling door de stelling, dat ν reëel is, ditmaal in tabel 4 vermeld. In de uitkomst is *bovendien demping* verwerkt, die is ingevoerd door:

$$\begin{aligned}
W_{11} &= W_{11} (1 + i \alpha_{11}) \\
W_{22} &= W_{22} (1 + i \alpha_{22}) \\
w_{33} &= w_{33} (1 + i \alpha_r)
\end{aligned} \quad (336\text{a})$$

te stellen.

Tot besluit moge nog even worden vermeld, welke formules men voor U_{11}, U_{12}, U_{22}, u_{13}, u_{23} en u_{33} verkrijgt, wanneer men uitgaat van de formules (293) voor de m_{ik}'s en wanneer men de afkortingen (330) t/m (335) in de uitkomst verwerkt:

$$\left.\begin{aligned}
U_{11} = &\int [(m_{11})_0 z_1^2 - 2 (m_{12})_0 z_1 C_1 \varphi_1 + \\
&+ (m_{22})_0 C_1^2 \varphi_1^2] \, d x + \mu_{11} - 2 \mu_{12} R_{39} - \\
&- 2 \mu_{12}^{v} - 2 \mu_{12}^{d} R_9 + \mu_{22} R_{41} + 2 \mu_{22}^{v} R_{39} + \\
&+ \mu_{22}^{d} R_{42} + \mu_{22}^{vv} + 2 \mu_{22}^{vd} R_9 + \mu_{22}^{dd} R_{43} \\
U_{12} = &\int [(m_{11})_0 z_1 z_2 - (m_{12})_0 (z_1 C_2 \varphi_2 + \\
&+ z_2 C_1 \varphi_1) + (m_{22})_0 C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2] \, d x + \\
&+ \mu_{44} - R_{39} (\mu_{45} + \mu_{54}) - (\mu_{45}^{v} + \mu_{54}^{v}) - \\
&- R_9 (\mu_{45}^{d} + \mu_{54}^{d}) + \mu_{55} R_{41} + 2 \mu_{55}^{v} R_{39} + \\
&+ \mu_{55}^{d} R_{42} + \mu_{55}^{vv} + 2 \mu_{55}^{vd} R_9 + \mu_{55}^{dd} R_{43} \\
U_{22} = &\int [(m_{11})_0 z_2^2 - 2 (m_{12})_0 z_2 C_2 \varphi_2 + \\
&+ (m_{22})_0 C_2^2 \varphi_2^2] \, d x + \mu_{77} - 2 \mu_{78} R_{39} - \\
&- 2 \mu_{78}^{v} - 2 \mu_{78}^{d} R_9 + \mu_{88} R_{41} + 2 \mu_{88}^{v} R_{39} + \\
&+ \mu_{88}^{d} R_{42} + \mu_{88}^{vv} + 2 \mu_{88}^{vd} R_9 + \mu_{88}^{dd} R_{43} \\
u_{13} = &\int [- (m_{13})_0 z_1 + (m_{23})_0 C_1 \varphi_1] \, d x - \\
&- \mu_{13} R_{40} + \mu_{13}^{d} R_9 + \mu_{23} R_{44} + \mu_{23}^{v} R_{40} + \\
&+ \mu_{23}^{d} R_{45} - \mu_{23}^{vd} R_9 - \mu_{23}^{dd} R_{43}
\end{aligned}\right\} \quad (337)$$

$$
\left.\begin{aligned}
u_{23} = & \int [-(m_{13})_o z_2 + (m_{23})_o C_2 \varphi_2]\, dx - \\
& - \mu_{79} R_{40} + \mu_{79}^{d} R_9 + \mu_{89} R_{44} + \mu_{89}^{v} R_{40} + \\
& \qquad + \mu_{89}^{d} R_{45} - \mu_{89}^{vd} R_9 - \mu_{89}^{dd} R_{43} \\
u_{33} = & \int (m_{33})_o\, dx + \mu_{33} R_{46} - \\
& \qquad \mu_{33}^{d} R_{47} + \mu_{33}^{dd} R_{43}
\end{aligned}\right\} \quad (337)
$$

13. Het onderzoek van de combinatie van een „gevaarlijke" eigentrilling van den vleugel met rolroerdraaiingen.

De hieronder beschreven methode kan worden toegepast, wanneer er reden is om te verwachten, dat de *kritische trilling* van den vleugel nauw zal aansluiten bij een *in de standtrilling optredende eigentrilling.* Deze eigentrilling kan dan als een „gevaarlijke" trillings-mogelijkheid worden aangemerkt. Als kriterium wordt gewoonlijk aangelegd, dat de betreffende eigentrilling ook in stilstaande lucht reeds relatief groote rolroerdraaiingen in *ongunstige* phase bevat (d.w.z. z en γ *in* phase, of φ en γ *in tegenphase*).

De grondvergelijkingen vormen de Lagrange-vergelijkingen (264), (265), met arbeidscoëfficiënten, gegeven door (288) en (289). Vanzelfsprekend worden deze formules ook verkregen, door in de in no. 12 gebruikte formules $z_2 \equiv \varphi_2 \equiv 0$ te stellen. De „gevaarlijke" eigentrilling wordt dan gegeven gedacht door

$$\nu = \nu_1 \qquad z = q_1 z_1 \qquad \varphi = q_1 C_1 \varphi_1$$

gecombineerd met een rolroerdraaiing γ_r.

Van het stelsel μ's, gedefiniëerd door (330) t/m (335) blijven de navolgende over:

$$
\left.\begin{aligned}
&\int m_L z_1^2\, dx = \mu_{11} \\
&\int m_L t\, z_1 C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{12} \\
&\int m_L c_v z_1 C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{12}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} z_1 C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{12}^{d} \\
&\int m_L t\, z_1\, dx = \mu_{13} \\
&\int m_L c_{dr} z_1\, dx = \mu_{13}^{d} \\
&\int m_L t^2 C_1^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22} \\
&\int m_L c_v t\, C_1^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} t\, C_1^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{d} \\
&\int m_L c_v c_{dr} C_1^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{vd} \\
&\int m_L c_v^2 C_1^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{vv} \\
&\int m_L c_{dr}^2 C_1^2 \varphi_1^2\, dx = \mu_{22}^{dd} \\
&\int m_L t^2 C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{23}
\end{aligned}\right] \quad (338)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\int m_L c_v t\, C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{v} \\
&\int m_L c_{dr} t\, C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{d} \\
&\int m_L c_v c_{dr} C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{vd} \\
&\int m_L c_{dr}^2 C_1 \varphi_1\, dx = \mu_{23}^{dd} \\
&\int m_L t^2\, dx = \mu_{33} \\
&\int m_L c_{dr} t\, dx = \mu_{33}^{d} \\
&\int m_L c_{dr}^2\, dx = \mu_{33}^{dd}
\end{aligned}\right\} \quad (338)
$$

Hieraan kan een bijbehoorend stelsel λ's worden toegevoegd. Men verkrijgt dit stelsel weer, door in bovenstaande formules in de links staande integralen onder het integraalteeken een faktor ξ toe te voegen, en de μ's in de rechterleden door identiek geïndiceerde λ's te vervangen.

De karakteristieke vergelijking

$$
\begin{vmatrix}
A_{11} + i A_{11}' & A_{12} + i A_{12}' \\
A_{21} + i A_{21}' & A_{22} + i A_{22}'
\end{vmatrix} = 0 \quad (339)
$$

kan nu onmiddellijk worden opgeschreven. Zij wordt immers uit (336) verkregen door in deze determinant de 2e kolom en de 2e rij te verwijderen, en door in de uitdrukkingen voor de resteerende elementen (zie tabel 4) alle termen, die andere dan door (338) vastgelegde μ's en bijbehoorende λ's bevatten, te onderdrukken. De uitkomst is

$$
\left.\begin{aligned}
A_{11} = & W_{11} - \nu^2 U_{11} + \nu^2 [(-R_1 \mu_{12} - \\
& - R_4 \mu_{12}^{d} - R_{12} \mu_{22} + R_1 \mu_{22}^{v} + R_{17} \mu_{22}^{d} + \\
& + R_4 \mu_{22}^{vd} + R_{23} \mu_{22}^{dd}) p_{2o} + (- R_1 \lambda_{12} - \\
& - R_4 \lambda_{12}^{d} - R_{12} \lambda_{22} + R_1 \lambda_{22}^{v} + R_{17} \lambda_{22}^{d} + \\
& + R_4 \lambda_{22}^{vd} + R_{23} \lambda_{22}^{dd}) p_{21} + (\mu_{11} - R_{16} \mu_{12} - \\
& - 2 \mu_{12}^{v} - R_{21} \mu_{12}^{d} - R_{13} \mu_{22} + R_{16} \mu_{22}^{v} + \\
& + R_{18} \mu_{22}^{d} + R_{21} \mu_{22}^{vd} + \mu_{22}^{vv} + R_{22} \mu_{22}^{dd}) p_{1o} + \\
& + (\lambda_{11} - R_{16} \lambda_{12} - 2 \lambda_{12}^{v} - R_{21} \lambda_{12}^{d} - R_{13} \lambda_{22} + \\
& + R_{16} \lambda_{22}^{v} + R_{18} \lambda_{22}^{d} + R_{21} \lambda_{22}^{vd} + \lambda_{22}^{vv} + \\
& + R_{22} \lambda_{22}^{dd}) p_{11} + \{ - R_{14} (\mu_{22} + 2 \lambda_{22}) - \\
& - R_{19} (\mu_{22}^{d} + 2 \lambda_{22}^{d}) + \\
& \qquad + R_{24} (\mu_{22}^{dd} + 2 \lambda_{22}^{dd}) \} V_o^2] \\
A_{11}' = & a_1 W_{11} + \nu^2 [R_1 \mu_{12} + R_4 \mu_{12}^{d} + \\
& + R_{12} \mu_{22} - R_1 \mu_{22}^{v} - R_{17} \mu_{22}^{d} - R_4 \mu_{22}^{vd} - \\
& - R_{23} \mu_{22}^{dd}) p_{2o}' + (R_1 \lambda_{12} + R_4 \lambda_{12}^{d} + \\
& + R_{12} \lambda_{22} - R_1 \lambda_{22}^{v} - R_{17} \lambda_{22}^{d} - R_4 \lambda_{22}^{vd} - \\
& - R_{23} \lambda_{22}^{dd}) p_{21}' + (\mu_{11} - R_{16} \mu_{12} - 2 \mu_{12}^{v} - \\
& - R_{21} \mu_{12}^{d} - R_{13} \mu_{22} + R_{16} \mu_{22}^{v} + R_{18} \mu_{22}^{d} + \\
& + R_{21} \mu_{22}^{vd} + \mu_{22}^{vv} + R_{22} \mu_{22}^{dd}) p_{1o}' + (\lambda_{11} - \\
& - R_{16} \lambda_{12} - 2 \lambda_{12}^{v} - R_{21} \lambda_{12}^{d} - R_{13} \lambda_{22} + \\
& + R_{16} \lambda_{22}^{v} + R_{18} \lambda_{22}^{d} + R_{21} \lambda_{22}^{vd} + \lambda_{22}^{vv} + \\
& + R_{22} \lambda_{22}^{dd}) p_{11}' + \{ - R_3 (\mu_{12} + \lambda_{12}) - \\
& - R_8 (\mu_{12}^{d} + \lambda_{12}^{d}) - R_{15} (\mu_{22} + \lambda_{22}) + \\
& + R_3 (\mu_{22}^{v} + \lambda_{22}^{v}) + R_{20} (\mu_{22}^{d} + \lambda_{22}^{d}) + \\
& + R_8 (\mu_{22}^{vd} + \lambda_{22}^{vd}) + \\
& \qquad + R_{25} (\mu_{22}^{dd} + \lambda_{22}^{dd}) \} V_o]
\end{aligned}\right] \quad (340)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
A_{12} = & -w_{13} - \nu^2 u_{13} + \nu^2 [(- R_7 \mu_{13} + \\
& + R_4 \mu_{13}{}^{\Delta} - R_{26} \mu_{23} + R_7 \mu_{23}{}^{v} + R_{29} \mu_{23}{}^{\Delta} - \\
& - R_4 \mu_{23}{}^{v\Delta} - R_{23} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{2o} + (- R_7 \lambda_{13} + \\
& + R_4 \lambda_{13}{}^{\Delta} - R_{26} \lambda_{23} + R_7 \lambda_{23}{}^{v} + R_{29} \lambda_{23}{}^{\Delta} - \\
& - R_4 \lambda_{23}{}^{v\Delta} - R_{23} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{21} + (- R_8 \mu_{13} + \\
& + R_5 \mu_{13}{}^{\Delta} - R_{27} \mu_{23} + R_8 \mu_{23}{}^{v} + R_{30} \mu_{23}{}^{\Delta} - \\
& - R_5 \mu_{23}{}^{v\Delta} - R_{22} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{1o} + (- R_8 \lambda_{13} + \\
& + R_5 \lambda_{13}{}^{\Delta} - R_{27} \lambda_{23} + R_8 \lambda_{23}{}^{v} + R_{30} \lambda_{23}{}^{\Delta} - \\
& - R_5 \lambda_{23}{}^{v\Delta} - R_{22} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{11} + \{ R_{14} (\mu_{23} + \\
& + 2 \lambda_{23}) + R_{31} (\mu_{23}{}^{\Delta} + 2 \lambda_{23}{}^{\Delta}) + \\
& \qquad + R_{24} (\mu_{23}{}^{\Delta\Delta} + 2 \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) \} V_o{}^2] \\[1ex]
A_{12}' = & \nu^2 [(R_7 \mu_{13} - R_4 \mu_{13}{}^{\Delta} + \\
& + R_{26} \mu_{23} - R_7 \mu_{23}{}^{v} - R_{29} \mu_{23}{}^{\Delta} + R_4 \mu_{23}{}^{v\Delta} + \\
& + R_{23} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{2o}' + (R_7 \lambda_{13} - R_4 \lambda_{13}{}^{\Delta} + \\
& + R_{26} \lambda_{23} - R_7 \lambda_{23}{}^{v} - R_{29} \lambda_{23}{}^{\Delta} + R_4 \lambda_{23}{}^{v\Delta} + \\
& + R_{23} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{21}' + (- R_8 \mu_{13} + R_5 \mu_{13}{}^{\Delta} - \\
& - R_{27} \mu_{23} + R_8 \mu_{23}{}^{v} + R_{30} \mu_{23}{}^{\Delta} - R_5 \mu_{23}{}^{v\Delta} - \\
& - R_{22} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{1o}' + (- R_8 \lambda_{13} + R_5 \lambda_{13}{}^{\Delta} - \\
& - R_{27} \lambda_{23} + R_8 \lambda_{23}{}^{v} + R_{30} \lambda_{23\Delta} - R_5 \lambda_{23}{}^{v\Delta} - \\
& - R_{22} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{11}' + \{ - R_9 (\mu_{13} + \lambda_{13}) + \\
& + R_6 (\mu_{13}{}^{\Delta} + \lambda_{13}{}^{\Delta}) - R_{28} (\mu_{23} + \lambda_{23}) + \\
& + R_9 (\mu_{23}{}^{v} + \lambda_{23}{}^{v}) + R_{32} (\mu_{23}{}^{\Delta} + \lambda_{23}{}^{\Delta}) - \\
& - R_6 (\mu_{23}{}^{v\Delta} + \lambda_{23}{}^{v\Delta}) - \\
& \qquad - R_{25} (\mu_{23}{}^{\Delta\Delta} + \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) \} V_o] \\[1ex]
A_{21} = & -w_{13} - \nu^2 u_{13} + \nu^2 [(R_{12} \mu_{23} - \\
& - R_{17} \mu_{23}{}^{\Delta} - R_{23} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{2o} + (R_{12} \lambda_{23} - \\
& - R_{17} \lambda_{23}{}^{\Delta} - R_{23} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{21} + (- R_{10} \mu_{13} + \\
& + R_{11} \mu_{13}{}^{\Delta} + R_{13} \mu_{23} - R_{10} \mu_{23}{}^{v} - R_{18} \mu_{23}{}^{\Delta} - \\
& - R_{11} \mu_{23}{}^{v\Delta} - R_{22} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{1o} + (- R_{10} \lambda_{13} + \\
& + R_{11} \lambda_{13}{}^{\Delta} + R_{13} \lambda_{23} - R_{10} \lambda_{23}{}^{v} - R_{18} \lambda_{23}{}^{\Delta} - \\
& - R_{11} \lambda_{23}{}^{v\Delta} - R_{22} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{11} + \{ - R_{33} (\mu_{23} + \\
& + 2 \lambda_{23}) + R_{35} (\mu_{23}{}^{\Delta} + 2 \lambda_{23}{}^{\Delta}) - \\
& \qquad - R_{24} (\mu_{23}{}^{\Delta\Delta} + 2 \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) \} V_o{}^2] \\[1ex]
A_{21}' = & \nu^2 [(- R_{12} \mu_{23} + R_{17} \mu_{23}{}^{\Delta} + \\
& + R_{23} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{2o}' + (- R_{12} \lambda_{23} + R_{17} \lambda_{23}{}^{\Delta} + \\
& + R_{23} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{21}' + (- R_{10} \mu_{13} + R_{11} \mu_{13}{}^{\Delta} + \\
& + R_{13} \mu_{23} - R_{10} \mu_{23}{}^{v} - R_{18} \mu_{23}{}^{\Delta} - R_{11} \mu_{23}{}^{v\Delta} - \\
& - R_{22} \mu_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{1o}' + (- R_{10} \lambda_{13} + R_{11} \lambda_{13}{}^{\Delta} + \\
& + R_{13} \lambda_{23} - R_{10} \lambda_{23}{}^{v} - R_{18} \lambda_{23}{}^{\Delta} - R_{11} \lambda_{23}{}^{v\Delta} - \\
& - R_{22} \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) p_{11}' + \{ R_{34} (\mu_{23} + \lambda_{23}) - \\
& - R_{36} (\mu_{23}{}^{\Delta} + \lambda_{23}{}^{\Delta}) - \\
& \qquad - R_{25} (\mu_{23}{}^{\Delta\Delta} + \lambda_{23}{}^{\Delta\Delta}) \} V_o \\[1ex]
A_{22} = & w_{33} - \nu^2 u_{33} + \nu^2 [(R_{26} \mu_{33} - \\
& - R_{29} \mu_{33}{}^{\Delta} + R_{23} \mu_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{2o} + (R_{26} \lambda_{33} - \\
& - R_{29} \lambda_{33}{}^{\Delta} + R_{33} \lambda_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{21} + (R_{27} \mu_{33} - \\
& - R_{30} \mu_{33}{}^{\Delta} + R_{22} \mu_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{1o} + (R_{27} \lambda_{33} - \\
& - R_{30} \lambda_{33}{}^{\Delta} + R_{22} \lambda_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{11} + \{ R_{33} (\mu_{33} + \\
& + 2 \lambda_{33}) - R_{35} (\mu_{23}{}^{\Delta} + 2 \lambda_{33}{}^{\Delta}) + \\
& \qquad + R_{24} (\mu_{33}{}^{\Delta\Delta} + 2 \lambda_{33}{}^{\Delta\Delta}) \} V_o{}^2] \\[1ex]
A_{22}' = & a_r w_{33} + \nu^2 [(- R_{26} \mu_{33} + R_{29} \mu_{33}{}^{\Delta} - \\
& - R_{23} \mu_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{2o}' + (- R_{26} \lambda_{33} + R_{29} \lambda_{33}{}^{\Delta} - \\
& - R_{23} \lambda_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{21}' + (R_{27} \mu_{33} - R_{30} \mu_{33}{}^{\Delta} + \\
& + R_{22} \mu_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{1o}' + (R_{27} \lambda_{33} - R_{30} \lambda_{33}{}^{\Delta} + \\
& + R_{22} \lambda_{33}{}^{\Delta\Delta}) p_{11}' + \{ R_{38} (\mu_{33} + \lambda_{33}) - \\
& - R_{37} (\mu_{33}{}^{\Delta} + \lambda_{33}{}^{\Delta}) + \\
& \qquad + R_{25} (\mu_{33}{}^{\Delta\Delta} + \lambda_{33}{}^{\Delta\Delta}) \} V_o]
\end{aligned}\right] \qquad (340)
$$

Daarin is gesteld:

$$
\left.\begin{aligned}
\int (- m_{13} z_1 + m_{23} C_1 \varphi_1) dx = u_{13}; \quad & \int m_{33} dx = u_{33} \\
k_r C_1 \varphi_1 (b_1) = w_{13} \qquad & k_r \equiv w_{33}
\end{aligned}\right\} \qquad (341)
$$

terwijl demping is ingevoerd door

$$W_{11} \text{ door } W_{11} (1 + i a_1) \qquad (342)$$

en

$$w_{33} \quad ,, \quad w_{33} (1 + i a_r) \qquad (343)$$

te vervangen.

Men vindt W_{11} uit

$$
\begin{vmatrix} W_{11} - \nu_1{}^2 U_{11} & - w_{13} - \nu_1{}^2 u_{13} \\ - w_{13} - \nu_1{}^2 u_{13} & w_{33} - \nu_1{}^2 u_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (344)
$$

waarin ν_1 de „gevaarlijke" eigenfrequentie van den vleugel in stilstaande lucht is.

Men lost uit (344) op

$$W_{11} = \nu_1{}^2 U_{11} + \frac{(w_{13} + \nu_1{}^2 u_{13})^2}{\nu_1{}^2 u_{33} - w_{33}} \qquad (345)$$

De behandeling van het gestelde probleem kan hiermede worden afgesloten.

14. De invloed van rompbewegelijkheid bij een vleugel-rolroer-systeem.

Voor een algemeene discussie over den invloed van de bewegelijkheid van den romp, alsmede voor een beoordeeling van de wenschelijkheid harer inachtname, wordt naar no. 9 verwezen.

141. De symmetrische trillingen van het systeem.

De vroeger voor het systeem zonder rolroer afgeleide vergelijkingen (179) en (180) kunnen als volgt worden geïnterpreteerd:

> *De romp beweegt in min of meer goede benadering* (K_z en $M_\Phi = 0$, zie het commentaar bij (179) en (180)) *voortdurend zóó, dat de som der versnellingskrachten over het heele systeem (romp inbegrepen), alsmede de som der momenten dezer krachten om de beschrijvings-as, steeds nul is.*

Deze stelling kan vanzelfsprekend worden aangehouden, wanneer een rolroer aanwezig is. Uitgaande van (242) levert zij het door de beide onderstaande vergelijkingen geformuleerde verband tusschen de fluxie's der *totale* uitwijkingen z, φ en γ_r (γ_r = hoek van de rolroerkoorden met de vleugelwortelkoorde) van vleugel en rolroer, en de fluxie's der uitwijkingen Z en Φ van den romp: (vergelijk (182a) en (182b)):

$$\int (m_{11} \dot{z} - m_{12} \dot{\varphi} - m_{13} \dot{\gamma}_r) \, d x = - \tfrac{1}{2} (r_{11} \dot{Z} - r_{12} \dot{\Phi})$$

$$\int (- m_{12} \dot{z} + m_{22} \dot{\varphi} + m_{23} \dot{\gamma}_r) \, d x = - \tfrac{1}{2} (- r_{12} \dot{Z} + r_{22} \dot{\Phi})$$

waaruit naar analogie van (188) volgt, dat de uitdrukking (242) voor de totale kinetische energie van het systeem, wanneer de romp *bewegelijk* is moet worden *vervangen* door:

$$
\begin{aligned}
E_{kin} = \tfrac{1}{2} \int (& m_{11} \dot{z}^2 - 2\, m_{12} \dot{z} \dot{\varphi} - 2\, m_{13} \dot{z} \dot{\gamma}_r + \\
& + m_{22} \dot{\varphi}^2 + 2\, m_{23} \dot{\varphi} \dot{\gamma}_r + m_{33} \dot{\gamma}_r^2) d x + \\
& + \frac{r_{22}}{r} \left[\int (m_{11} \dot{z} - m_{12} \dot{\varphi} - m_{13} \dot{\gamma}_r) \, d x \right]^2 + \\
& + \frac{r_{11}}{r} \left[\int (- m_{12} \dot{z} + m_{22} \dot{\varphi} + m_{23} \dot{\gamma}_r) d x \right]^2 + \\
& + \frac{2\, r_{12}}{r} \left[\int (m_{11} \dot{z} - m_{12} \dot{\varphi} - \right. \\
& \left. - m_{13} \dot{\gamma}_r) d x \right] . \left[\int (- m_{12} \dot{z} + m_{22} \dot{\varphi} + m_{23} \dot{\gamma}_r) d x \right] \qquad (346)
\end{aligned}
$$

De uitdrukking (244) voor de potentiëele energie blijft onveranderd.

1411. Vleugel met toegelaten deformatie's

$$z = q_1 \, z_1, \quad \varphi = Q_1 \, \varphi_1 .$$

Men leidt uit de formule (346) zonder moeite af, dat de in no. 11 beschreven rekenmethode volledig en naar den letter kan worden *aangehouden*, mits slechts de formules (294) worden *vervangen* door:

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{11} &= \int m_{11} z_1^2 \, d x + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int m_{11} z_1 \, d x \right]^2 + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int m_{12} z_1 \, d x \right]^2 - \frac{4\, r_{12}}{r} \left[\int m_{11} z_1 \, d x \right] . \left[\int m_{12} z_1 \, d x \right] \\
M_{12} &= \int m_{12} z_1 \varphi_1 \, d x + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int m_{11} z_1 \, d x \right] \left[\int m_{12} \varphi_1 \, d x \right] + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int m_{12} z_1 \, d x \right] \left[\int m_{22} \varphi_1 \, d x \right] - \\
&\quad - \frac{2\, r_{12}}{r} \left[\left(\int m_{11} z_1 \, d x \right) \left(\int m_{22} \varphi_1 \, d x \right) + \left(\int m_{12} z_1 \, d x \right) \left(\int m_{12} \varphi_1 \, d x \right) \right] \\
M_{13} &= \int m_{13} z_1 \, d x + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int m_{11} z_1 \, d x \right] \left[\int m_{13} d x \right] + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int m_{12} z_1 \, d x \right] \left[\int m_{23} d x \right] - \\
&\quad - \frac{2\, r_{12}}{r} \left[\left(\int m_{11} z_1 \, d x \right) \left(\int m_{23} d x \right) + \left(\int m_{12} z_1 \, d x \right) \left(\int m_{13} d x \right) \right] \\
M_{22} &= \int m_{22} \varphi_1^2 \, d x + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int m_{12} \varphi_1 \, d x \right]^2 + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int m_{22} \varphi_1 \, d x \right]^2 - \frac{4\, r_{12}}{r} \left[\int m_{12} \varphi_1 \, d x \right] \left[\int m_{22} \varphi_1 \, d x \right] \\
M_{23} &= \int m_{23} \varphi_1 \, d x + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int m_{12} \varphi_1 \, d x \right] \left[\int m_{13} d x \right] + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int m_{22} \varphi_1 \, d x \right] \left[\int m_{23} d x \right] - \\
&\quad - \frac{2\, r_{12}}{r} \left[\left(\int m_{12} \varphi_1 \, d x \right) \left(\int m_{23} d x \right) + \left(\int m_{22} \varphi_1 \, d x \right) \left(\int m_{13} d x \right) \right] \\
M_{33} &= \int m_{33} \, d x + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int m_{13} d x \right]^2 + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int m_{23} d x \right]^2 - \frac{4\, r_{12}}{r} \left[\int m_{13} d x \right] \left[\int m_{23} \, d x \right]
\end{aligned}
\right\} \quad (347)
$$

De inachtname van rompbewegelijkheid eischt dus mathematisch alleen de uitwerking van de *acht* in (347) *extra* optredende integralen over den vleugel [1]).

1412. Vleugel met toegelaten deformatie's

$$z = q_1 z_1 + q_2 z_2; \quad \varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2 .$$

In dit geval kan de rekenmethode, beschreven in no. 12 worden aangehouden, mits correctie's op U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22}, u_{13}, u_{23} en u_{33} worden aangebracht. De grootte dezer correctie's kan uit de formule (346) worden afgeleid. Men vindt

$$
\begin{aligned}
U_{11} = \int (& m_{11} z_1^2 - 2\, m_{12} z_1 C_1 \varphi_1 + m_{22} C_1^2 \varphi_1^2) \, d x + \\
& + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int (m_{11} z_1 - m_{12} C_1 \varphi_1) \, d x \right]^2 + \\
& + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int (- m_{12} z_1 + m_{22} C_1 \varphi_1) \, d x \right]^2 + \\
& + \frac{4\, r_{12}}{r} \left[\int (m_{11} z_1 - m_{12} C_1 \varphi_1) \, d x \right] \left[\int (- m_{12} z_1 + m_{22} C_1 \varphi_1) d x \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{12} = U_{21} = \int (& m_{11} z_1 z_2 - m_{12} z_1 C_2 \varphi_2 - \\
& - m_{12} z_2 C_1 \varphi_1 + m_{22} C_1 C_2 \varphi_1 \varphi_2) d x + \\
& + \frac{2\, r_{22}}{r} \left[\int (m_{11} z_1 - m_{12} C_1 \varphi_1) \, d x \right] . \left[\int (m_{11} z_2 - m_{12} C_2 \varphi_2) d x \right] + \frac{2\, r_{11}}{r} \left[\int (- m_{12} z_1 + \right. \\
& \left. + m_{22} C_1 \varphi_1) \, d x \right] . \left[\int (- m_{12} z_2 + m_{22} C_2 \varphi_2) d x \right] +
\end{aligned}
$$

---

[1]) Het zal niet noodig zijn, op de functie's m_{ik}, die in de integrand van deze integralen voorkomen, toeslagen aan te brengen, die de traagheidswerking der meetrillende lucht in rekening brengen. In theorie is dat wel noodig, het effect is echter zoo klein, dat het bij de bepaling der *correctie's*, die den invloed der rompbewegelijkheid weergeven, wel buiten beschouwing kan worden gelaten. Dit geldt te meer, omdat de behandeling van het rompsysteem toch al niet heelemaal exact is.

$$+\frac{2r_{12}}{r}\left[\left\{\int(m_{11}z_1-m_{12}\varphi_1)dx\right\}\left\{\int(-m_{12}z_2+\right.\right.$$
$$\left.+m_{22}C_2\varphi_2)dx\right\}+\left\{\int(m_{11}z_2-\right.$$
$$\left.\left.-m_{12}C_2\varphi_2)dx\right\}\left\{\int(-m_{12}z_1-m_{22}C_1\varphi_1)dx\right\}\right].$$

$$U_{22}=\int(m_{11}z_2^2-2m_{12}z_2C_2\varphi_2+$$
$$+m_{22}C_2\varphi_2^2)dx+\frac{2r_{22}}{r}\left[\int(m_{11}z_2-\right.$$
$$\left.-m_{12}C_2\varphi_2)dx\right]^2+\frac{2r_{11}}{r}\left[\int(-m_{12}z_2+\right.$$
$$\left.+m_{22}C_2\varphi_2)dx\right]^2+\frac{4r_{12}}{r}\left[\int(m_{11}z_2-\right.$$
$$\left.-m_{12}C_2\varphi_2)dx\right]\left[\int(-m_{12}z_2+m_{22}C_2\varphi_2)dx\right]$$

$$u_{13}=\int(-m_{13}z_1+m_{23}C_1\varphi_1)dx-$$
$$-\frac{2r_{22}}{r}\left[\int(m_{11}z_1-m_{12}C_1\varphi_1)dx\right]\int m_{13}dx+$$
$$+\frac{2r_{11}}{r}\left[\int(-m_{12}z_1+m_{22}C_1\varphi_1)dx\right]\int m_{23}dx+$$
$$+\frac{2r_{12}}{r}\left[\int(m_{11}z_1-m_{12}C_1\varphi_1)dx\right]\int m_{23}dx-$$
$$-\frac{2r_{12}}{r}\left[\int(-m_{12}z_1+m_{22}C_1\varphi_1)dx\right]\int m_{13}dx \qquad (348)$$

$$u_{23}=\int(-m_{13}z_2+m_{23}C_2\varphi_2)dx-$$
$$-\frac{2r_{22}}{r}\left[\int(m_{11}z_2-m_{12}C_2\varphi_2)dx\right]\int m_{13}dx+$$
$$+\frac{2r_{11}}{r}\left[\int(-m_{12}z_2+m_{22}C_2\varphi_2)dx\right]\int m_{23}dx+$$
$$+\frac{2r_{12}}{r}\left[\int(m_{11}z_2-m_{12}C_2\varphi_2)dx\right]\int m_{23}dx-$$
$$-\frac{2r_{12}}{r}\left[\int(-m_{12}z_2+m_{22}C_2\varphi_2)dx\right]\int m_{13}dx$$

$$u_{33}=\int m_{33}dx+$$
$$+\frac{2r_{22}}{r}\left[\int m_{13}dx\right]^2+\frac{2r_{11}}{r}\left[\int m_{23}dx\right]^2-$$
$$-\frac{4r_{12}}{r}\left[\int m_{13}dx\right].\left[\int m_{23}dx\right].$$

1413. Onderzoek van een „gevaarlijken" trillingsvorm $z = q_1 z_1$, $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1$.

De rompbewegelijkheid impliceert eveneens correctie's op U_{11}, u_{13} en u_{33}.

De „nieuwe" formule voor U_{11} stemt exact overeen met de *eerste* formule van het stelsel (348), die voor u_{13} met de *4de* en die voor u_{33} met de *laatste*. Voor de rest geschiedt de berekening geheel naar de in 13 gegeven aanwijzingen.

14.2. De antisymmetrische trillingen van het systeem.

In de *antisymmetrische trillingsvormen* van een romp-vleugel-rolroer-systeem moeten niet alleen correctie's worden aangebracht, die de draaiingen van den romp om zijn langs-as in rekening brengen, doch moet bovendien rekening worden gehouden met een principiëele wijziging van de stijfheid der rolroerbesturing.

Immers: bij antisymmetrische bewegingen treden *tegengestelde* bewegingen van de resp. aan den bakboord- en aan den stuurboord-vleugel bevestigde rolroeren op. Tegen dergelijke bewegingen echter *verzet de rolroerbesturing zich niet, tenzij* het *rolroerstuur in de bestuurdersruimte wordt vastgehouden.* Dat wil zeggen, dat de kracht, die zich tegen de forceering van een rolroeruitslag verzet, ditmaal minder wordt bepaald door de deformatie's in de rolroerbesturing, dan door de prestatie's van den man, die in de bestuurdersruimte het rolroer in den middenstand tracht te houden. Hierdoor wordt een moeilijk-omschrijfbaren factor in de berekening geïntroduceerd: welke waarden moeten worden toegekend aan de constanten k_r en a_r? (Want wanneer de trilling zoo hevig wordt, dat de stuurorganen volledig gaan medespelen, zal zich ook de demping op rolroerbewegingen tengevolge van vergroote wrijving wel belangrijk wijzigen.)

Een algemeen-geldig antwoord op de vragen, die zich hier voordoen, kan niet worden gegeven. De wijze, waarop het heele besturingsmechanisme van het rolroer is geconstrueerd, speelt een belangrijke rol. Vermoedelijk zal een bestuurder wel als een zeer weinig effectief *„centreerend orgaan"* voor een snel slingerend stuur kunnen worden opgevat: zijn ingrijpen zal echter waarschijnlijk wel met de introductie van een niet onbeteekenende demping aequivalent gesteld kunnen worden. (Mits het stuur hem niet uit de handen slaat!). Het kan in verband daarmede geschikt zijn, $k_r = 0$ te stellen en een tamelijk groote demping aan te brengen [1]. (Dit kan met $k_r = 0$ worden gecombineerd, door de demping als term $a_\gamma \gamma_r$ dus als „quasi-snelheids evenredige demping" in de formules op te nemen, waarbij a_γ als een functie van de frequentie en eventueel van de amplitudes wordt opgevat. Hiermede houdt men rekening door de berekening voor een grootere serie van constante waarden $(a_\gamma)_i$ uit te voeren en in de uitkomst de in aanmerking komende functie van ν en γ_r te substitueeren.)

Wanneer de rolroerbesturing een onderdeel bevat, dat de besturing geheel of nagenoeg geheel onomkeerbaar maakt, wordt k_r vanzelfsprekend ook bij de antisymmetrische trilling bepaald door de stijfheid van de stuurorganen „buiten" dit onomkeerbaar functionneerende onderdeel.

De hiervoor gegeven richtlijnen voor de wijziging van de waarden van k_r en a_r bij overgang op den antisymmetrischen trillingsvorm kunnen niet nader worden gedetailleerd. De noodzakelijke maatregelen moeten van geval tot geval worden beoordeeld.

Wat de overige wijzigingen in de formules be-

---

[1] De groote wrijving, die bij rolroerbewegingen optreedt, zal meer nog dan in andere gevallen het inzetten eener onstabiele trilling *binden* aan het optreden van een relatief *groote* verstoring (remoustik) van het evenwicht van het systeem.

treft kan aansluiting worden gezocht bij de in no. 92 beschreven methoden. Het blijkt dan, dat de strikte inachtname van de rompdraaiingen tot formules leidt, wier numerieke uitwerking te bewerkelijk wordt. Evenals in no. 92 n.l. een karakteristieke vergelijking ontstond, die een determinant van de *derde* orde bevat, zal ditmaal een vergelijking ontstaan, die een determinant van de 4e orde inhoudt, waarvan alle elementen ongeveer gelijkelijk gecompliceerd zijn. Men kan hieraan slechts ten koste van eenige nauwkeurigheid ontkomen, n.l. door de reeds genoemde vereenvoudiging $M_\Theta = 0$ aan te brengen. *Deze vereenvoudiging moet worden aangehouden.* Zij maakt het mogelijk, de rompbewegelijkheid „volledig" in acht te nemen door een toeslag op de kinetische energie van het systeem. Men stelt n.l. gemakkelijk vast, dat de rompbewegingen Θ, wanneer $M_\Theta = 0$ is, met de overige bewegingen van het systeem is gebonden door de betrekking

$$\dot{\Theta} = -\frac{2}{I_R'}\int x\,[m_{11}\dot{z} - m_{12}\dot{\varphi} - m_{13}\dot{\gamma}_r]\,dx \tag{349}$$

In verband hiermede moet de uitdrukking (242) voor de kinetische energie van het systeem worden vervangen door:

$$\begin{aligned} E_{kin} = \tfrac{1}{2}\int [m_{11}\dot{z}^2 - 2\,m_{12}\dot{z}\dot{\varphi} - 2\,m_{13}\dot{z}\dot{\gamma}_r + \\ + m_{22}\dot{\varphi}_2^2 + 2\,m_{23}\dot{\varphi}\dot{\gamma}_r + m_{33}\dot{\gamma}_r^2]\,dx + \\ + \frac{1}{I_R'}\left[\int x(m_{11}\dot{z} - m_{12}\dot{\varphi} - m_{13}\dot{\gamma}_r)\,dx\right]^2 \end{aligned} \tag{350}$$

1421. **Vleugel met toegelaten deformatie's**
$z = q_1 z_1,\ \varphi = Q_1\varphi_1.$

De in no. 11 beschreven rekenmethode kan worden aangehouden, mits doelmatige wijzigingen in de waarden van k_r en α_r worden aangebracht, en de formules (294) worden *vervangen* door:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \int m_{11} z_1^2\,dx + \frac{2}{I_R'}\left[\int x\,m_{11} z_1\,dx\right]^2 \\ M_{12} &= \int m_{12} z_1\varphi_1\,dx + \\ &\quad + \frac{2}{I_R'}\left[\int x\,m_{11} z_1\,dx\right]\left[\int x\,m_{12}\varphi_1\,dx\right] \\ M_{22} &= \int m_{22}\varphi_1^2\,dx + \frac{2}{I_R'}\left[\int x\,m_{12}\varphi_1\,dx\right]^2 \\ M_{13} &= \int m_{13} z_1\,dx + \\ &\quad + \frac{2}{I_R'}\left[\int x\,m_{11} z_1\,dx\right]\left[\int x\,m_{13}\,dx\right] \\ M_{23} &= \int m_{23}\varphi_1\,dx + \\ &\quad + \frac{2}{I_R'}\left[\int x\,m_{12}\varphi_1\,dx\right]\left[\int x\,m_{13}\,dx\right] \\ M_{33} &= \int m_{33}\,dx + \frac{2}{I_R'}\left[\int x\,m_{13}\,dx\right]^2 \end{aligned}\right] \tag{351}$$

Opgemerkt moet worden, dat deze methode gewoonlijk niet de meest effectieve zal zijn, daar de fundamenteele *antisymmetrische* eigentrillingen van het systeem in stilstaande lucht vaak niet zeer fraai met twee deformatie-functie's z_1 en φ_1 kunnen worden beschreven. Deze moeilijkheid vervalt bij de hieronder te beschrijven werkwijze.

1422. **Vleugel met toegelaten deformatie's**
$z = q_1 z_1 + q_2 z_2\ ;\ \varphi = q_1 C_1\varphi_1 + q_2 C_2\varphi_2.$

De berekening komt nu, afgezien van de wijziging, die in de waarden van k_r en α_r moet worden aangebracht, overeen met de in no. 12 beschrevene, mits men aan U_{11}, U_{12}, U_{22}, u_{13}, u_{23} en u_{33} de navolgende, uit (350) afgeleide, waarden toekent:

$$\left.\begin{aligned} U_{11} &= \int (m_{11} z_1^2 - 2\,m_{12} z_1 C_1\varphi_1 + \\ &\qquad + m_{22} C_1\varphi_1^2)\,dx + \\ &\qquad + \frac{2}{I_R'}\left[\int x(m_{11} z_1 - m_{12} C_1\varphi_1)\,dx\right]^2 \\ U_{12} &= \int (m_{11} z_1 z_2 - m_{12} z_1 C_2\varphi_2 - m_{12} z_2 C_1\varphi_1 + \\ &+ m_{22} C_1 C_2\varphi_1\varphi_2)\,dx + \frac{2}{I_R'}\left[\int x(m_{11} z_1 - \right. \\ &\left. - m_{12} C_1\varphi_1)\,dx\right]\left[\int x(m_{11} z_2 - m_{12} C_2\varphi_2)\,dx\right] \\ U_{22} &= \int (m_{11} z_2^2 - 2\,m_{12} z_2 C_2\varphi_2 + \\ &\qquad + m_{22} C_2\varphi_2^2)\,dx + \\ &\qquad + \frac{2}{I_R'}\left[\int x(m_{11} z_2 - m_{12} C_2\varphi_2)\,dz\right]^2 \\ u_{13} &= \int (- m_{13} z_1 + m_{23} C_1\varphi_1)\,dx - \\ &- \frac{2}{I_R'}\left[\int x(m_{11} z_1 - m_{12} C_1\varphi_1)\,dx\right]\left[\int x m_{13}\,dx\right] \\ u_{23} &= \int (- m_{13} z_2 + m_{23} C_2\varphi_2)\,dx - \\ &- \frac{2}{I_R'}\left[\int x(m_{11} z_2 - m_{12} C_2\varphi_2)\,dx\right]\left[\int x m_{13}\,dx\right] \\ u_{33} &= \int m_{33}\,dx + \frac{2}{I_R'}\left[\int x\,m_{13}\,dx\right]^2 \end{aligned}\right] \tag{352}$$

1423. **Onderzoek van den „gevaarlijken" trillingsvorm** $z = q_1 z_1;\ \varphi = q_1 C_1\varphi_1$.

De behandeling geschiedt overeenkomstig in no. 13 gegeven aanwijzingen, met gewijzigde waarden voor k_r en α_r, terwijl de formules voor U_{11}, u_{13} en u_{33} respectievelijk worden vervangen door de *eerste*, de *vierde* en de *laatste* formule van het stelsel (352).

15. **Tusschenvoegsel.**

Met de in de voorgaande nummers beschreven rekenmethoden zijn alle „klassieke" vraagstukken der berekening van kritische snelheden voor onstabiele trillingen in een — bij den huidigen stand van het theoretisch onderzoek — meest doelmatig te achten *vorm* tot aan de grens, waar de berekening in een numerieke analyse overgaat, uitgewerkt. Daarbij is steeds bijzondere aandacht besteed aan de *vergemakkelijking* der praktische toepassing. Te dien einde zijn bijna alle formules, waarbij de numerieke berekening aansluit, *expliciet* en *volledig* opgeschreven, en zijn alle berekeningen, die algemeene bruikbaarheid bezitten, reeds uitgevoerd, met in tabelvorm gegeven resultaat. Daarbij kan niet worden voorkomen, dat vele formules *langer* en *ingewikkelder gebouwd* zijn, dan in de praktijk veelal noodig is. Het is immers niet mogelijk, rekening te houden met allerlei vereenvoudigingen, die vaak in *bijzondere gevallen* kunnen worden aangebracht. De formules *moesten* in den *meest algemeen geldigen vorm* worden genoteerd.

Het ligt in de bedoeling, de *praktische uitwerking* van de in deze verhandeling beschreven vraagstukken nog verder te vergemakkelijken, door nader, doch zeer kort, in te gaan op de wijze, waarop de *getallen-grondslagen* voor de berekeningen kunnen worden verkregen.

16. De gewichts-analyse.

De gewichtsanalyse van het systeem moet de getallen-grondslagen opleveren voor de in alle berekeningen aangetroffen massa-verdeelingsfunctie's m_{ik}. Deze treden in de *eind-formules* (d.i. de formules, waarbij de numerieke analyse aanknoopt) op een zeer enkele uitzondering na (m_{33}) steeds onder integratie's over den vleugel definiëerende integraalteekens op als *faktor* van deformatiefunctie's $z_1 \ldots$, $\varphi_1 \ldots$, of van quadratische producten dezer functie's. Daar *vooral* de quadratische producten van deformatiefunctie's *bijna altijd* voor *kleinere* waarden van x relatief *zéér klein* zijn, hangt de *waarde* van de eerder bedoelde integralen meestal *slechts weinig* af van de massabelegging van den vleugel in de nabijheid van den wortel, óók wanneer de vleugel daar relatief zwaar is geconstrueerd. *Daarom moet de gewichtsanalyse van den vleugel zeer nauwkeurig zijn in de omgeving van den tip en kan men bij den wortel veelal met schattingen volstaan.* De gewichtsanalyse wordt dienovereenkomstig het best uitgevoerd, door den vleugel door dwarsdoorsneden in b.v. een tiental vakken te verdeelen, deze vakken eventueel bij den tip wat *smaller* en aan den wortel *breeder* kiezend, en vervolgens op grond van constructieteekeningen en gewichtsopgaven van ieder vak gewicht, zwaartepuntsligging (d.i. alléén de afstand van het zwaartepunt achter de beschrijvings-as!) en traagheidsmoment (om de beschrijvings-as) te berekenen, daarbij *nauwkeuriger* te werk gaand naarmate het beschouwde vak meer *naar buiten* ligt. Men vatte hierbij het rolroer aanvankelijk op als een vast deel van den vleugel. Zij G_i het gewicht van het i^{de} vak, s_i de afstand van het zwaartepunt achter de beschrijvings-as, $I_i^{(b)}$ het traagheidsmoment om de beschrijvings-as en b_i de breedte, dan leveren de waarden van

$$m_i = \frac{G_i}{g\, b_i}\,;\quad s_i \text{ en } \frac{1}{b_i} I_i^{(b)} - m_i s_i^2$$

een tiental punten voor de functie's m, s en I_1, waarmede de functie's m_{11}, m_{12} en m_{22} volgens bekende formules samenhangen.

Een „doelmatige verbinding" van deze 10 punten levert de complete functie's.

De gewichtsanalyse moet ook bij den vleugelwortel nauwkeuriger worden uitgevoerd, wanneer de functie's m_{ik} in de formules óók als factor van *slechts één* deformatie-functie optreden, hetgeen b.v. altijd het geval is als de rompbewegelijkheid in aanmerking moet worden genomen.

De parameters van een beweegbaar rolroer moeten steeds zorgvuldig worden vastgesteld. Het kan ook daarbij goed zijn, het rolroer in vakken te verdeelen. In dit verband moge er meteen de aandacht op worden gevestigd, *dat het noodig kan zijn bij de berekening van massaverdeelingsfunctie's van het rolroer rekening te houden met gewichten in het besturingsmechanisme van dit roer.* In formules (zie (243)) treden de navolgende functie's (van x!) op:

$$m_r s_r \text{ en } I^{(d)} = I_r + m_r s_r^2 \qquad (353)$$

overeenkomend met *massa-moment* en *massa-traagheidsmoment om de draaias* van de breedte-eenheid van het roer. Men bepaalt hen eerst voor het *roer-alléén*. Vervolgens wordt nagegaan, of de inrichting der stuurorganen correctie's noodig maakt, die men kan *omslaan* over een min of meer breed vak van het roer, waarbinnen de besturing aangrijpt. Deze correctie's worden overigens gewoonlijk alleen dan van eenige beteekenis, wanneer *de trillingsvorm antisymmetrisch wordt genomen.* In sommige gevallen zal men de functie's (353) *mede* met behulp van experimenten kunnen vastleggen (b.v. een slingerproef [1])). Men stelle echter nimmer (tenzij zulks door een „rechthoekige" roerconstructie wordt gemotiveerd) *constanten* (b.v. *gemiddelden*) in de plaats van de *functie's* (353). (*Daarom* levert een slingerproef op zichzelf niet *genoeg* gegevens!)

Wanneer de bewegelijkheid van den romp in aanmerking moet worden genomen, is het noodig ook de massa en massa-verdeeling van den romp te onderzoeken. Het lijkt niet noodig, hierbij bijzonder nauwkeurig te werk te gaan. Men dient echter de navolgende *aanwijzing* in acht te nemen, die kan worden opgevat als een correctie, die noodzakelijk is i.v.m. de vroeger ingevoerde — doch feitelijk ontoelaatbare — onderstelling, dat de romp geacht kan worden een *star lichaam* te zijn:

Bij de analyse van de massa's en massaverdeeling van den romp worden *die* deelen van den romp *niet* medegeteld (als afwezig opgevat), die bij *eigentrillingen van den romp*, wier *frequentie's onder* de eigenfrequentie's van het vleugelsysteem liggen, *groote* — met rompdeformatie gepaard gaande — bewegingen vertoonen *ten opzichte van* het stuk van den romp, waar de vleugel aan den romp is bevestigd. Het argument, dat aan deze niet geheel scherp geformuleerde en formuleerbare aanwijzig ten grondslag ligt, is, dat rompdeformatie's tegen elastische krachten in, die zoo klein zijn dat de door hen beheerschte eigentrilling „langzaam" is, vergeleken bij de vleugeltrillingen, een *afscher-*

[1]) Men vergete dan niet de traagheidswerking van meetrillende lucht in acht te nemen (d.i. door correctie te verwijderen).

ming van bepaalde deelen van den romp opleveren. De voor de bepaling van den romp-invloed op vleugeltrillingen *effectieve* rompmassa is daardoor geringer dan de totale massa van den romp.

17. De standtrillingsproef.

De tweede hoofd-bron van numerieke grondslagen voor berekeningen op het gebied van onstabiele trillingen vormt de *standtrillingsproef*. Het is zaak, deze *proef met de grootst mogelijke zorg uit* te voeren, daar alleen dàn bruikbare en betrouwbare resultaten worden verkregen. Eenige *richtlijnen* voor de proef zijn opgenomen in een apart N.L.L.-rapport (*lit.* 22), waaraan de navolgende aanwijzingen ten deele zijn ontleend:

a. De meest doelmatige *aandrijving* van *symmetrische* vleugeltrillingen wordt verkregen door een centrifugaalkracht-generator (kortweg „trilbron"), *die een sinusvormig met den tijd variëerende kracht van constante richting* levert, *in of aan den romp te bevestigen*, zóó, dat de *trilkrachtvector* [1]) verticaal is en *precies* in het symmetrievlak van het vliegtuig ligt. Het is geschikt, een opstelling *in het voorste deel van den romp* te kiezen, b.v. bij, of nog iets voor, den *vleugelneus*. Nog beter is het, met *twee* opstellingen; één meer naar achteren (b.v. bij den achterrand van den vleugel) en één voorlijk gelegen opstelling, proeven uit te voeren. Men schakelt daardoor het risico, dat bepaalde symmetrische trillingsvormen niet voldoende duidelijk te voorschijn worden gebracht, uit. Zie overigens *lit.* 22.

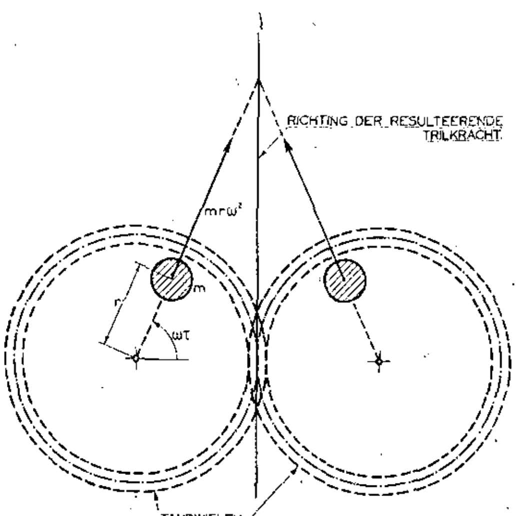


Fig. 6. Centrifugaalkracht „trilbron", die een sinusvormig met den tijd varieerende trilkracht van onveranderlijke richting levert.

b. De meest doelmatige *aandrijving* van *antisymmetrische trillingen* wordt verkregen door een centrifugaalkracht-generator, die een *sinusvormig met den tijd variëerend koppel*, dat steeds in één *vlak* werkt, levert [2]), zóó aan of in den romp te bevestigen, dat het vlak van het trilkracht-koppel precies loodrecht op de langs-as van den romp staat. De plaats van de trilbron komt er, buiten deze aanwijzing, minder op aan. Men kan de antisymmetrische trillingen ook aandrijven met een generator als bedoeld onder a. Dan zorge men ervoor, dat de trilbron zóó wordt opgesteld, dat de trilkracht loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig staat, en dat haar moment om de zwaartepunts-(langs-)as van het vliegtuig *zoo groot mogelijk* is. Het minder fraaie van deze wijze van aandrijven is, dat zij ongewenschte, voor het gestelde doel van geen belang zijnde *trillingsvormen* te voorschijn brengt.

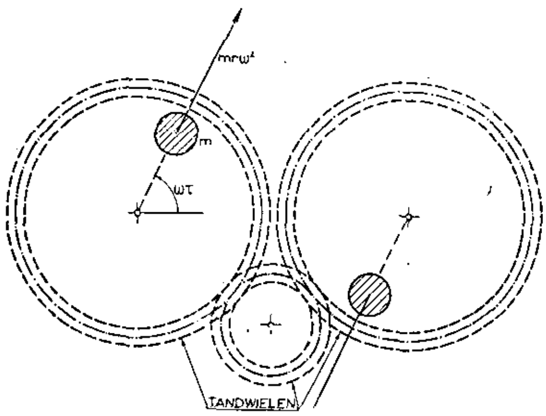


Fig. 7. Centrifugaalkracht „trilbron", die een sinusvormig met den tijd varieerend koppel, onveranderlijk in het vlak van teekening gelegen, levert.

c. Het vliegtuig wordt *steeds* op zéér slappe veeren afgesteund opgesteld, of in slappe veeren opgehangen. Deze veeren moeten zoo slap zijn, dat zij onder *het gewicht van het vliegtuig* 1 à 2 cm worden ingedrukt of uitgerekt. Er moet met de grootst mogelijke zorg naar gestreefd worden, dat de afsteuning (ophanging) *dynamisch exact symmetrisch is t.o.v. het symmetrievlak van het vliegtuig* (door symmetrische plaatsing van paarsgewijs even sterke veeren). Het is doelmatig, de opstelling zoo te maken, dat zij ook symmetrisch is t.o.v. van een vlak door het zwaartepunt van het vliegtuig, loodrecht op de langs-as (dit is niet noodig, wanneer de symmetrische trillingen worden onderzocht met twee behoorlijk verschilde opstellingen van de trilbron).
Houdt men aan de gegeven aanwijzingen niet nauwkeurig de hand, dan bestaat het gevaar dat in één proef zoowel symmetrische als antisymmetrische trillingsvormen — beide met groote amplitude (!) — optreden, hetgeen de *identificatie* der eigentrillingen ernstig kan bemoeilijken.

[1]) D.i. de vector van de resultante van de krachten, die de trilbron op het vliegtuig uitoefent. Zie fig. 6.
[2]) Zie fig. 7.

d. De massa en massa-verdeeling van het systeem worden zoo noodig door het aanbrengen van ballast zooveel mogelijk in overeenstemming gebracht met den toestand der „normale vlucht". Ook hierbij moet een *nauwkeurig behoud* van *de symmetrie* worden nagestreefd, zelfs is het goed een wellicht soms aangetroffen asymmetrie in de massaverdeeling door aanbrengen van ballast te corrigeeren.

Men neemt, na verzorging van de *proefopstelling* overeenkomstig de hiervoor gegeven aanwijzingen, eerst *resonantiecurven* van het systeem op. Daarvoor zijn *amplitudemetingen* noodig, die in een betrekkelijk klein aantal (b.v. 5 punten: één aan de uiterste tip, 2 aan den voorrand en 2 aan den achterrand van den vleugel, zóó dat de beide laatste *paren* 2 aan 2 in twee dwarsdoorsneden van den vleugel liggen) punten van den vleugel worden verricht. Aan de daarvoor gebruikte instrumenten moet *vanzelfsprekend* de eisch worden gesteld, dat *hun aanbrenging de trilling niet merkbaar beïnvloedt.* Deze eisch valt in twee voorwaarden uiteen:

1. de massa van het *meetrillende deel* in het meetinstrument mag slechts zéér klein zijn, vergeleken bij de massa van een smalle (b.v. 10 cm breede) strook van den trillenden vleugel, of van het trillende vleugelonderdeel (rolroer!).
2. de *demping*, die het meetinstrument in het systeem introduceert, mag slechts zéér klein zijn, vergeleken bij de dempende krachten, die in het systeem werken.

De eerste voorwaarde ligt voor de hand, het is bovendien gemakkelijk na te gaan, in hoeverre zij vervuld is. Het is vooral de tweede voorwaarde, die soms niet in acht wordt genomen. Er bestaan b.v. tasttrillingsmetertjes, die een beweegbare pen bevatten, welke met de hand tegen het trillende onderdeel moet worden gedrukt, minstens zoo sterk, dat „dansen" wordt uitgeschakeld. Deze zijn weinig geschikt, daar een eenigszins krachtige (eventueel indirecte!) aanraking van den trillenden vleugel met de hand een demping oplevert, die de trilling, naar gebleken is, soms duidelijk merkbaar beinvloedt (verkleint). Aan de voornoemde eischen voldoen met zekerheid de eenvoudige, in fig. 8 geschetste optische amplitudemetertjes, wier werking op de nawerking van het oog berust. Zij zijn echter alleen geschikt voor de meting van vrij groote amplituden (liefst boven 0,5 mm). Zij kunnen bij een standtrillingsproef een bruikbaar hulpmiddel vormen, mits voor fijnere metingen minstens één apart — gevoeliger — instrument beschikbaar is.

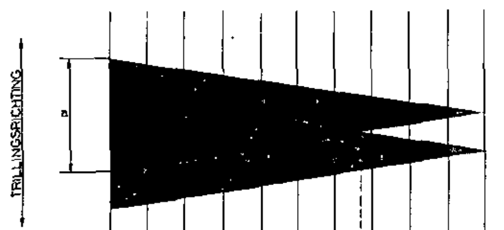
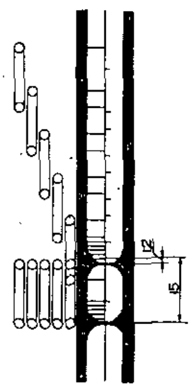


Fig. 8. Schijnbaar beeld van een wig-amplitudemeter bij een amplitude gelijk aan 0,33a.



Schijnbaar beeld van een D.V.L.-amplitudemeter bij een amplitude van
15 – 1,2 = 13,8 mm.

Nadat resonantiecurven zijn opgemeten (binnen een frequentiegebied, dat gewoonlijk kan worden beperkt tot het interval tusschen 5 en 30 Hertz), worden daarvan de toppen (resonantiepunten) vastgesteld [1]). Hierbij moet men erop verdacht zijn, dat de *bij hoogere frequentie* aanwezige toppen (fundamenteele resonantie der vleugeltorsie) in den regel veel vlakker, minder geprononceerd dus, zijn dan de toppen, die b.v. beneden ca. 20 Hertz worden aangetroffen. Men kan deze omstandigheid nauwkeuriger zoo formuleeren, dat toppen, waarin trillingsvormen optreden waarin de *buiging* van den vleugel voor een relatief groot aandeel vertegenwoordigd is, meestal veel *scherper* zijn dan toppen, waarin hoofdzakelijk uit torsie opgebouwde trillingsvormen optreden. Een en ander is een gevolg van 2 eigenschappen van de demping, die in het systeem aanwezig is. Deze is in de eerste plaats véél grooter voor torsietrillingen dan voor buigings-trillingen, en in de tweede plaats neemt zij iets toe naarmate de frequentie hooger is.

De gevonden *resonantie-frequentie's* worden vervolgens *opnieuw ingesteld*, teneinde de daarin optredende *trillingsvormen* ditmaal *nauwkeurig en volledig te onderzoeken*. De daarvoor noodige amplitudemetingen worden uitgevoerd overeenkomstig de onderstaande *richtlijnen*:

a. Men voert steeds *paren* metingen uit in punten, die *in één dwarsdoorsnede* van den vleugel aan den vóór- en den achterrand liggen. Twee van zulke metingen leveren tezamen op eenvoudige wijze de draai-amplitude van den vleugel bij de betreffende doorsnede.

b. Men meet uitsluitend op *ribben of liggers* van den vleugel, en niet in punten, gelegen midden in op het rib-liggersysteem uitgespannen paneelen. Daardoor wordt vermeden dat plaatselijke, „toevallig" versterkte trillingen van een stuk van de

[1]) Deze toppen liggen *nagenoeg* bij de *eigenfrequentie's* van het systeem. Wordt de trilling aangedreven door een centrifugaalkracht-generator, dan is er een gering verschil, dat in no. 18 wordt berekend. Men kan hiervoor een kleine correctie op de *resonantie*frequentie's aanbrengen.

vleugelhuid in de metingen worden opgenomen, hoewel zij vanzelfsprekend geen enkele beteekenis hebben.

c. Er is geen reden, om te trachten uiterst kleine trillingen bij den vleugelwortel, of trillingen van den romp, nauwkeurig te meten. Dergelijke metingen heeft men n.l. niet noodig, en mochten zij al gelukken, dan zijn zij vaak toch niet bruikbaar. Een uitzondering kan zich voordoen *bij sommige trillingsvormen* van vleugels, waarin motoren zijn ondergebracht. De motoren hebben n.l. een zóó groote massa, dat zij ook bij zeer kleine amplitude een niet te verwaarloozen aandeel in de kinetische energie van het complete systeem leveren. Zoo'n geval *kàn* [1]) een moeilijk probleem opleveren, daar de meetnauwkeurigheid en vooral de „storingsvrijheid" te klein kan worden. In zoo'n geval is een nadere *theoretische analyse van de standtrillingen* van het systeem, te voeren volgens bekende methoden der *trillingsleer* (men zie b.v. *lit.* 16, 19 en 20), op zijn plaats. De laatste werkwijze levert nauwkeuriger uitkomsten dan twijfelachtige metingen van te geringe amplituden.

d. Men stelt nauwkeurig de ligging vast van de *knooplijnen* van den trillingsvorm. (Zie *lit.* 20 en 22.)

De aard der aandrijving, de resonantiefrequentie en den trillingsvorm leveren tezamen het materiaal, op grond waarvan de gevonden resonantietrillingen worden *geïdentificeerd.* Nadere *richtlijnen* hiervoor worden hier niet vermeld, men zie b.v. *lit.* 22).

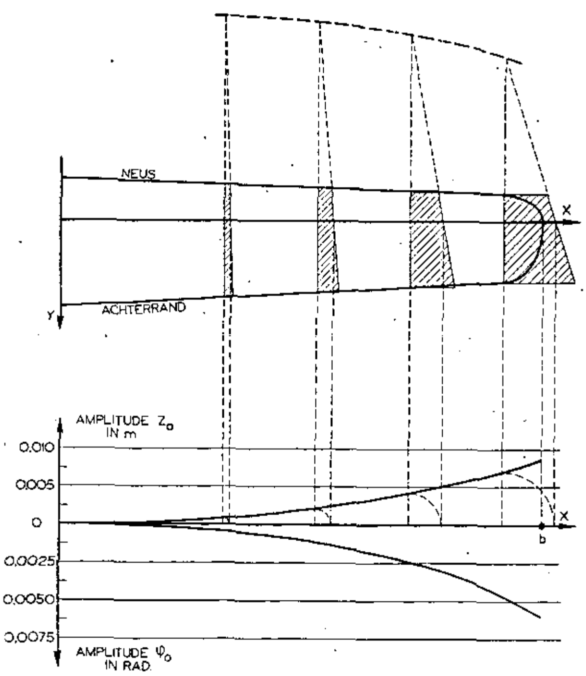


Fig. 9. Voorbeeld van vleugeltrilling en bijbehoorende amplitudeverdeelingsfunctie's.

Tenslotte worden aan die resonantie-trillingsvormen (= eigentrillingsvormen), die men bij de berekening van de kritische snelheid in aanmerking wenscht te nemen, *deformatie-functie's* ontleend. Ter toelichting van een geschikte werkwijze moge worden ondersteld, dat door de proef een eigentrilling is gevonden van de in fig. 9 geschetste gedaante. Men kan hieraan aanvankelijk amplitudeverdeelingsfunctie's z_o en φ_o ontleenen, die resp. de amplitude (b.v. in m) ter plaatse van de beschrijvings-as en de draai-amplitude (b.v. in radialen) als functie van x (in m) geven (zie fig. 9).

Bij deze functie's moeten de deformatiefunctie's worden aangepast. Het is geschikt, daarbij niet de oorspronkelijke schalen aan te houden, doch deze zóó te wijzigen, dat

— òf de deformatie's bij den vleugeltip gelijk aan één worden. D.w.z. de schaal bij de amplitudeverdeelingscurve der buiging wordt zoo gewijzigd, dat $z_o(b) = 1$ lengte-eenheid (m) wordt, en die bij de curve der vleugeltorsie zóó, dat $\varphi_o(b) = 1$ (radiaal) wordt

— òf de integralen

$$\int z_o^2\,dx \quad \text{en} \quad \int \varphi_o^2\,dx$$

resp. gelijk aan 1 (m³) en gelijk aan 1 (m) worden. Deze reductie wordt tot stand gebracht, door, eerst $\int z_o^2dx$ en $\int \varphi_o^2dx$ *direct* uit de amplitudeverdeelingscurven te bepalen. Zijn de uitkomsten resp. x_1(m³) en x_2(rad²m), dan deele men de schaalwaarden op de z_o-as (in m) door $\sqrt{x_1}$, en de op de φ_o-as door $\sqrt{x_2}$.

De reductie, beschreven onder 1o, passe men toe in de berekeningen, beschreven in de nummers 71, 72, 912 en 92 [1]), en die, genoemd onder 2o. bij de *overige berekeningen.*

De *gereduceerde* amplitudeverdeelingsfunctie's zijn identiek met of dienen bij benadering aan te sluiten bij overeenkomstige deformatie-functie's. De reductie op deformatie-functie's heeft de *verhouding,* waarin buiging en torsie in een eigentrilling optreden, uit het beeld dat deze functie's van de deformatie geven, verwijderd. Deze wordt als volgt apart vastgelegd:

Wordt de eigentrilling gedefiniëerd door

$$z_k = \sum_i (\bar{q}_{io})_k\, z_i \qquad \varphi_k = \sum_i (\bar{Q}_{io})_k\, \varphi_i$$

dan geeft $\dfrac{z_k}{\varphi_k}$ den afstand van de *knooplijn* der eigentrilling tot de beschrijvings-as. (Het quotiënt moet positief worden gerekend, wanneer de beschrijvings-as vóór ligt.) Wanneer de functie's z_i

---

[1]) Heel vaak vormt zich in de „motordoorsneden", of vlak daarbij, een *knooplijn,* waardoor de motortrilling vrijwel nul wordt (men behoeft dan ook de *massa* daar ter plaatse niet nauwkeurig te weten!). Er zijn echter ook altijd trillingsvormen, waarbij de motor in het bijzonder de torsietrilling van den vleugel nog merkbaar medemaakt.

[1]) Omdat in deze berekeningen integralen over den vleugel door een apart gedefiniëerden factor N gereduceerd worden.

de dimensie van *meters* hebben, en φ_i die van radialen, geeft het quotiënt $\dfrac{\sum\limits_i (\bar{q}_{io'})_k z_i(x)}{\sum\limits_i (\bar{Q}_{io'})_k \varphi_i(x)} = \lambda_k(x)$ de knooplijnafstand eveneens in *meters*.

Wordt de eigentrilling gedefiniëerd door

$$z = z_i \qquad \varphi = C_i \varphi_i$$

dan moet C_i gelijk worden genomen aan het *getal* $\dfrac{z_i(x)}{\lambda_i(x)\varphi_i(x)}$, waarin $\lambda_i(x)$ den bovenbedoelden afstand van de knooplijn van de betreffende eigentrilling, als functie van x, in m geeft (wanneer de m overal als lengte-eenheid wordt gebruikt).

18. De bepaling van dempingsparameters.

Dempingsparameters kunnen op tweeërlei wijze worden bepaald:

a. uit de scherpte van de toppen der resonantiecurve,

b. uit het decrement der vrije uitslingering van het systeem na een verstoring.

181. De scherpte der toppen van de resonantiecurve.

Men stelle, dat de resonantiecurve ter plaatse van de te onderzoeken top kan worden vergeleken met de mathematische resonantiecurve van het systeem met één graad van vrijheid, gedefiniëerd door de vergelijking [1])

$$m\ddot{u} + k(1 + i\alpha)u = P\nu^2 e^{i\nu\tau} \qquad (355)$$

welke de oplossing

$$u = \frac{\frac{1}{m} P\nu^2}{\sqrt{(\nu_o^2 - \nu^2)^2 + \alpha^2 \nu_o^4}}\, e^{i(\nu\tau + \varepsilon)} \qquad (356)$$

heeft, waarin ε een phaseverschil is en ν_o de „*ongedempte eigenfrequentie*" $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

De amplitude u wordt *maximaal* voor

$$\nu = \nu_{res} = \nu_o \sqrt{1 + \alpha^2}$$

zoodat de resonantiefrequentie iets *boven* de ongedempte eigenfrequentie ligt. De *resonantie-amplitude* bedraagt

$$(u_o)_{\nu=\nu_o} = \frac{P}{m} \cdot \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\alpha} \simeq \frac{P}{m\alpha} \qquad (357)$$

Bereken nu, hoeveel de frequentie moet worden gewijzigd, om de amplitude tot de halve resonantie-amplitude terug te brengen. Deze frequentiewijziging $\nu - \nu_o = \Delta\nu$ wordt bepaald door een vergelijking

$$\tfrac{1}{2}\frac{P}{m}\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} = \frac{\frac{1}{m}P(\nu_{res} + \Delta\nu)^2}{\sqrt{[\nu_o^2 - (\nu_{res} + \Delta\nu)^2]^2 + \alpha^2\nu_o^4}}$$

waaruit volgt (zoolang $\Delta\nu$ veel kleiner is dan ν_{res})

$$\Delta\nu \simeq \pm \tfrac{1}{2}\alpha\nu_o\sqrt{3} \qquad (358)$$

[1]) In het *rechterlid* is een factor $P\nu^2$ aangebracht, omdat ondersteld wordt, dat de aandrijving geschiedt met een *centrifugaalkracht-generator*, die een quadratisch met de frequentie toenemende krachtamplitude afgeeft.

zoodat men door meting van $\Delta\nu$ de waarde van α kan vaststellen. De berekening is feitelijk alleen correct, wanneer α niet van de amplitude afhangt. Wordt vermoed, dat dit wèl het geval is, dan neme men b.v. een drietal resonantiecurven op, waarbij de trilling met *verschillende trilkrachtamplituden* wordt aangedreven. Dan ontstaan in hoofdzaak gelijkvormige, doch natuurlijk in *absolute grootte* der amplituden onderling verschillende resonantiecurven.

Vervolgens neemt men de intervallen $\Delta\nu$ (met voordeel) wat *kleiner*, d.w.z. men vergelijkt de frequentie, waarbij de top ligt, met frequentie's, waarbij de amplitude niet tot de helft, maar b.v. tot $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$ van de resonantie-amplitude is teruggeloopen. De daaruit voor de drie resonantiecurven *voor een overeenkomstigen top* berekende waarden van α kunnen dan geacht worden te behooren bij amplituden, achtereenvolgens gelijk aan de *gemiddelden* der beide amplituden, uitgaande waarvan iedere α is berekend. Men vindt zoo 3 punten voor het functioneele verband tusschen de waarde van den dempingsparameter en de amplitude, op grond waarvan men zich een denkbeeld van dit verband kan maken [1]). Vermeld moet worden, dat de resonantiecurven van een vleugel in den regel door allerlei „storingen" vervormd zijn, zoodat de waarden, die men er voor den dempingsparameter uit afleid, meestal niet erg nauwkeurig zijn.

Men stelle α_B *steeds gelijk aan* den parameter, die men overeenkomstig het gegeven voorschrift afleidt uit den resonantietop der *fundamenteele buigingseigentrilling*. Wat den parameter α_φ betreft, moet worden gezorgd, dat (vergelijk b.v. (133) i.v.m. (122)):

$$e^2 c(1 + i\alpha_B) + M_\varphi(1 + i\alpha_\varphi) = k(1 + i\alpha_T)$$

waarin α_T de dempingsparameter is, berekend uit den top der *fundamenteele torsieresonantie*.

Daaruit volgt

$$\alpha_\varphi = \alpha_T + \frac{e^2 c}{M_\varphi}(\alpha_T - \alpha_B) \qquad (359)$$

Wordt de demping door bemiddeling van *complexe eigenfrequentie's* ingevoerd (zie b.v. no. 73), dan geschiedt dit door aansluiting te construeeren bij de *vrije* trilling, die het systeem (355) vertoont, wanneer $P = 0$ wordt gesteld. Men substitueert

$$u = u_o e^{i\bar{\nu}\tau} \qquad (360)$$

en vindt:

$$-m\bar{\nu}^2 + k(1 + i\alpha) = 0$$

of, daar $\dfrac{k}{m} = \nu_o^2$

$$\bar{\nu}^2 = \nu_o^2(1 + i\alpha). \qquad (361)$$

Men moet het quadraat der *complexe eigenfrequentie* dus gelijk nemen aan het quadraat der ongedempte eigenfrequentie, vermenigvuldigd met $1 + i\alpha$, waarbij α bepaald is uit de *betreffende* top der resonantiecurve.

[1]) Men kan desgewenscht extrapoleeren tot aan de door vleugelbreuk gedicteerde grens.

182. *Het decrement der vrije uitslingering.*

Het denkbeeld, de demping af te leiden uit de *vrije uitslingering* van het systeem ligt voor de hand. De *uitvoering* is echter allerminst eenvoudig, in het bijzonder voor de demping op torsietrillingen. In de eerste plaats bevat de vrije trilling in den regel minstens twee componenten. Deze moet men voldoende uit elkaar trachten te houden door de *aanvangsdeformatie* eenigermate in overeenstemming te kiezen met den trillingsvorm van de te onderzoeken component. Het lijkt n.l. niet erg waarschijnlijk, dat men beide dempingsparameters uit *één* registratie van een „gemengde" uittrilling *zal kunnen afleiden!*

Een wellicht nog belangrijker moeilijkheid doet zich voor bij de bepaling van het decrement van de antisymmetrische uittrilling, daar men er dan voor moet zorgen, dat de bakboord- en de stuurboordvleugel antisymmetrisch, dus precies in tegenphase, bewegen. Bij de symmetrische trilling kan men een analoge moeilijkheid ontgaan, door *en* den romp, *en* den „anderen" vleugel *vast te zetten* (doet men dit laatste niet, dan bestaat de kans van een energie-overdracht via den nooit geheel onbewegelijken romp van den trillenden vleugel op den „anderen" vleugel. Men denke aan de energieoverdracht tusschen gekoppelde, gelijk afgestemde slingers. Het gevolg is een foutief decrement.)

Overigens kan op de *inrichting van de proef* niet worden ingegaan. Het is in bepaalde gevallen wellicht mogelijk, een geschikte oplossing voor de geschetste moeilijkheden te vinden: de principiëele mogelijkheid der methode ligt vanzelfsprekend vast.

De afleiding van de waarden van een dempingsparameter wordt weer verkregen door aansluiting te zoeken bij het systeem van één vrijheidsgraad, gedefiniëerd door (355). De vrije trilling hiervan wordt volgens (360) en (361) gegeven door

$$u = u_0 e^{i\nu_0\sqrt{1+i\alpha}\,.\,\tau} = u_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha\tau} e^{i\nu_0\tau}$$

hetgeen een trilling is met een logarithmisch decrement (dat in afwijking van wat meer gebruikelijk is, ter vereenvoudiging van de uitwerking,

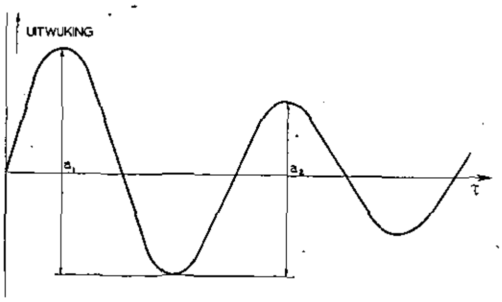


Fig. 10. Gedempte vrije uittrilling.

wordt gedefiniëerd als het tegengestelde van de natuurlijke logarithme van het quotiënt der in fig. 10 aangegeven *topafstanden* a_1 en a_2, d.i. $\delta = -\ln\frac{a_2}{a_1}$) gelijk aan

$$\delta = \frac{\alpha}{2\nu_0}. \tag{362}$$

Uit het logarithmisch decrement leidt men de waarde van α dus direct af. Een afhankelijkheid van de demping van de amplitude zal men nu bemerken uit een verandering van δ, naarmate de gemiddelde amplitude geringer wordt.

Uit α worden de in de formules optredende dempingsparameters α_B, α_T enz. bepaald op de in no. 181 beschreven wijze.

183. De demping op rolroerbewegingen.

De dempingsconstante α_r die de demping op rolroerbewegingen vastlegt, kan — althans in den symmetrischen trillingsvorm — natuurlijk eveneens uit een resonantiecurve, of uit de registratie van een vrije uittrilling, worden afgeleid. In het eerste geval komt echter alléén de curve in aanmerking, die de amplitude van de *draaiingen* van het rolroer *ten opzichte van den vleugel op de plaats* $x = b_1$ als functie van de frequentie weergeeft (dus $(\gamma_1)_0$ als functie van ν). Het is dus noodzakelijk, dat instrumenten beschikbaar zijn, die het mogelijk maken *deze* amplituden te meten. In het tweede geval moet de vrije *uittrilling* van het rolroer *ten opzichte van den vleugel* worden geregistreerd. Dit is wellicht eenvoudiger realiseerbaar, omdat het geoorloofd zal zijn *den vleugel daarbij vast te zetten.*

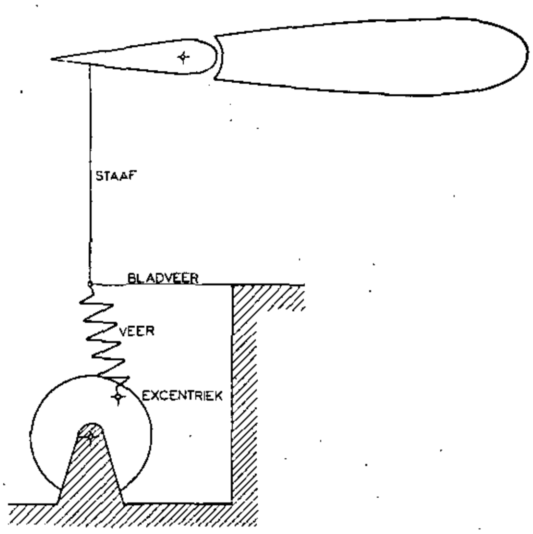


Fig. 11. Trilproef voor de bepaling van de demping op rolroerdraaiingen.

Moeilijker wordt de zaak, wanneer het rolroer geen, of geen duidelijke of eenduidige, eigentrilling vertoont, zooals in den antisymmetrischen trillingsvorm het geval kan zijn. Vermoedelijk zal de eenige doelmatige methode wel bestaan in het forceeren van een rolroertrilling met behulp van *direct* aan het rolroer bevestigde, aan het andere einde door een excentriek aangedreven, veeren. De vleugel zèlf zal vastgezet kunnen worden. De opstelling kan in principe overeenkomen met het in fig. 11 aangegeven schema.

Aannemend dat op het rolroer, of in de besturing, ditmaal in het geheel geen elastische deformatie's optreden (antisymmetrische trilling met in de besturingsruimte losgelaten en meetrillend stuurrad!), zou de beweging die ontstaat moeten kunnen worden beschreven door een formule van het type

$$-I_r \nu^2 \bar{\gamma} + i \nu \alpha_y \bar{\gamma} = a\,k \tag{363}$$

waarin a de *arm* van het excentriek, en k de constante *van de veer in het aandrijfmechanisme* is. Er zou een amplitude

$$|\bar{\gamma}| = \left| \frac{a\,k}{-I_r \nu^2 + i \nu \alpha_y} \right| = \frac{a\,k}{\nu \sqrt{I_r^2 \nu^2 + \alpha_y^2}} \tag{364}$$

moeten ontstaan. Kent men a, k, ν en I_r, dan kan men α_y berekenen. Het zou mogelijk moeten zijn, zoo ook het heele *verband* tusschen α_y en $|\bar{\gamma}|$, vast te leggen. Men kan naast (364) nog een tweede vergelijking gebruiken, wanneer het *phaseverschil* tusschen de roerbewegingen en den stand van het excentriek kan worden gemeten.

Het vermoeden bestaat, dat men, wanneer werkelijk een uitvoerig onderzoek wordt ingesteld naar de demping op rolroerdraaiingen in antisymmetrische trillingsvormen van den vleugel (of met vastgehouden vleugel *en in de bestuurdersruimte vrijgelaten rolroerstuur*), op allerlei min of meer storende complicatie's zal stuiten, die niet naar algemeene regels kunnen worden opgelost. Daarom moge de beschouwing met de vermelde suggestie worden afgesloten.

19. **De torsieproef op den vleugel.**

Een torsieproef kan op een vleugel worden verricht om vast te stellen, of eén elastische as aanwezig is, en als dat het geval is, waar die as dan ligt. De uitvoering van de proef is lang niet altijd noodzakelijk: de gegevens die men eraan wil ontleenen kunnen soms ook op andere wijze (b.v. uit de eigentrillingsvormen) worden verkregen. Het verdient daarom aanbeveling, de proef alleen dan te doen, wanneer andere methoden om de gezochte elastische eigenschappen vast te stellen, op moeilijkheden of onnauwkeurigheden afstuiten, en wanneer het bovendien op grond van algemeene overwegingen waarschijnlijk is, dat een redelijk definiëerbare elastische as aanwezig zal zijn.

Deze as wordt bij de proef gevonden als meetkundige plaats van draai-punten van de vleugelprofielen bij het aanbrengen van een *zuiver tordeerende* belasting. Een dergelijke draaipuntenlijn is *altijd* aanwezig, zij vormt echter eerst een elastische as, wanneer de ligging *onafhankelijk* blijkt te *zijn van de verdeeling der tordeerende belasting* over de vleugelbreedte. Daarom moet de proef zóó worden uitgevoerd, dat *achtereenvolgens* in verschillende dwarsdoorsneden van den vleugel (b.v. de doorsneden $x = 0{,}3\,b$; $x = 0{,}5\,b$; $x = 0{,}7\,b$ en $x = 0{,}9\,b$) tordeerende *koppels* op den vleugel worden aangebracht (de *kracht*-resultante moet, om vleugelbuiging te voorkomen, exact *nul* zijn), en dat bij *ieder van deze belastingen* de draaipuntenlijn, waarom de vleugel tordeert, wordt opgemeten. Vallen deze lijnen geheel of nagenoeg samen, dan is een elastische as aanwezig, wier positie door de draaipuntenlijnen wordt gegeven.

Het kan aanbeveling verdienen, bij de proef *beide* vleugels (de bakboord- en de stuurboordvleugel) te belasten, men kan dan nog verschil maken tusschen symmetrische en antisymmetrische belastings-vormen. Vooral de antisymmetrische belastings-vormen kunnen bij zorgvuldige uitvoering scherp-uitkomende resultaten opleveren.

20. **Enkele opmerkingen over de numerieke uitwerking der berekeningen.**

Daar de numerieke uitwerking de uiterste specialisatie van de in deze verhandeling beschreven rekenmethoden vormt, spreekt het vanzelf, dat hiervoor niet meer dan enkele zeer algemeene aanwijzingen kunnen worden gegeven.

Alvorens hiertoe echter wordt overgegaan, moge een algemeene opmerking naar voren worden gebracht, die wellicht al veel eerder gemaakt had moeten worden. Deze opmerking heeft betrekking op een schijnbare onevenredigheid tusschen de uitvoerigheid en zorgvuldigheid, waarmede de algemeene formules zijn uitgewerkt, en de nauwkeurigheid van de numerieke uitkomsten, die zij kunnen leveren. Immers: een der belangrijkste grondslagen van alle rekenmethoden, die werden ontwikkeld, vormt de bruikbare, doch zeker niet geheel juiste hypothese, dat de luchtkrachten op den vleugel aan de „twee-dimensionale theorie" kunnen worden ontleend. Het is in het bijzonder het gebruik van deze hypothese, die de nauwkeurigheid van *alle numerieke uitkomsten beperkt en die* het noodig maakt, een behoorlijke veiligheidsmarge in acht te nemen. Waar het eenmaal noodig is, een dusdanige benadering — die overigens gelukkig nog zéér bruikbare resultaten op kan leveren — in te voeren, lijkt het in ieder geval geoorloofd, bij de verdere uitwerking allerlei compliceerende kleinigheden, die veel *minder* invloed hebben, door verwaarloozing of anders ingerichte vereenvoudiging te verwijderen. Het is deze zonder twijfel aanwezige mogelijkheid, die schijnbaar bij de ontwikkeling *van de in deze* verhandeling beschreven rekenmethoden niet in het oog gehouden is. Want alle berekeningen zijn door strikte en praktische exacte ontwikkeling hunner elementaire grondslagen opgebouwd, waarbij de invoering van gewoonlijk wel genoemde vereenvoudigingsmogelijkheden bijna altijd is vermeden. Deze werkwijze doet denken aan de uitwerking eener berekening in zes decimalen, terwijl men weet, dat de derde reeds onnauwkeurig is.

Het hierboven omschreven bezwaar is echter toch *niet houdbaar*. Want hoewel zonder twijfel vaak allerlei vereenvoudigingen op de berekeningen toelaatbaar zijn, kunnen de in de praktijk aangetroffen verhoudingen zóó uitéénloopen, dat het niet mogelijk is in algemeenen vorm vast te stellen, welke vereenvoudigingen *in concrete gevallen* toegelaten kunnen worden. Deze mogelijkheden kan men pas overzien, wanneer het getallenmateriaal beschikbaar is. Daarom was het toch verreweg het beste, de algemeene formules zoo nauwkeurig mogelijk te houden en op vermoedelijk vaak in aanmerking komende benaderingen apart — in een commentaar — de aandacht te vestigen. Het is deze staat van zaken, waarop nog eens in het bijzonder in de eerste der hieronder vermelde, aan de praktijk der numerieke uitwerking ontleende aanbevelingen de aandacht wordt gevestigd:

a. Vooràl bij de bewerkelijke berekeningen voor systemen met drie „graden van vrijheid" make men gebruik van alle vereenvoudigingsmogelijkheden, die op grond van theorie of getallenmateriaal toelaatbaar blijken te zijn. Hieronder valt de verwaarloozing van quadraten van kleine parameterwaarden, de gelijkstelling van slechts onbeteekenend verschillende deformatievormen, de uitbuiting van interpolatie-methoden bij de berekening van nauw verwante integralen over den vleugel, de verwaarloozing van demping op vleugelbuiging, de vervanging van weinig varieerende parameters door constanten, enz. Vanzelfsprekend is hierbij de grootste zorgvuldigheid geboden: wanneer de toelaatbaarheid van een bepaalde vereenvoudiging niet vooruit kan worden beoordeeld, vereenvoudige men beter *niet*.

b. Het is wenschelijk de heele berekening uitvoerig in tabellen uit te voeren, zóó, dat een snel overzicht in ieder stadium mogelijk is, en vooral contrôles zooveel mogelijk worden vergemakkelijkt. Bij numerieke berekeningen van de onderhavige bewerkelijkheid zijn rekenfouten nauwelijks geheel uit te sluiten (tenzij *alles* in *duplo* wordt uitgerekend), dergelijke fouten komen in den regel in bepaalde stadia der berekening te voorschijn en moeten dan zoo gemakkelijk mogelijk opgezocht en gecorrigeerd kunnen worden.

c. Na voltooiing van bepaalde onderdeelen of stadia der berekening schakele men *contrôlegrafieken* op de „strooking" van uitkomsten in. Het komt herhaaldelijk voor, dat tusschen bepaalde berekende getallen een gecompliceerd analytisch verband moet bestaan, dat door de constructie van een grafiek te voorschijn moet kunnen worden gebracht.

d. Wanneer de *karakteristieke vergelijking* eenmaal is opgelost en dus een of meer groepen van *kritische* waarden van V en ν zijn vastgesteld, moet substitutie van deze getallen in de coëfficiënten der homogene lineaire vergelijkingen voor de *amplituden* van de *kritische* trilling deze vergelijkingen *onderling afhankelijk* maken. Men verifiëere dit steeds, door de amplituden der kritische trilling uit twee *verschillende* combinatie's van vergelijkingen op te lossen, die ieder uit het complete stel worden verkregen door *één* der vergelijkingen buiten beschouwing te laten.

e. Wanneer een apart medespelend rolroer aanwezig is zij men voorzichtig met de *interpretatie* van meervoudige groepen *kritische* parameterwaarden. Men lette in het bijzonder op den invloed, dien de demping kan hebben. Het kan noodzakelijk zijn, de heele berekening uit te voeren voor verschillende waarden van de dempingsparameters.

Tenslotte moge nog even de *gang* der berekening schematisch worden aangeduid. Het uitgangspunt vormen de beide reëele vergelijkingen

$$\Delta = 0 \qquad \Delta' = 0 \tag{365}$$

waarin de karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} A_{11} + iA_{11}' & A_{12} + iA_{12}' & \dots \\ A_{21} + iA_{21}' & A_{22} + iA_{22}' & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \tag{366}$$

kan worden *gesplitst*. De *beide* vergelijkingen (365) kunnen *altijd* worden opgevat als geheele, rationale, algebraïsche uitdrukkingen van *beperkten* graad in ν^2. Heel vaak is minstens één der vergelijkingen een *vierkantsvergelijking* voor ν^2. Men bepaalt nu de *coëfficiënten* dezer uitdrukkingen, die gecompliceerde functie's van V zijn, voor een serie geschikt gekozen — de kritische waarde naar verwacht màg worden *insluitende* — waarden van V. Men verkrijgt dan een kleine serie vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta(\nu^2, V_1) = 0 & \Delta'(\nu^2, V_1) = 0 \\ \Delta(\nu^2, V_2) = 0 & \Delta'(\nu^2, V_2) = 0 \\ \dots & \dots \\ \Delta(\nu^2, V_n) = 0 & \Delta'(\nu^2, V_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{367}$$

n kan b.v. gelijk zijn aan 4 tot 10, al naar het van te voren mogelijk was, de kritische waarde(n) van V in een min of meer groot interval te localiseeren (b.v. door ruwe benaderingsmethoden).

Men losse nu de vergelijkingen $\Delta' = 0$ naar ν^2 op. *Alleen* de *reëele en positieve* wortels zijn van belang, andere wortels kunnen buiten beschouwing blijven. De uitkomst bestaat uit een serie waarden:

$$\left.\begin{array}{l} \nu_{11}^2, \nu_{12}^2 \dots \nu_{1m}^2 \\ \nu_{21}^2, \nu_{22}^2 \dots \nu_{2m}^2 \\ \dots \\ \nu_{n1}^2, \nu_{n2}^2 \dots \nu_{nm}^2 \end{array}\right\} \tag{368}$$

waarin m *hoogstens* gelijk is aan den *graad* der vergelijkingen $\Delta' = 0$ in ν^2. Men substitueert de getallen (368) vervolgens in de overeenkomstige uitdrukkingen $\Delta(\nu^2, V_i)$. Stelt men

$$\Delta(\nu^2, V) = H \tag{369}$$

dan is $H(\nu^2_{ik}, V_i) \equiv \Delta(\nu^2_{ik}, V_i)$ in het algemeen *ongelijk* aan nul. Men verkrijgt uit de substitutie in het algemeen m onderling al dan niet samenhangende *takken* van de *functie*

$$H = \Delta[\nu^2(V); V]$$

waarvan men een *grafiek* maakt (waarin dus H op V is uitgezet). Alle snijpunten dezer curve(n) met de $H = 0$ as leveren *kritische* waarden van V. Aan ieder dezer waarden wordt door de functie $\nu^2 = \nu^2(V)$ één kritische waarde van de frequentie ν toegevoegd.

Substitutie van een bijeenbehoorend paar *kritische* waarden van V en ν in (366) maakt de lineaire homogene vergelijkingen voor de *amplituden*, van welke vergelijkingen (366) de al dan niet omgewerkte coëfficiëntendeterminant is, onderling afhankelijk en daarmede op een constante na (de *absolute* grootte van de amplituden!) oplosbaar. De absolute grootte van de amplitude gaat eerst een rol spelen, wanneer b.v. de waarde van één of meer dempingsparameters hiervan afhankelijk wordt gesteld.

De bovenbeschreven uitwerkingsmethode is de *meest voor de hand liggende* en de *gebruikelijke*. Daarmede is niet gezegd, dat zij ook de meest *eenvoudige* (minst bewerkelijke) is. Er is reden om te vermoeden, dat *kortere*, sneller tot resultaten voerende werkwijzen mogelijk zullen zijn. Gedacht wordt aan methoden, waarbij, uitgaande van ruwe benaderingen voor verschillende onbekenden, voldoende nauwkeurige uitkomsten door „herhaalde benadering" worden verkregen. Een werkwijze, die snel genoeg convergeert (het typische kriterium voor de bruikbaarheid van iteratie-methoden) kon echter nog niet worden gevonden. Men zal zich dus voorloopig aan het geschetste schema moeten houden.

21. Samenvatting.

De structuur der in deze verhandeling beschreven methoden voor de berekening van kritische snelheden voor onstabiele vleugel- of vleugelrolroertrillingen wordt beheerscht door de navolgende — consequent aangehouden — *aannamen*:

a. Het mechanische systeem wordt opgevat als een lineair-elastisch systeem met *beperkte vormveranderingsmogelijkheden*. Meer in het bijzonder wordt de vleugel steeds geïdealiseerd tot een dunnen vleugel, waarvan het *profiel* indeformabel is (zoodat de „koorden" altijd *rechte lijnen* blijven, hoe de vleugel overigens ook vervormd is). Het rolroer wordt — voor zoover het niet als een vast aan den vleugel verbonden vleugel*onderdeel* wordt opgevat (hetgeen geoorloofd schijnt te zijn wanneer het massagebalanceerd is) — geacht de *buigingsdeformatie's* van den vleugel mee te maken, als ware het vast aan den vleugel verbonden, en géén eigen torsiedeformatie te vertoonen. Aan de besturing ervan worden de eigenschappen van een massalooze veer toegekend.

b. De luchtkrachten op het systeem worden geacht te kunnen worden verkregen door den vleugel in smalle strooken te verdeelen en op iedere strook — onder uitsluiting van inductie — die luchtkrachten aan te brengen, die volgens berekeningen op een overeenkomstig bewegende strook van een vleugel in twee-dimensionale strooming (van een incompressibele vloeistof) werken.

Het is in hoofdzaak de laatstgenoemde aanname, die een beperking der nauwkeurigheid en betrouwbaarheid der uitkomsten medebrengt, waarmede men door inschakeling van een veiligheidsmarge rekening moet houden. (Bij een overigens zorgvuldige berekening mag een veiligheidsmarge van 20—25 % voldoende worden geacht).

De *onderlinge verschillen* tusschen de exemplaren der serie beschreven rekenmethoden bestaan voornamelijk uit een *verschillende keuze* der toegelaten en/of in aanmerking genomen deformatie's. In no. 7 t/m no. 9 wordt het rolroer als afzonderlijk onderdeel van het systeem buiten beschouwing gelaten, en worden aan den vleugel deformatie's toegekend, die exact, of zoo goed mogelijk, aansluiten bij bepaalde eigentrillingsvormen van den vleugel. In daarna beschreven rekenschema's wordt het rolroer als aparte graad van vrijheid in het systeem opgenomen. *Buiten beschouwing* gelaten wordt de behandeling van den *tweedekker*.

Zoowel voor het systeem zonder, als voor dat mèt rolroer worden trillingen van den romp, (welke de trillingen van den vleugel kunnen beïnvloeden) aanvankelijk steeds verwaarloosd, waarna later *correctie's* worden beschreven, waardoor de romptrillingen in rekening kunnen worden gebracht. Hierbij is de behandeling van den antisymmetrischen trillingsvorm — welke wijzigingen eischt die *niet* de orde van grootte van correctie's hebben — ingelascht.

Alle rekenmethoden zijn er speciaal op ingericht, de resultaten eener *standtrillingsproef* in de berekening als gedeeltelijken grondslag op te nemen. Daarom kunnen de methoden, de letter der gegeven aanwijzingen volgend, alleen worden toegepast, wanneer een standtrillingsproef met den te onderzoeken vleugel is uitgevoerd. Is dit niet het geval, dan moet in de plaats daarvan een analyse worden gesteld van de elastische eigenschappen van den vleugel, welk onderzoek *volledig buiten beschouwing blijft*. Het kan echter volgens bekende werkwijzen worden uitgevoerd (zie b.v. *lit.* 19 en *lit.* 20), en de berekeningen zijn wel zoo ingericht, dat de uitkomsten dezer analyse dan zonder te veel moeite in de formules kunnen worden ingevoegd.

Er is bijzondere aandacht aan besteed, speciaal de praktische — *numerieke* — toepassing der berekening zooveel mogelijk te vergemakkelijken. Daarom zijn nagenoeg alle formules volledig uitgewerkt tot den voor de substitutie van getallen meest geschikten vorm. Bovendien zijn in de laatste nummers (no. 16 t/m no. 20) aanwijzingen opgenomen betreffende de vastlegging der *numerieke* grondslagen der berekeningen.

22. Appendix. De inachtname van de, in vergelijking met den vleugel, beperkte breedte van het rolroer.

Bij de uitwerking van rekenvoorschriften voor de behandeling van een vleugel-rolroer-systeem is in deze verhandeling bij voortduring de overigens niet ongenoemd gebleven *complicatie* buiten beschouwing gelaten, dat het rolroer zich niet over de volle breedte van den vleugel behoeft uit te strekken. Alle formules zijn feitelijk in een vorm uitgewerkt, die — naar den letter opgevolgd — alleen geldt voor het eenvoudige geval, dat het rolroer even breed is als de vleugel. Het is de bedoeling in dezen appendix nog even nauwkeurig te vermelden, hoe de eindformules moeten worden gehanteerd, wanneer men deze wellicht niet altijd gewenschte vereenvoudiging wil vermijden.

In de einduitkomsten (tabel 3, tabel 4 en (340)) wordt de *massa-verdeeling* van het systeem gerepresenteerd door symbolen M_{ik}, U_{ik} en/of u_{ik}, terwijl de *aerodynamische eigenschappen* [1]) de vele termen met geïndiceerde parameters μ of λ, voor het overgroote deel vermenigvuldigd met een functie R_n ($n = 1 \ldots 38$) van de koordeverhouding η, opleveren. De μ's en λ's definieeren integralen over de vleugelbreedte, en de factoren R_n konden aan deze integratie's worden onttrokken, omdat in de praktijk der berekening η als een constante kan worden behandeld. Oorspronkelijk echter hoort iedere functie R_n in de einduitkomsten thuis ònder het integraalteeken, dat de μ of λ definieert, waarmede *die* R_n is vermenigvuldigd. Zoo is b.v. de term (uit de in no. 11 beschreven berekening):

$$R_7 \mu_{13} \equiv R_7 \int m_L t z_1 dx \qquad (370)$$

verkregen uit de integraal $\int R_7 m_L t z_1 dx$. Is het rolroer nu *smaller* dan de vleugel; strekt het zich b.v. slechts uit van $x = b_r$ tot $x = b$ (= vleugeltip), dan moet i.p.v. (370) *eigenlijk* worden geschreven:

$$R_7 \mu_{13} \equiv \int_0^{b_r} R_7 m_L t z_1 dx + \int_{b_r}^{b} R_7 m_L t z_1 dx \simeq$$

$$\simeq R_7(0) . \int_0^{b_r} m_L t z_1 dx + R_7(\eta) \int_{b_r}^{b} m_L t z_1 dx \qquad (371)$$

immers kan men zich aan het stuk van den vleugel *binnen het rolroer* (d.i. *het stuk* $0 \leqq x \leqq b_r$) een „rolroer met koorde nul" (dus $\eta = 0$) bevestigd denken. Wat de „aerodynamische" termen in de eindformules betreft, is de zaak daarmede in principe opgelost. Men moet iedere μ en λ, die als factor van een functie R_n optreedt, splitsen in deelen

$$\left.\begin{aligned} (\mu_{xx}{}^{xx})_I &= \int_0^{b_r} m_L \ldots dx \\ (\mu_{xx}{}^{xx})_{II} &= \int_{b_r}^{b} m_L \ldots dx \\ (\lambda_{xx}{}^{xx})_I &= \int_0^{b_r} m_L \xi \ldots dx \\ (\lambda_{xx}{}^{xx})_{II} &= \int_{b_r}^{b} m_L \xi \ldots dx \end{aligned}\right\} \qquad (372)$$

en vervolgens iedere term

$$\left.\begin{aligned} &R_n \mu_{xx}{}^{xx} \text{ vervangen door} \\ &\qquad R_n(0) . (\mu_{xx}{}^{xx})_I + R_n(\eta) . (\mu_{xx}{}^{xx})_{II} \\ &\text{en} \\ &R_n \lambda_{xx}{}^{xx} \text{ vervangen door} \\ &\qquad R_n(0) . (\lambda_{xx}{}^{xx})_I + R_n(\eta) . (\lambda_{xx}{}^{xx})_{II} \end{aligned}\right\} \qquad (373)$$

De definitie van *die* μ's en λ's, die in de eindformule *zonder faktor* R_n voorkomen (N.B.: er zijn *geen* μ's en λ's, die *zoowel* mèt *als* zonder R_n voorkomen) kan onveranderd (ongesplitst) worden gelaten: zij definieeren dus direct integralen over den geheelen vleugel (van $x = 0$ tot $x = b$).

Wat de „aerodynamische termen" betreft, is de hierboven gegeven aanwijzing in principe voldoende. *Zij* stelt de noodzakelijke wijziging echter bewerkelijker voor, dan zij in werkelijkheid is. De zaak wordt n.l. zeer vereenvoudigd doordat alle R_n's ($n = 1 \ldots 38$) voor $n = 0$ *nul* worden, met uitzondering van (zie tabel 2):

$$R_1(0) = 1\,;\; R_2(0) = 0{,}5\,;\; R_3(0) = 1{,}0\,;$$
$$R_{15}(0) = -0{,}5\,;\; R_{16}(0) = 0{,}5 \qquad (374)$$

$$R_4{}^{-}(0) = R_{19}{}^{-}(0) = R_{24}{}^{-}(0) -$$
$$- \frac{8 \ln \eta_s}{\pi^2} = - R_{31}{}^{-}(0) = \infty \qquad (375)$$

Nu gaan de vergelijkingen (373) voor *die* R_n's, die voor $\eta = 0$ nul zijn, over in

$$\left.\begin{aligned} R_n \mu_{xx}{}^{xx} &= R_n(\eta) . (\mu_{xx}{}^{xx})_{II} \\ R_n \lambda_{xx}{}^{xx} &= R_n(\eta) . (\lambda_{xx}{}^{xx})_{II} \end{aligned}\right\} \qquad (376)$$

Verder vindt men, dat de R_n's van het stel (375) uitsluitend voorkomen, vermenigvuldigd met een μ of λ, waaraan de indiceerende exponent Δ is toegevoegd. Als zoodanig worden *deze* μ's en λ's gedefinieerd door integralen, die achter het integraalteeken de factor c_{d_r} bevatten. Deze factor is natuurlijk nul, wanneer er geen rolroer is, zoodat de wijzigingen (373) in dit geval den bijzonderen vorm

$$R_n \mu_{xx}{}^{xx} \longrightarrow \infty . 0 + R_n(\eta) (\mu_{xx}{}^{xx})_{II}, \text{ enz.}$$

aannemen.

Daar men het onbepaalde product 0 . ∞ gelijk aan nul blijkt te moeten stellen, geldt ook voor *die* „aerodynamische termen" in de einduitkomsten, die de R_n's van het stel (375) als factor bevatten, de eenvoudige wijzigingsvergelijking (376). *Alleen de relatief weinige termen, die een der in (374) genoemde R_n's bevatten, moeten dus volgens het „volledige" voorschrift (373) worden gewijzigd.*

Wat de „traagheidstermen" in de einduitkomst betreft, moet men de noodige veranderingen aan de hand van de vergelijkingen (294a) en (337) uitzoeken. *Die* termen in deze formules, die de traagheidswerking van meetrillende lucht representeeren, kunnen naar de hiervoren vermelde aanwijzingen worden behandeld, waarbij men in het oog houde, dat in deze formules ook R_n's voorkomen met de hoogere nummers 39 .... 47. Ook van *deze* R_n's wordt het grootste deel nul voor $\eta = 0$. De uitzonderingen zijn:

$$R_{39}(0) = 0{,}25 \text{ en } R_{41}(0) = 0{,}093750 \qquad (377)$$

[1]) Met uitzondering van de bekende „traagheidswerking van meetrillende lucht", die in de „traagheids-termen" is opgenomen.

Verder merke men op, dat in (294a) en (337) uitsluitend termen met μ's, en geen „λ-termen" worden aangetroffen.

Verder bevatten de formules (294a) en (337) termen, die de massaverdeelingsfunctie's $(m_{ik})_0$ als factor bevatten. Teruggrijpend op (243) stelt men gemakkelijk vast, dat hierin formeel geen veranderingen behoeven te worden aangebracht. De beperkte breedte van het rolroer kan n.l. zonder meer bij de constructie van de functie's $(m_{ik})_0$ in acht worden genomen, waarvoor de formules (243) alle benoodigde aanwijzingen geven.

De hiermede in completen vorm verkregen aanwijzingen voor de inachtname van de — vergeleken bij den vleugel — beperkte breedte van het rolroer, worden hieronder voor ieder der in de nummers 11, 12 en 13 gegeven rekenvoorschriften apart en gedetailleerd samengevat.

22.1. Wijzigingen, aan te brengen in de in no. 11 gegeven rekenvoorschriften.

In de in tabel 3 vervatte *einduitkomst* en in de bijbehoorende formules (294a) voor de coëfficienten M_{ik} komen de navolgende μ's en λ's voor, *niet* vermenigvuldigd met een functie R_n:

$$\mu_{11},\ \mu_{12}{}^{v},\ \mu_{22}{}^{vv};\ \lambda_{11},\ \lambda_{12}{}^{v},\ \lambda_{22}{}^{vv}.$$

De definitie van deze parameters wordt *niet* gewijzigd.

Met als factor één der R_n's van het stel (374) of (377) worden aangetroffen:

$$\mu_{12},\ \mu_{22},\ \mu_{22}{}^{v};\ \lambda_{12},\ \lambda_{22},\ \lambda_{22}{}^{v}.$$

Dientengevolge moet *hun* definitie onder splitsing in twee deelen naar de aanwijzing der formule (372) worden gewijzigd, waarna iedere term, waarin zij in de einduitkomst en in de formules (294a) optreden, naar de aanwijzing van de formule (373) door twee termen wordt vervangen. Men lette er op, dat μ_{22} en λ_{22} in tabel 3 *óók* voorkomen, vermenigvuldigd met R_n's, die voor $\eta = 0$ gelijk aan nul worden, in welke gevallen (373) tot (376) wordt gereduceerd.

Van *alle overige* μ's en λ's wordt de definitie in zooverre gewijzigd, dat de integralen, waardoor zij worden gedefinieerd, *niet* over de heele vleugelbreedte, *doch slechts over dat deel, waar zich het rolroer bevindt* (d.i. van $x = b_r$ tot $x = b$) worden uitgestrekt. In de formules (294a) en in tabel 3 behoeft dan verder geen enkele verandering te worden aangebracht.

22.2. Wijzigingen, aan te brengen in de in no. 12 gegeven rekenvoorschriften.

In de in tabel 4 vervatte einduitkomst en in de bijbehoorende formules (337) voor de coëfficienten U_{ik} en u_{ik} komen de navolgende μ's en λ's voor, *niet* vermenigvuldigd met een functie R_n:

$$\mu_{11},\ \mu_{12}{}^{v},\ \mu_{22}{}^{vv},\ \mu_{44},\ \mu_{45}{}^{v},\ \mu_{54}{}^{v},\ \mu_{55}{}^{vv},\ \mu_{77},\ \mu_{78}{}^{v},\ \mu_{88}{}^{vv}$$
$$\lambda_{11},\ \lambda_{12}{}^{v},\ \lambda_{22}{}^{vv},\ \lambda_{44},\ \lambda_{45}{}^{v},\ \lambda_{54}{}^{v},\ \lambda_{55}{}^{vv},\ \lambda_{77},\ \lambda_{78}{}^{v},\ \lambda_{88}{}^{vv}$$

Dienovereenkomstig wordt de definitie van *deze* parameters *niet* gewijzigd.

Met als factor één der R_n's van het stel (374) of (377) treft men aan:

$$\left.\begin{matrix}\mu_{12},\ \mu_{22},\ \mu_{22}{}^{v},\ \mu_{45},\ \mu_{54},\ \mu_{55}\ \mu_{55}{}^{v},\ \mu_{78},\ \mu_{88},\ \mu_{88}{}^{v}\\ \lambda_{12},\ \lambda_{22},\ \lambda_{22}{}^{v},\ \lambda_{45},\ \lambda_{54},\ \lambda_{55},\ \lambda_{55}{}^{v},\ \lambda_{78},\ \lambda_{88},\ \lambda_{88}{}^{v}\end{matrix}\right\}\quad(378)$$

Dienovereenkomstig wordt *hun* definitie onder splitsing in twee deelen naar de aanwijzing der formule (372) gewijzigd, waarna iedere term, waarin zij in de einduitkomst en in de formules (337) optreden, naar de aanwijzing van de formule (373) door twee termen wordt vervangen. Men lette erop, dat μ_{22}, μ_{45}, μ_{54}, μ_{55}, μ_{88} en de bijbehoorende λ's in tabel 4 *óók* voorkomen, vermenigvuldigd met R_n's, die voor $\eta = 0$ gelijk aan nul worden, in welke gevallen (373) tot (376) wordt gereduceerd.

Van alle *overige* μ's en λ's wordt de definitie in zooverre gewijzigd, dat de integralen, waardoor zij worden gedefinieerd, niet over de geheele vleugelbreedte, doch *slechts over dat deel van de vleugelbreedte waar zich het rolroer bevindt* (d.i. van $x = b_r$ tot $x = b$) worden uitgestrekt. In de formules (337) en in tabel 2 behoeft dan verder geen verandering te worden aangebracht.

22.3. Wijzigingen, aan te brengen in de in no. 13 gegeven rekenvoorschriften.

In de in (340) samengevatte einduitkomst en in het daarbij behoorende gedeelte der formules (337) voor de coëfficienten U_{ik} en u_{ik} komen de navolgende μ's en λ's voor, *niet* vermenigvuldigd met een functie R_n:

$$\mu_{11},\ \mu_{12}{}^{v},\ \mu_{22}{}^{vv},\ \lambda_{11},\ \lambda_{12}{}^{v},\ \lambda_{22}{}^{vv}.$$

Dienovereenkomstig wordt de definitie van deze parameters *niet* gewijzigd.

Met als faktor één der R_n's van het stelsel (374) of (377) treft men aan

$$\mu_{12},\ \mu_{22},\ \mu_{22}{}^{v},\ \lambda_{12},\ \lambda_{22},\ \lambda_{22}{}^{v}.$$

Men wijzige hun definitie en de termen in (340) en (337), waarin zij worden aangetroffen, overeenkomstig de hiervoor in no. 22.2 bij het stel (378) gegeven aanwijzingen. Voor de *overige* μ's en λ's geldt eveneens een wijzigingsvoorschrift, dat ontleend kan worden aan het hiervoor in no. 22.2 voor de overeenkomstige μ's en λ's gegevene.

23. Notatielijst.

N.B. Overal, waar hieronder sprake is van afstanden tusschen punten en assen, of tusschen assen onderling, wordt bedoeld: de betreffende afstand, *gemeten* in één dwarsdoorsnede van den vleugel, d.w.z.: gemeten in een richting evenwijdig aan de Y-as.

x, y = coördinaten in het vlak van den vleugel. Zie fig. 1, blz. 4.

z = Verplaatsing van den vleugel ter plaatse van de beschrijvings-as. Zie fig. 1, blz. 4.

φ = torsiehoek van den vleugel. Zie fig. 1, blz. 4.

γ = rolroeruitslag = plaatselijke hoek tusschen de rolroerkoorde en het verlengde van de vleugelkoorde. Zie fig. 3, blz. 37.

γ_r = rolroeruitslag t.o.v. de vleugelwortelkoorde.

γ_1 = rolroeruitslag t.o.v. een zóó gekozen vleugelkoorde, dat de deformatie's in het besturingsmechanisme van het rolroer met γ_1 evenredig gesteld kunnen worden.

z_d = verplaatsing van den vleugel ter plaatse van de beschrijvings-as, doch t.o.v. een vlak, dat draaiingen van den romp om zijn langs-as mede uitvoert.

Z = verticale verplaatsing van den romp ter plaatse van de beschrijvings-as.

Φ = draaiing van den romp om de beschrijvings-as.

Θ = draaiing van den romp om zijn langs-as.

ζ = naar boven positieve verticale verplaatsing van den voorrand van het rolroer, t.o.v. het vlak van den vleugel.

t = vleugelkoorde [1]).

t_o = gemiddelde vleugelkoorde.

t_{eff} = effectieve vleugelkoorde.

t_r = koorde van het rolroer.

b = afstand van den vleugelwortel tot de uiterste vleugeltip.

b_r = x-coördinaat van den binnenrand van het rolroer.

b_1 = x-coördinaat van de dwarsdoorsnede, waar de hoek γ_1 wordt gemeten.

c_v = afstand van de voorste neutrale as van den vleugel tot de beschrijvings-as. c_v is overal daar positief, waar de beschrijvings-as vóór ligt.

c_a = afstand van de achterste neutrale as van den vleugel tot de beschrijvings-as. c_a is overal daar positief, waar de beschrijvings-as vóór ligt.

c_m = afstand van het midden der vleugelkoorden tot de beschrijvings-as. c_m is overal daar positief, waar de beschrijvings-as vóór ligt.

1) Indien aan den vleugel een rolroer is bevestigd, wordt met vleugelkoorde steeds bedoeld: de koorde van het vlak, gevormd door vleugel en rolroer *tezamen*.

c_d = afstand van de draai-as van het rolroer tot de beschrijvings-as. c_d is positief, wanneer de beschrijvings-as vóór ligt.

c_r = afstand van den voorrand van het rolroer tot de beschrijvings-as. c_r is positief, wanneer de beschrijvings-as vóór ligt.

s_1 = afstand van de zwaartepunts-as van vleugel + rolroer tot de beschrijvings-as. s_1 is positief, wanneer de beschrijvings-as vóór ligt.

s_v = afstand van de zwaartepunts-as van den vleugel-alléén tot de beschrijvings-as. s_v is positief, wanneer de beschrijvings-as vóór ligt.

s_r = afstand van de zwaartepunts-as van het rolroer tot de draai-as. s_r is positief, wanneer de draai-as vóór ligt.

s_R = afstand van het zwaartepunt van den romp tot de beschrijvings-as. s_R is positief, wanneer de beschrijvings-as vóór ligt.

t_r = *koorde van het rolroer.*

c_{d_r} = $c_d - c_r$ = afstand van de draai-as tot den voorrand van het rolroer.

$z_1, z_2 \ldots$ = deformatie-functie's der vleugelbuiging.

$\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ = deformatie-functie's der vleugeltorsie.

$C_1, C_2 \ldots$ = verhoudings-parameters der buiging en torsie in één deformatiecomponent.

$q_1, q_2 \ldots$, $Q_1, Q_2 \ldots$ = factoren der deformatie-functie's bij een willekeurige – doch toegelaten – deformatie = gegeneraliseerde coördinaten der vleugeldeformatie's.

λ = verhoudingsparameter der buiging en torsie in een willekeurige toegelaten deformatie.

λ_B = verhoudingsparameter der buiging en torsie in den deformatie-vorm der fundamenteele buigings-eigentrilling van den vleugel.

λ_T = *verhoudings-parameter der buiging en torsie in den deformatie-vorm der fundamenteele torsie-eigentrilling van den vleugel.*

$\xi = \dfrac{t_o - t}{t}$

$\eta = \dfrac{t_r}{t}$

η_s = breedte van de spleet tusschen vleugel en rolroer, te bepalen volgens fig. 5, blz. 42.

m = massa per breedte-eenheid van vleugel + rolroer = massaverdeelings-functie van vleugel en rolroer samen.

m_v = massa per breedte-eenheid van den vleugel-alléén = massaverdeelings-functie van den vleugel-alleen.

m_r = massa per breedte-eenheid van het rolroer = massaverdeelings-functie van het rolroer.

m_R = massa van den romp.

m_L = massa per breedte-eenheid van de lucht in den aan vleugel + rolroer omschreven cylinder.

I_1 = traagheidsmoment per breedte-eenheid van vleugel + rolroer om de zwaartepunts-as van deze combinatie = verdeelings-functie van het traagheidsmoment om de zwaartepunts-as voor vleugel en rolroer samen.

I_v = traagheidsmoment per breedte-eenheid van den vleugel-alleen om de zwaartepunts-as van den vleugel-alleen = verdeelings-functie van het traagheidsmoment om de zwaartepunts-as van den vleugel-alléén.

I_r = traagheidsmoment per breedte-eenheid van het rolroer om zijn draai-as = verdeelings-functie van het traagheidsmoment van het rolroer om zijn draai-as.

I_R = traagheidsmoment van den romp om een dwars-as door zijn zwaartepunt.

I'_R = traagheidsmoment van den romp om zijn langs-as.

m_{ik} = massaverdeelings-functie's in de uitdrukking voor de kinetische energie.

b_{ik}, T = stijfheids-verdeelingsfunctie's in de uitdrukking voor de potentiëele energie.

k_r = veerconstante der rolroerbesturing.

E_{kin} = kinetische energie.

E_{pot} = potentiëele energie.

τ = tijd.

ν = frequentie.

$\nu_0, \nu_1 \dots$ = eigenfrequentie's.

ν_{res} = resonantie-frequentie.

ν_{krit} = frequentie van een kritische trilling.

ν_B = fundamenteele eigenfrequentie der vleugelbuiging.

ν_T = fundamenteele eigenfrequentie der vleugeltorsie.

v = vliegsnelheid.

v_{krit} = kritische snelheid.

V = $\frac{v}{\nu t}$ gereduceerde snelheid.

V_{krit} = kritische waarde der gereduceerde snelheid.

V_o = gemiddelde gereduceerde snelheid.

α_B = dempingsparameter op vleugelbuiging.

α_T = dempingsparameter op vleugeltorsie.

α_φ = „ op een bepaald deel der vleugeltorsie.

α'_r = „ op rolroerdraaiingen.

α_v = dempingsparameter eener quasi-snelheidsevenredige demping op rolroerdraaiingen.

α_1, α_2 = dempingsparameters op eigentrillingen van den vleugel.

$\bar{P}$ = complexe hoofdfunctie voor de niet-stationnaire luchtkrachten. $\bar{P}$ is een functie van de gereduceerde snelheid alléén.

$p_1, p_1', p_2, p_2', p_{10}, p_{11}, p_{10}', p_{11}', p_{20}, p_{21}, p_{20}', p_{21}', p_{12}, p_{22}, p_{12}', p_{22}'$ = reeks van uit de functie $\bar{P}$ afgeleide reëele functie's van V, getabelleerd in tabel 1.

$\bar{a}_{ik}$ = complexe dimensielooze luchtkrachtcoëfficiënten.

Φ_i = Küssner'sche functie's voor de luchtkrachten. Alle Φ's zijn functie's van η-alléén.

R_i = samenstellingen van functie's Φ_i, getabelleerd in tabel 2.

ϱ = luchtdichtheid.

A_{ik}, A'_{ik} = reëele, resp. complexe deelen der elementen van de karakteristieke determinant-vergelijking.

g = gravitatieversnelling.

Bovenstreepte symbolen. Een streep boven een symbool duidt aan, dat de voorgestelde grootheid in het algemeen complex is.

*De indiceerende exponent *.* Hiermede wordt de toegevoegd complexe van de door het geïndiceerde symbool voorgestelde grootheid aangegeven.

De index o. Een index o, toegevoegd aan het symbool van een coördinaat, die een verplaatsing of deformatie vastlegt, schakelt het geïnduceerde symbool om op de *amplitude* der in die verplaatsing of deformatie optredende harmonische trilling.

De integraal $\int \dots dx$. Een integraalteeken vóór een functie van de coördinaat x definiëert een integraal over het gebied van den vleugelwortel tot den tip. Dus $\int \dots dx \equiv \int_0^b \dots dx$.

Een punt boven een symbool. Een punt boven een symbool definiëert de differentiaal-operatie $\frac{d}{d\tau}$, toegepast op de door dat symbool voorgestelde variabele.

De indiceerende exponenten + en —. Als exponent aan een symbool toegevoegde indices + of — onderscheiden toestanden van het systeem, waarbij de spleet tusschen vleugel en rolroer „open" (+), dan wel „gesloten" (—) is.

24. Literatuurlijst.

1. H. Wagner. Dynamischer Auftrieb von Flugzeugflügeln. Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mech. Bd. 5 — 1925 — S. 17.

2. H. G. Küssner. Schwingungen von Flugzeugflügeln. Luftfahrtforschung Bd. 4 — 1929 — S. 41.

3. H. G. Küssner. Augenblicklicher Entwicklungsstand der Frage des Flügelflatterns. Luftfahrtforschung Bd. 12 — 1935 — S. 193.

4. B. v. Schlippe. Die innere Dämpfung. Ing. Archiv Bd. 6 — 1935 — S. 127.

5. Kassner-Fingado. Das ebene Problem der Flügelschwingung. Luftfahrtforschung Bd. 13 — 1936 — S. 374.

6. Kassner. Die Berücksichtigung der inneren Dämpfung beim ebenen Problem der Flügelschwingung. Luftfahrtforschung Bd. 13 — 1936 — S. 388.

7. H. G. Küssner. Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln. Luftfahrtforschung Bd. 13 — 1936 — S. 410.

8. G. Ellenberger. Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Bd. 16 — 1936 — S. 199.

9. H. Voigt. Windkanalversuche zum ebenen Problem der Flügelschwingung. Jahrb. d. Lilienthalgesellschaft. 1936. S. 216.

10. H. Voigt. Untersuchungen von angefachten Dreh-Biege-Tragflügelschwingungen. Luftfahrtforschung Bd. 14 — 1937 — S. 427.

11. W. J. Duncan. Galerkin's method in mechanics and differential equations. R. & M. No. 1798—1937.

12. R. A. Frazer, W. P. Jones and Sylvia W. Skan. *Approximation to functions and to the solutions of differential equations*. R. & M. No. 1799—1937.

13. D. Williams. The use of the principle of minimum potential energy in problems of static equilibrium. R. & M. No. 1827—1937.

14. G. Ellenberger. Berechnung der kritischen Geschwindigkeit für das ebene Problem eines Tragflügels *mit Querruder*. *Luftfahrtforschung* Bd. 15 — 1938 — S. 395.

15. H. Voigt. Weitere Versuche über Tragflügelschwingungen. Jahrbuch 1936 der D. V. L. S. 71.

16. A. Teichmann. *Gedankengänge zur Flatterberechnung*. Luftfahrtforschung Bd. 16 — 1939 — S. 283.

17. H. G. Küssner und L. Schwarz. Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder. Luftfahrtforschung. Bd. 17 — 1940 — S. 337.

18. H. G. Küssner. Allgemeine Tragflächentheorie. Luftfahrtforschung Bd. 17 — 1940 — S. 370.

19. R. M. Miller. Wing frequencies of monoplane wings. Journ. of the Aer. Sciences. April 1940, Vol. 7, No. 6.

20. W. Bürmann und W. Dessecker. Ueber ein besonderes Ersatzsystem zur Berechnung von Flügelschwingungen. Luftfahrtforschung Bd. 17 — 1940 — S. 314.

Rapporten van het Nationaal Luchtvaart Laboratorium.

21. J. H. Greidanus. Rapport V1146: Voorkoming van onstabiele trillingen van deelen van vliegtuigen tijdens de vlucht. (1939)

22. J. H. Greidanus. Rapport V1234: De standtrilling van den vleugel van vrijdragende éêndekkers. (1940)

23. J. H. Greidanus. Rapport V1237: De arbeid, dien de luchtkrachten per tijdseenheid op een trillenden vleugel *verrichten en de kritische trillingsvormen van een* vleugel. (1941)

Tabel 1

Functies van de gereduceerde snelheid, die de grootte der luchtkrachten op een trillenden vleugel bepalen, en de constante, de lineaire en de quadratische termen hunner Taylor-ontwikkeling [1]).

$V\ (V_o)$	$\frac{1}{2\,V}\left(\frac{1}{2\,V_o}\right)$	$p_1 \equiv p_{10}$	$p_1' \equiv p_{10}'$	$p_2 \equiv p_{20}$	$p_2' \equiv p_{20}'$	p_{11}	p_{11}'	p_{21}	p_{21}'	p_{12}	p_{12}'	p_{22}	p_{22}'
0,00000	∞	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000								
0,05000	10,0	0,00249	0,10012	0,00501	0,00012								
0,10000	5,0	0,00984	0,20096	0,02010	0,00098								
0,12500	4,0	0,01525	0,25184	0,03148	0,00191								
0,16667	3,0	0,02667	0,33753	0,05626	0,00445								
0,20000	2,5	0,03784	0,40700	0,08140	0,00757								
0,25000	2,0	0,05769	0,51295	0,12824	0,01442								
0,33333	1,5	0,09808	0,69468	0,23156	0,03269								
0,41667	1,2	0,14618	0,88327	0,36803	0,06091	0,257	0,960	0,768	0,168	0,079	0,088	0,43	0,14
0,45454	1,1	0,17019	0,97129	0,44149	0,07736	0,295	1,065	0,926	0,209	0,084	0,104	0,53	0,17
0,50000	1,0	0,20055	1,07887	0,53943	0,10027	0,342	1,195	1,140	0,270	0,090	0,126	0,66	0,22
0,51020	0,98	0,20757	1,10330	0,56290	0,10590	0,353	1,224	1,189	0,285	0,091	0,131	0,69	0,23
0,53191	0,94	0,22276	1,15563	0,61469	0,11849	0,376	1,288	1,298	0,317	0,094	0,142	0,76	0,25
0,55556	0,90	0,23967	1,21318	0,67400	0,13315	0,401	1,358	1,431	0,356	0,097	0,154	0,84	0,28
0,58140	0,86	0,25854	1,27670	0,74227	0,15032	0,429	1,436	1,581	0,399	0,100	0,167	0,93	0,31
0,60976	0,82	0,27970	1,34717	0,82145	0,17055	0,460	1,523	1,755	0,451	0,101	0,182	1,04	0,34
0,62500	0,80	0,29126	1,38537	0,86585	0,18204	0,477	1,570	1,853	0,480	0,103	0,189	1,10	0,36
0,64103	0,78	0,30354	1,42578	0,91397	0,19458	0,494	1,621	1,958	0,512	0,103	0,198	1,17	0,38
0,65789	0,76	0,31659	1,46856	0,96615	0,20828	0,512	1,674	2,071	0,546	0,104	0,208	1,24	0,41
0,67568	0,74	0,33051	1,51399	1,02297	0,22332	0,532	1,731	2,197	0,584	0,104	0,217	1,32	0,43
0,69444	0,72	0,34535	1,56222	1,08487	0,23982	0,552	1,791	2,333	0,624	0,102	0,227	1,40	0,45
0,71429	0,70	0,36120	1,61361	1,15258	0,25800	0,574	1,855	2,480	0,668	0,102	0,239	1,50	0,48
0,73529	0,68	0,37815	1,66838	1,22674	0,27805	0,597	1,926	2,647	0,717	0,101	0,249	1,60	0,51
0,75758	0,66	0,39631	1,72695	1,30830	0,30024	0,621	1,998	2,826	0,770	0,100	0,261	1,71	0,55
0,78125	0,64	0,41580	1,78964	1,39816	0,32484	0,646	2,078	3,027	0,831	0,098	0,275	1,83	0,58
0,80645	0,62	0,43674	1,85694	1,49753	0,35221	0,673	2,163	3,246	0,895	0,098	0,286	1,97	0,62
0,83333	0,60	0,45928	1,92933	1,60777	0,38273	0,702	2,253	3,483	0,967	0,094	0,300	2,13	0,66
0,86207	0,58	0,48360	2,00742	1,73054	0,41690	0,733	2,353	3,759	1,048	0,091	0,316	2,30	0,71
0,89286	0,56	0,50989	2,09187	1,86774	0,45526	0,765	2,460	4,058	1,137	0,086	0,331	2,49	0,76
0,92593	0,54	0,53835	2,18344	2,02171	0,49848	0,800	2,576	4,407	1,240	0,082	0,347	2,71	0,82
0,96154	0,52	0,56924	2,28304	2,19523	0,54735	0,837	2,702	4,791	1,351	0,076	0,365	2,95	0,88

1,00000	0,50	0,60284	2,39174	2,39174	0,60284	0,877	2,841	5,240	1,478	0,070	0,385	3,23	0,95
1,04167	0,48	0,63948	2,51081	2,61543	0,66612	0,919	2,992	5,745	1,622	0,062	0,407	3,54	1,03
1,08696	0,46	0,67953	2,64170	2,87142	0,73862	0,964	3,159	6,315	1,784	0,053	0,431	3,90	1,11
1,13636	0,44	0,72343	2,78616	3,16608	0,82207	1,012	3,343	6,966	1,972	0,045	0,452	4,31	1,20
1,19048	0,42	0,77170	2,94639	3,50761	0,91869	1,063	3,550	7,738	2,185	0,032	0,478	4,79	1,30
1,25000	0,40	0,82492	3,12488	3,90610	1,03115	1,119	3,773	8,631	2,428	0,016	0,504	5,34	1,41
1,31579	0,38	0,88381	3,32483	4,37478	1,16291	1,178	4,026	9,684	2,711	−0,004	0,532	5,99	1,54
1,38889	0,36	0,94921	3,55011	4,93072	1,31835	1,241	4,309	10,917	3,042	−0,029	0,559	6,76	1,68
1,47059	0,34	1,02211	3,80557	5,59643	1,50310	1,310	4,632	12,415	3,426	−0,054	0,589	7,68	1,84
1,56250	0,32	1,10371	4,09730	6,40204	1,72454	1,383	4,997	14,219	3,883	−0,085	0,623	8,78	2,03
1,66667	0,30	1,19546	4,43315	7,38860	1,99244	1,461	5,412	16,380	4,420	−0,125	0,653	10,11	2,24
1,78571	0,28	1,29914	4,82320	8,61283	2,31990	1,544	5,898	19,120	5,079	−0,159	0,686	11,77	2,46
1,92308	0,26	1,41696	5,28087	10,15554	2,72492	1,634	6,460	22,579	5,869	−0,213	0,721	13,81	2,72
2,08333	0,24	1,55161	5,82406	12,13343	3,23252	1,729	7,119	26,983	6,840	−0,271	0,760	16,41	3,04
2,27273	0,22	1,70658	6,47747	14,72155	3,87859	1,830	7,909	32,705	8,041	−0,336	0,775	19,76	3,37
2,50000	0,20	1,88624	7,27580	18,18950	4,71561	1,937	8,855	40,300	9,563	−0,422	0,813	24,19	3,78
2,77778	0,18	2,09637	8,26953	22,97093	5,82324								
3,12500	0,16	2,34457	9,53465	29,79578	7,32679								
3,57143	0,14	2,64129	11,19103	39,96797	9,43319								
4,16667	0,12	3,00121	13,43880	55,99504	12,50507								
5,00000	0,10	3,44604	16,63848	83,19241	17,23022								
6,25000	0,08	4,01005	21,51080	134,44247	25,06283								
8,33333	0,06	4,75314	29,73464	247,78861	39,60952								
12,50000	0,04	5,80007	46,33509	579,18863	72,50081								
25,00000	0,02	7,52079	96,37253	2409,31325	188,01975								
∞	0,00	0 × ∞	∞	∞	0 × ∞								

Opmerking: De functies p_{11} t/m p_{22}' zijn berekend uit de eerste en tweede verschillen van de functies p_1; p_1'; p_2 en p_2' en komen dus niet exact (echter wel met onbeteekenend verschil) met eerste en tweede afgeleiden overeen.

[1]) De Taylor-ontwikkelingen luiden, met $V \equiv V_o \dfrac{t_o}{t}$:

$$p_1\,(V) = p_{1o}\,(V_o) + p_{11}\,(V_o)\,.\,\frac{t_o - t}{t} + p_{12}\,(V_o)\,.\left(\frac{t_o - t}{t}\right)^2 + \ldots$$

$$p_1'\,(V) = p_{1o}'\,(V_o) + p_{11}'\,(V_o)\,.\,\frac{t_o - t}{t} + p_{12}'\,(V_o)\,.\left(\frac{t_o - t}{t}\right)^2 + \ldots$$

$$p_2\,(V) = p_{2o}\,(V_o) + p_{21}\,(V_o)\,.\,\frac{t_o - t}{t} + p_{22}\,(V_o)\,.\left(\frac{t_o - t}{t}\right)^2 + \ldots$$

$$p_2'\,(V) = p_{2o}'\,(V_o) + p_{21}'\,(V_o)\,.\,\frac{t_o - t}{t} + p_{22}'\,(V_o)\,.\left(\frac{t_o - t}{t}\right)^2 + \ldots$$

Tabel 2

Functies van de koordeverhouding van roer en vleugel, die de grootte der luchtkrachten op een trillenden vleugel bepalen.

η	R_1	R_2	R_3	R_4^+	R_4^-	$R_5^+ = R_5^-$	R_6^+	R_6^-
0,40	0,252217	0,294268	0,626470	0	0,779694	0,747783	0	1,247514
0,35	0,293339	0,330648	0,688082	0	0,867567	0,706661	0	1,214595
0,30	0,339255	0,364855	0,747685	0	0,972456	0,660745	0	1,166944
0,25	0,391003	0,396626	0,804500	0	1,102658	0,608997	0	1,102658
0,20	0,450183	0,425632	0,857620	0	1,273240	0,549817	0	1,018592
0,15	0,519498	0,451439	0,905939	0	1,515461	0,480502	0	0,909278
0,10	0,604182	0,473429	0,947956	0	1,909860	0,395818	0	0,763944
0,09	0,623837	0,477290	0,955421	0	2,024324	0,376163	0	0,728758
0,08	0,644734	0,480948	0,962522	0	2,158887	0,355266	0	0,690841
0,07	0,667105	0,484390	0,969229	0	2,320454	0,332895	0	0,649728
0,06	0,691268	0,487600	0,975503	0	2,519812	0,308732	0	0,604757
0,05	0,717684	0,490557	0,981306	0	2,774963	0,282316	0	0,554993
0,00	1,000000	0,500000	1,000000	0	∞	0,000000	0	0,000000

η	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}
0.40	0,747783	0,822927	0,373530	0,018967	0,124026	0,004784	0,005582	0,327839
0.35	0,706661	0,677408	0,311918	0,013392	0,099364	0,003928	0,004428	0,355520
0.30	0,660745	0,540580	0,252315	0,008987	0,077273	0,003049	0,003279	0,376868
0.25	0,608997	0,413497	0,195500	0,005624	0,057668	0,002199	0,002231	0,389651
0.20	0,549817	0,297473	0,142380	0,003179	0,040521	0,001431	0,001354	0,390928
0.15	0,480502	0,194242	0,094061	0,001530	0,025866	0,000795	0,000691	0,376446
0.10	0,395818	0,106284	0,052044	0,000549	0,013846	0,000332	0,000260	0,339015
0.09	0,376163	0,090839	0,044579	0,000421	0,011784	0,000263	0,000201	0,327676
0.08	0,355266	0,076207	0,037478	0,000313	0,009845	0,000202	0,000151	0,314659
0.07	0,332895	0,062440	0,030771	0,000224	0,008031	0,000149	0,000109	0,299697
0.06	0,308732	0,049599	0,024497	0,000152	0,006353	0,000105	0,000074	0,282429
0.05	0,282316	0,037771	0,018694	0,000096	0,004819	0,000069	0,000047	0,262350
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

η	R_{15}	R_{16}	R_{17}^+	R_{17}^-	$R_{18}^+ = R_{18}^-$	R_{19}^+	R_{19}^-	R_{20}^+
0,40	— 0,184350	0,275301	0,031281	0,016493	0,022314	— 0,389073	— 0,604334	0,531398
0,35	— 0,227513	0,317256	0,029147	0,017529	0,023391	— 0,368809	— 0,496951	0,548592
0,30	— 0.272796	0,355868	0,026215	0,017476	0,022256	— 0,340439	— 0,349684	0,553412
0,25	— 0,319085	0,391002	0,022548	0,016347	0,019448	— 0,303963	— 0,151981	0,543832
0,20	— 0,365032	0,422453	0,018242	0,014194	0,015500	— 0,259382	+ 0,114638	0,517390
0,15	— 0,408978	0,449909	0,013437	0,011118	0,010942	— 0.206695	+ 0,487157	0,470732
0,10	— 0,448790	0,472880	0,008366	0,007317	0,006338	— 0,145902	+ 1,057098	0,398297
0,09	— 0,456013	0,476869	0,007351	0,006499	0,005466	— 0,132771	+ 1,213914	0,379850
0,08	— 0,462924	0,480635	0,006347	0,005671	0,004624	— 0,119316	+ 1,393928	0,359765
0,07	— 0,469485	0,484166	0,005358	0,004838	0,003816	— 0,105536	+ 1,604539	0,337823
0,06	— 0,475656	0,487448	0,004392	0,004009	0,003051	— 0,091432	+ 1,857178	0,313709
0,05	— 0,481388	0,490461	0,003459	0,003193	0,002337	— 0,077004	+ 2,170773	0,286992
0,00	— 0,500000	0,500000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	∞	0,000000

Vervolg Tabel 2

η	R_{20}^-	$R_{21}^+ = R_{21}^-$	$R_{22}^+ = R_{22}^-$	R_{23}^+	R_{23}^-	R_{24}^+	$R_{24}^- - \frac{8 \ln \eta_s}{\pi^2}$	R_{25}^+
0.40	0,461319	0,871809	0,092745	0	0,096702	0	0,195201	0,389073
0.35	0,493101	0,806025	0,070217	0	0,086205	0	0,319615	0,368809
0.30	0,511364	0,738018	0,051058	0	0,075145	0	0,465554	0,340439
0.25	0,513785	0,666665	0.035120	0	0,063588	0	0,638469	0,303963
0.20	0,497642	0,590338	0,022279	0	0,051593	0	0,848086	0,259382
0.15	0,459345	0,506368	0,012429	0	0,039199	0	1.113191	0,206695
0.10	0,393117	0,409664	0,005480	0	0,026444	0	1.476573	0,145902
0,09	0,375636	0,387947	0,004433	0	0,023855	0	1.569229	0,132771
0.08	0,356422	0,365111	0,003498	0	0,021254	0	1.672053	0,119316
0.07	0,335252	0,340926	0,002673	0	0,018636	0	1.787738	0,105536
0.06	0,311812	0,315085	0,001961	0	0,016008	0	1,920229	0,091432
0.05	0,285669	0,287135	0,001360	0	0,013373	0	2,075648	0,077004
0,00	0.000000	0,000000	0,000000	0	0,000000	0	∞	0,000000

η	R_{25}^-	R_{26}	R_{27}	R_{28}	R_{29}^+	R_{29}^-	$R_{30}^+ = R_{30}^-$
0,40	0,932871	0,014183	0,003902	— 0,209720	0,092745	0,107533	0,039699
0,35	0,858305	0,009464	0,002268	— 0,195242	0,070217	0,081835	0,026291
0,30	0,771052	0,005938	0,001215	— 0,173745	0,051058	0,059797	0,016381
0,25	0,671516	0,003425	0,000581	— 0,146457	0,035120	0,041321	0,009386
0,20	0,560036	0,001748	0,000236	— 0,114925	0,022279	0,026327	0,004761
0,15	0,436909	0,000735	0,000074	— 0,081106	0,012429	0,014748	0,001991
0,10	0,302383	0,000217	0,000015	— 0,047557	0,005480	0,006529	0,000585
0,09	0,274130	0,000158	0,000010	— 0,041172	0,004433	0,005285	0,000426
0,08	0,245432	0,000111	0,000006	— 0,034973	0,003498	0,004174	0,000299
0,07	0,216290	0,000075	0,000003	— 0,029005	0,002673	0,003193	0,000200
0,06	0,186706	0,000047	0,000002	— 0,023314	0,001961	0,002344	0,000126
0,05	0,156683	0,000027	0,000001	— 0,017957	0,001360	0,001626	0,000073
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

η	R_{31}^+	R_{31}^-	R_{32}^+	R_{32}^-	R_{33}	R_{34}	R_{35}^+	R_{35}^-
0.40	0,389073	+ 0,604334	+ 0,091637	— 0,212540	0,046417	— 0,029083	0,389073	0.136514
0.35	0,368809	+ 0,496951	— 0,024119	— 0,363371	0,039223	— 0,024421	0,368809	0,149923
0.30	0,340439	+ 0,349684	— 0,126055	— 0,492437	0,031562	— 0,019360	0,340439	0,155190
0.25	0,303963	+ 0,151981	— 0,210498	— 0,593948	0,023846	— 0,014248	0,303963	0,151981
0.20	0,259382	— 0,114638	— 0,273151	— 0,660840	0,016509	— 0,009454	0,259382	0,140010
0.15	0,206695	— 0,487157	— 0,308477	— 0,683531	0,009995	— 0,005348	0,206695	0,119026
0.10	0,145902	— 1,057098	— 0,308056	— 0,646651	0,004760	— 0,002270	0,145902	0,088818
0.09	0,132771	— 1,213914	— 0,302478	— 0,629848	0,003908	— 0,001803	0,132771	0,081652
0.08	0,119316	— 1,393928	— 0,294655	— 0,609100	0,003129	— 0,001389	0,119316	0,074111
0.07	0,105536	— 1,604539	— 0,284309	— 0,583862	0,002427	— 0,001030	0,105536	0,066187
0.06	0,091432	— 1,857178	— 0,271071	— 0,553409	0,001806	— 0,000726	0,091432	0,057883
0.05	0,077004	— 2,170773	— 0,254426	— 0,516724	0,001271	— 0,000478	0,077004	0,049197
0,00	0,000000	— ∞	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Slot Tabel 2

η	$R_{36}+$	R_{36}^{-}	$R_{37}+$	R_{37}^{-}	R_{38}	R_{39}	R_{40}
0.40	0,157142	0,087063	0,465893	0,535972	0,076847	0,187552	0,062448
0,35	0,153849	0,098358	0,370624	0,426115	0,052824	0,204681	0,045319
0,30	0,144982	0,102934	0,282375	0,324423	0,034099	0,218777	0,031223
0,25	0,130335	0,100288	0,202999	0,233046	0,020210	0,229959	0,020041
0,20	0,109953	0,090205	0,134286	0,154034	0,010589	0,238389	0,011611
0,15	0,084291	0,072904	0,077964	0,089351	0,004568	0,244277	0,005723
0,10	0,054522	0,049342	0,035719	0,040899	0,001383	0,247899	0,002101
0,09	0,048266	0,044052	0,029106	0,033320	0,001012	0,248382	0,001618
0,08	0,041977	0,038634	0,023133	0,026476	0,000714	0,248792	0,001208
0,07	0,035699	0,033128	0,017815	0,020386	0,000480	0,249133	0,000867
0,06	0,029474	0,027577	0,013164	0,015061	0,000304	0,249409	0,000591
0,05	0,023371	0,022048	0,009195	0,010518	0,000177	0,249624	0,000376
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,250000	0,000000

η	R_{41}	R_{42}	R_{43}	R_{44}	R_{45}	R_{46}	R_{47}
0.40	0,050248	0,202636	0,232902	0,017465	— 0,059353	0,008573	0,083931
0.35	0,060127	0,191065	0,181198	0,014273	— 0,067032	0,005077	0,057001
0.30	0,069221	0,171477	0,135155	0,010881	— 0,067555	0,002768	0,036367
0.25	0,077166	0,145358	0,095213	0,007618	— 0,062025	0,001348	0,021309
0.20	0,083677	0,114473	0,061772	0,004758	— 0,051716	0,000557	0,011041
0.15	0,088569	0,080963	0,035201	0,002502	— 0,038126	0,000178	0,004711
0.10	0,091774	0,047529	0,015840	0,000971	— 0,023059	0,000035	0,001411
0.09	0,092217	0,041153	0,012862	0,000755	— 0,020061	0,000023	0,001031
0.08	0,092598	0,034961	0,010186	0,000569	— 0,017118	0,000015	0,000726
0.07	0,092918	0,028998	0,007817	0,000412	— 0,014256	0,000009	0,000487
0.06	0,093179	0,023310	0,005757	0,000283	— 0,011501	0,000005	0,000308
0.05	0,093384	0,017956	0,004007	0,000182	— 0,008889	0,000002	0,000178
0,00	0,093750	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Uittreksels.

Die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit für Flatterschwingungen eines Flugzeugflügels.

Der vorliegende Bericht enthält eine Reihe Rechnungsverfahren zur Bestimmung der kritischen Geschwindigkeit für Flatterschwingungen eines Flugzeugflügels. Alle diese Verfahren sind dadurch gekennzeichnet, dasz:

a. der Flügel als System vorgegebener Formänderungsfähigkeit behandelt wird.

b. die mathematischen Ausdrücke für die Luftkräfte der „ebenen Theorie" durch Vermittlung der bekannten „induktionsfreien Streifenhypothese" entnommen werden.

Diese beiden Grundlagen sind in nr. 3 für den einfachsten Fall des am Wurzel fest eingespannten Flügels ohne Querruder ausführlich dargestellt worden.

Die Definition der zugelassenen Formänderungen des Flügels kann in zweierlei Weise vorgenommen werden:

Es sei $z = z(\tau : x)$ die Verschiebung senkrecht zur Flugelfläche der Punkte einer „Beschreibungsachse" (d.h. einer frei — jedoch mit Vorteil ungefähr in der Nähe der elastischen Achse zu wählenden Achse der Flügelebene, senkrecht zur Symmetrieebene des Flugzeuges) und $\varphi = \varphi(\tau : x)$ die Drehung um diese Achse. Es kann dann angesetzt werden

$$z = \sum_1^n q_i(\tau) z_i(x) \qquad \varphi = \sum_1^m Q_k(\tau) \varphi_k(x) \qquad \text{(A)}$$

wo die $n+m$-gliederige Reihe der Formänderungskomponenten $q_i z_i$, $Q_k \varphi_k$ $(i = 1 \ldots . n;\ k = 1 \ldots . m)$ durch die geeignet zu konstruierenden $n+m$ Deformationsfunktionen z_i, φ_k definiert wird. Die q_i und Q_k *können als generalisierte Koordinaten* betrachtet werden.

Man kann jedoch auch

$$z = \sum_1^n q_i(\tau) z_i(x) \qquad \varphi = \sum_1^n q_k(\tau) . C_k . \varphi_k(x) \qquad \text{(B)}$$

ansetzen und die allgemeinste Formänderung demnach in n Komponenten $q_i z_i$; $q_i C_i \varphi_i$ $(i = 1 \ldots . n)$ zerlegen, die jede für sich durch *zwei* geeignet zu wählende Deformationsfunktionen $z_i ; \varphi_i$ und ein Verhältnisparameter C_i (zur Ermöglichung einer willkürlich wählbaren Normierung der Deformationsfunktionen) definiert werden.

Die Bewegungsgleichungen können in beiden Fällen nach Lagrange gebildet werden. Die kinetische Energie wird durch (5) dargestellt, während für die potentielle Energie im allgemeinen der Ansatz (9) benutzt wird. Die Ergebnisse bilden die Gleichungen (57), (58) für den „exakten" Fall, die Gleichungen (61), (62), (65) für den nach Ansatz (A) und die Gleichungen (67), (68) für den nach (B) behandelten Fall.

In der Praxis beschränkt man die Zahl der Deformationskomponenten immer auf nur 2, oder höchstens 3. *Dies ist eine in Zusammenhang mit* der Kleinheit der in Betracht kommenden Schwingungszahlen zulässige Vereinfachung. Geeignete Deformationsfunktionen können mit Erfolg aus den experimentell zu ermittelden Eigenschwingungsformen des Flügels im Standlauf bestimmt werden. Aus den Lagen der Knotenlinien dieser Schwingungsformen können auch richtige Werte für die Parameter C_i berechnet werden, und es ist das eigentlich das einzige in Betracht kommende Verfahren zur Bestimmung dieser Parameter. (D.h. der Ansatz (B) ist nur brauchbar, wenn ein Standschwingungsversuch ausgeführt worden ist.)

Wie es in nr. 4 dargestellt worden ist, hat die Verwendung von Ergebnissen des Standschwingungsversuches den noch wichtigeren Vorteil, dasz die *in den Gleichungen auftretenden Parameter,* die von den elastischen Eigenschaften des Flügels abhängen, meist völlig durch relativ leicht zu erhaltenden Messungsergebnisse ersetzt werden können. Man braucht sich dann nicht mit einer *theoretischen Analyse der Steifigkeit des Flügels* zu beschäftigen. Da das Deformationssystem (A) im Gegensatz zum System (B) die Eigenschwingungsformen des Flügels bei Verwendung von nur zwei Komponenten gewöhnlich nicht *exakt* beschreiben kann, können in diesem Fall jedoch gewisse Schwierigkeiten bei der vollständigen Elimination der „elastischen Parameter" auftreten, die es notwendig machen können, andere Versuche heranzuziehen, z.B. einen Torsionsversuch am Flügel zur Bestimmung der Lage der elastischen Achse, falls es wenigstens eine solche Achse gibt. (Nach nr. 5 ist das genau genommen fast nie der Fall, und kann man im allgemeinen nur sprechen von einer Linie, die der an einer elastischen Achse gestellten Anforderungen nährungsweise erfüllt.)

In nr. 6 wird erörtert, wie die Luftkraftfunktionen durch Taylor-Entwicklung (nr. 62) oder durch Berechnung eines Effektivwertes der Flügeltiefe *mit Hilfe des die Stabilität beherrschenden* Energiesatzes (nr. 61) in eine für die praktische Auswertung der Gleichungen handliche Näherungsform gebracht werden können.

Die Nummer 7, 8 und 9 enthalten die Anwendung der Theorie auf den Flügel ohne Ruder. Zunächst (nr. 7) wird angenommen, dasz der Flugzeugrumpf eine feste Einspannung für den Flügel bildet — was für die symmetrischen Schwingungen annäherend der Fall sein kann — und dasz es genügt, zwei Schwingungsformen (Deformationskomponenten) des Flügels in Rechnung zu stellen. Für den Ansatz $z = q_1 z_1$; $\varphi = Q_1 \varphi_1$ und die im nr. 61 dargestellten Behandlung der Luftkraftfunktionen führt die Rechnung zu der karakteristischen komplexen Gleichung (134), die nach (135) in reelle Gleichungen aufgespaltet werden kann und deren Symbolen durch (136), (133), (129) und (122), sowie durch Tafel 1 erläutert werden [1]). Es müssen *die kritischen Werte der* Frequenz und der reduzierten Geschwindigkeit durch numerische oder teilweise graphische Lösung dieser Gleichungen bestimmt werden. Behandelt

[1]) Siehe auch das Verzeichnis der Bezeichnungen.

man die Luftkraftfunktionen nach der in 62 dargestellten Methode, so erhält man ebenfalls Gleichungen (134) und (135), jedoch mit durch (140), (138), (133), (122) und Tafel 1 gegebenen Abkürzungen.

Für den Ansatz $z = q_1 z_1 + q_2 z_2$; $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2$ findet man das karakteristische Gleichungssystem (155), (156), (157), mit Symbolen, die je nach der Behandlungsweise der Luftkraftfunktionen durch (160), (159), (158), (150), (145) und (144), oder durch (162), (161), (159), (158), (150), (145) und (144) gedeutet werden müssen.

Es zeigt sich, dasz ein Sonderfall des Ansatzes $z = q_1 z_1$; $\varphi = Q_1 \varphi_1$, namentlich die Nebenbedingung $z_1 = \varphi_1 t$, für den Rechteck-Flügel zu den Formeln von Kassner-Fingado (*lit.* 5 und 6) führt, d.h. ein diesem Ansatz genügender Flügel kann auf ein „ebenes" Modell abgebildet werden. Nur in diesem als möglichst einfach zu betrachtenden Fall kann auch die zahlenmäszige Lösung vollständig graphisch — und zwar nach den von Kassner und Fingado entwickelten Methoden — vorgenommen werden. Es müssen die Werte der Parameter von Kassner und Fingado nach der Tafel auf Seite 19, und nach den Formeln (99) und (98), sowie (108), (109) und (110) berechnet werden. Dieses viel benützte Rechnungsverfahren kann also eigentlich nur unter sehr speziellen Bedingungen angewandt werden und wird meistens grobe Annährungen einschlieszen.

In nr. 8 wird der Fall entwickelt, dasz eine dritte Schwingungsform des Flügels die Stabilität beeinfluszt. Es wird angesetzt: $z = q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3$; $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2 + q_3 C_3 \varphi_3$. Dieser Ansatz führt zu dem durch die Gleichungen (173) dargestellten Ergebnis, das nach (174), (172), (170), (169), (167) und Tafel 1 gedeutet werden musz. Der gleich 0 gesetzte Koeffizientendeterminant des Tripels (173) bildet in diesem Fall die karakteristische Gleichung.

Die Voraussetzung, dasz der Flugzeugrumpf eine feste Einspannung für den Flügel bildet, wird in nr. 9 beseitigt. Bei der Berechnung der symmetrischen Schwingungsform (nr. 91) werden kleine Bewegungen des Rumpfschwerpunktes in die Richtung der Hochachse und kleine Drehungen des (als starr aufgefaszten) Rumpfes um die Querachse zugelassen und bei der Bildung der Bewegungsgleichungen nach Lagrange in Rechnung gezogen. Es zeigt sich, dasz diese Freiheitsgrade des Rumpfes im allgemeinen nur Korrekturen auf früher hergeleitete Ergebnisse herbeiführen. Zum Beispiel braucht in nr. 72 nur der Formel (122) durch (194), und in nr. 73 das Formelpaar (144), (145) durch (197), (198) ersetzt zu werden.

Die antisymmetrische Schwingungsform (nr. 92) wird selbstverständlich erst durch Rumpfbewegungen, namentlich kleine Drehungen des Rumpfes um die Längs-Achse, ermöglicht. Sie weicht stark ab von den Schwingungsformen des fest eingespannten Flügels. Die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit führt zu den drei durch (221), (222) und (223) dargestellten linearen homogenen komplexen Gleichungen, die im Zusammenhang mit (220), (219) und Tafel 1 gedeutet werden müssen. Der gleich null gesetzte Koeffizientendeterminant liefert in üblicher Weise reelle Gleichungen für die kritischen Werte der Frequenz und der reduzierten Geschwindigkeit. Eine einfachere, jedoch nur näherungsweise richtige Rechnung führt zu Gleichungen, die mit den in nr. 73 abgeleiteten übereinstimmen, wenn die dort aufgefundenen Formeln (144) und (145) durch (235) und (236) ersetzt werden.

Mit den obengenannten Verfahren ist die Untersuchung des Flügels ohne Ruder abgeschlossen worden. Es wird jetzt das System mit Querruder in Angriff genommen, und es wird dabei zunächst wieder angenommen, dasz der Flugzeugrumpf eine feste Einspannung für den Flügel bildet. Die allgemeine Anwendung des Lagrange'schen Verfahrens zur Bildung der Grundgleichungen, die mathematische Darstellung der Luftkräfte (über tragen aus der „ebene" Theorie) und ihre die Zahlenrechnung erleichterende Näherungsform (abgebrochene Taylorentwicklung), sowie die Vereinfachung der Rechnung mit Hilfe von Messungsergebnissen des Standschwingungsversuches sind in nr. 10 behandelt worden. Es mag hervorgehoben werden, dasz die Formeln für die Luftkräfte der als *lit.* 17 zitierten Arbeit von Küssner und Schwarz entnommen worden sind, die es erstmalig erlaubt, einen aerodynamischen Ausgleich des Querruders in Rechnung zu tragen. Eine dabei aufgefundene Schwierigkeit bildet der Einflusz des Spaltes zwischen Flügel und Ruder, die zu einer Trennung der Fälle des „offenen" und des „geschlossenen" Spaltes führt. Beide Fälle werden durch indizierende Exponenten + und — unterschieden. Näheres findet sich in der Text und in *lit.* 17.

Die Anwendungen finden sich in den Nummern 11, 12 und 13. In nr. 11 wird neben die Ruderschwingung die Formänderung des Flügels nach dem Ansatz $z = q_1 z_1$; $\varphi = Q_1 \varphi_1$ in Rechnung getragen. Das Ergebnis wird durch die karakteristische komplexe Gleichung (317) (aufspaltbar in den reellen Gleichungen (319) und (320)) gegeben, mit nach Tafel 3, den Formeln (316), (310), (309), (308), (294) und den Tafeln 1 und 2 zu deutenden Symbolen. In nr. 12 wird der Ansatz $z = q_1 z_1 + q_2 z_2$; $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2$ für die Flügeldeformation verwendet. Diese Rechnung führt zur Gleichung (336). Die Elementen der Determinant haben die in Tafel 4 zusammengefasste Bedeutung, es werden weiter die Abkürzungen (336a), (335), (334), (333), (332), (331), (330) und (322), (Siehe auch (256) und (257)) verwendet. Zum Schlusz wird in nr. 13 der Fall behandelt, dasz, auszer Ruderdrehungen, am Flügel nur eine Deformationskomponente $z = q_1 z_1$; $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1$ zugefügt zu werden braucht. Diese einfachere Rechnung könnte angewandt werden, wenn aus irgendeinem Grunde vorausgesetzt werden kann, dasz die kritische Schwingungsform nahe mit nur einer „gefährlichen" Standschwingungsform übereinstimmen wird. Es ist (339) die karakteristische Gleichung, die benützten Abkürzungen werden durch (340), (341), (342), (343) und (338) sowie durch Tafel 1 und 2 erläutert.

Wie es beim Flügel ohne Ruder der Fall war, wird die Untersuchung abgeschlossen *mit einer in* nr. 14 aufgenommenen Betrachtung des Einfluszes der Beweglichkeit des Rumpfes. Es werden die gleichen Rumpfbewegungen zugelassen wie früher. *Es zeigt sich, dasz die Berechnung für die symmetrische* Schwingungsform genau nach dem in den Nummern 11, 12 und 13 dargestellten Verfahren durchgeführt werden kann, wenn die dort verwendeten Formeln (294) durch (347); (256), und (322) durch (348) und wenn (341) ebenfalls durch die zugehörigen Formeln der Reihe (348) ersetzt werden. Die Berechnung der antisymmetrischen Schwingungsform ist weniger einfach, im allgemeinen fordert die genaue Rechnung zu viel Arbeit. Es wird darum nur eine als brauchbar zu betrachtende Näherungsrechnung ausgearbeitet (nr. 14.2). Diese Näherungsrechnung führt ebenfalls zu mit in den Nummern 11, 12 und 13 abgeleiteten weitgehend übereinstimmenden Formeln. Man hat nur die Formeln (294) durch (351) zu ersetzen und die dazu in Betracht kommenden Symbolen in der Tafel 4 statt nach früheren Angaben nach (352) zu deuten.

Zur möglichst guten Erleichterung der praktischen Durchführung sind die obenbeschriebenen Rechnungsverfahren durchgehend bis zur Grenze ausgearbeitet worden, wo die Zahlenrechnung anfangen musz. Nach dieser Seite kann die mehr allgemein-gültige Rechnung also als abgeschlossen betrachtet werden, und es bleibt für die letzten Nummer des Berichtes (nr. 15 bis 20) nur noch etwas über die Gewinnung der *Zahlengrundlagen* zu sagen übrig. Was darüber angeführt wird, beschränkt sich im allgemeinen auf einigen der Praxis dieser Arbeiten entnommenen Hinweisen. Nach einer kurzen Einleitung (nr. 15) wird zunächst (nr. 16) die Analyse der Massenverteilung des Flügels behandelt. Diese musz auf Gewichtsangaben und Konstruktionszeichnungen des Flügels gegründet werden, und an denjenigen Stellen des Flügels am genauesten sein, wo die Schwingungsweiten grosz sind. In nr. 17 wird der Standschwingungsversuch behandelt. Es werden Bemerkungen gemacht über die Aufstellung des Flugzeuges bei diesen Versuchen; über die Art der Erregung und die Wahl des Angriffspunktes der Erregung, wobei Masznahmen zur Trennung der symmetrischen und der antisymmetrischen Schwingungen die Hauptsache bilden, und über die Ausmessung der Schwingungsformen. Auch die Umrechnung der Messungen zu den in die Rechnung eingehenden Gröszen (z.B. Deformationsfunktionen) wird kurz erwähnt. In nr. 18 wird die Bestimmung von Zahlenwerte für die Dämpfungsparameter angeführt. Es liefern hierfür die Spitzbreiten der Resonanzkurven und Ausschwingungskurven des Flügels die wichtigsten Grundlagen. Zur schwierigeren Bestimmung der Dämpfung auf antisymmetrische Ruderdrehungen können spezielle Versuche notwendig sein. Nr. 19 enthält einiges über Torsionsversuche am Flügel. Diese Versuche sollen Auskunft geben über die Lage der elastischen Achse, die jedoch nur in brauchbarer Näherung da ist, wenn die Drehpunktslinie des Flügels bei rein tordierender Belastung sich wenig von der Verteilung der Belastung über die Breite des *Flügels abhängig zeigt*. Endlich geben die Ausführungen in nr. 20 noch einige Hinweise für die Durchführung der Zahlenrechnung, die hauptsächlich bei den verwickelten Rechnungen für Systeme mit drei Freiheitsgraden wichtig sind.

The calculation of critical speed with respect to flutter of airplane wings.

This report contains a description of a series of mathematical methods for the calculation of the critical speed with respect to unstable vibrations of airplane wings.

These methods show the following characteristics:

a. *the treatment of the wing as a system of* prescribed deformability,

b. the derivation of mathematical expressions for the aerodynamic forces of the "two dimensional theory" by means of the well-known hypothesis of "strips without induction".

Both bases of the calculation have been treated in detail in nr. 3 for the most trivial case of a wing without rudder, rigidly fixed at the wing-root. The tolerated *deformations of the wing can* be defined in two manners:

Be $z = z(\tau ; x)$ the displacement normal to the wing plane of the points of an "axis of reference" (i.e. an axis, normal to the plane of symmetry of the airplane), chosen arbritrarily, but preferably in the neighbourhood of the elastic axis, and $\varphi = \varphi(\tau ; x)$, the rotation around this axis. Then we may put:

$$z=\sum_1^n q_i(\tau)z_i(x), \qquad \varphi=\sum_1^m Q_k(\tau)\varphi_k(x) \tag{A}$$

in which the series of $n+m$ terms of the components of deformation $q_i z_i$, $Q_k\varphi_k$ ($i=1\ldots n$; $k=1\ldots m$) are defined by the $n+m$ properly chosen deformation functions z_i, φ_k.

The quantities q_i and Q_k can be considered to be generalized coordinates.

It is however possible to put the following alternative:

$$z=\sum_1^n q_i(\tau)z_i(x), \qquad \varphi=\sum_1^n q_k(\tau)C_k\varphi_k(x) \tag{B}$$

which separates the general deformation into n components: $q_i z_i$; $q_i C_i \varphi_i$ ($i=1\ldots n$) each defined by two properly chosen deformation functions z_i ; φ_i and a parameter of proportion C_i (in order to facilitate an arbitrary reduction of the deformation functions z_i, φ_i).

The dynamic equations can be established by means of the Lagrangian method. The kinetic energy is given by (5), the potential energy can generally be expressed by the equation (9). The substitution of these expressions into the Lagrange equations produces the relations (57), (58) in the "exact" case, the relations (61), (62), (65) for the case (A) and (67), (62) for the case (B).

In practice the number of deformation components may be limited to 2 or 3 at most. This simplification is allowed as the frequencies to be considered are low. Suitable deformation functions can be determined from experiments concerning the types of the natural oscillations of the wing when subjected to vibration tests on a stand. From the position of the nodal curves of these vibrations exact values of the parameter C_i can be deduced and this is even the only proper method for the determination of this parameter (i.e. the development into a series (B) is only applicable, if an experiment on a stand has been carried out).

As is shown in nr. 4, the use of the results of the experiments on a stand has the even more important advantage, that the parameters used in the equations, which depend upon the elastic properties of the wing, can be replaced by easily obtainable experimental results.

Then it is not necessary to analyse theoretically the stiffness of the wing. As the deformation system A generally cannot exactly describe the types of natural oscillations of the wing (in contrast to the system B) when using only two components, the complete elimination of the "elastic parameters", may suffer some difficulties which may necessitate other experiments, for instance an experiment on wing-torsion in order to determine the position of the elastic axis, if existent (Following nr. 5 this is almost never exactly the case, but in general it is possible to find a line which approximately satisfies the conditions of an elastic axis).

In nr. 6 the reduction of the air force functions by means of development into a Taylor series (nr. 62) or by calculation of an effective value of the wing chord by means of the energy equation ruling the stability (nr. 61), has been described in an approximate form ready for the practical evalution of the equations.

The numbers 7, 8 and 9 contain the application of the theory on wings without rudder. At first it will be assumed (nr. 7), that the wing root is rigidly fixed to the fuselage — which will be approximately true in the case of symmetric vibrations — and that it is sufficient to take into account two types of vibration (deformation components) of the wing. Taking the forms $z = q_1 z_1$; $\varphi = Q_1 \varphi_1$ and using the air force functions treated in nr. 61, the characteristic complex equation (134) is obtained, which can be divided into two real equations (135) and whose symbols are explained by (136), (133), (129), (122) and table 1 [1]. The critical values of the frequency and the reduced speed should be evaluated by numerical or partially graphic solution of these equations. If the air force functions are treated after the method, described in 62, one obtaines the same equations (134) and (135), however with the abbreviations given by (140), (138), (133), (122) and table 1.

By putting $z = q_1 z_1 + q_2 z_2$; $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2$ the characteristic system of equations (155), (156), (157) is obtained, with symbols, which relative to the manner of treatment of the air force functions, should be given by (160), (159), (158), (150), (145) and (144), or by (162), (161), (159), (158), (150), (145) and (144).

It is shown, that in a particular case of the equation $z = q_1 z_1$; $\varphi = Q_1 \varphi_1$, i.e. by adding the equation $z_1 = \varphi_1 t$ (for the case of the rectangular wing) the formulae of Kassner-Fingado (*lit.* 5 and 6) are obtained. This means that a wing, satisfying this additional condition, can be represented by a "two dimensional" model. In this most simple case only the numerical solution can be obtained entirely graphically, by means of the methods developed by Kassner and Fingado. The values of the parameters used by Kassner and Fingado should be calculated by means of the table on page 19 and the formulae (99), (98), (108), (109) and (110). From the preceding reasoning it follows that this frequently used calculation method is only allowed under very particular conditions; in general application it brings about the introduction of rather gross approximations.

In nr. 8 the influence of a third type of vibration of the wing has been treated. By putting: $z = q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3$; $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2 + q_3 C_3 \varphi_3$, equation (173) is obtained, which can be elucidated by (174), (172), (170), (169), (167) and table 1. The determinant of the coefficients of the triple set of equations (173), put equal to zero, is the characteristic equation in this case.

The assumption of the wing root being rigidly fixed to the fuselage will be put aside in nr. 9. For the calculation of the symmetric type of vibration (nr. 91) small motions of the center of gravity of the fuselage along the top axis and small rotations of the fuselage (considered to be rigid) around the lateral axis are allowed and taken into account in forming the Lagrangian equations of motion. It is shown, that in general these additional degrees of freedom of the fuselage only give rise to small corrections to the formerly obtained results, as is shown by the following example: in nr. 72 it is only necessary to replace formulae (122) by (194) and in nr. 73 the set of equations (144) and (145) by (197) and (198).

The antisymmetric type of vibration (nr. 92) is of course only rendered possible by motions (notably small rotations around the longitudinal axis) of the fuselage. It differs considerably from the types of vibration of wings with roots rigidly fixed. The calculation of the critical speed gives three homogeneous complex equations (221), (222) and (223) which should be read in connexion with (220), (219) and table 1.

The determination of the coefficients, put equal to zero, gives — in a well-known manner — real equations for the critical values of the frequency and of the reduced speed. A more simple, but only approximately correct calculation gives equations agreeing to the equations derived in nr. 73, provided that the formulae (144) and (145) are replaced by (235) and (236).

The described method constitutes the end of the research concerning the wing without rudder. In the following chapter the problem of the wing-system plus rudder is considered. At first it is assumed, in analogy with the preceding conside-

[1]) See also the list of used symbols.

ration, that the wing root is kept rigidly fixed by the fuselage. The general application of Lagranges method of forming the fundamental equations, the mathematical representation of the air forces (*derived from the two-dimensional theory*) and its simplified and abbreviated approximations (abbreviated Taylor-series), as well as the simplification of the calculation by means of the experimental results of the wing vibration tests on a stand, are given in nr. 10. It has to be pointed out, that the formulae for the air force, originally given by Küssner and Schwarz (*lit.* 17), allow for the first time to take into account the aerodynamic balance of the rudder. The influence of the slot between wing and rudder presents, however, a difficulty which necessitates a separation of the cases in consideration into those of "open" and "closed" slots. These cases are respectively distinguished by the indicative exponents + and —. Particulars may be found in the text and in *lit.* 17.

The applications are given in the numbers 11, 12 and 13. In nr. 11 both the vibration of the rudder and the deformation of the wing are taken into consideration by putting: $z=q_1z_1$; $\varphi=Q_1\varphi_1$.

The result is laid down in the characteristic complex equation (317) separable into two real equations (319) and (320); the symbols are explained in table 3, the formulae (316), (319), (309), (308), (294) and the tables 1 and 2. In nr. 12 the deformation of the wing is represented by $z=q_1z_1+q_2z_2$; $\varphi=q_1C_1\varphi_1+q_2C_2\varphi_2$, which leads to the equation (336). The signification of the elements of the determinant is elucidated by table 4. Furthermore the abbreviations (336a), (335), (334), (333), (332), (331), (330) and (322) have been used (see also (256) and (257)). Finally in nr. 13 follows a treatise of the case that, save rudder rotations, only one deformation component $z=q_1z_1$; $\varphi=q_1C_1\varphi_1$ should be taken into account. This simplified calculation can be applied when for some reason or other it may be assumed, that the critical form of oscillation agrees to only one "dangerous" type of vibration on a stand. Nr. (339) is the characteristic equation, the employed abbreviations are elucidated by (340), (341), (342), (343) and (338) as well as by tables 1 and 2.

In analogy to the treatise on the wing without rudder, this research is terminated by a consideration on the influence of the movability of the fuselage, given in nr. 14. The same types of motion of the fuselage have been drawn into consideration. It is shown, that the calculation of the symmetric type of vibration can be carried out by using the method described in nrs. 11, 12 and 13, if the formulae (294) are replaced by (347); (256), (258) and (322) by (348) and if (341) is replaced by the corresponding formulae of the set (348). The calculation of the antisymmetric type of vibration is less simple, in general the exact calculation requires too much labour. Therefore a more serviceable approximative calculation has been elaborated (nr. 142), *which may simplify matters considerably*. This approximate calculation also gives formulae, which agree very closely to the formulae, derived in the chapters 11, 12 and 13. It is only necessary to replace (294) by (351) and to explain certain symbole of table 4 by (352).

In order to facilitate the practical application of *the described methods, their elaboration has been* pushed as far as the beginning of the numerical calculations. From this point of view the more generally valid calculations may be considered to be ready for use and only the acquirement of the *numerical foundations* need some additional consideration (nr. 15 to 20). The remarks on this subject will be confined to some hints based on the practical application of this research. Following a short introduction (nr. 15), at first (nr. 16) an analysis of the mass distribution of the wing has been treated. It should be based on weight data and designs of the wing construction. These data should be accurate in places of the wing, where the amplitudes are largest. In nr. 17 the vibration stand test has been described. Some remarks have been put forward about the mounting of the airplane during these stand tests; and short notices are given concerning the type and the choice of the point of attack of the vibration generator, particular attention being paid to the precautions to be observed in order to separate symmetric and antisymmetric vibrations, and concerning the measurement of the types of vibration.

The reduction of the experimental results to quantities entering into the equations (for instance deformation functions) is shortly described. In nr. *18 the determination of numerical values of the* damping parameters has been treated. This determination is mainly based on the measurement of the breadths of the tops of the resonance curves and on the shape of the free oscillation curves of the wing. The more difficult determination of the damping of antisymmetric rotations of the rudder sometimes necessitates special experiments. Nr. 19 contains some remarks on torsion tests of the wing. These tests are carried out in order to determine the position of the elastic axis, which may be adopted only, if the axis rotation of the wing does not appreciably depend upon the distribution of purely torsional load along the wing span. Finally the considerations drawn up in nr. 20 give some hints as to the execution of the numerical calculations *of systems with three degrees of freedom*.

La calculation de la vitesse critique à l'égard d'oscillations instables de l'aile d'un avion.

Ce rapport-ci contient une série de méthodes mathématiques pour la détermination de la vitesse critique à l'égard d'oscillations instables de l'aile d'un avion. Toutes ces méthodes sont caracterisées par

a. le traitement du système de l'aile comme „système de déformabilité prescrite",

b. la dérivation d'expressions mathématiques pour les forces aérodynamiques de la „théorie *à deux dimensions" par l'intermédiaire de* l'hypothèse connue des „bandes sans induction".

Ces deux bases des calculations ont été détaillées dans le no. 3 pour le plus simple cas de l'aile sans ailerons, encastrée immobilement à l'emplanture. Les déformations tolérées de l'aile peuvent se définir à deux manières:

Soit $z = z(\tau;x)$ le déplacement normal au plan de l'aile des points d'un axe de description (c. à d. d'un axe normal au plan de symétrie de l'avion, situé dans le plan de l'aile dans une position du reste arbitraire, mais de préférence dans le voisinage de l'axe élastique) et $\varphi = \varphi(\tau;x)$ la rotation autour de cet axe. On peut alors poser:

$$z = \sum_{1}^{n} q_i(\tau) z_i(x) \qquad \varphi = \sum_{1}^{m} Q_k(\tau) \varphi_k(x) \qquad \text{(A)}$$

ce qui définit la série de $n + m$ termes des composantes $q_i z_i$, $Q_k \varphi_k$ $(i = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots m)$ de la déformation par les $n + m$ fonctions appropriées z_i, φ_k. On peut considérer les q_i et les Q_k comme coordinées généralisées.

Cependant il y a la possibilité alternative:

$$z = \sum_{1}^{n} q_i(\tau) z_i(x) \qquad \varphi = \sum_{1}^{n} q_k(\tau) C_k \varphi_k(x) \qquad \text{(B)}$$

qui décompose la déformation générale en composantes $q_i z$, $q_i C_i \varphi_i$, $(i = 1 \ldots n)$ chacune définie par deux fonctions z_i; φ_i et un paramètre de proportionnalité C_i (pour faciliter une réduction arbitraire des fonctions z_i, φ_i).

Les équations dynamiques sont établies dans l'un et l'autre cas par la méthode de Lagrange. L'énergie cinétique est donnée par (5), et il est supposé en général, que l'énergie potentielle soit donnée par l'expression (9). L'issue des opérations est formée par les équations (57), (58) pour le „cas exact", les équations (61), (62) et (65) pour le cas, traité en accord avec (A) et les équations (67), (68) pour le cas, donné par (B).

En pratique on restreint le nombre des composantes de la déformation à 2, ou tout au plus 3. Cette limitation est légitimée par suite de la modicité des fréquences, qui entrent en considération. On peut déduire des fonctions appropriées z_i, φ_k de la forme des oscillations propres de l'aile, qui sont mensurables. De la position des lignes de noeuds de vibration on peut dériver en outre des valeurs utiles pour les constantes C_i, et c'est ça au fond la seule méthode pour déterminer ces quantités, (c. à d. la proposition (B) ne peut être utilisée que dans le cas, où l'on a fait des expériences vibratoires avec l'avion sur terre).

Comme il est démontré dans le no. 4, l'usage des issues d'une expérience vibratoire emporte le profit encore plus important, que les paramètres, dépendants des qualités élastiques de l'aile, qui paraissent dans les équations, peuvent être remplacés le plus souvent complètement par des résultats de mesure. Ainsi on évite la nécessité d'une analyse théorique de l'élasticité de l'aile. Cependant parfois et nommément quand on emploie le système de déformations (A) limité à 2 composantes (système qui en général ne permet pas une description *exacte* des oscillations propres) l'élimination complète des paramètres élastiques paraît être difficile. Alors on s'adresse en outre à d'autres expériences, p.e. des mesures de la torsion de l'aile, adaptées à la détermination de l'axe élastique, à condition qu'un tel axe existe (On montre sous le no. 5, que le plus souvent on peut seulement fixer une ligne, qui ne satisfait qu'approximativement aux conditions, posées à l'axe élastique).

Dans le no. 6 on discute la possibilité de faciliter les calculations numériques par l'usage d'expressions approximatives pour les forces aérodynamiques, expressions réalisables soit par développement des formules „exactes" en séries de Taylor, soit par calculation d'une valeur effective du profondeur de l'aile à l'aide de la loi énergétique gouvernant la stabilité.

Les numéros 7, 8 et 9 contiennent l'application de la théorie à l'aile sans gouvernail (aileron). D'abord il est supposé, que le fuselage constitue un encastrement de l'aile — supposition souvent réalisée approximativement pour les oscillations symétriques du système — et qu'il soit suffisant de ne prendre en ligne de compte que deux modes propres de vibration (composantes de déformation). En posant $z = q_1 z_1$; $\varphi = Q_1 \varphi_1$ et empruntant les fonctions de force aérodynamique du numéro 61, la calculation produit l'équation caractéristique et complexe (134), qui est séparée en deux équations réelles par (135), et dont les symboles sont expliqués par (136), (133), (129), (122) et par le tableau 1[1]). On trouve les valeurs critiques de la fréquence et de la vitesse réducée par solution numérique ou partiellement graphique de ces deux équations. Si les fonctions de force aérodynamique sont empruntés des calculations, reproduits dans le numéro 62, on obtient également les équations (134) et (135), mais en utilisant des symboles, qui doivent être expliqués en accord avec (140), (138), (133), (122) et le tableau 1.

La proposition $z = q_1 z_1 + q_2 z_2$; $\varphi = q_1 C_1 \varphi_1 + q_2 C_2 \varphi_2$ amène au système d'équations caractéristiques (155), (156), (157) dont les symboles, qui dépendent de la mode d'emploi des expressions pour les forces aérodynamiques, ont la signification, donnée par (160), (159), (158), (150), (145) et (144), ou par (162), (161), (159), (158), (150), (145) et (144).

Il paraît, qu'on trouve pour l'aile rectangulaire les formules de Kassner et Fingado (*lit.* 5 et *lit.* 6), si on départ d'un cas particulier de la proposition $z = q_1 z_1$; $\varphi = Q_1 \varphi_1$, à savoir le cas, obtenu en ajoutant la condition supplémentaire $z_1 \equiv \varphi_1 t$. C'est à dire: on peut représenter l'aile rectangulaire, satisfaisant à cette condition, par un modèle „à deux dimensions" (aile homogène d'envergure infinie). C'est ça le seul système de qualités particulièrement simples, pour lequel la solution numérique peut être trouvée par une méthode complètement graphique créée par Kassner et Fingado euxmêmes. Il faut emprunter les valeurs des paramètres de Kassner et Fingado du tableau à la page 19, et des formules (99), (98), (108), (109) et (110). Proprement l'emploi de cette méthode de calculation fréquemment consultée, est seulement permis sous conditions particulières, qui ne seront réalisées souvent qu'en approximation primitive.

---

[1]) Voir aussi la liste des symboles.

Dans le no. 8 on examine le cas, dans lequel la *stabilité est influencée par une troisième mode* propre de vibration. On pose $z = q_1z_1 + q_2z_2 + + q_3z_3$; $\varphi = q_1C_1\varphi_1 + q_2C_2\varphi_2 + q_3C_3\varphi_3$ et on obtient par là les équations finales (173), interprêtables par les formules (174), (172), (170), (169), (167) et par le tableau 1. Quand on égale à zéro le déterminant des coefficients du système ternaire d'équations (173), on obtient l'équation caractéristique.

La condition, que le fuselage présente une encastrement pour l'aile, est écartée dans le no. 9. *En calculant les vibrations symétriques du système* on permet de petits mouvements verticales du centre de gravité du fuselage et des rotations autour de l'axe latéral. Les équations dynamiques du système complet sont de nouveau trouvées par la méthode le Lagrange. Il paraît en général, que les deux degrés de liberté du fuselage ne produisent que des corrections sur les résultats obtenus antérieurement. Il suffit p.e. de remplacer dans le numéro 72 la formule (122) par (192), et dans le numéro 73 les deux équations (194), (195) par (197) et (198).

Les vibrations antisymétriques ne sont, évidemment, que rendues possible par des rotations du fuselage autour de l'axe longitudinal. Cette mode *de vibration diffère tout à fait des vibrations de* l'aile, encastrée à l'emplanture. En calculant la vitesse critique, on obtient les équations linéaires et homogènes (221), (222) et (223), dont les symboles sont expliqués par les formules (220), (219) et par le tableau 1. Le déterminant des coefficients, égalé à zéro, amène en manière notoire aux équations réelles pour les valeurs critiques de la fréquence et de la vitesse réducée. Une calculation plus simple, mais approximative, permet la dérivation d'équations, conformes aux formules du numéro 73, sous la réserve du remplacement des formules (144) et (145) par (235) et (236).

Par les méthodes, décrites ci-dessus, la recherche des vibrations de l'aile sans aileron est terminée. C'est maintenant l'aile avec aileron, qui est signalée à l'attention. D'abord on accepte, tout comme plus tôt, la restriction que l'aile est encastrée au fuselage. L'application générale du procédé de Lagrange pour la dérivation des équations dynamiques, la dérivation d'expressions mathématiques pour les forces aérodynamiques de la théorie des courants à deux dimensions et leur refonte à des approximations simplifiées (développement en série de Taylor coupée), ainsi que la simplifi*cation des calculations à l'aide de résultats de* mesure, obtenus d'une expérience vibratoire, se trouvent amplement expliqués dans le no. 10. Remarquez que les formules pour les forces aérodynamiques sont impruntées d'un essai cité sous *lit.* 17 de Küssner et Schwarz, et que ces formules permettent pour la première fois l'observation de la compensation aérodynamique du gouvernail. Une difficulté adhérente est composée par l'influence de la fente entre l'aile et le gouvernail, difficulté qui empose une distinction des cas de la „fente ouverte" *et de la „fente fermée"*. Ces deux cas sont indiqués par les exposants indicatifs + et —. Particularités plus précises se trouvent dans le texte et dans la litérature citée (*lit.* 17).

Les applications sont réunies dans les nos. 11, 12 et 13. Dans le no. 11 on admet, sauf les rotations de l'aileron, une déformation de l'aile conforme à $z = q_1z_1$; $\varphi = Q_1\varphi_1$. Le résultat est représenté par l'équation caractéristique (317) (qui peut être séparée en deux équations réelles (319) et (320)); dont les symboles s'expliquent par les tableaux 1, 2 et 3 et par les formules (316), (310), (309), (308) et (294). Dans le no. 12 on décrit la déformation de l'aile par $z = q_1z_1 + q_2z_2$; $\varphi = = q_1C_1\varphi_1 + q_2C_2\varphi_2$. *Cette fois la calculation* rapporté à l'équation (336). La signification des éléments du déterminant est résumée dans le tableau 4. On fait usage des abréviations (336a), (335), (334), (333), (332), (331), (330) et (322). Voyez de plus (256) et (257)). Enfin on discute dans le no. 13 le cas, où, en faisant abstraction de la rotation de l'aileron, la déformation de l'aile peut être limitée à une composante de déformation $z = q_1z_1$; $\varphi = q_1C_1\varphi_1$. On pourrait appliquer cette calculation simplifiée, quand on a des raisons à supposer, que la vibration critique *sera voisine à* une mode de vibration connue obtenue pendant les expériences vibratoires sur terre et caracterisée ainsi comme „dangereuse". On trouve l'équation *caractéristique (339)*, accompagnée des suppléments (340), (341), (342), (343) en (338) et des tableaux 1 et 2.

Tout comme la recherche de l'aile sans gouvernail, l'examen est terminé par la détermination de l'influence de la mobilité du fuselage. Les degrés de liberté admis sont les mêmes comme auparavant. Il résulte, que la calculation des vibrations symétriques peut être effectuée conforme aux indications, réunies dans le nos. 11, 12 et 13, à condition qu'on remplace les formules (294) par *(347); (256) et (322) par (348) et les formules* (341) par leurs aequivalents de la série (348). La calculation des modes antisymétriques de vibration est plus compliquée, et en général on juge la calculation exacte trop laborieuse. C'est pour ça qu'on ne trouvera qu'une calculation approximative dans le numéro 14.2. Cette calculation encore bien utilisable amène également à des formules, qui s'accordent à un haut degrée avec les formules, dérivées dans les nos. 11, 12 et 13. Il est nécessaire de remplacer les formules (294) par (351) et d'expliquer certaines symboles, trouvées dans la table 4 par (352) au lieu des indications antérieures.

Pour que l'application pratique des calculations soit aussi facile que possible, tous les formules sont toujours élaborées jusqu'à la limite, où la calculation numérique doit commencer. A cette côté-ci la théorie générale est alors terminée, et pour les numéros suivants (no. 15 à no. 20) il ne reste que l'insertion de quelques indications sur l'acquisition des bases numériques. Sur ce point les communications seront limitées à quelques suggestions fondées sur l'expérience. Après une introduction brève c'est d'abord l'analyse de la distribution des *masses de l'aile, qui est signalée à l'attention.* Celle-ci se base sur les pesanteurs des détails de l'aile et sur les dessins de construction de l'aile. *Cette analyse doit être d'une haute précision* pour ces parties de l'aile, qui montrent une amplitude de vibration relativement grande.

Dans le no. 17 on trouve des observations sur l'expérience vibratoire avec l'avion sur terre. Il y a des indications sur le montage de l'avion à ces expériences, sur la mode de génération des vibrations, sur le point d'application de la force génératrice — *les mesures à prendre pour la séparation* des modes symétriques et antisymétriques sont ici les plus importantes — et sur le mesurage des modes de vibration. La conversion des mesurages aux quantités, qui entrent dans les formules, est indiquée en passant.

Le no. 18 s'occupe de la détermination de valeurs numériques pour les paramètres d'amortissement. Ces valeurs sont dérivées en général de la largeur des sommets de la courbe de résonance, et de l'enrégistrement du vibration libre du système. La détermination plus compliquée de l'amortissement des rotations de l'aileron dans la mode de vibration antisymétrique peut nécessiter des expériences particulières.

Nr. 19 contient quelques communications sur l'expérience de torsion de l'aile. Ces expériences ont le but de fixer la position de l'axe élastique de l'aile, bien qu'une approximation d'un tel axe est *seulement présente, si la ligne des points de rotation*, trouvés en chargeant l'aile par un moment de torsion pur, ne dépend guère de la distribution de la charge dans le sens de l'envergure de l'aile.

Pour conclure on a réuni dans le no. 20 quelques indications, qui se rapportent à l'exécution de la calculation numérique. Ces indications seront surtout d'importance pour l'exécution des calculations plus compliquées, amenées par *la* recherche des systèmes à 3 degrés de liberté.

UITTREKSELS VAN TECHNISCHE MEDEDEELINGEN VAN HET NATIONAAL LUCHTVAARTLABORATORIUM VERSCHENEN TUSSCHEN 1 NOVEMBER 1940 EN 1 NOVEMBER 1941.

Deze Technische Mededeelingen zijn op aanvraag tegen kostprijs verkrijgbaar bij het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Sloterweg 145, Amsterdam (West).

Rapport V. 1088. „Correctie van vliegprestaties in stationnaire *symmetrische vlucht naar gewenschte omstandigheden* van atmosfeer, gewicht en motorregeling" door prof. dr. ir. H. J. van der Maas, ir. S. Wynia en ir. A. J. Marx.

De meting van de prestaties van een vliegtuig (m.n. de snelheid, de stijgsnelheid en het benzineverbruik), vindt plaats bij bepaalde momenteel heerschende atmosferische toestanden, bij een bepaald gewicht en bij een bepaalde motorregeling. Deze omstandigheden zullen in het algemeen niet overeenkomen met die, waaronder men de prestaties wil kennen.

In dit rapport worden methoden aangegeven voor het corrigeeren van de resultaten van prestatiemetingen naar de gewenschte atmosferische omstandigheden (in het bijzonder naar een bepaalde standaardatmosfeer), naar het gewenschte totaalgewicht en naar de gewenschte waarden van motorvermogen, inlaatdruk en/of toerental.

De gegeven correctiemethoden gelden zoowel voor het geval het vliegtuig is uitgerust met motoren zonder aanjager als voor het geval dat motoren met direct aangedreven aanjager worden gebruikt.

Bovendien zijn de formules in zoodanigen vorm gebracht, dat zij toegepast kunnen worden voor iederen willekeurigen vorm van den „vermogensfactor" (d.i. de grootheid, die het verband weergeeft tusschen ontwikkeld vermogen en druk en temperatuur van de buitenlucht, bij constanten stand van de gasklep).

Tevens zijn formules uitgewerkt voor de correctie van prestaties van vliegtuigen met schroeven met vaste spoed*instelling en van vliegtuigen met regulateurschroeven.* Verder wordt nog een methode aangegeven volgens welke de prestaties ook voor vochtigheid van de atmosfeer kunnen worden gecorrigeerd.

Na een vergelijking te hebben gegeven van de in dit rapport ontwikkelde correctiemethoden met de in het buitenland gebruikte (voor zoover hier bekend), wordt het rapport be*sloten met een bijlage waarin voor alle normaal voorkomende* gevallen van correctie een rekenschema wordt gegeven, volgens hetwelk de ontwikkelde correctiemethoden in de praktijk kunnen worden toegepast.

Rapport V. 1234. „De standtrilling van den vleugel van vrijdragende ééndekkers" door drs. J. H. Greidanus.

De eigenschappen van de standtrilling (d.i. van de gedwongen trilling in stilstaande lucht) van een sterk vereenvoudigd vleugelmodel worden door berekening bepaald. De meeste uitkomsten, in het *bijzonder enkele eigenschappen der eigen*trillingsvormen, de beïnvloeding der trillingen door materiaaldemping en een verband tusschen de grootte van de resonantie-amplituden en de inrichting der aandrijving, zijn qualitatief ook voor werkelijke vliegtuigvleugels geldig, zoodat aan de berekening enkele aanwijzingen voor de doelmatige inrichting van een standtrillingsproef, alsmede voor de *interpretatie van de resultaten daarvan, kunnen worden* ontleend. Deze aanwijzingen worden gecompleteerd door een onderzoek naar den invloed van de opstelling van het vliegtuig tijdens de proef op de eigentrillingen van den vleugel. Ook wordt de orde van grootte van het verschil tusschen de eigenfrequenties van overeenkomstige symmetrische en antisymmetrische trillingen vastgesteld.

Rapport V. 1237. „De arbeid, die de luchtkrachten per tijdseenheid op een trillenden vleugel verrichten en de kritische trillingsvormen van een vleugel" door drs. J. H. Greidanus.

De vrije trillingen van een in een luchtstroom opgestelden vliegtuigvleugel worden, wanneer de stroomsnelheid een kritische waarde overschrijdt, onstabiel (d.i. opslingerend), doordat de aan de trilling verbonden variatie's der aerodynamische krachten dan een *ontdemping* opleveren. De trilling neemt in die toestanden energie op uit de luchtstrooming om den vleugel. Op zichzelf hangt de arbeid, die de luchtkrachten per tijdseenheid op den trillenden vleugel verrichten, natuurlijk alleen af van de kinematische eigenschappen van de vleugelbewegingen. Het verband tusschen beide wordt in rapport V. 1237 geanalyseerd voor het eenvoudige geval, dat beweging en strooming „twee-dimensionaal" zijn. De dynamica van het systeem, d.i. het onderzoek van de vraag onder welke omstandigheden bewegingen met bepaalde kinematische eigenschappen ontstaan, blijft consequent buiten beschouwing. Bijzondere aandacht wordt besteed aan de trillingsvormen, waarbij de energieoverdracht van strooming op trilling juist nul is. Ook wordt berekend, hoeveel energie eventueele materiaaldemping per tijdseenheid aan de trilling onttrekt.

Rapport V. 1249. „Overzicht van de resultaten van rek- en versnellingsmetingen, uitgevoerd bij vliegtuigen op de K.L.M.-lijn Amsterdam—Bandoeng, in het tijdvak September 1935 tot Mei 1940" door ir. T. van Oosterom en ir. A. J. Marx.

De kennis van de grootte en de frequentie van overbelastingen, die het vliegtuig ondervindt ten gevolge van remous, is van groot belang voor de sterkteberekening der vliegtuigconstructie.

Door het N.L.L. zijn hiertoe sinds 1935 in samenwerking met de K.L.M. rek- en versnellingsmetingen uitgevoerd tijdens vluchten op de Indië-lijn der K.L.M. en wel aanvankelijk bij een Douglas DC-2, later bij een DC-3 vliegtuig. Deze metingen geschiedden met een D.V.L. registreerenden rekmeter, waarbij, mede in verband met den langen registratieduur, door het N.L.L. eenige voorzieningen waren getroffen, en met een Farren statistischen versnellingsmeter.

De rekeningen worden het meest betrouwbaar geacht; blijkens de resultaten hiervan bedroegen de uiterste waarden der overbelastingsfactoren bij de metingen met het DC-2 vliegtuig + 2,6 en — 0,35 (registratieduur ca. 375 vlieguren) en met het DC-3 vliegtuig + 2,25 en — 0,35 (registratieduur ca. 1680 vlieguren). Voorts zijn frequentiekrommen geteekend, die een beeld geven van de fequentie der over*belastingsfactoren per 1000 km, afgelegd op een bepaald* traject. De resultaten blijken met soortgelijke buitenlandsche metingen overeen te stemmen.

Rapport „Definities".

Dit rapport is opgesteld met het doel eenduidigheid te verkrijgen in de hier te lande gebruikelijke luchtvaarttechnische benamingen.

Naast de definities van grootheden en assenstelsels, die gebruikt worden in de vliegtuigmechanica, zijn in het rapport *de begrippen, die de afmetingen, de prestaties en eigenschap*pen van vliegtuigen vastleggen, gedefinieerd. Een en ander is in enkele gevallen toegelicht met figuren.

Rapport A. 674. „Reeksontwikkelingen voor het gebruik bij het berekenen van de circulatieverdeeling van een vleugel volgens de methode van Lotz" door ir. A. Boelen.

Door Lotz is indertijd een methode ontwikkeld om de verdeeling van de belasting van een vliegtuigvleugel in breedterichting te bepalen voor een gegeven vleugelvorm. Deze methode is gebaseerd op de driedimensionale draagvlaktheorie van Prandtl. Zij geeft de oplossing van de integraalvergelijking, die het probleem beheerscht, zoodanig, dat de uit te voeren berekeningen vrij snel verricht kunnen worden, mits het koorde- en invalshoekverloop in een Fourierreeks ontwikkeld zijn. Deze reeksontwikkeling is door het N.L.L. in algemeenen *vorm uitgevoerd voor het belangrijkste vleu*geltype, n.l. de vleugel met tapsche einden en prismatisch middendeel. Voor het daarbij normaal voorkomende invalshoekverloop zijn ook reeksontwikkelingscoëfficienten berekend. De resultaten van deze berekeningen zijn in bovengenoemd rapport gegeven.

Rapporten A. 767 en A. 768. „Circulatieverdeeling voor tapsche vleugels met prismatisch middenstuk. I. en II. Ongetordeerde vleugel met eindkoorde kleiner dan de halve middenkoorde" door ir. A. Boelen.

In dit rapport is de belastingverdeeling voor den tapschen vleugel met prismatisch middendeel en constanten invalshoek gegeven. Hierbij is gebruik gemaakt van de in rapport A. 674 verkregen uitkomsten. Zoowel de breedte van het prismatisch middendeel als de grootte van de eindkoorde zijn systematisch gevarieerd. Bovendien zijn voor iederen vleugelvorm twee slankheden in beschouwing genomen. In rapport A. 768 zijn de resultaten in een zoodanigen vorm gegeven, dat op eenvoudige wijze voor tusschengelegen waarden voor de breedte van het middendeel, de eindkoorde en de slankheid geïnterpoleerd kan worden.

In twee volgende rapporten zullen dezelfde vleugels, doch met verloopenden invalshoek bekeken worden.

Rapport A. 811. „De methode van Lotz voor het oplossen van de circulatievergelijking van Prandtl" door ir. A. Boelen.

De in den titel genoemde oplossingsmethode wordt beschreven. Aangegeven wordt, hoe de moeilijkheden, die zich bij het afleiden van de methode voordoen, overwonnen worden. Tevens wordt vermeld, hoe, op grond van dezelfde methode de vleugelvorm bij een gegeven circulatieverdeeling bepaald kan worden.

Rapporten S. 244 en S. 245. „Belastingen op neuswielonderstellen tijdens landingen" door dr. ir. A. van der Neut en ir. F. J. Plantema.

Het onderzoek houdt zich bezig met den samenhang tusschen de op het vliegtuig werkende grondreacties en de omstandigheden, die voor de gevallen van symmetrische landing bepalend zijn. Nagegaan wordt hoe bij verschillende plaatsingen van neuswiel en hoofdwielen t.o.v. het vliegtuigzwaartepunt de belastingen op het neuswiel en op de hoofdwielen afhankelijk zijn van den grondhoek (de hoek tusschen het raakvlak aan de drie wielen en den grond op het oogenblik van aanraking van het vliegtuig met den grond), waarbij in de landingsgevallen met verschillenden grondhoek gelijke trefsnelheid van de hoofdwielen met den grond en gelijke verhouding van draagkracht tot vliegtuiggewicht zijn verondersteld.

Het blijkt dan, dat bij de gebruikelijke plaatsingen van neusen hoofdwielen het geval van grooten grondhoek, waarbij dus het vliegtuig doorslaat op het neuswiel, maatgevend is voor de hoofdwielen, terwijl het geval van kleinsten grondhoek maatgevend is voor het neuswiel. Een verhooging van het vermogen tot arbeidsopname van het neuswiel met het oog op het „doorslaan" kan dan ook vermeden worden, indien de plaatsing van het neuswiel binnen zekere grenzen gehouden wordt.

Aan een voorbeeld van een nauwkeurige berekening van het krachtsverloop op neus- en hoofdwielen wordt getoond, dat de berekening sterk gecompliceerd wordt door de omstandigheid, dat de beweging van ieder der beide wielen beïnvloed wordt door de krachten op beide wielen. Deze complicatie, gevoegd bij de omstandigheid, dat het verband tusschen kracht en beweging van de schokbrekers reeds ingewikkeld is, maakt het voor praktische berekening wel gewenscht, dat de berekening van het krachtsverloop op neus- en hoofdwielen gescheiden zou kunnen worden doorgevoerd. In dezen zin is een berekeningsmethode ontworpen, waarbij het neuswiel en de hoofdwielen gedacht zijn ieder een zekere „schijnbare" massa te moeten afveeren. De schijnbare massa is afhankelijk van de eigenschappen der schokbrekende elementen. Grafieken worden gegeven, waaruit de schijnbare massa in afhankelijkheid van de eigenschappen der schokbrekers kan worden afgelezen.

Ter bepaling van den benoodigden slag van het neuswiel worden eveneens grafieken gegeven.

Afzonderlijk worden de sterktevoorschriften besproken voor de belastingen op neuswielonderstellen.

Rapport S. 247. „Het trekveld van in langs- en dwarsrichting verstijfde vlakke platen bij belasting door normaal- en dwarskracht I" door dr. ir. A. van der Neut, ir. I. Binkhorst en ir. W. K. G. Floor.

Het onderzoek, over het eerste gedeelte waarvan in dit rapport verslag wordt uitgebracht, omvat de bestudeering van de sterkte en van de stijfheid van vlakke platen voorzien van 2 systemen van verstijvingen, die loodrecht op elkaar staan. In den vliegtuigbouw worden plaatconstructies met geringe dikte en bij gevolg lage knikspanningen, veelvuldig toegepast. Men geeft deze constructies dan een zoodanigen vorm, dat haar maximale draagkracht veel grooter is dan de belasting, waarbij de plaat knikt, waartoe het aanbrengen van de genoemde verstijvingen noodig is. De uitwendige belasting bestaat in den regel uit dwarskrachten, gecombineerd met normaalkrachten in de richting van een der systemen van verstijvingen. De plooivorming, die bij deze belasting na het overschrijden van de knikspanning van de plaat optreedt, wordt getypeerd doo het begrip „trekveld".

Het rapport geeft eerst een critische bespreking van de over dit onderwerp bestaande literatuur van theoretischen en van experimenteelen aard, alsmede een vergelijking van theorie en experiment.

Aangezien de literatuur een onvoldoende kennis omtrent het vraagstuk biedt, speciaal experimenteel, ligt het in de bedoeling van het laboratorium proeven uit te voeren. De grootheden, die de parameters van het probleem vormen, worden besproken. Op grond hiervan is een program van onderzoek en een ontwerp voor de beproevingsinrichting ontwikkeld.