VERSLAGEN EN VERHANDELINGEN

VAN HET

NATIONAAL LUCHTVAARTLABORATORIUM AMSTERDAM

DEEL XII — 1943

INLEIDING.

Dit deel Verslagen en Verhandelingen bevat een aantal rapporten over het werk van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium op verschillend gebied.

De toelaatbare omvang van dit deel en de tijd, die beschikbaar was voor het afwerken van de rapporten, stonden niet toe al het voor-publicatie in aanmerking komende materiaal op te nemen. Het overige zal, zoodra de omstandigheden dit toelaten, in de volgende deelen van de Verslagen en Verhandelingen of op andere wijze worden gepubliceerd.

De keuze der thans gegeven rapporten geschiedde ten deele op grond van overwegingen van praktischen aard; daarnaast is er echter naar gestreefd een indruk te geven van den aard van het speurwerk, waarmee het laboratorium zich in de afgeloopen jaren heeft bezig gehouden.

Amsterdam, December 1943.

C. KONING,
Wetenschappelijk Directeur.

INHOUD — CONTENTS — INHALT

RAPPORT V. 1304.

De berekening van de kritische snelheid voor onstabiele trillingen van vliegtuigvleugels. II.

door

Drs. J. H. GREIDANUS.

Overzicht.

Zoowel voortgezet theoretisch onderzoek, als ervaringen, opgedaan bij de toepassing der rekenmethoden op eenige zeer uitvoerig onderzochte vliegtuigvleugels hebben aangetoond, dat het wenschelijk is de in 1941 in rapport V. 1252 (Deel X der Verslagen en Verhandelingen van het N.L.L.) gepubliceerde methoden voor de berekening van de kritische snelheid voor onstabiele vleugeltrillingen te verscherpen en op sommige punten te verbeteren of verder uit te werken. Daarbij blijven de oorspronkelijk aanvaarde grondslagen onaangetast. Dit komt daarop neer, dat de mathematische behandeling wordt gefundeerd op de vergelijkingen van Galerkin, die behooren bij de exacte bewegingsvergelijkingen van een geïdealiseerd romp-vleugel-rolroersysteem. De luchtkrachten worden onder verwaarloozing van het spanwijdte- en het compressibiliteits-effect ontleend aan de aerodynamische theorie der trillende draagvlak-roersystemen in tweedimensionale strooming (Küssner en Schwarz). Bij het (in rapport V. 1252 buiten beschouwing gelaten) onderzoek van de mogelijkheid, de gebruikelijke berekening der kritische snelheid op te vatten als eerste stap van een iteratieproces, stuit men op de moeilijkheid, dat in de vergelijkingen van Galerkin, geen complexe deformatiefuncties kunnen worden opgenomen. Deze moeilijkheid blijkt door een kleine generalisatie van het principe, waarop deze vergelijkingen berusten, te kunnen worden verholpen. In aansluiting hierop kan een voorloopig iteratievoorschrift worden opgesteld, waarop bij de nog *niet uitgevoerde uitwerking van het moeilijke convergentievraagstuk waarschijnlijk nog aanvullingen noodig* zullen blijken.

Indeeling.

01 Inleiding.

In opdracht van den directeur van den Luchtvaartdienst werd in 1940 in voortzetting op eèn literatuurstudie een uitvoerig onderzoek aangevat op het gebied der onstabiele vleugeltrillingen. De voornaamste opgave bestond uit de ontwikkeling van een berekeningsmethode voor de kritische snelheid.

Dit onderzoek kwam in 1941 gereed in een vorm, die als een voorloopige afsluiting kon worden beschouwd. De resultaten werden in het in dat jaar verschenen Deel X van de Verslagen en Verhandelingen van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium gepubliceerd (rapport V. 1252).

Sindsdien werd het onderzoek voortgezet, waarbij gebruik kon worden gemaakt van een onverwachte gelegenheid, de ontworpen rekenmethoden toe te passen op een aantal aan de practijk ontleende — numeriek tot in details uit te werken — voorbeelden. Een dergelijke toetsing van de hanteerbaarheid der theorie kon vóór de samenstelling van rapport V. 1252 in verband met de groote bewerkelijkheid van numerieke flutterberekeningen niet worden ondernomen. Dat zich zoo spoedig na de voltooiing van deze publicatie de gelegenheid daartoe voordeed, mag bijzonder waardevol worden genoemd.

Het zal geen verwondering wekken, dat vele verbeteringen in en aanvullingen op het oorspronkelijk ontwerp der berekeningsmethoden wenschelijk zijn gebleken. Tezamen met een aantal belangrijke nieuwe uitkomsten van het theoretische onderzoek waren deze van dien aard, dat de samenstelling van een vervolg op rapport V. 1252 noodzakelijk werd, ook al blijven de oorspronkelijke grondslagen onaangetast.

Het lijkt gerechtvaardigd, het behandelde vraagstuk, althans voor wat betreft de bepaling eener eerste benadering voor de kritische snelheid, met de in dit vervolg samengevatte uitwerking als in hoofdlijnen definitief afgesloten te beschouwen, met dien verstande, dat de twee fundamenteele beperkingen, gevormd door de verwaarloozing van het spanwijdte- en het compressibiliteitseffect op de luchtkrachten op het trillende systeem, gehandhaafd blijven. Deze beperkingen zijn beide „voorloopig aanvaardbaar, doch niet geheel onbedenkelijk". Er wordt van verschillende zijden geprobeerd, de aerodynamica van het *trillende draagvlak zoo te verbeteren, dat deze* twee effecten in de berekening kunnen worden opgenomen. Deze pogingen hebben echter op het oogenblik nog niet een definitief bruikbaar resultaat opgeleverd.

De in rapport V. 1252 ontwikkelde berekeningsmethode voor de kritische snelheid gaat uit van de veronderstelling, dat de vleugel een elastisch systeem is, dat in het algemeen op tweeërlei wijze kan vervormen: door buiging en door tordeering. Bij aanwezigheid van een rolroer wordt de uitslag daarvan als aparte enkelvoudige graad van vrijheid aan het vleugelsysteem toegevoegd. Verondersteld wordt nl., dat de van den uitslag van het roer als geheel te onderscheiden eigenvervorming van het roer vrij van torsie is en dat de *buiging aansluit bij de buiging van den vleugel en* dus reeds door deze wordt bepaald.

Daar de binnen het kader van deze idealiseering gevormde exacte bewegingsvergelijkingen in hun volledigen vorm onhandelbaar zijn, worden zij in overeenstemming met de benaderingsmethode van Galerkin gereduceerd. Deze reductie kan direct worden verkregen door den vleugel als „systeem van voorgeschreven vervormbaarheid" op te vatten en daarvoor de bewegingsvergelijkingen volgens de voorschriften van Lagrange te ontwikkelen. Het is deze laatste weg, die in rapport V. 1252 is gevolgd.

Ten aanzien van het aantal en den aard der voor te schrijven deformaties is eenige variatie mogelijk. Daaruit resulteerden in rapport V. 1252 een aantal grootendeels gescheiden behandelde bijzondere gevallen, die opnieuw zijn onderverdeeld met betrekking tot de mogelijkheid, de bevestiging van den vleugel aan den romp bij benadering als een vaste inklemming op te vatten, dan wel de rompbewegelijkheid meer nauwkeurig als afzonderlijk complex van graden van vrijheid in aanmerking te nemen. In het laatste geval vallen de vleugeltrillingen bovendien in twee onderling onafhankelijke symmetrieklassen uiteen.

Bij nadere overweging is gebleken, dat deze uiteenrafeling van de gestelde opgave minder wenschelijk is, al had zij bij den eersten opzet van het onderzoek zonder twijfel voordeelen. De reductie op voorgeschreven vervormingen kan nl. in een vorm geschieden, die alle in het algemeen in aanmerking komende bijzondere gevallen als gemakkelijk aan te wijzen vereenvoudigingen omvat, en die op zichzelf het meest algemeene geval definieert, dat rekentechnisch nog voor numerieke analyse toegankelijk geacht kan worden. Daarbij dient alleen een scheiding in symmetrische en antisymmetrische trillingen te worden aangebracht.

Deze werkwijze heeft van practisch standpunt bezien het voordeel, dat het rekenschema binnen de beschikbare plaatsruimte zeer zorgvuldig en volledig kan worden uitgewerkt. Van theoretisch gezichtspunt vergemakkelijkt zij de beoordeeling van de vereenvoudigingen, die de meer primitieve rekenmethoden bevatten.

Het is de bovenbedoelde algemeene methode, die in dit vervolg op rapport V. 1252 is opgenomen. Anders dan aldaar geschiedde, wordt de wiskundige formuleering niet bepaald met behulp van de vergelijkingen van Lagrange; zij wordt ditmaal verkregen uit de reductie der exacte bewegingsvergelijkingen volgens de aanwijzingen van Galerkin, waarbij de exacte vergelijkingen aan de hand van een directe analyse van het evenwicht der krachten en momenten worden opgesteld.[1]) Daardoor wordt in de eerste plaats nog eens een andere kijk op *de dynamica van het systeem verkregen.* Bovendien blijkt echter, dat de methode van Galerkin — anders dan die van Lagrange — vatbaar is voor een kleine wijziging, waaruit een zeer geschikte werkwijze resulteert voor de uitwerking van verbeteringen van de flutterberekening door herhaalde benadering (iteratie)[2]), een onderwerp, dat in rapport V. 1252 buiten beschouwing werd gelaten, doch dat in dit vervolg wél (alhoewel niet in alle volledigheid) — als eenige principieele uitbreiding van de behandelde stof — zal worden bestudeerd.

Er moge de aandacht op worden gevestigd, dat in dit vervolg op rapport V. 1252 op sommige punten een notatie wordt gebruikt, die afwijkt van de oorspronkelijk in V. 1252 aanvaarde. Om misverstand te voorkomen zijn deze wijzigingen afzonderlijk vermeld in de uitvoerige notatielijst, welke in punt 11 wordt aangetroffen.

02 De algemeene bewegingsvergelijkingen van het trillende romp-vleugel-rolroersysteem.

021 Evenals in rapport V. 1252 wordt de vleugel opgevat als een twee-liggersysteem, met geheel in de beide liggers geconcentreerde buigstijfheid en een torsiestijfheid, die wordt bepaald door de buig- en torsiestijfheid van de liggers en door de torsiestijfheid van de doos, gevormd door de liggers en de daarover gespannen huid van den vleugel. Het rolroer wordt geacht in zijn draaias door een „pianoscharnier" met den vleugel verbonden te zijn. De buigstijfheid van dit roer wordt verwaarloosd.

Anders dan in rapport V. 1252 wordt aan het

---

1) Deze weg naar de exacte bewegingsvergelijkingen werd ook gevolgd in rapport V. 1294, dat de berekening van de standtrillingen van een vliegtuigvleugel behandelt.

2) De iteratie is binnen het kader van de vergelijkingen van Lagrange in principe óók mogelijk, mits iedere typische vervorming (buiging torsie) door bemiddeling van minstens 2 deformatiefuncties, ieder met een eigen „amplitudefactor" (gegeneraliseerde coördinaat) wordt beschreven, waardoor het aantal coördinaten in den regel zóó groot wordt, dat het numerieke rekenwerk een te grooten omvang aanneemt. Zie punt 074.

rolroer een eindige *torsiestijfheid toegekend* (*in* V. 1252 is deze oneindig groot gesteld). Het blijkt nl. mogelijk te zijn, de (vaak niet onbelangrijk gebleken) torsievervormingen van het roer in de *berekening op te nemen, zonder dat deze daardoor* veel gecompliceerder wordt. Verder wordt voor het besturingsmechanisme van het rolroer een wat algemeener schema ingevoerd dan in V. 1252, omdat het wenschelijk leek rekening te houden met constructies, waarbij de stuurorganen in twee verschillende dwarsdoorsneden op het roer aangrijpen. Het is mogelijk, dat dergelijke constructies vaker zullen worden toegepast, naarmate de vliegtuigen grooter worden.

022 In overeenstemming met in rapport V. 1252 gegeven aanwijzingen wordt in het vlak van den vleugel een rechte „beschrijvingsas" aangenomen, die loodrecht staat op het symmetrievlak en die gegemiddeld ongeveer met de elastische as van den vleugel samenvalt. Langs deze as wordt een coördinaat y gemeten. Vervolgens wordt de vervorming van het systeem beschreven met behulp van

1° een functie $z=z(y;\tau)$, welke de verplaatsingen ter plaatse van de beschrijvingsas vastlegt (d.i. de *vleugelbuiging*);

2° een functie $\varphi=\varphi(y;\tau)$, welke de draaiingen om de beschrijvingsas bepaalt (d.i. de vleugeltorsie);

3° een functie $\gamma=\gamma(y;\tau)$, welke de samenvatting van uitslag en torsie van het rolroer vastlegt.

De definitie dezer functies wordt door fig. 1 toegelicht. In den onvervormden toestand is

$$z=0\,;\quad \varphi=0\,;\quad \gamma=0\,.$$

De plaatselijke roeruitslag t.o.v. den vleugel wordt gelijk aan (fig. 1)

$$\gamma_r=\gamma_r(y;\tau)=\gamma(y;\tau)-\varphi(y;\tau)\,. \qquad (1)$$

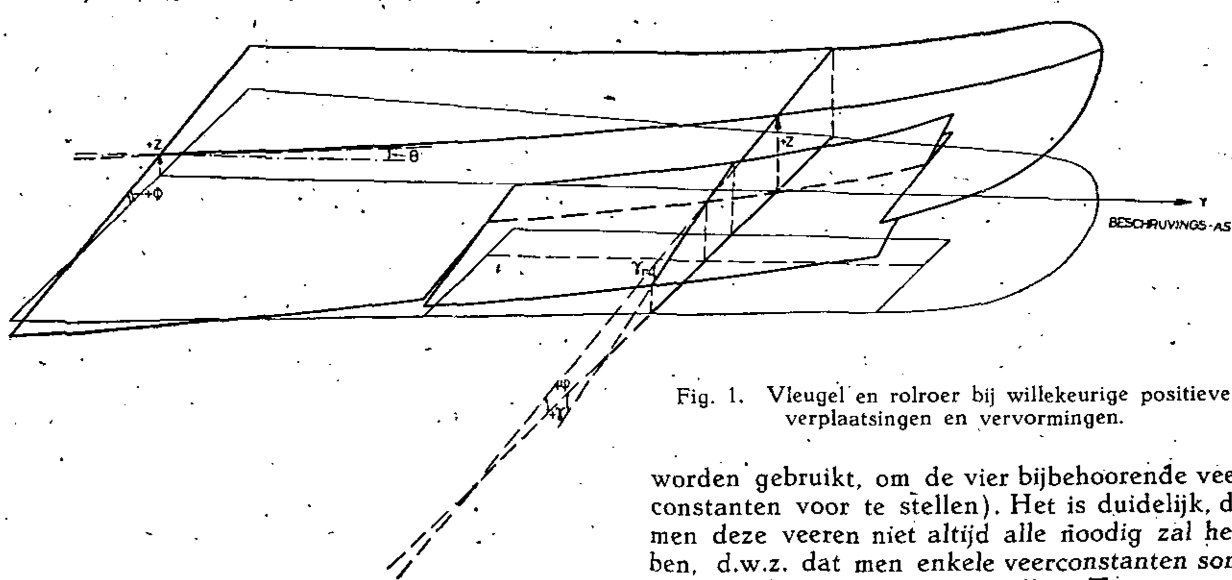


Fig. 1. Vleugel en rolroer bij willekeurige positieve verplaatsingen en vervormingen.

023 In aanmerking nemend, dat de verticale kracht, welke bij een willekeurige dwarsdoorsnede wordt opgenomen door den voorligger, gelijk is aan

$$dK_v=(B_v z_v'')''\,dy=\{B_v(z''-e_v\varphi'')\}''\,dy$$

en dat de achterligger de kracht

$$dK_a=\{B_a(z''-e_a\varphi'')\}''\,dy$$

opneemt, vindt men[3]) uit de evenwichtsvoorwaarde voor de verticale krachten op een smalle strook van den vleugel de vergelijking

$$m_{11}\ddot z+m_{12}\ddot\varphi+m_{13}\ddot\gamma+(b_{11}z''+b_{12}\varphi'')''-K_L=0 \quad (2)$$

als $K_L\,dy$ de luchtkracht op de beschouwde strook voorstelt en

$$\left.\begin{aligned} b_{11}&=B_a+B_v\\ b_{12}&=-e_aB_a-e_vB_v\\ m_{11}&=m_v+m_r\\ m_{12}&=-m_v s_v-m_r c_d\\ m_{13}&=-m_r s_r\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

is.

024 Om uit de evenwichten der momenten op vleugel en rolroer analoge vergelijkingen te kunnen afleiden, moet eerst de inrichting van het besturingsapparaat van het rolroer nader worden bestudeerd. Dit is naar de aanwijzingen van fig. 2 geschematiseerd. Men herkent in deze figuur gemakkelijk de hoofdkenmerken der gangbare constructieve uitvoeringen. Klaarblijkelijk wordt aangenomen, dat de stuurorganen in hoogstens 2 verschillende doorsneden aan het roer zijn bevestigd. De coördinaten dezer doorsneden zullen worden voorgesteld door

$$y=b_1\,;\quad y=b_2\,;\quad (b_1<b_2)\,.$$

Het geheele besturingsmechanisme wordt aangenomen massaloos te zijn (hetgeen het in sommige gevallen wellicht wenschelijk zal maken, op het traagheidsmoment van het rolroer een kleinen toeslag te leggen). De elasticiteit van de constructie wordt gerepresenteerd door de 4 veeren k_0, k_0', k_1 en k_2 (welke aanduiding meteen mogeworden gebruikt, om de vier bijbehoorende veerconstanten voor te stellen). Het is duidelijk, dat men deze veeren niet altijd alle noodig zal hebben, d.w.z. dat men enkele veerconstanten soms òf nul, òf ∞ zal kunnen stellen. Twee veeren, k_0' en k_2, vervallen in ieder geval reeds, wanneer

[3]) Een uitvoeriger afleiding bevat rapport V. 1294: drs. J. H. Greidanus: Voorstel eener berekeningsmethode voor de standtrillingen van een vliegtuigvleugel. N.L.L. 1942.

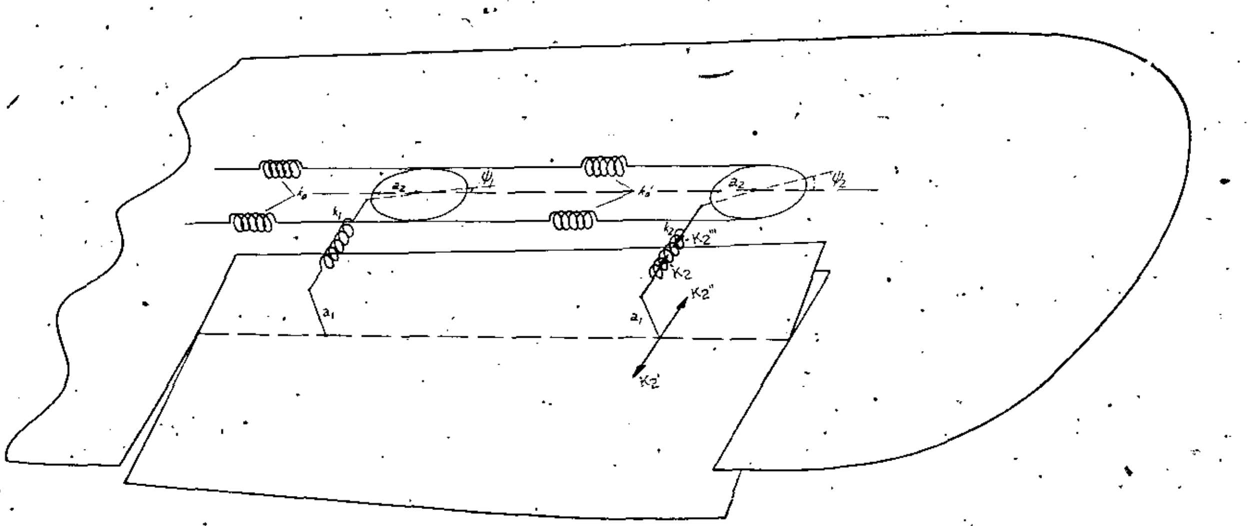


Fig. 2. Inrichting van de rolroerbesturing.

de besturing slechts in één doorsnede — de doorsnede b_0 — op het roer aangrijpt.

Oefenen de stuurorganen in de doorsneden b_1 en b_2 resp. momenten van de grootte M_1 en M_2 op het roer uit, dan geschiedt dat door bemiddeling van de koppels, die worden gevormd door de krachten K, K'. De reactiekrachten K'', K''' werken op den vleugel, die dientengevolge in de doorsneden b_1 en b_2 door momenten

$$M_{v,1} = -M_1 \qquad M_{v,2} = -M_2 \qquad (4)$$

wordt belast.

Wanneer ψ_1 en ψ_2 twee door fig. 2 aangewezen draaihoeken in het besturingsmechanisme zijn, vindt men voor M_1 en M_2 zonder bijzondere moeite de 4 hieronder volgende vergelijkingen: (aangenomen wordt, dat de verbindingsstaven, die de veeren k_1 en k_2 bevatten, in den nulstand een rechten hoek met de armen a_1 maken)

$$\begin{aligned} M_2 &= -a_1 k_2 \left[a_1 \gamma_r(b_2) - a_2 \psi_2\right] \\ M_2 &= -k_0' a_1 a_2 (\psi_2 - \psi_1) \\ M_1 &= -a_1 k_1 \left[a_1 \gamma_r(b_1) - a_2 \psi_1\right] \\ M_1 + M_2 &= -k_0 a_1 a_2 \psi_1 . \end{aligned}$$

Hieruit kunnen de grootheden $a_2\psi_1$, $a_2\psi_2$ worden geëlimineerd, waarna de momenten kunnen worden opgelost. De uitkomst luidt

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -k_{11}\gamma_r(b_1) + k_{12}\gamma_r(b_2) \\ M_2 &= k_{21}\gamma_r(b_1) - k_{22}\gamma_r(b_2), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

met de afkortingen

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= a_1^2 \frac{k_1 k_0'\left(k_2 + k_0 + k_2 \, {}^{k_0}\!/_{k_0'}\right)}{k_1 k_0' + k_1 k_2 + k_0' k_2 + k_0' k_0 + k_0 k_2} \\ k_{12} = k_{21} &= a_1^2 \frac{k_0' k_1 k_2}{k_1 k_0' + k_1 k_2 + k_0' k_2 + k_0' k_0 + k_0 k_2} \\ k_{22} &= a_1^2 \frac{k_2 k_0' (k_1 + k_0)}{k_1 k_0' + k_1 k_2 + k_0' k_2 + k_0' k_0 + k_0 k_2} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Het zijn uiteindelijk deze *drie* constanten, die het stuurmechanisme wiskundig karakteriseeren. Voor $k_1 = k_2 = \infty$ (een vaak geoorloofde vereenvoudiging) wordt

$$k_{11} = a_1^2 (k_0 + k_0'); \; k_{12} = k_{21} = a_1^2 k_0'; \; k_{22} = a_1^2 k_0' \qquad (7)$$

en voor $k_0' = k_2 = 0$

$$k_{11} = a_1^2 \frac{k_1 k_0}{k_1 + k_0}; \; k_{12} = k_{21} = k_{22} = 0 . \qquad (8)$$

025 In aanmerking nemend, dat het moment om de beschrijvingsas der elastische krachten op een willekeurig gelegen smalle strook van den vleugel gelijk is aan

$$\left[(T_v \varphi')' + e_v \{B_v (z'' - e_v \varphi'')\}'' + e_a \{B_a (z'' - e_a \varphi'')\}'' \right] dy$$

vindt men uit het evenwicht der momenten op den vleugel de vergelijking

$$\begin{aligned} & m_{21}\ddot{z} + m_{22}\ddot{\varphi} + m_{23}\ddot{\gamma} + (b_{21} z'' + b_{22}\varphi'')'' - \\ & -(T_v \varphi')' - M_L - \left[k_{11}\{\gamma(b_1) - \varphi(b_1)\} - \right. \\ & \left. - k_{12}\{\gamma(b_2) - \varphi(b_2)\}\right] \delta(y - b_1) - \\ & - \left[-k_{21}\{\gamma(b_1) - \varphi(b_1)\} + \right. \\ & \left. + k_{22}\{\gamma(b_2) - \varphi(b_2)\}\right] \delta(y - b_2) = 0 . \qquad (9) \end{aligned}$$

M_L stelt het moment van de luchtkrachten voor. Verder is geschreven [4])

$$\left.\begin{aligned} m_{21} &= m_{12} = -m_v s_v - m_r c_d ; \\ m_{22} &= I_v + m_v s_v^2 + m_r c_d^2 ; \\ m_{23} &= m_r s_r c_d ; \\ b_{21} &= b_{12} = -e_a B_a - e_v B_v ; \\ b_{22} &= e_a^2 B_a + e_v^2 B_v , \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

terwijl het symbool $\delta(y - b_k)$ een singuliere verdeelingsfunctie voorstelt, welke wordt gedefinieerd door de formules

$$\begin{aligned} & \delta(y - b_k) = 0 \text{ als } y \neq b_k ; \\ & \int_{b^-}^{b^+} \delta(y - b_k)\, dy = 1 \text{ als } b^- < b_k < b^+ . \end{aligned} \qquad (11)$$

Het gebruik van deze functie maakt het mogelijk, de evenwichtsvoorwaarden, welke voor $y = b_1$; b_2 en $y \neq b_1$; b_2 gelden, in één vergelijking samengetrokken op te schrijven. Men stelle zich

[4]) Aangenomen is, dat e_a en e_v constanten zijn (onafhankelijk van y).

voor, dat de in de doorsneden b_1 en b_2 geconcentreerde eindige momenten door de δ-functies over smalle strookjes van den vleugel „om" die doorsneden worden „uitgesmeerd".

Op analoge wijze wordt het evenwicht der momenten om de draaias, welke op het rolroer werken, geformuleerd door de vergelijking

$$m_{31}\ddot{z} + m_{32}\ddot{\varphi} + m_{33}\ddot{\gamma} - (T_r\gamma')' - N_L +$$
$$+ [k_{11}\{\gamma(b_1) - \varphi(b_1)\} -$$
$$- k_{12}\{\gamma(b_2) - \varphi(b_2)\}]\delta(y - b_1) +$$
$$+ [- k_{21}\{\gamma(b_1) - \varphi(b_1)\} +$$
$$+ k_{22}\{\gamma(b_2) - \varphi(b_2)\}]\delta(y - b_2) = 0. \quad (12)$$

N_L is het moment van de luchtkrachten. Verder is

$$\left.\begin{aligned} m_{31} &= m_{13} = - m_r s_r; \\ m_{32} &= m_{23} = m_r s_r c_d; \\ m_{33} &= I_r + m_r s_r^2. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

026 Aan de bewegingsvergelijkingen (2), (9) en (12), welke partieele differentiaalvergelijkingen zijn, moeten nu randvoorwaarden worden toegevoegd. Deze vallen voor symmetrische en antisymmetrische bewegingen verschillend uit. Zij worden hieronder zonder uitvoerige toelichting medegedeeld, daar rapport V. 1294 (loc. cit.) nadere inlichtingen verschaft.

0261 Wanneer men de romp als een volkomen stijf systeem opvat met in de snijlijn van het symmetrievlak van het vliegtuig en het vlak van den vleugel vallend zwaartepunt en men de belasting op den vleugel door den romp in het symmetrievlak geconcentreerd denkt, geldt voor $y = 0$ voor *symmetrische* bewegingen

$$\tfrac{1}{2} m_R(\ddot{z} - s_R\ddot{\varphi})_{y=0} + (b_{11}z'' + b_{12}\varphi'')'_{y=0} = 0 \quad (14)$$

$$- \tfrac{1}{2} m_R s_R(\ddot{z} - s_R\ddot{\varphi})_{y=0} + \tfrac{1}{2} I_R \ddot{\varphi}_{y=0} +$$
$$+ (b_{21}z'' + b_{22}\varphi'')'_{y=0} - (T_v\varphi')_{y=0} = 0 \quad (15)$$

$$z'_{y=0} = 0; \quad \varphi'_{y=0} = 0. \quad (16)$$

Bij den tip van den vleugel ($y = b$) geldt

$$z''_{y=b} = \varphi''_{y=b} = 0 \quad (17)$$

$$(b_{11}z'')'_{y=b} + (b_{12}\varphi'')'_{y=b} = 0 \quad (18)$$

$$\varphi'_{y=b} - \left(\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{b_{11}T_v}\varphi'''\right)_{y=b} = 0. \quad (19)$$

Voor de rolroervervorming geldt aan de uiteinden van dat roer ($y = b_i$ en $y = b_u$)

$$(\gamma')_{y=b_i} = (\gamma')_{y=b_u} = 0. \quad (20)$$

0262 Voor antisymmetrische bewegingen geldt voor $y = 0$

$$- \tfrac{1}{2} I_R' \frac{d^2}{d\tau^2}(z')_{y=0} + (b_{11}z'' + b_{12}\varphi'')_{y=0} = 0 \quad (21)$$

$$z_{y=0} = \varphi_{y=0} = \varphi'_{y=0} = 0. \quad (22)$$

Aan den tip van den vleugel gelden dezelfde voorwaarden als bij symmetrische trillingen. Ook de voorwaarden (20) voor het rolroer gelden onveranderd.

027 De functies $z(y;\tau)$, $\varphi(y;\tau)$ en $\gamma(y;\tau)$ zijn — opgevat als functies van y — tezamen met hun in de formules aangetroffen afgeleiden in het heele interval $0 \leqq y \leqq b$ continu, met uitzondering van die punten, waar òf de stijfheidsverdeelingsfuncties (b_{11}; b_{12}; b_{22}; T_v, T_r) discontinu zijn, òf in één doorsnede geconcentreerd een eindige kracht, resp. eindig moment wordt ingeleid. Dit laatste gebeurt in de doorsneden $y = b_1$; b_2 en verder in al die doorsneden, waarin de vleugel door een puntmassa is belast. (Als zoodanig worden in het algemeen in den vleugel ondergebrachte motoren, aan het rolroer bevestigde geconcentreerde balansgewichten, enz. opgevat.)

Voor ieder van deze uitzonderingspunten kan een vergelijking worden opgeschreven, die de grootte der aldaar aangetroffen discontinuiteiten vastlegt. B.v. geldt voor de functies z en φ in de punten b_n ($n = 1$; 2)

$$\Big[(b_{11}z'')' + (b_{12}\varphi'')'\Big]_{y=b_n+0} -$$
$$- \Big[(b_{11}z'')' + (b_{12}\varphi'')'\Big]_{y=b_n-0} = 0 \quad (23)$$

$$\Big[(b_{21}z'')' + (b_{22}\varphi'')'\Big]_{y=b_n+0} -$$
$$- \Big[(b_{21}z'')' + (b_{22}\varphi'')'\Big]_{y=b_n-0} -$$
$$- (T_v\varphi')_{y=b_n+0} + (T_v\varphi')_{y=b_n-0} - M_{v,n} = 0 \quad (24)$$

$$z_{y=b_n+0} = z_{y=b_n-0}; \quad \varphi_{y=b_n+0} = \varphi_{y=b_n-0} \quad (25)$$
$$z'_{y=b_n+0} = z'_{y=b_n-0}; \quad \varphi'_{y=b_n+0} = \varphi'_{y=b_n-0}$$

(waarin $M_{v,n}$ het door (4) en (5) gedefineerde moment voorstelt). Voor het rolroer geldt, in wat uitvoeriger schrijfwijze

$$- (T_r\gamma')_{y=b_1+0} + (T_r\gamma')_{y=b_1-0} =$$
$$= M_1 = - k_{11}\{\gamma(b_1) - \varphi(b_1)\} +$$
$$+ k_{12}\{\gamma(b_2) - \varphi(b_2)\} \quad (26)$$

$$- (T_r\gamma')_{y=b_2+0} + (T_r\gamma')_{y=b_2-0} =$$
$$= M_2 = k_{21}\{\gamma(b_1) - \varphi(b_1)\} -$$
$$- k_{22}\{\gamma(b_2) - \varphi(b_2)\} \quad (27)$$

$$(\gamma)_{y=b_1+0} = (\gamma)_{y=b_1-0}; \quad (\gamma)_{y=b_2+0} = (\gamma)_{y=b_2-0} \quad (28)$$

028 De randvoorwaarden die de rompbewegingen bevatten kunnen in een anderen, voor het vervolg der berekening meer geschikten, vorm worden gebracht.

0281 Voor symmetrische bewegingen geldt de voorwaarde (14). Daar uit (2) volgt (de randvoorwaarden voor $y = b$ in aanmerking nemend)

$$\int_0^b (b_{11}z'' + b_{12}\varphi'')'' dy = - (b_{11}z'' + b_{12}\varphi'')'_{y=0} =$$
$$= - \int_0^b (m_{11}\ddot{z} + m_{12}\ddot{\varphi} + m_{13}\ddot{\gamma} - K_L) dy,$$

kan hiervoor worden geschreven

$$\tfrac{1}{2} m_R (\ddot{z} - s_R \ddot{\varphi})_{y=0} +$$
$$+ \int_0^b (m_{11} \ddot{z} + m_{12} \ddot{\varphi} + m_{13} \ddot{\gamma} - K_L) \, dy = 0. \qquad (29)$$

Verder volgt uit (9), mede lettend op de voorwaarden voor $y = b$ en de formules (11) voor de δ-functie

$$\int_0^b (b_{21} z'' + b_{22} \varphi'')'' \, dy - \int_0^b (T_v \varphi')' \, dy =$$
$$= -(b_{21} z'' + b_{22} \varphi'')'_{y=0} + (T_v \varphi')_{y=0} =$$
$$= -\int_0^b (m_{21} \ddot{z} + m_{22} \ddot{\varphi} + m_{23} \ddot{\gamma} - M_L) \, dy +$$
$$+ (k_{11} - k_{21}) \{ \gamma(b_1) - \varphi(b_1) \} +$$
$$(- k_{12} + k_{22}) \{ \gamma(b_2) - \varphi(b_2) \}$$

en uit (12) (de randvoorwaarden (20) der γ-functie bij $y = b_i$; b_u in aanmerking nemend)

$$\int_{b_i}^{b_u} (T_r \gamma')' \, dy = 0 =$$
$$= \int_{b_i}^{b_u} (m_{31} \ddot{z} + m_{32} \ddot{\varphi} + m_{33} \ddot{\gamma} - N_L) \, dy +$$
$$+ (k_{11} - k_{21}) \{ \gamma(b_1) - \varphi(b_1) \} +$$
$$+ (- k_{12} + k_{22}) \{ \gamma(b_2) - \varphi(b_2) \}.$$

Trekt men de beide laatste vergelijkingen van elkaar af, dan ontstaat de betrekking [5])

$$-(b_{21} z'' + b_{22} \varphi'')'_{y=0} + (T_v \varphi')_{y=0} =$$
$$= -\int_0^b [(m_{21} + m_{31}) \ddot{z} + (m_{22} + m_{32}) \ddot{\varphi} +$$
$$+ (m_{23} + m_{33}) \ddot{\gamma} - (M_L + N_L)] \, dy.$$

Dientengevolge kan in plaats van (15) worden gesteld

$$-\tfrac{1}{2} m_R s_R (\ddot{z} - s_R \ddot{\varphi})_{y=0} + \tfrac{1}{2} I_R \ddot{\varphi}_{y=0} +$$
$$+ \int_0^b [(m_{21} + m_{31}) \ddot{z} + (m_{22} + m_{32}) \ddot{\varphi} +$$
$$+ (m_{23} + m_{33}) \ddot{\gamma} - (M_L + N_L)] \, dy. \qquad (30)$$

De vergelijkingen (29) en (30) zullen de voorwaarden (14) en (15) in den vervolge vervangen.

0282 Een tweevoudige integratie van (2) levert de uitkomst

$$\int_0^b \int_y^b (b_{11} z'' + b_{12} \varphi'')'' (dy)^2 = (b_{11} z'' + b_{12} \varphi'')_{y=0} =$$
$$= -\int_0^b \int_y^b (m_{11} \ddot{z} + m_{12} \ddot{\varphi} + m_{13} \ddot{\gamma} - K_L) \, dy =$$
$$= -\int_0^b (m_{11} \ddot{z} + m_{12} \ddot{\varphi} + m_{13} \ddot{\gamma} - K_L) \, y \, dy$$

[5]) Van nu af aan worden integraties over de breedte van het rolroer eenvoudigheidshalve formeel door integraties van 0 tot b — over de geheele vleugelbreedte dus — voorgesteld. Dit kan zonder bezwaar geschieden door de massaverdeelingsfuncties m_{ik} van het rolroer (i en/of $k = 3$) buiten het interval $b_i \leq y \leq b_u$ gelijk aan nul te stellen en de luchtkrachtfuncties, waartoe het rolroer aanleiding geeft, buiten dit interval op een koordeverhouding $\eta = \frac{t_r}{t} = 0$ te betrekken.

en dus kan in plaats van de voorwaarde (21), geldig voor antisymmetrische bewegingen, de vergelijking

$$\tfrac{1}{2} \bar{I}_R' \frac{d^2}{d\tau^2} (z')_{y=0} +$$
$$+ \int_0^b (m_{11} \ddot{z} + m_{12} \ddot{\varphi} + m_{13} \ddot{\gamma} - K_L) \, y \, dy = 0 \qquad (31)$$

worden gesteld.

03 De grondvergelijkingen der kritische trillingen.

Met het oog op het voornemen uit de berekeningen de eigenschappen van de *kritische* trillingen af te leiden, worde gesteld dat de beweging een symmetrische, dan wel antisymmetrische harmonische trilling is. Deze veronderstelling is vervat in de complexe substituties

$$\left.\begin{aligned} z(y;\tau) &= \bar{z}_0(y) \, . \, e^{i\nu\tau}; \\ \varphi(y;\tau) &= \bar{\varphi}_0(y) \, . \, e^{i\nu\tau}; \\ \gamma(y;\tau) &= \bar{\gamma}_0(y) \, . \, e^{i\nu\tau}. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Deze complexe schrijfwijze is bruikbaar, zoolang geen andere dan lineaire mathematische operaties op de functies z, φ, γ worden toegepast. De frequentieparameter ν is reëel. Zooals bekend is kunnen de luchtkrachten op den vleugel in dit geval worden ontleend aan de formules [6])

$$\begin{aligned} K_L &= m_L \nu^2 (\bar{a}_{11} \bar{z}_0 + \bar{a}_{12} t \bar{\varphi}_0 + \bar{a}_{13} t \bar{\gamma}_0) e^{i\nu\tau} \\ M_L &= m_L \nu^2 t (\bar{a}_{21} z_0 + \bar{a}_{22} t \bar{\varphi}_0 + \bar{a}_{23} t \bar{\gamma}_0) e^{i\nu\tau} \qquad (33) \\ N_L &= m_L \nu^2 t (\bar{a}_{31} \bar{z}_0 + \bar{a}_{32} t \bar{\varphi}_0 + \bar{a}_{33} t \bar{\gamma}_0) e^{i\nu\tau} \end{aligned}$$

met $m_L = \frac{1}{4} \pi \varrho t^2$. $\qquad (34)$

De complexe coëfficiënten $\bar{a}_{ik}$ kunnen onveranderd uit rapport V. 1252, punt 10.3, worden overgenomen. Zij hangen af van de parameters $\frac{c_v}{t}$ en $\frac{c_{dr}}{tl}$ — welke resp. de ligging van de voorste neutrale as van den vleugel ten opzichte van de beschrijvingsas en de aerodynamische balanceering van het rolroer bepalen —, van de gereduceerde snelheid $V = \frac{v}{\nu t}$ en van de koordeverhouding η van vleugel en rolroer $\left(\eta = \frac{t_r}{t}\right)$. Al deze parameters zijn in het algemeen van den coördinaat y afhankelijk. Daarenboven speelt het al dan niet gesloten zijn van de spleet tusschen vleugel en rolroer de in rapport V. 1252 uitvoerig besproken rol. In verband met de formeel ingevoerde verbreeding van het rolroer tot den geheelen afstand $y = 0$ tot $y = b$ worden de $\bar{a}_{ik}$'s met i en/of $k = 3$ buiten het interval $b_i \leq y \leq b_u$ op $\eta = 0$ en $c_{dr} = 0$ betrokken.

Daar het voor het vervolg der berekening noodzakelijk is de deformaties van het systeem te beschrijven door functies waarvoor *vaste* en vooraf

[6]) Deze formules gelden voor den buigenden en tordeerenden vleugel met aerodynamisch gebalanceerd rolroer en zijn uiteindelijk ontleend aan de berekeningen van Küssner en Schwarz: Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder. Luftfahrtforschung Bd: 17-1940-S. 370.

in principe volledig bekende randvoorwaarden gelden, en de rompbewegingen in verband daarmede door afzonderlijke „eigen" coördinaten vast te leggen, worde een daartoe strekkende transformatie van de uitdrukkingen (32) en (33) aangebracht, vóór dat deze in de bewegingsvergelijkingen worden gesubstitueerd. Deze omvorming ziet er, al naar de *symmetrieklasse van de trilling*, verschillend uit.

031 Voor symmetrische trillingen worde gesteld

$$\bar z_0(y)=\bar Z_0+\bar z_{d0}(y) \text{ met } \bar Z_0=\bar z_0(0) \qquad (35)$$

$$\bar\varphi_0(y)=\bar\Phi_0+\bar\varphi_{d0}(y) \text{ met } \bar\Phi_0=\bar\varphi_0(0) \qquad (36)$$

$$\bar\gamma_0(y)=\bar\Phi_0+\bar\varphi_{d0}(\beta)+\bar\gamma_{d0}(y). \qquad (37)$$

De bedoeling van den term $\bar\varphi_{d0}(\beta)$ — welke den voorloopig onbepaald blijvenden parameter β bevat — zal later duidelijk worden. De functies $\bar z_{d0}$, $\bar\varphi_{d0}$ en $\bar\gamma_{d0}$ worden kennelijk onafhankelijk van de rompbewegingen, die volledig door de coördinaten $\bar Z$ en $\bar\Phi$ kunnen worden beschreven. De functies $\bar z_{d0}$ en $\bar\varphi_{d0}$ voldoen o.m. aan de vaste randvoorwaarden

$$\bar z_{d0}(0)=\bar\varphi_{d0}(0)=\bar z_{d0}'(0)=\bar\varphi_{d0}'(0)=0. \qquad (38)$$

Worden nu de uitdrukkingen (32) en (33), na daarin de substituties (35), (36), (37) te hebben aangebracht, in de bewegingsvergelijkingen en in de randvoorwaarden die de (symmetrische) rompbewegingen bepalen gesubstitueerd, dan ontstaan de formules

$$\begin{aligned}&\nu^2[m_{11}\bar z_{d0}+m_{12}\bar\varphi_{d0}+m_{13}\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+\nu^2[m_{11}\bar Z_0+(m_{12}+m_{13})\bar\Phi_0]+\\&+m_L\nu^2[\bar a_{11}\bar z_{d0}+\bar a_{12}t\bar\varphi_{d0}+\bar a_{13}t\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+m_L\nu^2[\bar a_{11}\bar Z_0+(\bar a_{12}+\bar a_{13})t\bar\Phi_0]-\\&-(b_{11}\bar z_{d0}''+b_{12}\bar\varphi_{d0}'')''=0 \qquad (39)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nu^2[m_{21}\bar z_{d0}+m_{22}\bar\varphi_{d0}+m_{23}\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+\nu^2[m_{21}\bar Z_0+(m_{22}+m_{23})\bar\Phi_0]+\\&+m_L\nu^2t[\bar a_{21}\bar z_{d0}+\bar a_{22}t\bar\varphi_{d0}+\bar a_{23}t\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+m_L\nu^2t[\bar a_{21}\bar Z_0+(\bar a_{22}+\bar a_{23})t\bar\Phi_0]-\\&-(b_{21}\bar z_{d0}''+b_{22}\bar\varphi_{d0}'')''+(T_v\bar\varphi_{d0}')'+\\&+[k_{11}\{\bar\gamma_{d0}(b_1)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_1)\}-\\&-k_{12}\{\bar\gamma_{d0}(b_2)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_2)\}]\delta(y-b_1)+\\&+[-k_{21}\{\bar\gamma_{d0}(b_1)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_1)\}+\\&+k_{22}\{\bar\gamma_{d0}(b_2)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_2)\}]\delta(y-b_2)=0 \qquad (40)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nu^2[m_{31}\bar z_{d0}+m_{32}\bar\varphi_{d0}+m_{33}\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+\nu^2[m_{31}\bar Z_0+(m_{32}+m_{33})\bar\Phi_0]+\\&+m_L\nu^2t[\bar a_{31}\bar z_{d0}+\bar a_{32}t\bar\varphi_{d0}+\bar a_{33}t\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+m_L\nu^2t[\bar a_{31}\bar Z_0+(\bar a_{32}+\bar a_{33})t\bar\Phi_0]+(T_r\bar\gamma_{d0}')'-\\&-[k_{11}\{\bar\gamma_{d0}(b_1)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_1)\}-\\&-k_{12}\{\bar\gamma_{d0}(b_2)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_2)\}]\delta(y-b_1)-\\&-[-k_{21}\{\bar\gamma_{d0}(b_1)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_1)\}+\\&+k_{22}\{\bar\gamma_{d0}(b_2)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_2)\}]\delta(y-b_2)=0 \qquad (41)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac12 m_R(\bar Z_0-s_R\bar\Phi_0)+\\&+\int_0^b[m_{11}\bar z_{d0}+m_{12}\bar\varphi_{d0}+m_{13}\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]\,dy+\\&+\int_0^b[m_{11}\bar Z_0+(m_{12}+m_{13})\bar\Phi_0]\,dy+\\&+\int_0^b m_L[\bar a_{11}\bar z_{d0}+\bar a_{12}t\bar\varphi_{d0}+\bar a_{13}t\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]\,dy+\\&+\int_0^b m_L[\bar a_{11}\bar Z_0+(\bar a_{12}+\bar a_{13})t\bar\Phi_0]\,dy=0 \qquad (42)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\tfrac12 m_R s_R(\bar Z_0-s_R\bar\Phi_0)+\tfrac12 I_R\bar\Phi_0+\\&+\int_0^b[(m_{21}+m_{31})\bar z_{d0}+(m_{22}+m_{32})\bar\varphi_{d0}+\\&+(m_{23}+m_{33})\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]\,dy+\\&+\int_0^b[(m_{21}+m_{31})\bar Z_0+(m_{22}+m_{32}+m_{23}+m_{33})\bar\Phi_0]\,dy+\\&+\int_0^b m_Lt[(\bar a_{21}+\bar a_{31})\bar z_{d0}+(\bar a_{22}+\bar a_{32})t\bar\varphi_{d0}+\\&+(\bar a_{23}+\bar a_{33})t\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]\,dy+\\&+\int_0^b m_Lt[(\bar a_{21}+\bar a_{31})\bar Z_0+\\&+(\bar a_{22}+\bar a_{32}+\bar a_{23}+\bar a_{33})t\bar\Phi_0]\,dy=0. \qquad (43)\end{aligned}$$

Er wordt aan herinnerd, dat het geheele stel vergelijkingen nog steeds geen dempende materiaalkrachten omvat.

032 Voor antisymmetrische trillingen wordt ingevoerd

$$\bar z_0(y)=y\bar\Theta_0+\bar z_{d0}(y) \text{ met } \bar\Theta_0=\bar z'(0) \qquad (44)$$

$$\bar\varphi_0\equiv\bar\varphi_{d0} \qquad (45)$$

$$\bar\gamma_0(y)=\bar\varphi_{d0}(\beta)+\bar\gamma_{d0}(y). \qquad (46)$$

Dit in aanmerking genomen, leidt de substitutie van (32) en (33) in de bewegingsvergelijkingen en in de randvoorwaarde (31), die de antisymmetrische rompbeweging bepaalt, tot de relaties

$$\begin{aligned}&\nu^2[m_{11}\bar z_{d0}+m_{12}\bar\varphi_{d0}+m_{13}\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+\nu^2m_{11}y\bar\Theta_0+m_L\nu^2[\bar a_{11}\bar z_{d0}+\\&+\bar a_{12}t\bar\varphi_{d0}+\bar a_{13}t\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+m_L\nu^2\bar a_{11}y\bar\Theta_0-(b_{11}\bar z_{d0}''+b_{12}\bar\varphi_{d0}'')''=0 \qquad (47)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nu^2[m_{21}\bar z_{d0}+m_{22}\bar\varphi_{d0}+m_{23}\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+\nu^2m_{21}y\bar\Theta_0+m_L\nu^2t[\bar a_{21}\bar z_{d0}+\\&+\bar a_{22}t\bar\varphi_{d0}+\bar a_{23}t\{\bar\gamma_{d0}+\bar\varphi_{d0}(\beta)\}]+\\&+\nu^2m_Lt\bar a_{21}y\bar\Theta_0-(b_{21}\bar z_{d0}''+b_{22}\bar\varphi_{d0}'')''+\\&+(T_v\bar\varphi_{d0}')'+[k_{11}\{\bar\gamma_{d0}(b_1)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_1)\}-\\&-k_{12}\{\bar\gamma_{d0}(b_2)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_2)\}]\delta(y-b_1)+\\&+[-k_{21}\{\bar\gamma_{d0}(b_1)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_1)\}+\\&+k_{22}\{\bar\gamma_{d0}(b_2)+\bar\varphi_{d0}(\beta)-\bar\varphi_{d0}(b_2)\}]\delta(y-b_2)=0 \qquad (48)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\nu^2 [m_{31} \bar{z}_{d0} + m_{32} \bar{\varphi}_{d0} + m_{33} \{ \bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) \}] + \\
&\quad + \nu^2 m_{31}\, y\, \bar{\Theta}_0 + m_L \nu^2 t [\bar{a}_{31} \bar{z}_{d0} + \bar{a}_{32} t \bar{\varphi}_{d0} + \\
&+ \bar{a}_{33} t \{ \bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) \}] + \nu^2 \bar{a}_{31} m_L t\, y\, \bar{\Theta}_0 + (T_r \bar{\gamma}_{d0}')' - \\
&\quad - [k_{11} \{ \bar{\gamma}_{d0}(b_1) + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1) \} - \\
&\quad - k_{12} \{ \bar{\gamma}_{d0}(b_2) + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2) \}] \delta(y - b_1) - \\
&\quad - [k_{21} \{ \bar{\gamma}_{d0}(b_1) + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1) \} + \\
&+ k_{22} \{ \bar{\gamma}_{d0}(b_2) + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2) \}] \delta(y - b_2) = 0 \qquad (49)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} I_R' \bar{\Theta}_0 + \\
&+ \int_0^b [m_{11} \bar{z}_{d0} + m_{12} \bar{\varphi}_{d0} + m_{13} \{ \bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) \}]\, y\, dy + \\
&\qquad + \int_0^b m_{11} y^2 \bar{\Theta}_0\, dy + \\
&+ \int_0^b m_L [\bar{a}_{11} \bar{z}_{d0} + \bar{a}_{12} t \bar{\varphi}_{d0} + \bar{a}_{13} t \{ \bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) \}]\, y\, dy + \\
&\qquad + \int_0^b m_L \bar{a}_{11} y^2 \bar{\Theta}_0\, dy = 0 . \qquad (50)
\end{aligned}
$$

Bij de vorming van de 2e en 3e der bovenstaande vergelijkingen is in aanmerking genomen, dat $\varphi(0)$ nul is, wanneer de trilling antisymmetrisch is.

04 Reductie van de exacte vergelijkingen der kritische trillingen volgens Galerkin.

De in punt 03 vermelde exacte vergelijkingen der kritische trillingen hebben den vorm van stelsels simultane differentiaalvergelijkingen voor de vooralsnog onbekende deformaties $\bar{z}_{d0}(y)$, $\bar{\varphi}_{d0}(y)$, $\bar{\gamma}_{d0}(y)$, waaraan *gewone* vergelijkingen zijn toegevoegd voor de coördinaten van de rompbeweging. Men stuit op de bekende moeilijkheid, dat zij niet exact kunnen worden opgelost. De methoden, die ter voortzetting van de berekening kunnen worden aangewend, zijn uit de balkentheorie der toegepaste mechanica min of meer algemeen bekend. Zij komen alle daarop neer, dat men zich de onbekende deformaties benaderd denkt door reeksen met constante coëfficiënten naar een eindig aantal geschikt gekozen bekende lineair onafhankelijke „deformatiefuncties" en dan de differentiaalvergelijkingen zoekt te reduceeren op een zoodanig (toereikend) stelsel gewone algebraïsche (lineaire) vergelijkingen voor de coëfficiënten dezer reeksen, dat de oplossing daarvan inderdaad tot een bruikbare benadering van de deformaties leidt, welke optreden bij het altijd beperkte aantal der van belang zijnde eigentrillingen van het systeem, of in het gegeven geval liever: welke optreden in de kritische trilling.

041 Het is met het oog op de voorgenomen toepassing van binnen het bovenvermelde schema vallende methoden, dat bij de vorming van de vergelijkingen van de kritische trillingen de splitsing (35) t/m (37) of (44) t/m (46) is aangebracht. Vooral omdat het in het gegeven geval noodzakelijk is, het aantal termen in de reeksen voor de deformaties tot een minimum te beperken — de omvang van het numeriek rekenwerk neemt anders ontoelaatbare afmetingen aan — is nl. een zoo zorgvuldig mogelijke keuze der in deze reeksen op te nemen deformatiefuncties noodzakelijk. Dit maakt het zeer wenschelijk bij de constructie van deze functies de vooraf bekende hoofdeigenschappen van de werkelijke deformaties zorgvuldig in acht te nemen. Als zoodanig komt in de eerste plaats het „randgedrag" in aanmerking, geformuleerd door de randvoorwaarden. Voor $y = 0$ luiden deze voor de functies $\bar{z}_{d0}$ en $\bar{\varphi}_{d0}$

$$\bar{z}_{d0}(0) = \bar{z}_{d0}'(0) = \bar{\varphi}_{d0}(0) = \bar{\varphi}_{d0}'(0) = 0 , \qquad (51)$$

welke voorwaarden men zonder meer óók aan bijbehoorende deformatiefuncties kan opleggen. Voor de functies $\bar{z}_0$ en $\bar{\varphi}_0$ echter, welke bij verwijdering van de eerder genoemde splitsingen in de eindvergelijkingen terecht komen, zijn bij symmetrische trillingen de randwaarden $\bar{z}_0(0)$ en $\bar{\varphi}_0(0)$ *niet* vooraf bekend, en is bij antisymmetrische trillingen de randwaarde $\bar{z}'(0)$ vooraf onbekend, omdat deze randwaarden eerst worden bepaald door de rompbewegingsvergelijkingen die nog moeten worden opgelost. Daarom kunnen aan de functies $\bar{z}_0$ en/of $\bar{\varphi}_0$ geen alvast aan den rand $y = 0$ gelijkelijk nauw aansluitende deformatiefuncties worden toegevoegd. Dit kan een niet onbelangrijk bezwaar zijn, dat door de invoering van (35) t/m (37) of (44) t/m (46) op eenvoudige wijze is verwijderd.

Het is op grond van de voornoemde overwegingen, dat de in rapport V. 1252 ontwikkelde methoden voor de verwerking van de bewegelijkheid van den romp in de daar oorspronkelijk voor den vast ingeklemden vleugel afgeleide vergelijkingen (bij vaste inklemming van den vleugel valt het verschil tusschen $\bar{z}_0$ en $\bar{z}_{d0}$, en tusschen $\bar{\varphi}_0$ en $\bar{\varphi}_{d0}$ weg) ten deele minder geslaagd moeten worden genoemd. Alleen in punt 92 is de correcte werkwijze gevolgd; overal elders is de overgang op $\bar{z}_{d0}$-, $\bar{\varphi}_{d0}$-functies echter achterwege gelaten. Opnieuw met uitzondering van de in dit punt beschreven berekening zijn in rapport V. 1252 bovendien de luchtkrachten verwaarloosd, die het gevolg zijn van dat deel der verplaatsingen $\bar{z}_0$, $\bar{\varphi}_0$, dat aan de bewegelijkheid van den romp te wijten is, hetgeen weliswaar soms toelaatbaar, doch in een algemeen rekenschema voor de kritische snelheid misplaatst is. Ook deze, in rapport V. 1252 overigens niet onvermeld gebleven, tekortkoming is met de afleiding van de in punt 03 medegedeelde exacte vergelijkingen der kritische trilling ondervangen.

042 Ter voortzetting van de flutterberekening wordt de navolgende algemeene reeksuitdrukking voor de deformaties $\bar{z}_{d0}$, $\bar{\varphi}_{d0}$ en $\bar{\gamma}_{d0}$ ingevoerd

$$
\begin{aligned}
\bar{z}_{d0} &= \bar{q}_{10} C_{11} z_{d1} + \bar{q}_{20} C_{12} z_{d2} + \bar{q}_{30} C_{13} z_{d3} \\
\bar{\varphi}_{d0} &= \bar{q}_{10} C_{21} \varphi_{d1} + \bar{q}_{20} C_{22} \varphi_{d2} + \bar{q}_{30} C_{23} \varphi_{d3} \qquad (52) \\
\bar{\gamma}_{d0} &= \bar{q}_{10} C_{31} \gamma_{d1} + \bar{q}_{20} C_{32} \gamma_{d2} + \bar{q}_{30} C_{33} \gamma_{d3} ,
\end{aligned}
$$

waarmede het aantal amplitudefactoren $\bar{q}$ tot hoogstens 3 beperkt wordt op grond van de ervaring, dat de numerieke uitwerking van de berekening bij vergrooting van dit aantal een ontoelaatbaren omvang aanneemt. De deformatie van den kritischen trillingsvorm wordt dientengevolge in het meest algemeene geval door superpositie van 3 voorgeschreven volledige *deformatiecomponenten* benaderd, die uit vleugelbuiging en -torsie, alsmede rolroeruitslag en -vervorming zijn samengesteld. Deze kunnen ieder voor zich b.v. aan 3 naburige eigentrillingen (b.v. de standtrilling!) van het systeem zijn ontleend.

De matrix

$$\begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{matrix} \qquad (53)$$

wordt ingevoerd, om alle elementen in de matrix

$$\begin{matrix} z_{d1} & z_{d2} & z_{d3} \\ \varphi_{d1} & \varphi_{d2} & \varphi_{d3} \\ \gamma_{d1} & \gamma_{d2} & \gamma_{d3} \end{matrix} \qquad (54)$$

der deformatiefuncties op een willekeurige wijze te mogen normeeren. De verhoudingen der *„elementaire deformaties"* (buiging, torsie, rolroerverplaatsing) in iederen volledigen deformatiecomponent $(C_{1k} z_{dk},\ C_{2k} \varphi_{dk},\ C_{3k} \gamma_{dk})$ kunnen dan met behulp van de reëele constanten C_{ik} worden hersteld. Daar het uitsluitend op verhoudingen aankomt, kan in iedere kolom van de matrix (53) der amplitudeverhoudingen één element gelijk aan 1 worden genomen.

Als normeering van de deformatiefuncties komt in aanmerking het voorschrift

$$\begin{aligned} z_{dk}(b) &= 1\ (m); \\ \varphi_{dk}(b) &= 1\ (rad); \\ \gamma_{dk}(b) &= 1\ (rad); \\ k &= 1,\ 2,\ 3. \end{aligned} \qquad (55)$$

De aanname (52) omvat onder meer alle bijzondere gevallen, die in rapport V. 1252 grootendeels gescheiden zijn behandeld. Het is nl. niet noodzakelijk, de deformatie der kritische trilling uit 3 componenten op te bouwen; men kan met 2 volstaan. Dat komt daarop neer, dat in de matrix

$$\begin{matrix} C_{11} z_{d1} & C_{12} z_{d2} & C_{13} z_{d3} \\ C_{21} \varphi_{d1} & C_{22} \varphi_{d2} & C_{23} \varphi_{d3} \\ C_{31} \gamma_{d1} & C_{32} \gamma_{d2} & C_{33} \gamma_{d3} \end{matrix} \qquad (56)$$

één (de derde) kolom wordt weggelaten. Worden 2 kolommen weggelaten, dan ontaardt het systeem, omdat dan de phaseverschillen tusschen de trillingen in de elementaire deformaties op nul worden vastgelegd, hetgeen de ontwikkeling van een onstabiliteit, zooals bekend is, onmogelijk maakt.[7]

Ook is het niet strikt noodzakelijk, iedere deformatiecomponent uit de 3 elementaire deformaties samen te stellen. Dit komt daarop neer, dat met behoud van 2 of 3 kolommen in iedere rij bepaalde elementen kunnen ontbreken (gelijk aan nul kunnen zijn). B.v. kan $C_{13} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = 0$ worden genomen, hetgeen beteekent dat de rolroerverplaatsing als een aparte, enkelvoudige graad van vrijheid van het systeem wordt opgevat, een opvatting, die in het bijzonder voor de hand ligt wanneer het rolroer practisch volkomen torsiestijf is.

In het uiterste geval kan iedere *deformatiecomponent tot één elementaire deformatie* worden gereduceerd. B.v. kan in de matrix (56) alleen de hoofddiagonaal worden aangehouden (dan kan tevens $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 1$ worden gesteld). Op dien grondslag werden flutterberekeningen voor den buigenden en tordeerenden vleugel met rolroer tot voor kort altijd opgebouwd. De drie resteerende deformatiefuncties kunnen aan één bekende naburige eigentrilling van het systeem worden ontleend. Wordt bovendien één elementaire deformatie geheel onderdrukt, dan ontstaan de gebruikelijke rekenschema's voor buigingstorsieflutter, vleugelbuigings-rolroer-flutter en vleugeltorsie-rolroer-flutter. Houdt men uitsluitend de eerste 2 elementen uit één rij en één element der derde klom uit een van beide andere rijen aan, dan ontstaat een soort „verscherpte vorm" van de voornoemde binaire flutterberekeningen.

In iedere rij van de matrix (54) der deformatiefuncties kunnen gelijke elementen voorkomen. Wanneer het rolroer volkomen torsiestijf is, dienen γ_{d1}, γ_{d2} en γ_{d3} b.v. gelijk aan één zelfde constante te worden genomen. Ook bevatten de twee naburige eigentrillingsvormen, waaraan de deformatiefuncties worden ontleend, bij zeer verschillenden buigingsvorm soms veel op elkaar gelijkende torsiedeformaties. Men kan het kleine verschil dan verwaarloozen, de torsiedeformaties dus exact gelijk stellen, hetgeen later de numerieke uitwerking eenigszins verkort.

In het algemeen leidt de aanname (52) in zijn volledigen vorm, vooral wanneer ook de rompbewegelijkheid ten volle in aanmerking wordt genomen, reeds tot te bewerkelijke becijferingen, zoo*dat men practisch tot het aanbrengen van vereenvoudigingen gedwongen is*. De meest in aanmerking komende vereenvoudigingen loopen echter van geval tot geval uiteen, zoodat een specialisatie in de algemeene berekening niet kan worden aangebracht.

043 De deformatiefuncties in de samenvatting (54) zijn reëel. Dat wil zeggen, dat zij vermenigvuldigd met $\bar{q}_{k0} C_{ik} e^{i\nu\tau}$ een trilling voorstellen, wier phase langs de geheele spanwijdte dezelfde is. De functies $\bar{z}_{d0}$, $\bar{\varphi}_{d0}$, $\bar{\gamma}_{d0}$ echter zijn complex, en dat niet alleen, omdat in de kritische trilling de bekende phaseverschillen tusschen vleugelbuigings-, vleugeltorsie- en rolroertrillingen optreden, maar ook, omdat alle phasen in deze *trilling in het algemeen van den coördinaat y* afhangen. De luchtkrachtbelasting op het trillende systeem varieert immers niet in gelijke *phase met den trillingsuitslag, dus met de* belasting door traagheidskrachten, en bovendien is de verhouding tusschen deze twee verschillend geaarde belastingen langs de spanwijdte niet constant. (Beide belastingsaandeelen zijn evenredig met de amplituden. De luchtkrachtbelasting hangt echter daarnaast b.v. van de tapschheid van den vleugel af, terwijl de traagheidskrachten nader bepaald worden door de massaverdeeling van den vleugel).

---

[7]) Het ontaardt om een analoge reden ook, wanneer in (56) alle elementen van 2 rijen ontbreken.

De consequentie hiervan is, dat de variatie van de phase langs de spanwijdte bij sterke verkorting van de reeksen voor de functies $\bar{z}_{d0}$, $\bar{\varphi}_{d0}$, $\bar{\gamma}_{d0}$ niet meer redelijk goed kan worden afgebeeld. Werkt men b.v. uitsluitend met de hoofddiagonaal van de matrix (56), dan omvat dit de beperking, dat de phase van de kritische trilling *geheel onafhankelijk* van den coördinaat y wordt gesteld. Deze beperking vervalt in principe bij gebruik van langere reeksen, waarin men echter, om een werkelijk goede afbeelding van het gedrag van de phase te krijgen, relatief veel termen zou moeten opnemen, omdat ten aanzien van dit gedrag van te voren in het geheel niets bekend is en men dus de deformatiefuncties niet bij voorbaat op een snelle convergentie kan inrichten. Op deze laatste moeilijkheid stuit men ook, wanneer men de aanname (52) zou willen verbeteren door *complexe deformatiefuncties* toe te laten. Het ontwerp van dergelijke deformatiefuncties wordt eerst practisch uitvoerbaar, wanneer om te beginnen een volledige flutterberekening wordt uitgevoerd, welke een eerste benadering van de eigenschappen der kritische trilling verschaft (en welke reëele deformatiefuncties kan bevatten). Met die voorkennis kan een benadering van het bij de kritische trilling optredende krachtsysteem worden bepaald, waaruit een „verbeterde deformatie" kan worden afgeleid, die dan inderdaad complexe deformatiefuncties bevat! Deze kunnen worden gebruikt bij de uitwerking van een *volgende* benadering van de kritische trilling. Het gebruik van complexe deformatiefuncties komt dus pas in aanmerking in den loop van een iteratie-procédé voor de kritische trilling, en niet bij de voorloopig (en in rapport V. 1252 uitsluitend) bestudeerde ontwikkeling van een „flutterberekening van de eerste orde".

Gelukkig is er geen reden om te verwachten, dat de wijzigingen van de phase der trillingen langs de spanwijdte erg groot en dus belangrijk zullen zijn. Men mag aannemen, dat een berekening van de kritische trilling, welke de deformaties in korte, doch geschikt gekozen, reeksen naar reëele deformatiefuncties ontwikkelt, een uitkomst zal opleveren, die inderdaad als een bruikbare eerste benadering kan worden opgevat. Desalniettemin wint de iteratieve verbetering van de oplossing in verband met het gesignaleerde verschijnsel aan beteekenis.

Tot besluit moge worden vermeld, dat de behandeling van het systeem als systeem van voorgeschreven vervormbaarheid met volgens Lagrange geformuleerde bewegingsvergelijkingen — de in rapport V. 1252 gevolgde methode — het gebruik van complexe deformatiefuncties in het geheel niet toelaat.

044 Overeenkomstig de in rapport V. 1252 gegeven aanwijzingen verschaffen de uitkomsten van een met het vliegtuig uitgevoerde standtrillingsproef een geschikten grondslag voor de constructie van in de flutterberekening op te nemen deformatiefuncties. Het is met name aantrekkelijk in de uitdruking (52) volledige samengestelde deformatiecomponenten $\{C_{1k} z_{dk}, C_{2k} \varphi_{dk}, C_{3k} \gamma_{dk}\}$ aan te houden en deze ieder voor zich volledig aan een bij de standtrillingsproef opgemeten eigentrilling te ontleenen. De onbekende factoren $\bar{q}_{i0}$ krijgen dan immers het karakter van normaalcoördinaten van het in stilstaande lucht opgestelde systeem, waardoor de afleiding van de parameters, die de elastische eigenschappen vastleggen uit de bij de proef opgemeten eigenfrequenties ten zeerste wordt vereenvoudigd (zie rapport V. 1252). Dit zou zelfs de aangewezen weg voor de flutterberekening zijn, ware het niet, dat hij tot een *maximaal* aantal deformatiefuncties in de reeksen (52) voert, waardoor de numerieke behandeling bewerkelijker — vaak zelfs al te tijdroovend — wordt.

De bovenvermelde grondslag voor de constructie van deformatiefuncties vervalt, indien (nog) geen standtrillingsproef met het vliegtuig is uitgevoerd. Het is dan in den regel beter met minder deformatiefuncties te werken, die algebraïsch gedefinieerd kunnen worden, of die men b.v. aan metingen, uitgevoerd aan andere eenigermate gelijkvormig gebouwd vleugels kan ontleenen. Zoowel met het oog op deze „moeilijker" gevallen als in verband met de vaak blijkende wenschelijkheid de meestal niet zeer nauwkeurige opmeting van bij de standtrillingsproef aangetroffen trillingsvormen te corrigeeren, worden de van te voren bekende eigenschappen der deformaties nog even kort besproken.

De eerste eisch die onder alle omstandigheden aan de deformatiefuncties kan en moet worden opgelegd is, dat zij voldoen aan de randvoorwaarden der deformaties voor $y=0$, d.w.z. dat

$$z_{dk}(0)=z_{dk}'(0)=\varphi_{dk}(0)=\varphi_{dk}'(0)=0 \qquad (57)$$

is.

In deze formules vervalt de voorwaarde

$$\varphi_{dk}'(0)=0$$

wanneer de vleugel ten aanzien van de torsie als een enkelvoudige balk mag worden behandeld.

Aan de deformatie van het rolroer kunnen altijd de randvoorwaarden

$$\gamma_{dk}'(b_i)=\gamma_{dk}'(b_u)=0 \qquad (58)$$

worden opgelegd.

Voor de deformaties van den vleugel gelden aan den tip $(y=b)$ de voorwaarden (17), (18), (19). Herleid tot voorwaarden voor $\bar{z}_{d0}$, $\bar{\varphi}_{d0}$ en $\bar{\gamma}_{d0}$ luiden deze

$$\bar{z}_{d0}''(b)-\bar{\varphi}_{d0}''(b)=0 \qquad (59)$$

$$\bar{\varphi}_{d0}''(b)-\left(\frac{b_{11}\,b_{22}-b_{12}^2}{b_{11}\,T_v}\right)_{y=b}\cdot\bar{\varphi}_{d0}'''(b)=0 \qquad (60)$$

$$(b_{11}\,\bar{z}_{d0}'')'_{y=b}-(b_{12}\,\bar{\varphi}_{d0}'')'_{y=b}=0\,. \qquad (61)$$

De door de eerste twee regels geformuleerde voorwaarden kunnen meteen op bijbehoorende deformatiefuncties worden overgebracht. De laatste voorwaarde echter koppelt de deformaties z en φ. Het is duidelijk, dat zij in het algemeen dus alleen dan bij de constructie van de deformatiefuncties in acht kan worden genomen, wanneer ook in de deformatie*componenten* vleugelbuiging en -torsie ongescheiden worden opgenomen. Men kan er dan voor zorgen, dat de *combinaties*

$$\bar{z}_{dk}+C_{k2}\,\bar{\varphi}_{dk} \quad (C_{k2}\neq 0)$$

aan (61) voldoen. (Hiermede wordt het altijd gestelde doel bereikt, dat (61) voor alle waarden der $\bar{q}_{k0}$'s is vervuld). Worden vleugelbuiging en vleugeltorsie echter consequent in gescheiden deformatiecomponenten opgenomen, dan wordt de voorwaarde (61) in het algemeen geschonden.

De zoojuist genoemde complicatie kan in het gegeven geval desgewenscht op eenvoudige wijze worden verwijderd. Men kan nl. de ligging van de beschrijvingsas van den vleugel altijd zóó kiezen, dat

$$(b_{12})_{y=b}=0 \tag{62}$$

wordt. Dan vereenvoudigt (61) tot

$$\bar{z}_{d0}''=0 \tag{63}$$

waarmede de koppeling der $\bar{z}_{d0}$- en $\bar{\varphi}_{d0}$-functies wegvalt. Er is dus reden om deze keuze zooveel mogelijk aan te houden.

Behalve randvoorwaarden gelden voor de deformaties bepaalde „aansluitingsvoorwaarden" bij die dwarsdoorsneden, waar geconcentreerde krachten en/of momenten door de constructie worden opgenomen of in de constructie worden uitgewisseld. Dit gebeurt b.v. in de doorsneden b_1 en b_2, waar de aansluitingsvoorwaarden door de vergelijkingen (23); (24); (25) en (26); (27) worden voorgesteld, en verder in al die doorsneden, waar de vleugel door „in één punt of één doorsnede geconcentreerde" massa's is belast.

Het is in het algemeen niet mogelijk dergelijke aansluitingsvoorwaarden binnen het kader van de voorgestelde ontwikkeling (52) der deformaties bij de constructie der deformatiefuncties in aanmerking te nemen, omdat de aansluitingsvoorwaarden, anders dan de deformatiecomponenten, gewoonlijk ook de rompbewegingen bevatten. De vervulling dezer voorwaarden ware dientengevolge eerst bij een nog algemeenere ontwikkeling der deformatie mogelijk. Het loont echter niet de moeite deze in te voeren, omdat de sprong in de in aanmerking komende afgeleiden der deformatiefuncties slechts zelden zoo groot is, dat de functie zelve daar een duidelijk zichtbare bijzonderheid vertoont. In verband daarmede mag het zelfs practisch onuitvoerbaar worden genoemd een uit metingen afgeleide deformatiefunctie te corrigeeren door toetsing aan de daarvoor wellicht in principe in aanmerking komende aansluitingsvoorwaarden. Evenzoo is het practisch niet doenlijk zulke voorwaarden bij een analytische definitie der deformatiefuncties consequent in acht te nemen.

Op den regel, dat de door de aansluitingsvoorwaarden geformuleerde en dientengevolge bij voorbaat bekende, eigenschappen der deformatie bij de constructie van deformatiefuncties buiten beschouwing worden gelaten, is één uitzondering mogelijk en ten deele zelfs wenschelijk. Deze heeft betrekking op het gedrag van de rolroerdeformatie in de doorsneden b_1 en b_2. De aldaar geldige voorwaarden worden nl. geformuleerd door de vergelijkingen (26) en (27), die bij overgang op de $\bar{\gamma}_{d0}$- en $\bar{\varphi}_{d0}$-functies den vorm

$$\begin{aligned}-(T_r\bar{\gamma}_{d0}')_{y=b_1+0}+(T_r\bar{\gamma}_{d0}')_{y=b_1-0}=\\ =-k_{11}\{\bar{\gamma}_{d0}(b_1)+\bar{\varphi}_{d0}(\beta)-\bar{\varphi}_{d0}(b_1)\}+\\ +k_{12}\{\bar{\gamma}_{d0}(b_2)+\bar{\varphi}_{d0}(\beta)-\bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}-(T_r\bar{\gamma}_{d0}')_{y=b_2+0}+(T_r\bar{\gamma}_{d0}')_{y=b_2-0}=\\ =k_{21}\{\bar{\gamma}_{d0}(b_1)+\bar{\varphi}_{d0}(\beta)-\bar{\varphi}_{d0}(b_1)\}-\\ -k_{22}\{\bar{\gamma}_{d0}(b_2)+\bar{\varphi}_{d0}(\beta)-\bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}\end{aligned} \tag{65}$$

aannemen, waarin de coördinaten der rompbeweging niet optreden. Daar de functies $\bar{\gamma}_{d0}$ en $\bar{\varphi}_{d0}$ er gemengd in worden aangetroffen, kunnen deze voorwaarden aan bijbehoorende deformatiefuncties worden opgelegd, mits de rolroerdraaiing en de vleugeltorsie ook in de deformatiecomponenten ongescheiden worden opgenomen. Dit blijkt nu meer in het bijzonder dàn wenschelijk te zijn, wanneer de besturing slechts in één doorsnede op het rolroer aangrijpt, omdat de torsiestijfheid van het roer bij niet geheel gelijkmatig uitgebalanceerde massaverdeeling vaak niet groot genoeg is, om een aanmerkelijke rolroertorsie in de kritische trilling te onderdrukken. In zulk een geval vertoont de functie $\bar{\gamma}_{d0}$ in het punt b_1 een markanten knik. Deze wordt bepaald door de vergelijking

$$\begin{aligned}-(T_r\bar{\gamma}_{d0}')_{y=b_1+0}+(T_r\bar{\gamma}_{d0}')_{y=b_1-0}=\\ =-k_{11}\{\bar{\gamma}_{d0}(b_1)+\bar{\varphi}_{d0}(\beta)-\bar{\varphi}_{d0}(b_1)\},\end{aligned} \tag{66}$$

waaruit de functie $\bar{\varphi}_{d0}$ kan worden verwijderd door $\beta=b_1$ te nemen, waarna het mogelijk is, de voorwaarde — onafhankelijk van de samenstelling der deformatiecomponenten — aan de deformatiefuncties van het rolroer op te leggen. Het was met het oog hierop, dat de $\bar{\varphi}(\beta)$-term in (37) en (46) is ingevoerd.

De verwijdering van de $\bar{\varphi}_{d0}$-functie door geschikte afregeling van den parameter β uit de beide voorwaarden (64), (65), geldig voor het in twee doorsneden bestuurde rolroer, is kennelijk niet strikt mogelijk. Dit is echter ook minder noodig, omdat het totale rolroermoment dan over twee doorsneden verdeeld aan den vleugel wordt overgedragen en omdat de torsie van het roer bij deze constructie meestal geringer is, daar de torsiestijfheid van het roer door het dubbel aangrijpend stuurmechanisme wordt ondersteund (hetgeen immers de bedoeling van deze uitvoering is).

045 De reductie van de differentiaalvergelijkingen der vervormingen op in beginsel bruikbare stelsels homogene lineaire vergelijkingen vóor de factoren $\bar{q}_{k0}$ in (52) en de rompbewegingscoördinaten is op vele verschillende manieren mogelijk. Van al deze methoden blijven echter slechts twee nauw met elkaar verwante over, wanneer men aan den primairen eisch, dat de oplossingen die worden verkregen voor de (lagere) trillingsvormen, waarvoor men zich interesseert, convergeeren naar de overeenkomstige exacte oplossingen der differentiaalvergelijkingen, naarmate in de reeksen (52) méér termen worden opgenomen, den eisch toevoegt, dat deze convergentie zoo snel mogelijk zij. Dit tweetal bestaat uit de „methode der kleinste quadraten" (waarin de eisch der „snelle convergentie" op een mathematisch exact omschrijfbare wijze is verwerkt) en de „methode van Galerkin". Zooals bekend is, verdient de laatstgenoemde in het algemeen in verband met haar eenvoud de voorkeur. In het gegeven geval komt daar nog bij, dat zij de eenige is, die de energiebalans van het systeem exact intact laat, hetgeen een voor stabiliteitsberekeningen gunstige eigenschap lijkt. Daar bij flutterberekeningen een snelle convergentie van exceptioneel belang is, omdat de omvang van de reeksen voor de deformaties ter wille van de uitvoerbaarheid der numerieke uitwerking nagenoeg tot het uiterste moet worden beperkt, mag de methode van Galerkin uiteindelijk de eenige doelmatige worden genoemd. Zij is in een andere, geheel gelijkwaardige gedaante toegepast in rapport V. 1252.

Hoewel een uitvoerige behandeling van de methode van Galerkin te dezer plaatse overbodig is, is het wenschelijk één afleiding van de vergelijkingen van Galerkin in te lasschen, omdat daaraan een vorm kan worden gegeven, die een weg wijst naar een generalisatie dezer vergelijkingen, welke het gebruik van complexe deformatiefuncties mogelijk maakt. Deze worden ingevoerd bij de in punt 07 bestudeerde ontwikkeling van een iteratieprocédé voor de kritische trilling.

De bovenbedoelde afleiding gaat uit van het denkbeeld, dat de vervorming van het elastische systeem exact binnen het bereik van de een beperkt aantal termen bevattende reeksen (52) kan worden gebracht, door aan de belasting een stelsel van schijnkrachten toe te voegen. De vergelijkingen van Galerkin formuleeren dan de voorwaarden, waaronder deze schijnkrachten bij de uiteindelijk gevonden benadering voor de beweging van het systeem geen arbeid verrichten.

De uitwerking verloopt als volgt:

De schijnbelasting kan reeds in de oorspronkelijke bewegingsvergelijkingen (2), (9) en (12) *worden ingevoerd door daar de nullen in de* rechterleden resp. te vervangen door functies $\varepsilon_K(y;\tau)$, $\varepsilon_M(y;\tau)$ en $\varepsilon_N(y;\tau)$, die de resulteerende kracht en de resulteerende momenten der op een strook ter breedte 1 van het vleugel-rolroersysteem werkende schijnkrachtbelasting definieeren.[8]) Voor den totalen arbeid, dien de schijnkrachten verrichten in het zeer korte tijdsinterval $\delta\tau$, waarin de uitslagen de kleine wijzigingen

$$\delta z(y);\ \delta\varphi(y);\ \delta\gamma_r(y)$$

ondergaan, kan dan meteen worden geschreven

$$\delta A=\int_0^b[\varepsilon_K\delta z+(\varepsilon_M+\varepsilon_N)\delta\varphi+\varepsilon_N\delta\gamma_r]dy=$$
$$=\int_0^b[\varepsilon_K\delta z+\varepsilon_M\delta\varphi+\varepsilon_N\delta\gamma]dy. \qquad (67)$$

Voert het systeem een harmonische trilling uit, dan zullen de functies ε_K, ε_M en ε_N den bijzonderen vorm

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_K&=\mathrm{Im}\,\{\bar\varepsilon_{K0}(y)e^{i\nu\tau}\}\\ \varepsilon_M&=\mathrm{Im}\,\{\bar\varepsilon_{M0}(y)e^{i\nu\tau}\}\\ \varepsilon_N&=\mathrm{Im}\,\{\bar\varepsilon_{N0}(y)e^{i\nu\tau}\}\end{aligned}\right. \qquad (89)$$

hebben (waarmede alleen aan de zuiver imaginaire deelen der complexe grootheden physische beteekenis wordt toegekend). Wanneer men tevens de functies z; ...... door $\bar z_{d0}$.. vervangt, gaat (67) dan voor *symmetrische* trillingen over in

$$\delta A=\int_0^b[\mathrm{Im}\,\{\bar\varepsilon_{K0}e^{i\nu\tau}\}\,\mathrm{Im}\,\{i\nu(\bar z_{d0}+\bar Z_0)e^{i\nu\tau}\}+$$
$$+\mathrm{Im}\,\{\bar\varepsilon_{M0}e^{i\nu\tau}\}\times$$
$$\times\mathrm{Im}\,\{i\nu(\bar\varphi_{d0}+\bar\Phi_0)e^{i\nu\tau}\}+$$
$$+\mathrm{Im}\,\{\bar\varepsilon_{N0}e^{i\nu\tau}\}\,\mathrm{Im}\,\{i\nu(\bar\gamma_{d0}+\bar\Phi_0+\bar\varphi_{d0}(\beta))e^{i\nu\tau}\}]dy\,\delta\tau. \qquad (69)$$

Omdat is verondersteld dat de schijnkrachten zóó zijn gekozen, dat de deformatie van het systeem *exact* binnen het kader van de reeksaanname (52) *gaat vallen, kunnen* $\bar z_{d0}$, $\bar\varphi_{d0}$ en $\bar\gamma_{d0}$ in bovenstaande vergelijking — zonder daarmede een benadering te introduceeren — door de rechterleden der formules (52) worden vervangen. Stelt men tevens

$$\left.\begin{aligned}\bar\varepsilon_{K0;M0;N0}&=\varepsilon_{K0;M0;N0}'+i\,\varepsilon_{K0;M0;N0}''\\ \bar q_{k0}&=q_{k0}'+i\,q_{k0}''\ ;\ k=1,2,3\\ \bar Z_0&=Z_0'+i\,Z_0''\\ \bar\Phi_0&=\Phi_0'+i\,\Phi_0''\end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

dan blijkt uit (69) na uitwerking de betrekking

$$\frac{1}{\nu}\frac{\delta A}{\delta\tau}=\cos^2\nu\tau\int_0^b[\varepsilon_{K0}''(Z_0'+\sum_1^3 q_{h0}'C_{1h}z_{dh})+$$
$$+\varepsilon_{M0}''(\Phi_0'+\sum_1^3 q_{h0}'C_{2h}\varphi_{dh})+$$
$$+\varepsilon_{N0}''\{\Phi_0'+\sum_1^3 q_{h0}'(C_{3h}\gamma_{dh}+C_{2h}\varphi_{dh}(\beta))\}]dy-$$
$$-\sin^2\nu\tau\int_0^b[\varepsilon_{K0}'(Z_0''+\sum_1^3 q_{h0}''C_{1h}z_{dh})+\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots]dy+$$
$$+\sin\nu\tau\cos\nu\tau\int_0^b[\varepsilon_{K0}'(Z_0'+\sum_1^3 q_{h0}'C_{1h}z_{dh})+\ldots\ldots-$$
$$-\varepsilon_{K0}''(Z_0''+\sum_1^3 q_{h0}''C_{1h}z_{dh})-\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots]dy \qquad (71)$$

te ontstaan. Dit is — onafhankelijk van den tijd — nul als

$$\int_0^b[\varepsilon_{K0}''Z_0'+(\varepsilon_{M0}''+\varepsilon_{N0}'')\Phi_0'+$$
$$+\sum_1^3 q_{h0}'\{\varepsilon_{K0}''C_{1h}z_{dh}+\varepsilon_{M0}''C_{2h}\varphi_{dh}+$$
$$+\varepsilon_{N0}''(C_{3h}\gamma_{dh}+C_{2h}\varphi_{dh}(\beta))\}]dy=0$$

$$\int_0^b[\varepsilon_{K0}'Z_0''+\ \ldots\ldots\ldots\ +$$
$$+\sum_1^3 q_{h0}''\{\varepsilon_{K0}'C_{1h}z_{dh}+\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\}]dy=0$$

[8]) Eenvoudigheidshalve wordt aangenomen, dat geen rand- of aansluitingsvoorwaarden zijn geschonden.

$$\int_0^b [\varepsilon_{K0}' Z_0' + \dots\dots\dots +$$
$$+ \sum_1^3 q_{h0}' \{\varepsilon_{K0}' C_{1h} z_{dh} + \dots\dots \quad \dots\dots\}] dy -$$

$$-\int_0^b [\varepsilon_{K0}'' Z_0'' + \dots\dots\dots +$$
$$+ \sum_1^3 q_{h0}'' \{\varepsilon_{K0}'' C_{1h} z_{dh} + \dots\dots \quad \dots\dots\}] dy = 0$$

is.

Hieraan is voor *willekeurige* waarden van de „coördinaten" $\bar{Z}_0$, $\bar{\Phi}_0$, $\bar{q}_{h0}$ $(h=1, 2, 3)$ voldaan, als

$$\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}\, dy = 0 \qquad (72)$$

$$\int_0^b (\bar{\varepsilon}_{M0} + \bar{\varepsilon}_{N0})\, dy = 0 \qquad (73)$$

$$\int_0^b [\bar{\varepsilon}_{K0} C_{1h} z_{dh} + \bar{\varepsilon}_{M0} C_{2h} \varphi_{dh} + \bar{\varepsilon}_{N0}\{C_{3h}\gamma_{dh} + C_{2h}\varphi_{dh}(\beta)\}]\, dy = 0;\ h=1,2,3 \qquad (74)$$

is.

Voor *antisymmetrische* trillingen moet i.p.v. (69) worden gesteld

$$\delta A = \int_0^b [\mathrm{Im}\{\bar{\varepsilon}_{K0} e^{i\nu\tau}\}\, \mathrm{Im}\{i\nu(\bar{z}_{d0} + y\,\bar{\Theta}_0) e^{i\nu\tau}\} +$$
$$+ \mathrm{Im}\{\bar{\varepsilon}_{M0} e^{i\nu\tau}\}\, \mathrm{Im}\{i\nu\bar{\varphi}_{d0} e^{i\nu\tau}\} +$$
$$+ \mathrm{Im}\{\bar{\varepsilon}_{N0} e^{i\nu\tau}\}\, \mathrm{Im}\{i\nu(\bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta)) e^{i\nu\tau}\}]\, dy\, \delta\tau. \quad (75)$$

Men verifieert gemakkelijk, dat dit onafhankelijk van tijd en coördinaten nul is, als

$$\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}\, y\, dy = 0 \qquad (76)$$

$$\int_0^b [\bar{\varepsilon}_{K0} C_{1h} z_{dh} + \bar{\varepsilon}_{M0} C_{2h} \varphi_{dh} + \bar{\varepsilon}_{N0}\{C_{3h}\gamma_{dh} + C_{2h}\varphi_{dh}(\beta)\}]\, dy = 0;\ h=1,2,3. \qquad (77)$$

In aanmerking nemend, dat de schijnkrachtamplituden $\bar{\varepsilon}_{K0}$, $\bar{\varepsilon}_{M0}$ en $\bar{\varepsilon}_{N0}$ bij een symmetrische trilling gelijk zijn aan de linkerleden der vergelijkingen (39), (40) en (41) (waarin desgewenscht zonder daardoor een fout in te voeren de reeksen (52) mogen worden gesubstitueerd), volgt uit (72)

$$\nu^2 \int_0^b [m_{11}\bar{z}_{d0} + m_{12}\bar{\varphi}_{d0} + m_{13}\{\bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta)\}]\, dy +$$
$$+ \nu^2 \int_0^b [m_{11}\bar{Z}_0 + (m_{12} + m_{13})\bar{\Phi}_0]\, dy +$$
$$+ \nu^2 \int_0^b m_L [\bar{a}_{11}\bar{z}_{d0} + \bar{a}_{12} t \bar{\varphi}_{d0} + \bar{a}_{13} t \{\bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta)\}]\, dy +$$
$$+ \nu^2 \int_0^b m_L [\bar{a}_{11}\bar{Z}_0 + (\bar{a}_{12} + \bar{a}_{13}) t \bar{\Phi}_0]\, dy -$$
$$- (b_{11}\bar{z}_{d0}'' + b_{12}\bar{\varphi}_{d0}'')'_{y=0} = 0$$

en dit stemt in verband met de randbetrekking (14) exact met de rompbewegingsvergelijking (42) overeen. Op geheel analoge wijze toont men aan, dat (73) tot de vergelijking (43) voert en (76) tot (50).

Verder ziet men direct, dat (74) of (77) tot een stelsel van 3 homogene lineaire vergelijkingen in de onbekenden $\bar{q}_{h0}$ $(h=1, 2, 3)$ en de rompbewegingscoördinaten leidt. De voorwaarden (72); (73); (74) of (76); (77) leveren dus precies de gewenschte juist toereikende homogene lineaire vergelijkingen, waaruit de onbekenden $\bar{q}_{h0}$, $\bar{Z}_0$, $\bar{\Phi}_0$ of $\bar{q}_{h0}$, $\bar{\Theta}_0$ kunnen worden opgelost, met de bekende bijconditie, dat de coëfficiëntendeterminant nul is; een conditie, waarvan bij de stabiliteitsberekening op een eveneens bekende wijze gebruik wordt gemaakt.

046 Samenvattend kunnen de in het vorige punt uiteindelijk afgeleide lineaire homogene vergelijkingen geacht worden te bestaan uit:

a voor symmetrische trillingen: de vergelijkingen (42) en (43) en de vergelijkingen (74), waarin $\bar{\varepsilon}_{K0}$, $\bar{\varepsilon}_{M0}$ en $\bar{\varepsilon}_{N0}$ resp. door de linkerleden van (39), (40) en (41) zijn vervangen;

b voor antisymmetrische trillingen: de vergelijking (50) en de vergelijkingen (77), waarin voor $\bar{\varepsilon}_{K0}$, $\bar{\varepsilon}_{M0}$ en $\bar{\varepsilon}_{N0}$ resp. de linkerleden van (46), (48) en (49) zijn gesubstitueerd.

In al deze formules mogen de deformaties $\bar{z}_{d0}$, $\bar{\varphi}_{d0}$ en $\bar{\gamma}_{d0}$ door de reeksen (52) worden voorgesteld.

0461 Het volledige resultaat worde voor *symmetrische* trillingen als volgt geschreven

$$\sum_1^3 (\nu^2 U_{gh} - E_{gh} + \nu^2 \bar{L}_{gh})\bar{q}_{h0} +$$
$$+ (\nu^2 U_{g4} - E_{g4} + \nu^2 \bar{L}_{g4})\bar{Z}_0 +$$
$$+ (\nu^2 U_{g5} - E_{g5} + \nu^2 \bar{L}_{g5})\bar{\Phi}_0 = 0 \qquad (78)$$
$$g = 1 \dots 5.$$

Dan geldt

$$U_{gh} = U_{hg} = \int_0^b [m_{11} C_{1g} C_{1h} z_{dg} z_{dh} +$$
$$+ m_{12}(C_{1g} C_{2h} z_{dg} \varphi_{dh} + C_{1h} C_{2g} z_{dh} \varphi_{dg}) +$$
$$+ m_{13}(C_{1g} C_{3h} z_{dg} \gamma_{dh} + C_{1h} C_{3g} z_{dh} \gamma_{dg}) +$$
$$+ m_{22} C_{2g} C_{2h} \varphi_{dg} \varphi_{dh} +$$
$$+ m_{23}(C_{2g} C_{3h} \varphi_{dg} \gamma_{dh} + C_{2h} C_{3g} \varphi_{dh} \gamma_{dg}) +$$
$$+ m_{33} C_{3g} C_{3h} \gamma_{dg} \gamma_{dh} +$$
$$+ m_{13}(C_{1g} C_{2h} z_{dg} \varphi_{dh}(\beta) + C_{1h} C_{2g} z_{dh} \varphi_{dg}(\beta)) +$$
$$+ m_{23}(C_{2g} C_{2h} \varphi_{dg} \varphi_{dh}(\beta) + C_{2h} C_{2g} \varphi_{dh} \varphi_{dg}(\beta)) +$$
$$+ m_{33}(C_{3g} C_{2h} \gamma_{dg} \varphi_{dh}(\beta) + C_{3h} C_{2g} \gamma_{dh} \varphi_{dg}(\beta)) +$$
$$+ m_{33} C_{2g} C_{2h} \varphi_{dg}(\beta) \varphi_{dh}(\beta)]\, dy;$$
$$g = 1, 2, 3;\ h = 1, 2, 3.$$

$$U_{14} = U_{41} = \int_0^b [m_{11} C_{11} z_{d1} + m_{21} C_{21} \varphi_{d1} +$$
$$+ m_{31}(C_{31} \gamma_{d1} + C_{21} \varphi_{d1}(\beta))]\, dy$$

$$U_{15}=U_{51}=\int_0^b [(m_{12}+m_{13})C_{11}z_{d1}+(m_{22}+m_{23})C_{21}\varphi_{d1}+(m_{23}+m_{33})(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]\,dy$$

$$U_{24}=U_{42}=\int_0^b [m_{11}C_{12}z_{d2}+m_{21}C_{22}\varphi_{d2}+m_{31}(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]\,dy$$

$$U_{25}=U_{52}=\int_0^b [(m_{12}+m_{13})C_{12}z_{d2}+(m_{22}+m_{23})C_{22}\varphi_{d2}+(m_{23}+m_{33})(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]\,dy$$

$$U_{34}=U_{43}=\int_0^b [m_{11}C_{13}z_{d3}+m_{21}C_{23}\varphi_{d3}+m_{31}(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]\,dy$$

$$U_{35}=U_{53}=\int_0^b [(m_{12}+m_{13})C_{13}z_{d3}+(m_{22}+m_{23})C_{23}\varphi_{d3}+(m_{23}+m_{33})(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]\,dy$$

$$U_{45}=U_{54}=-\tfrac{1}{2}m_R s_R+\int_0^b (m_{12}+m_{13})\,dy$$

$$U_{44}=\tfrac{1}{2}m_R+\int_0^b m_{11}\,dy$$

$$U_{55}=\tfrac{1}{2}I_R+\tfrac{1}{2}m_R s_R^2+\int_0^b (m_{22}+m_{32}+m_{23}+m_{33})\,dy.$$

$$\begin{aligned}\overline{L}_{gh}=\int_0^b m_L[&\bar a_{11}C_{1g}C_{1h}z_{dg}z_{dh}+\bar a_{12}tC_{1g}C_{2h}z_{dg}\varphi_{dh}+\bar a_{13}tC_{1g}C_{3h}z_{dg}\gamma_{dh}+\\ &\bar a_{21}tC_{1h}C_{2g}z_{dh}\varphi_{dg}+\bar a_{22}t^2C_{2g}C_{2h}\varphi_{dg}\varphi_{dh}+\\ &+\bar a_{23}t^2C_{2g}C_{3h}\varphi_{dg}\gamma_{dh}+\bar a_{31}tC_{1h}C_{3g}z_{dh}\gamma_{dg}+\\ &+\bar a_{32}t^2C_{2h}C_{3g}\varphi_{dh}\gamma_{dg}+\bar a_{33}t^2C_{3g}C_{3h}\gamma_{dg}\gamma_{dh}+\\ &\bar a_{13}tC_{1g}C_{2h}z_{dg}\varphi_{dh}(\beta)+\\ &+\bar a_{23}t^2C_{2g}C_{2h}\varphi_{dg}\varphi_{dh}(\beta)+\\ &+\bar a_{33}t^2C_{3g}C_{2h}\gamma_{dg}\varphi_{dh}(\beta)+\\ &+\bar a_{31}tC_{1h}C_{2g}z_{dh}\varphi_{dg}(\beta)+\\ &+\bar a_{32}t^2C_{2h}C_{2g}\varphi_{dh}\varphi_{dg}(\beta)+\\ &+\bar a_{33}t^2C_{3h}C_{2g}\gamma_{dh}\varphi_{dg}(\beta)+\\ &+\bar a_{33}t^2C_{2g}C_{2h}\varphi_{dg}(\beta)\varphi_{dh}(\beta)]\,dy;\\ &g,\ h=1,\ 2,\ 3.\end{aligned}$$

$$\overline{L}_{14}=\int_0^b m_L[\bar a_{11}C_{11}z_{d1}+\bar a_{21}tC_{21}\varphi_{d1}+\bar a_{31}t(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{41}=\int_0^b m_L[\bar a_{11}C_{11}z_{d1}+\bar a_{12}tC_{21}\varphi_{d1}+\bar a_{13}t(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{15}=\int_0^b m_L[(\bar a_{12}+\bar a_{13})tC_{11}z_{d1}+(\bar a_{22}+\bar a_{23})t^2C_{21}\varphi_{d1}+(\bar a_{32}+\bar a_{33})t^2(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{51}=\int_0^b m_L[(\bar a_{21}+\bar a_{31})tC_{11}z_{d1}+(\bar a_{22}+\bar a_{32})t^2C_{21}\varphi_{d1}+(\bar a_{23}+\bar a_{33})t^2(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{24}=\int_0^b m_L[\bar a_{11}C_{12}z_{d2}+\bar a_{21}tC_{22}\varphi_{d2}+\bar a_{31}t(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{42}=\int_0^b m_L[\bar a_{11}C_{12}z_{d2}+\bar a_{12}tC_{22}\varphi_{d2}+\bar a_{13}t(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{25}=\int_0^b m_L[(\bar a_{12}+\bar a_{13})tC_{12}z_{d2}+(\bar a_{22}+\bar a_{23})t^2C_{22}\varphi_{d2}+(\bar a_{32}+\bar a_{33})t^2(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{52}=\int_0^b m_L[(\bar a_{21}+\bar a_{31})tC_{12}z_{d2}+(\bar a_{22}+\bar a_{32})t^2C_{22}\varphi_{d2}+(\bar a_{23}+\bar a_{33})t^2(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{34}=\int_0^b m_L[\bar a_{11}C_{13}z_{d3}+\bar a_{21}tC_{23}\varphi_{d3}+\bar a_{31}t(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{43}=\int_0^b m_L[\bar a_{11}C_{13}z_{d3}+\bar a_{12}tC_{23}\varphi_{d3}+\bar a_{13}t(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{35}=\int_0^b m_L[(\bar a_{12}+\bar a_{13})tC_{13}z_{d3}(\bar a_{22}+\bar a_{23})t^2C_{23}\varphi_{d3}+(\bar a_{32}+\bar a_{33})t^2(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{53}=\int_0^b m_L[(\bar a_{21}+\bar a_{31})tC_{13}z_{d3}+(\bar a_{22}+\bar a_{32})t^2C_{23}\varphi_{d3}+(\bar a_{23}+\bar a_{33})t^2(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]\,dy$$

$$\overline{L}_{45}=\int_0^b m_L(\bar a_{12}+\bar a_{13})t\,dy$$

$$\overline{L}_{54}=\int_0^b m_L(\bar a_{21}+\bar a_{31})t\,dy$$

$$\overline{L}_{44}=\int_0^b m_L\bar a_{11}\,dy$$

$$\overline{L}_{55}=\int_0^b m_L(\bar a_{22}+\bar a_{32}+\bar a_{23}+\bar a_{33})t^2\,dy$$

$$\begin{aligned}E_{gh}=\int_0^b [&b_{11}C_{1g}C_{1h}z_{dg}''z_{dh}''+\\ &+b_{12}(C_{1g}C_{2h}z_{dg}''\varphi_{dh}''+C_{1h}C_{2g}z_{dh}''\varphi_{dg}'')+\\ &+b_{22}C_{2g}C_{2h}\varphi_{dg}''\varphi_{dh}''+T_vC_{2g}C_{2h}\varphi_{dg}'\varphi_{dh}'+\\ &+T_rC_{3g}C_{3h}\gamma_{dg}'\gamma_{dh}']\,dy-\\ -k_{11}&\}C_{3h}\gamma_{dh}(b_1)+C_{2h}\varphi_{dh}(\beta)-C_{2h}\varphi_{dh}(b_1)\{\times\\ \times&\}C_{3g}\gamma_{dg}(b_1)+C_{2g}\varphi_{dg}(\beta)-C_{2g}\varphi_{dg}(b_1)\{+\\ +k_{21}&\}C_{3h}\gamma_{dh}(b_1)+C_{2h}\varphi_{dh}(\beta)-C_{2h}\varphi_{dh}(b_1)\{\times\\ \times&\}C_{3g}\gamma_{dg}(b_2)+C_{2g}\varphi_{dg}(\beta)-C_{2g}\varphi_{dg}(b_2)\{+\\ +k_{12}&\}C_{3h}\gamma_{dh}(b_2)+C_{2h}\varphi_{dh}(\beta)-C_{2h}\varphi_{dh}(b_2)\{\times\\ \times&\}C_{3g}\gamma_{dg}(b_1)+C_{2g}\varphi_{dg}(\beta)-C_{2g}\varphi_{dg}(b_1)\{-\\ -k_{22}&\}C_{3h}\gamma_{dh}(b_2)+C_{2h}\varphi_{dh}(\beta)-C_{2h}\varphi_{dh}(b_2)\{\times\\ \times&\}C_{3g}\gamma_{dg}(b_2)+C_{2g}\varphi_{dg}(\beta)-C_{2g}\varphi_{dg}(b_2)\{\end{aligned}$$

$$E_{14}=E_{41}=E_{15}=E_{51}=E_{24}=E_{42}=E_{25}=E_{52}=$$
$$=E_{34}=E_{43}=E_{35}=E_{53}=E_{44}=E_{55}=0$$

Bij de bepaling van de grootheden E_{gh} is medegebruik gemaakt van de formules (11).

0462 Voor *antisymmetrische trillingen* luidt de uitkomst

$$\sum_1^3(\nu^2 U_{gh}-E_{gh}+\nu^2\bar{L}_{gh})\bar{q}_{h0}+$$
$$+(\nu^2 U_{g4}-E_{g4}+\nu^2\bar{L}_{g4})\bar{\Theta}_0=0;\ g=1.....4. \quad (79)$$

De coëfficiënten U_{gh}, E_{gh}, $\bar{L}_{gh}$ met $g;h=1,2,3$ worden door precies dezelfde formules bepaald als voor symmetrische trillingen. Verder is echter

$$U_{14}=U_{41}=\int_0^b[m_{11}C_{11}z_{d1}+m_{12}C_{21}\varphi_{d1}+$$
$$+m_{13}(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]y\,dy$$

$$U_{24}=U_{42}=\int_0^b[m_{11}C_{12}z_{d2}+m_{12}C_{22}\varphi_{d2}+$$
$$+m_{13}(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]y\,dy$$

$$U_{34}=U_{43}=\int_0^b[m_{11}C_{13}z_{d3}+m_{12}C_{23}\varphi_{d3}+$$
$$+m_{13}(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]y\,dy$$

$$U_{44}=\tfrac{1}{2}I_R'+\int_0^b m_{11}y^2\,dx$$

$$\bar{L}_{14}=\int_0^b m_L[\bar{a}_{11}C_{11}z_{d1}+\bar{a}_{21}t\,C_{21}\varphi_{d1}+$$
$$+\bar{a}_{31}t(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]y\,dy$$

$$\bar{L}_{41}=\int_0^b m_L[\bar{a}_{11}C_{11}z_{d1}+\bar{a}_{12}t\,C_{21}\varphi_{d1}+$$
$$+\bar{a}_{13}t(C_{31}\gamma_{d1}+C_{21}\varphi_{d1}(\beta))]y\,dy$$

$$\bar{L}_{24}=\int_0^b m_L[\bar{a}_{11}C_{12}z_{d2}+\bar{a}_{21}t\,C_{22}\varphi_{d2}+$$
$$+\bar{a}_{31}t(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]y\,dy$$

$$\bar{L}_{42}=\int_0^b m_L[\bar{a}_{11}C_{12}z_{d2}+\bar{a}_{12}t\,C_{22}\varphi_{d2}+$$
$$+\bar{a}_{13}t(C_{32}\gamma_{d2}+C_{22}\varphi_{d2}(\beta))]y\,dy$$

$$\bar{L}_{34}=\int_0^b m_L[\bar{a}_{11}C_{13}z_{d3}+\bar{a}_{21}t\,C_{23}\varphi_{d3}+$$
$$+\bar{a}_{31}t(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]y\,dy$$

$$\bar{L}_{43}=\int_0^b m_L[\bar{a}_{11}C_{13}z_{d3}+\bar{a}_{12}t\,C_{23}\varphi_{d3}+$$
$$+\bar{a}_{13}t(C_{33}\gamma_{d3}+C_{23}\varphi_{d3}(\beta))]y\,dy$$

$$\bar{L}_{44}=\int_0^b m_L\bar{a}_{11}y^2\,dy$$

$$E_{14}=E_{41}=E_{24}=E_{42}=E_{34}=E_{43}=0.$$

047 Het is wellicht niet overbodig er de aandacht op te vestigen, dat in het algemeen tenminste één der „schijnkrachtamplituden" $\bar{\varepsilon}_{K0}$, $\bar{\varepsilon}_{M0}$, $\bar{\varepsilon}_{N0}$, die men natuurlijk graag zoo klein mogelijk zou zien, *oneindig* wordt in ieder punt van het interval $0\leq y\leq b$, waar een rand- of aansluitingsvoorwaarde is geschonden. Hoewel de nadeeligheid van een dergelijke singulariteit van de schijnkrachtfuncties zeer sterk kan uiteenloopen, wordt het hierdoor toch duidelijker waarom het wenschelijk is deze voorwaarden niet noodeloos te veronachtzamen.

048 In de eindvergelijkingen (78) of (79) kunnen zoowel bekend is achteraf dempende materiaalkrachten worden opgenomen, door de „elastische" constanten $E_{gh}(g;h=1,2,3)$, die bij gebruik der daarvoor aangegeven formules reëel uitvallen, met complexe constanten

$$e^{i\alpha_{gh}}\approx 1+i\alpha_{gh}(0\leqq\alpha_{gh}=\alpha_{hg}\ll 1) \qquad (80)$$

te vermenigvuldigen.

Enkele methoden, die ter bepaling van de dempingsconstanten beschikbaar zijn, werden in rapport V. 1252 uitvoerig besproken.

05 De behandeling van de luchtkrachtcoëfficiënten.

Terwijl de in de nummers 0461 en 0462 vermelde formules voor de coëfficiënten U_{ik} en E_{ik} zonder meer voor de numerieke berekening van deze grootheden geschikt zijn [9]), zijn de formules voor de luchtkrachtcoëfficiënten $\bar{L}_{ik}$ dat nog niet. De omvorming hiervan geschiedt principieel op de ook reeds in rapport V. 1252 beschreven wijze.

051 Voor de complexe coëfficiënten $\bar{a}_{ik}$ blijkt men, uitgaande van de formules (281), (282), (283) uit rapport V.1252 onder gebruikmaking van de aldaar aangetroffen complexe functie $\bar{P}(V)$ van de gereduceerde snelheid V en van de reëele functies R_n van de koordeverhouding η, de in tabel 1 geresumeerde uitdrukkingen te kunnen afleiden. Iedere coëfficiënt bestaat uit een som van een meer of minder groot aantal termen, die als factor alle een product van één der parameters

$$1\ ;\ c_v'=\frac{c_v}{t}\ ;\ c_{dr}'=\frac{c_{dr}}{t}\ ;\ c_v'^2\ ;\ c_v'\,c_{dr}'\ ;\ c_{dr}'^2$$

met één der functies

$$1\ ,\ 4\bar{P}V^2\ ,\ 4i\bar{P}V\ ,\ V^2 \text{ of } iV$$

bevatten, welke eigenschap den grondslag voor de systematische indeeling van tabel 1 vormt [10]).

Steeds overeenkomstig den in rapport V. 1252 gevolgden weg worden in de eerste plaats de van de gereduceerde snelheid onafhankelijke termen

---

[9]) Desondanks leidt men de coëfficiënten E_{ik}, zooals bekend, zoo eenigszins mogelijk, af uit bij de standtrillingsproef vastgestelde eigenfrequenties. Zie rapport V. 1252.

[10]) Men leest hieruit dus b.v. af.

$$\bar{a}_{12}=-R_{39}+R_1.4\bar{P}V^2+R_2.4i\bar{P}V+R_3.iV+$$
$$+\frac{c_v}{t}[-1+4i\bar{P}V]+$$
$$+\frac{c_{dr}}{t}[-R_9+R_4.4\bar{P}V^2+R_7.4i\bar{P}V+R_6.iV].$$

der $\bar{a}_{ik}$'s (de termen met den factor 1×1) uit de verdere omvorming afgescheiden door ze aan de massaverdeelingsfuncties m_{ik} toe te voegen, hetgeen mogelijk is, omdat zij dezelfde symmetrie blijken te bezitten. Dit stuk van de $\bar{a}_{ik}$'s bepaalt de schijnbare vergrooting van de massa van het systeem. Noteert men voor de massaverdeelingscoëfficiënten zónder toeslag ter onderscheiding $(m_{ik})_0$ dan geldt voor de coëfficiënten mét toeslag

$$\left.\begin{aligned}
m_{11} &= (m_{11})_0 + m_L \\
m_{12} &= (m_{12})_0 - m_L t\left(R_{39} + \frac{c_v}{t} + R_9 \frac{c_{dr}}{t}\right) = m_{21} \\
m_{13} &= (m_{13})_0 - m_L t\left(R_{40} - R_9 \frac{c_{dr}}{t}\right) = m_{31} \\
m_{22} &= (m_{22})_0 + m_L t^2\Bigl(R_{41} + 2R_{39}\frac{c_v}{t} + \\
&\quad + R_{42}\frac{c_{dr}}{t} + \frac{c_v^2}{t^2} + 2R_9\frac{c_v}{t}\frac{c_{dr}}{t} + R_{43}\frac{c_{dr}^2}{t^2}\Bigr) \\
m_{23} &= (m_{23})_0 + m_L t^2\Bigl(R_{44} + R_{40}\frac{c_v}{t} + \\
&\quad + R_{45}\frac{c_{dr}}{t} - R_9\frac{c_v}{t}\frac{c_{dr}}{t} - R_{43}\frac{c_{dr}^2}{t_2} = m_{32}\Bigr) \\
m_{33} &= (m_{33})_0 + \\
&\quad + m_L t^2\left(R_{46} - R_{47}\frac{c_{dr}}{t} + R_{43}\frac{c_{dr}^2}{t^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

(Vergelijk de formules (293) in V. 1252. Men bedenke, dat het teeken van de functies m_{12} en m_{13} is omgekeerd! Deze uitkomsten kunnen ook zonder moeite uit tabel 1 worden afgelezen).

Vervolgens worden alle overgebleven termen in vier groepen gesplitst door alle exemplaren met één der factoren

$$4\,\bar{P}V^2,\ 4\,i\bar{P}V,\ V^2 \text{ of } iV$$

samen te voegen, waardoor de coëfficiënten $\bar{a}_{ik}$ — ondanks de wijziging, gevormd door de onttrekking der „traagheidstermen", wordt de notatie $\bar{a}_{ik}$ voor de luchtkrachtcoëfficiënten onveranderd aangehouden — den vorm

$$\bar{a}_{ik} = c_{ik}^{(1)}.4\,i\bar{P}V + c_{ik}^{(2)}.4\,\bar{P}V^2 + \\ + c_{ik}^{(3)}.V^2 + c_{ik}^{(4)}.iV \quad (82)$$

aannemen. De reëele coëfficiënten $c_{ik}^{(n)}$ $(n=1....4)$ kunnen met behulp van tabel 1 gemakkelijk worden bepaald; het resultaat is samengevat in tabel 2. Zij zijn alle in het algemeen functies van y, omdat de parameters

$$c_v' = \frac{c_v}{t} \qquad c_{dr}' = \frac{c_{dr}}{t}$$

en de parameter

$$\eta = \frac{t_r}{t}$$

gewoonlijk van y afhankelijk zijn.

Ter vergemakkelijking van de hanteering der formules bij de numerieke uitwerking worden de gecompliceerde complexe functies $4\,\bar{P}V^2$, $4\,i\bar{P}V$ nu, evenals in rapport V. 1252, in Taylorreeksen ontwikkeld. Daartoe wordt op den vleugel eerst een referentiekoorde t_0 aangewezen (b.v. de midden-rolroer-koorde), waarop de basiswaarde V_0 van de gereduceerde snelheid wordt betrokken. Dan geldt

$$V = \frac{v}{\nu t} = \frac{v}{\nu t_0}\cdot\frac{t_0}{t} = V_0\frac{t_0}{t} = V_0\left(1 + \frac{t_0 - t}{t}\right)$$

of, als

$$\frac{t_0 - t}{t} = \xi \quad (83)$$

wordt gesteld,

$$V = V_0(1+\xi) \quad (84)$$

en dus

$$V^2 = V_0^2(1 + 2\xi + \xi^2). \quad (85)$$

Het resultaat van de Taylor-ontwikkeling van de functies $4\,i\bar{P}V$ en $4\,\bar{P}V^2$ kan als volgt worden geschreven

$$4\,i\bar{P}V = p_{10} + p_{11}\xi + p_{12}\xi^2 + \ldots\ldots + \\ + i(p_{10}' + p_{11}'\xi + p_{12}'\xi^2 + \ldots\ldots) \quad (86)$$

$$4\,\bar{P}V^2 = p_{20} + p_{21}\xi + p_{22}\xi^2 + \ldots\ldots - \\ - i(p_{20}' + p_{21}'\xi + p_{22}'\xi^2 + \ldots\ldots) \quad (87)$$

waarin de coëfficiënten p_{10}, p_{11} ....., p_{10}', p_{11}' ....., p_{20}, p_{21} ....., p_{20}' p_{21}' ..... reëele functies van V_0 zijn, die in tabelvorm kunnen worden gegeven (tabel 3).

Men stelle nu verder

$$\left.\begin{aligned} c_{ik}^{(1)}.\xi^n &= c_{ik}^{1n} \\ c_{ik}^{(2)}.\xi^n &= c_{ik}^{2n}, \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

waarna voor de luchtkrachtcoëfficiënten uiteindelijk kan worden geschreven

$$\bar{a}_{ik} = a_{ik}' + i\,a_{ik}'' \quad (89)$$

$$a_{ik}' = \sum_0^\infty c_{ik}^{1n}p_{1n} + \sum_0^\infty c_{ik}^{2n}p_{2n} + c_{ik}^{(3)}(1+\xi)^2V_0^2 \quad (90)$$

$$a_{ik}'' = \sum_0^\infty c_{ik}^{1n}p_{1n}' - \sum_0^\infty c_{ik}^{2n}p_{2n}' + c_{ik}^{(4)}(1+\xi)V_0. \quad (91)$$

Dit is de voor de numerieke uitwerking meest geschikte eindvorm voor deze coëfficiënten. De waarden van de grootheden c_{ik}" en van ξ hangen alleen van den vleugelvorm af en die van de p-functies alleen van de van y onafhankelijke basiswaarde van de gereduceerde snelheid. In de practijk worden uitsluitend de eerste 3 termen in de oneindig voortloopende Taylor-reeksen in rekening gebracht, hetgeen zelfs bij zeer tapsche vleugels voldoende nauwkeurig is.

Overeenkomstig een eerder gegeven aanwijzing wordt het bij de ontwikkeling van de formules formeel even breed als de vleugel aangenomen rolroer tot zijn juiste proporties teruggebracht, door voor $0 \leq y \leq b_i$ en eventueel voor $b_u \leq y \leq b$ de aan het rolroer toegevoegde massaverdeelingsfuncties identiek nul te nemen en den door het rolroer beinvloede luchtkrachtcoëfficiënten de voor $c_{dr} = 0$, $\eta = 0$ geldende waarden te geven. Dit komt daarop neer, dat in deze intervallen alle functies R_n identiek nul kunnen worden genomen, met uitzondering van de in tabel 4 — welke alle functies R_n bevat — vet gedrukte waarden

$$R_1(0)=1\,;\quad R_3(0)=1\,;\quad R_{18}(0)=\tfrac{1}{2}\,;\quad R_{41}(0)=\frac{3}{32}$$

$$R_2(0)=\tfrac{1}{2}\,;\quad R_{15}(0)=-\tfrac{1}{2}\,;\quad R_{39}(0)=\tfrac{1}{4}\,.$$

Weliswaar worden nl. de functies R_4^-, R_{19}^- en $R_{24}^- - \dfrac{8\ln\eta_s}{\pi^2}$ voor $\eta=0$ oneindig groot, doch deze functies komen in de formules alleen als factor van c_{dr} of c_{dr}^2 voor, welke buiten het rolroerinterval natuurlijk gelijk aan nul gesteld wordt. Het daaruit voortvloeiende onbepaalde product $\infty . 0$ blijkt gelijk aan nul te moeten worden genomen.

052 De uit de aerodynamische theorie van het trillende draagvlak afkomstige complexe $\overline{P}$-functie voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking

$$\frac{d\overline{P}}{dV}=-\frac{\overline{P}}{V}(\overline{P}-1)-\frac{i}{2V^2}(2\overline{P}-1) \qquad (92)$$

welke vergelijking [11]) kan worden gebruikt bij de berekening van de functies $p_{11}, p_{12}\ldots$; $p_{11}', p_{12}'\ldots$; $p_{21}, p_{22}\ldots$; $p_{21}', p_{22}'\ldots$. Getallenwaarden van de $\overline{P}$-functie zelf geven Kassner en Fingado in den vorm van een tabel voor de functie

$$A(V)=\mathrm{Re}\{\overline{P}\} \qquad (93)$$

en voor de functie

$$B(V)=-\mathrm{Im}\{\overline{P}\}. \qquad (94)$$

Men heeft

$$\left.\begin{aligned} p_{10}\,(V_0) &= \mathrm{Re}\{4i(A-iB)V_0\} = \\ &= 4B(V_0).V_0 \\ p_{10}'(V_0) &= \mathrm{Im}\{4i(A-iB)V_0\} = \\ &= 4A(V_0).V_0 \\ p_{20}\,(V_0) &= \mathrm{Re}\{4\,(A-iB)V_0^2\} = \\ &= 4A(V_0).V_0^2 \\ p_{20}'(V_0) &= -\mathrm{Im}\{4(A-iB)V_0^2\} = \\ &= 4B(V_0).V_0^2 \end{aligned}\right\} \qquad (95).$$

zodat deze functies direct met behulp van de tabel van Kassner en Fingado kunnen worden berekend. Gebruikmakend van de vergelijking (92) vindt men wegens

$$p_{11}=V_0\left(\frac{dp_{10}}{dV_0}\right)\,;\quad p_{12}=\tfrac{1}{2}V_0^2\left(\frac{d^2p_{10}}{dV_0^2}\right)$$

$$p_{11}'=V_0\left(\frac{dp_{10}'}{dV_0}\right)\,;\quad p_{12}'=\tfrac{1}{2}V_0^2\left(\frac{d^2p_{10}'}{dV_0^2}\right)$$

$$p_{21}=V_0\left(\frac{dp_{20}}{dV_0}\right)\,;\quad p_{22}=\tfrac{1}{2}V_0^2\left(\frac{d^2p_{20}}{dV_0^2}\right)$$

$$p_{21}'=V_0\left(\frac{dp_{20}'}{dV_0}\right)\,;\quad p_{22}'=\tfrac{1}{2}V_0^2\left(\frac{d^2p_{20}'}{dV_0^2}\right)$$

zonder veel moeite verder

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= (2-4BV_0)(2A-1)+4BV_0 \\ p_{11}' &= B(4BV_0-4)-4AV_0(A-2) \\ p_{21} &= 12AV_0^2-4(A^2-B^2)V_0^2-4BV_0 \\ p_{21}' &= 12BV_0^2-8ABV_0^2+4AV_0-2V_0 \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

en vervolgens

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= p_{10}\{(A-1)^2-B^2\}+2p_{10}'(A-1)B+ \\ &\quad +\frac{1}{V_0}\left\{\frac{3}{2}(p_{11}'-p_{10}')+4B-V_0\right\} \\ p_{12}' &= p_{10}'\{(A-1)^2-B^2\}-2p_{10}(A-1)B+ \\ &\quad +\frac{1}{V_0}\left(\frac{3}{2}p_{10}-1\right)(2A-1) \\ p_{22} &= \tfrac{1}{4}p_{11}(p_{10}-2)+p_{11}'V_0(1-A)+p_{20} \\ p_{22}' &= p_{11}V_0(1-A)- \\ &\quad -\tfrac{1}{4}p_{11}'(p_{10}-2)+V(p_{10}-1). \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

Uitgaande van de door Kassner en Fingado opgegeven waarden voor de functies $A(V_0)$ en $B(V_0)$ is met behulp van de formules (95), (96) en (97) tabel 3 opgesteld. Deze tabel stemt nagenoeg overeen met tabel 1 uit rapport V. 1252. Daar werden echter bij de bepaling van de door (86); (87) gedefinieerde functies de differentiaalquotiënten door differentiequotiënten vervangen, hetgeen bij gebruik van de vergelijking (92) een overbodige onnauwkeurigheid is, die overigens practisch nauwelijks beteekenis heeft.

053 Worden de uitdrukkingen (89), (90), (91), waarbij van iedere der daarin aangetroffen reeksen alleen de eerste 3 termen worden aangehouden, in de formules afgeleid in 0461 en 0462 voor de luchtkrachtcoëfficiënten gesubstitueerd, dan worden bij gebruik van de afkorting

$$\chi_{dk}=\frac{C_{3k}\gamma_{dk}+C_{2k}\varphi_{dk}(\beta)}{C_{3k}} \text{ voor } \bar{\gamma}_{dk}\neq 0 \qquad (98)$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_{dk} &= \varphi_{dk}(\beta) \\ C_{3k} &= C_{2k} \end{aligned}\right\} \text{ als } \bar{\gamma}_{dk}\equiv 0 \qquad (99)$$

en de splitsingen

$$\overline{L}_{gh}=L_{gh}'+iL_{gh}'', \qquad (100)$$

rekening houdend met de omstandigheid, dat volgens tabel 2 sommige coëfficiënten $c_{ik}^{\cdot\cdot}$ ontbreken, de in de beide volgende punten samengevatte uitkomsten verkregen.

11) Vergelijk L. Schwarz: die Berechung der Funktionen $U_1(s)$ und $U_2(s)$. Luftfahrtforschung Bd. 17-1940-S.362, waar de differentiaalvergelijking van de T-functie van Küssner wordt medegedeeld (zie formule (25)), die met de $\overline{P}$-functie samenhangt volgens de formule

$$2\overline{P}(V)=1+T\left(\frac{1}{2V}\right)$$

0531 Voor symmetrische trillingen geldt

$$
\begin{aligned}
L_{gh}' = {} & \sum_0^2 p_{1n} \int_0^b m_L [\, c_{11}^{1n} C_{1g} C_{1h} z_{dg} z_{dh} + c_{12}^{1n} t\, C_{1g} C_{2h} z_{dg} \varphi_{dh} + c_{13}^{1n} t\, C_{1g} C_{3h} z_{dg} \chi_{dh} + \\
& + c_{21}^{1n} t\, C_{2g} C_{1h} \varphi_{dg} z_{dh} + c_{22}^{1n} t^2 C_{2g} C_{2h} \varphi_{dg} \varphi_{dh} + c_{23}^{1n} t^2 C_{2g} C_{3h} \varphi_{dg} \chi_{dh} + \\
& + c_{31}^{1n} t\, C_{3g} C_{1h} \chi_{dg} z_{dh} + c_{32}^{1n} t^2 C_{3g} C_{2h} \chi_{dg} \varphi_{dh} + c_{33}^{1n} t^2 C_{3g} C_{3h} \chi_{dg} \chi_{dh} \,]\, dy + \\
& + \sum_0^2 p_{2n} \int_0^b m_L [\, c_{12}^{2n} t\, C_{1g} C_{2h} z_{dg} \varphi_{dh} + c_{13}^{2n} t\, C_{1g} C_{3h} z_{dg} \chi_{dh} + \\
& + c_{22}^{2n} t^2 C_{2g} C_{2h} \varphi_{dg} \varphi_{dh} + c_{23}^{2n} t^2 C_{2g} C_{3h} \varphi_{dg} \chi_{dh} + \\
& + c_{32}^{2n} t^2 C_{3g} C_{2h} \chi_{dh} \varphi_{dh} + c_{33}^{2n} t^2 C_{3g} C_{3h} \chi_{dg} \chi_{dh} \,]\, dy + \\
& + V_0^2 \int_0^b m_L [\, c_{22}^{(3)} t^2 C_{2g} C_{2h} \varphi_{dg} \varphi_{dh} + c_{23}^{(3)} t^2 C_{2g} C_{3h} \varphi_{dg} \chi_{dh} + \\
& + c_{32}^{(3)} t^2 C_{3g} C_{2h} \chi_{dg} \varphi_{dh} + c_{33}^{(3)} t^2 C_{3g} C_{3h} \chi_{dg} \chi_{dh} \,]\, (1+\xi)^2\, dy, \\
& \qquad g ; h = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{gh}'' = {} & \sum_0^2 p_{1n}' . \text{ factor van } p_{1n} \text{ in } L_{gh}' - \sum_0^2 p_{2n}' . \text{ factor van } p_{2n} \text{ in } L_{gh}' + \\
& + V_0 \int_0^b m_L [\, c_{12}^{(4)} t\, C_{1g} C_{2h} z_{dg} \varphi_{dh} + c_{13}^{(4)} t\, C_{1g} C_{3h} z_{dg} \chi_{dh} + \\
& + c_{22}^{(4)} t^2 C_{2g} C_{2h} \varphi_{dg} \varphi_{dh} + c_{23}^{(4)} t^2 C_{2g} C_{3h} \varphi_{dg} \chi_{dh} + \\
& + c_{32}^{(4)} t^2 C_{3g} C_{2h} \chi_{dg} \varphi_{dh} + c_{33}^{(4)} t^2 C_{3g} C_{3h} \chi_{dg} \chi_{dh} \,]\, (1+\xi)\, dy, \\
& \qquad g ; h = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$
L_{g4}' = \sum_0^2 p_{1n} \int_0^b m_L [\, c_{11}^{1n} C_{1g} z_{dg} + c_{21}^{1n} t\, C_{2g} \varphi_{dg} + c_{31}^{1n} t\, C_{3g} \chi_{dg} \,]\, dy, \qquad g = 1, 2, 3.
$$

$$
L_{g4}'' = \sum_0^2 p_{1n}' . \text{ factor van } p_{1n} \text{ in } L_{g4}' , \quad g = 1, 2, 3.
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4h}' = {} & \sum_0^2 p_{1n} \int_0^b m_L [\, c_{11}^{1n} C_{1h} z_{dh} + c_{12}^{1n} t\, C_{2h} \varphi_{dh} + c_{13}^{1n} t\, C_{3h} \chi_{dh} \,]\, dy + \\
& + \sum_0^2 p_{2n} \int_0^b m_L [\, c_{12}^{2n} t\, C_{2h} \varphi_{dh} + c_{13}^{2n} t\, C_{3h} \chi_{dh} \,]\, dy, \\
& \qquad h = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4h}'' = {} & \sum_0^2 p_{1n}' . \text{ factor van } p_{1n} \text{ in } L_{4h}' - \sum_0^2 p_{2n}' . \text{ factor van } p_{2n} \text{ in } L_{4h}' + \\
& + V_0 \int_0^b m_L [\, c_{12}^{(4)} t\, C_{2h} \varphi_{dh} + c_{13}^{(4)} t\, C_{3h} \chi_{dh} \,]\, (1+\xi)\, dy, \\
& \qquad h = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{g5}' = {} & \sum_0^2 p_{1n} \int_0^b m_L [(c_{12}^{1n} + c_{13}^{1n}) C_{1g} z_{dg} + (c_{22}^{1n} + c_{23}^{1n}) t\, C_{2g} \varphi_{dg} + (c_{32}^{1n} + c_{33}^{1n}) t\, C_{3g} \chi_{dg}]\, t\, dy + \\
& + \sum_0^2 p_{2n} \int_0^b m_L [(c_{12}^{2n} + c_{13}^{2n}) C_{1g} z_{dg} + (c_{22}^{2n} + c_{23}^{2n}) t\, C_{2g} \varphi_{dg} + (c_{32}^{2n} + c_{33}^{2n}) t\, C_{3g} \chi_{dg}]\, t\, dy + \\
& + V_0^2 \int_0^b m_L [\, (c_{22}^{(3)} + c_{23}^{(3)}) t\, C_{2g} \varphi_{dg} + (c_{32}^{(3)} + c_{33}^{(3)}) t\, C_{3g} \chi_{dg}]\, t\, (1+\xi)^2\, dy \\
& \qquad g = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{g5}'' = {} & \sum_0^2 p_{1n}' . \text{ factor van } p_{1n} \text{ in } L_{g5}' - \sum_0^2 p_{2n}' . \text{ factor van } p_{2n} \text{ in } L_{g5}' + \\
& + V_0 \int_0^b m_L [(c_{12}^{(4)} + c_{13}^{(4)}) C_{1g} z_{dg} + (c_{22}^{(4)} + c_{23}^{(4)}) t\, C_{2g} \varphi_{dg} + (c_{32}^{(4)} + c_{33}^{(4)}) t\, C_{3g} \chi_{dg}]\, t\, (1+\xi)\, dy, \\
& \qquad g = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

$$L_{5h}'=\sum_0^2 p_{1n}\int_0^b m_L[(c_{21}{}^{1n}+c_{31}{}^{1n})C_{1h}z_{dh}+(c_{22}{}^{1n}+c_{32}{}^{1n})tC_{2h}\varphi_{dh}+(c_{23}{}^{1n}+c_{33}{}^{1n})tC_{3h}\chi_{dh}]t\,dy+$$

$$+\sum_0^2 p_{2n}\int_0^b m_L[\qquad (c_{22}{}^{2n}+c_{32}{}^{2n})tC_{2h}\varphi_{dh}+(c_{23}{}^{2n}+c_{33}{}^{2n})tC_{3h}\chi_{dh}]t\,dy+$$

$$+V_0^2\int_0^b m_L[\qquad (c_{22}{}^{(3)}+c_{32}{}^{(3)})tC_{2h}\varphi_{dh}+(c_{23}{}^{(3)}+c_{33}{}^{(3)})tC_{3h}\chi_{dh}]t(1+\xi)^2\,dy,$$

$$h=1,2,3$$

$$L_{5h}''=\sum_0^2 p_{1n}\,.\,\text{factor van } p_{1n} \text{ in } L_{5h}' \quad -\sum_0^2 p_{2n}'\,.\,\text{factor van } p_{2n} \text{ in } L_{5h}'+$$

$$+V_0\int_0^b m_L[\qquad (c_{22}{}^{(4)}+c_{32}{}^{(4)})tC_{2h}\varphi_{dh}+(c_{23}{}^{(4)}+c_{33}{}^{(4)})tC_{3h}\chi_{dh}]t(1+\xi)\,dy,$$

$$h=1,2,3.$$

$$L_{45}'=\sum_0^2 p_{1n}\int_0^b m_L(c_{12}{}^{1n}+c_{13}{}^{1n})t\,dy \quad +\sum_0^2 p_{2n}\int_0^b m_L(c_{12}{}^{2n}+c_{13}{}^{2n})t\,dy.$$

$$L_{45}''=\sum_0^2 p_{1n}'\int_0^b m_L(c_{12}{}^{1n}+c_{13}{}^{1n})t\,dy \quad -\sum_0^1 p_{2n}'\int_0^b m_L(c_{12}{}^{2n}+c_{13}{}^{2n})t\,dy+$$

$$+V_0\int_0^b m_L(c_{12}{}^{(4)}+c_{13}{}^{(4)})t(1+\xi)\,dy,$$

$$L_{54}'=\sum_0^2 p_{1n}\int_0^b m_L(c_{21}{}^{1n}+c_{31}{}^{1n})t\,dy \quad ; \quad L_{54}''=\sum_0^2 p_{1n}'\int_0^b m_L(c_{21}{}^{1n}+c_{31}{}^{1n})t\,dy$$

$$L_{44}'=\sum_0^2 p_{1n}\int_0^b m_L c_{11}{}^{1n}\,dy \quad ; \quad L_{44}''=\sum_0^2 p_{1n}'\int_0^b m_L c_{11}{}^{1n}\,dy$$

$$L_{55}'=\sum_0^2 p_{1n}\int_0^b m_L(c_{22}{}^{1n}+c_{32}{}^{1n}+c_{23}{}^{1n}+c_{33}{}^{1n})t^2\,dy+$$

$$+\sum_0^2 p_{2n}\int_0^b m_L(c_{22}{}^{2n}+c_{32}{}^{2n}+c_{23}{}^{2n}+c_{33}{}^{2n})t^2\,dy+$$

$$+V_0^2\int_0^b m_L(c_{22}{}^{(3)}+c_{32}{}^{(3)}+c_{23}{}^{(3)}+c_{33}{}^{(3)})t^2(1+\xi)^2\,dy,$$

$$L_{55}''=\sum_0^2 p_{1n}'\,.\,\text{factor van } p_{1n} \text{ in } L_{55}'-\sum_0^2 p_{2n}'\,.\,\text{factor van } p_{2n} \text{ in } L_{55}'+$$

$$+V_0\int_0^b m_L(c_{22}{}^{(4)}+c_{32}{}^{(4)}+c_{23}{}^{(4)}+c_{33}{}^{(4)})t^2(1+\xi)\,dy.$$

0532 Is de trilling antisymmetrisch, dan gelden voor L_{gh}', L_{gh}'' met $g;h=1,2,3$ precies dezelfde formules als bij symmetrische trillingen, terwijl verder

$$L_{g4}'=\sum_0^2 p_{1n}\int_0^b m_L[c_{11}{}^{1n}C_{1g}z_{dg}+$$
$$+c_{21}{}^{1n}tC_{2g}\varphi_{dg}+c_{31}{}^{1n}tC_{3g}\chi_{dg}]y\,dy$$
$$g=1,2,3$$

$$L_{g4}''=\sum_0^2 p_{1n}'\,.\,\text{factor van } p_{1n} \text{ in } L_{g4}' \qquad g=1,2,3$$

$$L_{4h}'=\sum_0^2 p_{1n}\int_0^b m_L[c_{11}{}^{1n}C_{1h}z_{dh}+$$
$$+c_{12}{}^{1n}tC_{2h}\varphi_{dh}+c_{13}{}^{1n}tC_{3h}\chi_{dh}]y\,dy+$$
$$+\sum_0^2 p_{2n}\int_0^b m_L[\quad c_{12}{}^{2n}tC_{2h}\varphi_{dh}+c_{13}{}^{2n}tC_{3h}\chi_{dh}]y\,dy$$
$$h=1,2,3$$

$$L_{4h}'' = \sum_{0}^{2} p_{1n}'.\text{factor van } p_{1n} \text{ in } L_{4h}' -$$

$$- \sum_{0}^{2} p_{2n}'.\text{factor van } p_{2n} \text{ in } L_{4h}' +$$

$$+ V_0 \int_0^b m_L [\, c_{12}^{(4)} t C_{2h} \varphi_{dh} + c_{13}^{(4)} t C_{3h} \chi_{dh}] y (1 + \xi) dy \qquad h = 1, 2, 3$$

$$L_{44}' = \sum_{0}^{2} p_{1n} \int_0^b m_L c_{11}^{1n} y^2 dy$$

$$L_{44}'' = \sum_{0}^{2} p_{1n}' \int_0^b m_L c_{11}^{1n} y^2 dy .$$

06 De kritische trillingen.

061 Na met de hiervoor medegedeelde formules alle coëfficiënten van de vergelijkingen (78) of (79) voor een geheele reeks waarden van de op de referentiekoorde t_0 betrokken gereduceerde snelheid V_0 — welke het geheele in aanmerking komende interval der gereduceerde snelheden „aftasten" — te hebben berekend, kunnen de kritische snelheid, alsmede de frequentie en de trillingsvorm van de kritische trilling (indien aanwezig) worden opgespoord. Zooals bekend is, is de meest directe weg de volgende:

De kritische trilling is een juist ongedempte trilling, d.w.z. een trilling, waarvoor de frequentieparameter ν reëel is. Deze parameter wordt echter bepaald door de determinant-vergelijking

$$\begin{vmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \ldots \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0 \qquad (101)$$

met

$$\bar{A}_{gh} = \nu^2 U_{gh} - \bar{E}_{gh} + \nu^2 \bar{L}_{gh} , \qquad (102)$$

welke een algebraïsche vergelijking van beperkten (hoogstens derden) graad in ν^2 is met complexe coëfficiënten, die functies van den parameter V_0 zijn. Na ontwikkeling van de determinant laat zij zich in twee vergelijkingen in ν^2 met reëele coëfficiënten splitsen, welke als volgt kunnen geschreven worden

$$\triangle'(V_0; \nu^2) \equiv F_{11}(V_0).(\nu^2)^3 + F_{12}(V_0).(\nu^2)^2 + F_{13}(V_0).(\nu^2) + F_{14}(V_0) = 0 \qquad (103)$$

$$\triangle''(V_0; \nu^2) \equiv F_{21}(V_0).(\nu^2)^3 + F_{22}(V_0).(\nu^2)^2 + F_{23}(V_0).(\nu^2) + F_{24}(V_0) = 0. \qquad (104)$$

Uit de eerste vergelijking kan de parameter ν^2 worden opgelost. Van belang zijn alleen de *reëele* wortels; zijn deze er niet, dan is er in het onderzochte interval der V_0-as in ieder geval geen kritische trilling. Voor de gevonden oplossing kan worden geschreven

$$\nu^2 = f_n(V_0) \qquad (105)$$

met $n = 1$ voor den eersten, $n = 2$ voor den tweeden en $n = 3$ voor den derden wortel (aannemend, dat er 3 reeële wortels blijken te zijn). Door substitutie van deze wortels in (104) ontstaat een functie, of ontstaan n stukken van een functie

$$\triangle''(V_0; f_n(V_0)) \qquad (106)$$

van de gereduceerde snelheid, waarvan de (grafisch te bepalen) nulpunten kritische waarden van V_0 leveren. Bij iedere

$$V_0 = V_{0,krit}$$

levert het bijbehoorende verband

$$\nu^2_{krit} = f_n(V_{0,krit}) \qquad (107)$$

de frequentie der kritische trilling, waarvan de trillingsvorm tenslotte uit de vergelijkingen (78); (79) kan worden opgelost, nadat in de coëfficiënten

$$V_0 = V_{0,krit} \qquad \nu^2 = \nu^2_{krit} . \qquad (108)$$

is gesubstitueerd.

062 Aan dezen directen weg naar de kritische snelheid zijn enkele nadeelen verbonden[12]). In die (niet zeldzame) gevallen nl., waarin geen kritische snelheid wordt gevonden — het systeem dus in het geheele onderzochte gebied (gewoonlijk) stabiel is — wordt een uitsluitend negatief resultaat verkregen dat volledig vervat is in de uitspraak: er is in het onderzochte gebied geen kritische snelheid. In werkelijkheid echter kan aan de geheele uitvoerige en bewerkelijke berekening wel een vollediger inzicht in het gedrag van het systeem worden ontleend. Te dien einde worde de karakteristieke vergelijking (101) volledig opgelost (voor een geheele reeks waarden van V_0). Als algebraïsche vergelijking van den 3den graad in ν^2 heeft zij altijd 3 oplossingen, die, omdat de coëfficiënten complex zijn, haast altijd alle complex uitvallen. Voor deze oplossingen moge worden geschreven

$$\bar{\nu}^2 = \bar{f}_n(V_0) = |\nu^2| . e^{i\alpha_\nu} . \qquad (109)$$

Physische beteekenis hebben deze oplossingen in eerste instantie alleen, als $\bar{\nu}^2$ reëel is. Want weliswaar kan een trilling met complexe frequentie met het oog op den steeds ingevoerden tijdfactor

$$e^{i\bar{\nu}\tau}$$

als stabiele of onstabiele, d.w.z. gedempte of opslingerende trilling worden opgevat, doch voor zulk een trilling zijn de formules waardoor de luchtkrachten werden voorgesteld incorrect, omdat deze uitsluitend voor het geval der juist ongedempte trillingen geldig zijn.

Nu denke men zich echter zulk een complexe oplossing $\bar{\nu}^2$ in de coëfficiënten van de vergelijkingen (78) of (79) gesubstitueerd. *Formeel* zijn deze vergelijkingen dan oplosbaar. Wordt vervolgens iedere vergelijking gedeeld door de complexe constante

$$e^{i\alpha_\nu}$$

dan ontstaat een gewijzigde schrijfwijze der ver-

[12]) De samensteller van dit rapport werd hierop mondeling door prof. H. G. Küssner opmerkzaam gemaakt.

gelijkingen waarin de coëfficiënten kennelijk den vorm

$$|\nu^2| U_{gh} - \overline{E}_{gh} . e^{-i\alpha_\nu} + |\nu^2| \overline{L}_{gh}$$

hebben. Hieruit kan worden geconcludeerd dat de vergelijkingen

$$\sum_1^3 (\nu^2 U_{gh} - \bar{\varepsilon}_{gh} + \nu^2 \overline{L}_{gh}) \bar{q}_{h0} + \ldots\ldots\ldots = 0 \quad (110)$$
$$g ; h = 1, 2, 3 \ldots$$

met naar het voorschrift

$$\bar{\varepsilon}_{gh} = \overline{E}_{gh}\, e^{-i\alpha_\nu} \quad (111)$$

gevormde elastische constanten[2]) voor de bij (109), (111) behoorende waarde van V_0 en een *reëele* waarde van ν^2, nl. de waarde $\nu^2 = |\nu^2|$ uit (109), oplosbaar zijn, zoodat een bij deze vergelijkingen behoorend mechanisch systeem bij V_0 precies een kritische trilling vertoont.

Overeenkomstig nr 048 komt echter het vermenigvuldigen van de elastische constanten in de bewegingsvergelijkingen van een systeem met een factor

$$e^{i\alpha}$$

(met $\alpha > 0$) neer op de invoering van dempende „materiaalkrachten".

Daarmede is voor het geval dat

$$\alpha_\nu < 0$$

is een interpretatie voor de transformatie (111) gevonden. Deze interpretatie kan echter gegeneraliseerd worden tot willekeurige reëele waarden van α_ν, door invoering van *ontdempende* materiaalkrachten. Weliswaar zijn zulke krachten physisch nauwelijks realiseerbaar, zij zijn als verschijnsel echter denkbaar; het essentieele is, dat zij energie aan de trilling dienen *toe te voeren*.

Op te merken ware, dat door het voorschrift (111) àlle elastische constanten met denzelfden (van V_0 afhankelijken) complexen factor worden vermenigvuldigd, hetgeen daarop neerkomt dat de met dezen factor aequivalente dempende of ontdempende krachten op een bijzonder „gelijkmatige" wijze over het systeem zijn verdeeld. Vanzelfsprekend beïnvloedt dit de mogelijkheid der zoo *juist ontwikkelde interpretatie echter niet*.

Hiermede is een basis verkregen voor een meer volledige uitwerking van het gedrag van het onderzochte systeem. Uit de bewegingsvergelijkingen kan nu immers *bij iedere waarde van de gereduceerde snelheid* V_0 een kritische frequentie en een gegeneraliseerde (positieve of negatieve) materiaaldemping worden afgeleid, waaruit een verband tusschen de kritische snelheid en de gegeneraliseerde demping volgt. Is het systeem „in werkelijkheid" altijd stabiel, dan valt de gegeneraliseerde demping voor alle waarden van V_0 negatief uit. Daarbij verschaft echter de absolute grootte van den dempingshoek $\alpha_\nu(V_0)$ een doeltreffende *maat* voor de stabiliteit. Evenzoo verschaft $\alpha_\nu(V_0)$ in het onstabiele geval een maat voor de onstabiliteit. Daarmede heeft men een weg geopend ter beoordeeling van de „betrouwbaarheid" van de stabiele en de „gevaarlijkheid" van de onstabiele toestanden.

De volledige oplossing van een flutterberekening bestaat dus uit een kromme, die de kritische snelheid

$$v_{krit} = V_0 . t_0 . \nu_{krit} \quad (112)$$

geeft als functie van de gegeneraliseerde demping α, en een kromme, die de kritische frequentie

$$\nu_{krit} = \sqrt{|\nu^2|} \quad (113)$$

geeft als functie van dien dempingsparameter.

063 In korte samenvatting verloopt de volledige flutterberekening dus als volgt: Op grond van constructieteekeningen, gewichtsopgaven, enz. wordt eerst de massaverdeeling van het te onderzoeken vliegtuig bepaald en door de functies $(m_{ik})_0$ (vergelijk (3), (10) en (13)) en de constanten m_R, s_R, I_R, I_R' vastgelegd. Op de functies $(m_{ik})_0$ worden vervolgens de door (81) geformuleerde toeslagen aangebracht. Dit geschiedt zoowel voor

$$m_L = \tfrac{1}{4}\pi \varrho_0 t^2$$

als voor

$$m_L = \tfrac{1}{4}\pi \varrho_k t^2$$

waarbij ϱ_0 de luchtdichtheid is, die aanwezig is tijdens de standtrillingsproef (welke geacht wordt *te zijn uitgevoerd*), *en ϱ_k de luchtdichtheid, die men* bij de berekening van de kritische snelheid wenscht in te voeren. De functies $c_\nu' = \frac{c_\nu}{t}$ en $c_{dr}' = \frac{c_{dr}}{t}$, aangetroffen in tabel 2, zijn natuurlijk zonder meer bekend. De functies R_n kunnen aan tabel 4 (overgenomen uit rapport V. 1252) worden ontleend. (Deze grootheden zijn afhankelijk van de natuurlijk direct bekende koordeverhouding η, welke in het algemeen eenigermate van de coördinaat y afhankelijk is, zoodat de functies R_n dat ook zijn).

Vervolgens worden de uitkomsten van de standtrillingsproef bestudeerd. Aan de hand daarvan moet men trachten, den aard der in aanmerking komende deformaties vast te stellen, waarna men *tot een formuleering van het door (52) beheerschte* deformatiesysteem van de flutterberekening kan overgaan. De daarin optredende deformatiefuncties kunnen direct aan de bij de proef opgemeten trillingsvormen worden ontleend. Het verdient aanbeveling de vaak niet zeer nauwkeurige metingen aan rand- en eventueel aansluitingsvoorwaarden der deformaties te toetsen. Hierbij kunnen de vergelijkingen (29), (30) of (31) der rompbewegingen mede in aanmerking worden genomen. De metingsresultaten kunnen op deze wijze vaak aanzienlijk worden verscherpt.

[13]) Daar α_ν een functie van V_0 is, wordt nu ook $\bar{\varepsilon}_{gh}$ een functie van dezen parameter.

Met de nu beschikbare gegevens kunnen de constanten U_{ik}, gedefinieerd door de formules uit 0461 en 0462, worden berekend. Dit geschiedt zoo noodig zoowel uitgaande van $(m_{ik})_{\varrho=\varrho_0}$ als uitgaande van $(m_{ik})_{\varrho=\varrho_k}$. Vooreerst worden de uitkomsten $(U_{ik})_{\varrho=\varrho_0}$ in de vergelijkingen (78) of (79) gesubstitueerd, waarin bovendien de termen met luchtkrachtcoëfficiënten $\overline{L}_{gk}$ nul worden gesteld, terwijl de parameters E_{gh} vooralsnog onbepaald worden gelaten.

De op deze wijze vereenvoudigde vergelijkingen (78); (79) moeten de in aanmerking komende eigenschappen van de *standtrillingen* van het systeem beschrijven en met name leveren zij een aantal eigenfrequenties en amplitudeverhoudingen $(\bar{q}_{i0}/\bar{q}_{k0})$, die men met de experimenteele gegevens kan vergelijken. Door op geschikte punten overeenstemming (vooral van de eigenfrequenties) voor te schrijven kunnen de constanten E_{gh} in den regel worden bepaald. Soms moeten ter completeering de veerconstanten van het besturingsmechanisme van het rolroer aan een aparte meting worden ontleend.

Ter uitwerking van de eigenlijke flutterberekening moeten tot besluit alleen de constanten $\overline{L}_{gh}$ nog worden bepaald, hetgeen gebeurt met behulp van de formules 0531 en 0532. Men berekent eerst de functies c_{ik}^{1n}, c_{ik}^{2n}, $c_{ik}^{(3)}$ en $c_{ik}^{(4)}$. Hiervoor gelden tabel 2 en de formules (88). De hierbij benoodigde functies R_n worden aan tabel 4 ontleend, nadat een beslissing is genomen aangaande de doorstroomingseigenschappen van de spleet tusschen roer en vleugel (zie rapport V. 1252). Rekent men met een gesloten spleet, dan moet bovendien een getallenwaarde voor den in R_{24} aangetroffen parameter η_s worden gefixeerd.

Zijn de c_{ik}-functies eenmaal bekend, dan kunnen alle in de formules uit 0531 en 0532 optredende integralen worden uitgewerkt. Daarna kunnen de coëfficiënten L_{gh}', L_{gh}'' zelf voor een geheele reeks waarden van de gereduceerde snelheid worden uitgerekend onder gebruikmaking van tabel 3.

Tot besluit wordt de kritische snelheid berekend als functie van den gegeneraliseerden dempingsparameter α, door oplossing naar ν^2 van de karakteristieke vergelijking voor alle bovenvermelde waarden van de gereduceerde snelheid.

07 De grondvergelijkingen voor een iteratieve verbetering van de oplossing.

Een langs den hiervóór in punt 02 t/m 06 beschreven weg bepaalde benaderingsoplossing voor een kritische trilling van het systeem kan soms met behulp van een iteratieproces worden verbeterd. De restrictie „soms" houdt verband met een tweetal te vervullen voorwaarden, die geen van beide een principieel karakter hebben, doch die de bewerkelijkheid der numerieke berekening binnen aanvaardbare grenzen houden. De eerste voorwaarde eischt, dat de vleugel elastisch de eenvoudige eigenschappen van een buigenden en tordeerenden niet-samengestelden balk heeft en de tweede, dat het iteratieproces in zijn elementairen vorm naar de te onderzoeken kritische trilling convergeert. Beide voorwaarden zullen te bestemder plaatse nader worden toegelicht.

071 Aangenomen worde, dat de in punt 02 t/m 06 behandelde berekening een *symmetrische* kritische trilling heeft opgeleverd, die in de verkregen eerste benadering wordt gekarakteriseerd door

1° de kritische frequentie ν_k,

2° de kritische waarde $V_{0,k}$ van de gereduceerde snelheid,

3° de amplitudeverhoudingen $\bar{q}_{10}^{(k)}$, $\bar{q}_{20}^{(k)}$, $\bar{q}_{30}^{(k)}$, $\overline{Z}_0^{(k)}$, $\overline{\Phi}_0^{(k)}$.

De bijbehoorende deformaties worden dan volgens (52) gegeven door

$$\bar{z}_{d0}^{(k)}=\bar{q}_{10}^{(k)}C_{11}\,z_{d1}+\bar{q}_{20}^{(k)}C_{12}\,z_{d2}+\bar{q}_{30}^{(k)}C_{13}\,z_{d3}$$

$$\bar{\varphi}_{d0}^{(k)}=\bar{q}_{10}^{(k)}C_{21}\varphi_{d1}+\bar{q}_{20}^{(k)}C_{22}\varphi_{d2}+\bar{q}_{30}^{(k)}C_{23}\bar{\varphi}_{d3}$$

$$\bar{\gamma}_{d0}^{(k)}=\bar{q}_{10}^{(k)}C_{31}\,\gamma_{d1}+\bar{q}_{20}^{(k)}C_{32}\,\gamma_{d2}+\bar{q}_{30}^{(k)}C_{33}\,\gamma_{d3}.$$

Met deze gegevens kunnen de krachtenstelsels, die den trillenden vleugel belasten, naar grootte en verdeeling in gelijke benadering worden bepaald. Daar is vooreerst het luchtkrachtenstelsel, dat in het algemeen door de formules (33) wordt beschreven. Met de notatie

$$\bar{a}_{ik}(V_{0,k})\longrightarrow\bar{a}_{ik}^{(k)}$$

vindt men hieruit mede op grond van (32) en (35) t/m (37) voor de complexe amplituden van de luchtkrachten en hunne momenten zonder moeite [14])

$$\begin{aligned}\overline{K}_{L0}^{(k)}(y)=m_L\nu_k^2(&\bar{a}_{11}^{(k)}\,\bar{z}_{d0}^{(k)}+\\&+\bar{a}_{12}^{(k)}t\,\bar{\varphi}_{d0}^{(k)}+\bar{a}_{13}^{(k)}t\,\bar{\chi}_{d0}^{(k)})+\\&+m_L\nu_k^2[\bar{a}_{11}^{(k)}\,\overline{Z}_0^{(k)}+(\bar{a}_{12}^{(k)}+\bar{a}_{13}^{(k)})\,t\,\overline{\Phi}_0^{(k)}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{M}_{L0}^{(k)}(y)=m_L\nu_k^2t(&\bar{a}_{21}^{(k)}\,\bar{z}_{d0}^{(k)}+\\&+\bar{a}_{22}^{(k)}\,t\,\bar{\varphi}_{d0}^{(k)}+\bar{a}_{23}^{(k)}t\,\bar{\chi}_{d0}^{(k)})+\\&+m_L\nu_k^2t[\bar{a}_{21}^{(k)}\,\overline{Z}_0^{(k)}+(\bar{a}_{22}^{(k)}+\bar{a}_{23}^{(k)})\,t\,\overline{\Phi}_0^{(k)}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{N}_{L0}^{(k)}(y)=m_L\nu_k^2t(&\bar{a}_{31}^{(k)}\,\bar{z}_{d0}^{(k)}+\\&+\bar{a}_{32}^{(k)}t\,\bar{\varphi}_{d0}^{(k)}+\bar{a}_{33}^{(k)}t\,\bar{\chi}_{d0}^{(k)})+\\&+m_L\nu_k^2t[\bar{a}_{31}^{(k)}\,\overline{Z}_0^{(k)}+(\bar{a}_{32}^{(k)}+\bar{a}_{33}^{(k)})\,t\,\overline{\Phi}_0^{(k)}].\end{aligned}$$

Wegens (82) en de in tabel 2 vervatte gegevens kunnen deze uitdrukkingen bij gebruik van de afkortingen

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_{1n}^{(k)}&=p_{1n}(V_{0,k})+i\,p_{1n}'(V_{0,k})\\\overline{P}_{2n}^{(k)}&=p_{2n}(V_{0,k})-i\,p_{2n}'(V_{0,k})\end{aligned}\right\}\qquad(114)$$

worden ontwikkeld tot

---

[14]) In vervolg op (98), (99) is $\bar{\gamma}_{d0}+\bar{\varphi}_{d0}(\beta)=\bar{\chi}_{d0}$ gesteld.

$$\overline{K}_{L0}{}^{(k)} = m_L \nu_k{}^2 \Big[(\bar{z}_{d0}{}^{(k)} + \overline{Z}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{11}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} \Big\{ +$$
$$+ t(\bar{\varphi}_{d0}{}^{(k)} + \overline{\Phi}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{12}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} + \sum_0^2 c_{12}{}^{2n} \overline{P}_{2n}{}^{(k)} + i c_{12}{}^{(4)} (1+\xi) V_{0,k} \Big\{ +$$
$$+ t(\bar{\chi}_{d0}{}^{(k)} + \overline{\Phi}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{13}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} + \sum_0^2 c_{13}{}^{2n} \overline{P}_{2n}{}^{(k)} + i c_{13}{}^{(4)} (1+\xi) V_{0,k} \Big\{ \Big] \tag{115}$$

$$\overline{M}_{L0}{}^{(k)} = m_L \nu_k{}^2 t \Big[(\bar{z}_{d0}{}^{(k)} + \overline{Z}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{21}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} \Big\{ +$$
$$+ t(\bar{\varphi}_{d0}{}^{(k)} + \overline{\Phi}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{22}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} + \sum_0^2 c_{22}{}^{2n} \overline{P}_{2n}{}^{(k)} + c_{22}{}^{(3)} (1+\xi)^2 V_{0,k}{}^2 + i c_{22}{}^{(4)} (1+\xi) V_{0,k} \Big\{ +$$
$$+ t(\bar{\chi}_{d0}{}^{(k)} + \overline{\Phi}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{23}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} + \sum_0^2 c_{23}{}^{2n} \overline{P}_{2n}{}^{(k)} + c_{23}{}^{(3)} (1+\xi)^2 V_{0,k}{}^2 + i c_{23}{}^{(4)} (1+\xi) V_{0,k} \Big\{ \Big] \tag{116}$$

$$\overline{N}_{L0}{}^{(k)} = m_L \nu_k{}^2 t \Big[(\bar{z}_{d0}{}^{(k)} + \overline{Z}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{31}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} \Big\{ +$$
$$+ t(\bar{\varphi}_{d0}{}^{(k)} + \overline{\Phi}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{32}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} + \sum_0^2 c_{32}{}^{2n} \overline{P}_{2n}{}^{(k)} + c_{32}{}^{(3)} (1+\xi)^2 V_{0,k}{}^2 + i c_{32}{}^{(4)} (1+\xi) V_{0,k} \Big\{ +$$
$$+ t(\bar{\chi}_{d0}{}^{(k)} + \overline{\Phi}_0{}^{(k)}) \Big\} \sum_0^2 c_{33}{}^{1n} \overline{P}_{1n}{}^{(k)} + \sum_0^2 c_{33}{}^{2n} \overline{P}_{2n}{}^{(k)} + c_{33}{}^{(3)} (1+\xi)^2 V_{0,k}{}^2 + i c_{33}{}^{(4)} (1+\xi) V_{0,k} \Big\{ \Big] \tag{117}$$

Met deze formules kunnen de luchtkrachtfuncties ook numeriek gemakkelijk worden bepaald.

Vervolgens kan het systeem der aan de symmetrische trilling verbonden traagheidskrachten worden vastgelegd door de 3 complexe functies

$$\overline{K}_{m0}{}^{(k)}(y) = \nu_k{}^2 (m_{11} \bar{z}_{d0}{}^{(k)} + m_{12} \bar{\varphi}_{d0}{}^{(k)} + m_{13} \bar{\chi}_{d0}{}^{(k)}) + $$
$$+ \nu_k{}^2 [m_{11} \overline{Z}_0{}^{(k)} + (m_{12} + m_{13}) \overline{\Phi}_0{}^{(k)}] \tag{118}$$

$$\overline{M}_{m0}{}^{(k)}(y) = \nu_k{}^2 (m_{21} \bar{z}_{d0}{}^{(k)} + m_{22} \bar{\varphi}_{d0}{}^{(k)} + m_{23} \bar{\chi}_{d0}{}^{(k)}) + $$
$$+ \nu_k{}^2 [m_{21} \overline{Z}_0{}^{(k)} + (m_{22} + m_{23}) \overline{\Phi}_0{}^{(k)}] \tag{119}$$

$$\overline{N}_{m0}{}^{(k)}(y) = \nu_k{}^2 (m_{31} \bar{z}_{d0}{}^{(k)} + m_{32} \bar{\varphi}_{d0}{}^{(k)} + m_{33} \bar{\chi}_{d0}{}^{(k)}) + $$
$$+ \nu_k{}^2 [m_{31} \overline{Z}_0{}^{(k)} + (m_{32} + m_{33}) \overline{\Phi}_0{}^{(k)}] \tag{120}$$

De totale belasting op den vleugel bij de kritische trilling wordt gegeven door de functies

$$\left. \begin{array}{l} \overline{K}_{m0}{}^{(k)} + \overline{K}_{L0}{}^{(k)} \\ \overline{M}_{m0}{}^{(k)} + \overline{M}_{L0}{}^{(k)} \\ \overline{N}_{m0}{}^{(k)} + \overline{N}_{L0}{}^{(k)} \end{array} \right\} \tag{121}$$

met dien verstande, dat deze uitdrukkingen de beperkte nauwkeurigheid eener eerste benadering hebben. Bij gegeven elastische eigenschappen van den vleugel kunnen nu de vervormingen worden berekend, die onder den invloed van de bovenstaande totale belastingen ontstaan. De aan deze nieuwe deformaties verbonden elastische krachten moeten dus exact met de belastingen (121) evenwicht maken. De formuleering dezer evenwichtvoorwaarde kan direct aan de vergelijkingen (39), (40) en (41) worden ontleend.

Daar de vleugel ditmaal als een enkele buigende en tordeerende balk wordt opgevat[15]), en de beschrijvingsas in de elastische as kan worden gelegd, ware hierin

$$b_{21} = b_{12} \equiv 0 \quad \text{en} \quad b_{22} \equiv 0$$

te stellen, zoodat men voor de nieuwe deformaties de volgende formules overhoudt

$$\overline{K}_{m0}{}^{(k)} + \overline{K}_{L0}{}^{(k)} = (b_{11} \bar{z}_{d0}'')'' \tag{122}$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m0}{}^{(k)} + \overline{M}_{L0}{}^{(k)} = &-(T_v \varphi_{d0}')' - \\ &- [k_{11} \} \bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1) \{ - \\ &- k_{12} \} \bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2) \{] \delta(y - b_1) - \\ &- [- k_{21} \} \bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1) \{ + \\ &+ k_{22} \} \bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2) \{] \delta(y - b_2) \end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned} \overline{N}_{m0}{}^{(k)} + \overline{N}_{L0}{}^{(k)} = &-(T_r \bar{\gamma}_{d0}')' + \\ &+ [k_{11} \} \bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1) \{ - \\ &- k_{12} \} \bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2) \{] \delta(y - b_1) + \\ &+ [- k_{21} \} \bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1) \{ + \\ &+ k_{22} \} \bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2) \{] \delta(y - b_2) \end{aligned} \tag{124}$$

---

[15]) Deze opvatting is zeker gerechtvaardigd, als de vleugel een één-liggerconstructie vertoont, waarbij de ligger loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig staat. Ook meerligger-constructies hebben echter de verlangde eigenschap vaak (zèlfs in den regel) in voldoende benadering, omdat de buigstijfheid van de liggers gewoonlijk slechts weinig tot het torsiemoment bijdraagt. De term met b_{22} kan dan t.o.v. den T_v-term worden verwaarloosd. De term met b_{12} kan altijd door geschikte keuze van de beschrijvingsas geheel of nagenoeg worden onderdrukt.

met nog steeds

$$\bar{\chi}_{d0} = \bar{\gamma}_{d0} + \bar{\varphi}_{d0}(\beta) .$$

In al deze vergelijkingen zijn de termen, die nieuwe deformatiefuncties bevatten, in het rechterlid samengebracht. Zij vormen — wanneer de iteratie convergeert (d.w.z. wanneer de deformatiefuncties bij onbeperkte voortzetting van het proces: gegeven deformatiefuncties —→ flutterberekening —→ bepaling der belasting —→ nieuwe deformatiefuncties op den duur geen verandering meer ondergaan) — zooals bekend is in den regel veel betere benaderingen voor de deformaties der kritische trilling dan de oorspronkelijke functies $\bar{z}_{d0}^{(k)}$, enz..

Essentieel is, dat de stijfheidsverdeelingsfuncties b_{11}, T_v en T_r nu als explicite volledig bekende functies worden opgevat. Als grondslag voor hun bepaling kunnen constructieteekeningen van den vleugel dienst doen. Nog altijd blijken echter de metingen der standtrillingsproef — met name de opgemeten eigentrillingsvormen — een betere basis te vormen, die betrouwbaarder uitkomsten levert. De wijze, waarop de gezochte functies het best uit deze metingen kunnen worden afgeleid, wordt in een appendix op dit rapport (no 9) nader behandeld.

072 Wanneer de kritische trilling antisymmetrisch is, ontstaan voor de nieuwe deformaties vergelijkingen, die uiterlijk geheel met het stelsel (122), (123), (124) overeenkomen. Men dient echter zoowel in (115), (116), (117) als in (118), (119), (120) $\bar{\Phi}_0^{(k)}$ nul te stellen en $\bar{Z}_{d0}^{(k)}$ door $y\,\bar{\Theta}_0^{(k)}$ te vervangen.

073 Uit (122) volgt door tweevoudige integratie — in aanmerking nemend dat

$$\bar{z}_{d0}''(b) = \bar{z}_{d0}'''(b) = 0$$

is —

$$b_{11}\bar{z}_{d0}'' = \int\limits_y^b \int\limits_y^b (\bar{K}_{m0}^{(k)} + \bar{K}_{L0}^{(k)})(dy)^2 .$$

of, wanneer men in het rechterlid éénmaal partieel integreert

$$b_{11}\bar{z}_{d0}'' = \int\limits_y^b (y_1 - y)[\bar{K}_{m0}^{(k)}(y_1) + \bar{K}_{L0}^{(k)}(y_1)]\,dy_1 .$$

Wegens

$$\bar{z}_{d0}(0) = \bar{z}_{d0}'(0) = 0$$

volgt hieruit verder — weer een partieele integratie inlasschend —

$$\bar{z}_{d0} = \int\limits_0^y \int\limits_{y_2}^b \frac{y - y_2}{b_{11}(y_2)} \cdot (y_1 - y_2)[\bar{K}_{m0}^{(k)}(y_1) + \\ + \bar{K}_{L0}^{(k)}(y_1)]\,dy_1\,dy_2 . \quad (125)$$

Deze formule levert de nieuwe $\bar{z}_{d0}$-functie. De integraties worden langs numerieken weg uitgevoerd. Men merke op, dat deze rechtstreeksche en eenvoudige bepaling der nieuwe $\bar{z}_{d0}$-functie niet opgaat, wanneer de oorspronkelijke vergelijking een term $(b_{12}\varphi'')''$ bevat.

Uit (123) volgt, wanneer men het randgedrag der deformaties in aanmerking neemt en gebruik maakt van de eigenschappen van de δ-functie,

1° voor $y \geqq b_2 > b_1$

$$\int\limits_y^b (\bar{M}_{m0}^{(k)} + \bar{M}_{L0}^{(k)})\,dy = T_v \bar{\varphi}_{d0}' , \quad (126)$$

2° voor $b_2 \geqq y \geqq b_1$

$$\int\limits_y^b (\bar{M}_{m0}^{(k)} + \bar{M}_{L0}^{(k)})\,dy = \\ = T_v \bar{\varphi}_{d0}' + k_{21}\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} - \\ - k_{22}\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\} , \quad (127)$$

3° voor $b_2 > b_1 \geqq y$

$$\int\limits_y^b (\bar{M}_{m0}^{(k)} + \bar{M}_{L0}^{(k)})\,dy = \\ = T_v \bar{\varphi}_{d0}' - (k_{11} - k_{21})\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} - \\ - (k_{22} - k_{12})\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\} . \quad (128)$$

Hieruit volgt wegens $\bar{\varphi}_{d0}(0) = 0$ verder

1° voor $b_2 > b_1 \geqq y$

$$\int\limits_0^y \frac{dy}{T_v} \int\limits_y^b (\bar{M}_{m0}^{(k)} + \bar{M}_{L0}^{(k)})\,dy = \\ = \bar{\varphi}_{d0} - [(k_{11} - k_{21})\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} + \\ + (k_{22} - k_{12})\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}] . \int\limits_0^y \frac{dy}{T_v} , \quad (129)$$

2° voor $b_2 \geqq y \geqq b_1$

$$\int\limits_{b_1}^y \frac{dy}{T_v} \int\limits_y^b (\bar{M}_{m0}^{(k)} + \bar{M}_{L0}^{(k)})\,dy = \\ = \bar{\varphi}_{d0} - \bar{\varphi}_{d0}(b_1) - \\ [-k_{21}\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} + \\ + k_{22}\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}] . \int\limits_{b_1}^y \frac{dy}{T_v} , \quad (130)$$

3° voor $y \geqq b_2 > b_1$

$$\int\limits_{b_2}^y \frac{dy}{T_v} \int\limits_y^b (\bar{M}_{m0}^{(k)} + \bar{M}_{L0}^{(k)})\,dy = \\ = \bar{\varphi}_{d0} - \bar{\varphi}_{d0}(b_2) . \quad (131)$$

Met deze formules zou de $\bar{\varphi}$-functie kunnen worden berekend, als de 4 constanten $\bar{\varphi}_{d0}(b_1)$, $\bar{\varphi}_{d0}(b_2)$, $\bar{\chi}_{d0}(b_1)$; $\bar{\chi}_{d0}(b_2)$ bekend waren.

Door in (124) den term $-(T_r\bar{\gamma}_{d0}')'$ door $-(T_r\bar{\chi}_{d0}')'$ te vervangen, volgt door integratie (waarbij men zich herinnere, dat de randen van het rolroer bij $y = b_i$ en $y = b_u$ liggen, met $b_i \leqq b_1 < b_2 \leqq b_u$)

1° voor $b_u \geqq y \geqq b_2 > b_1 \geqq b_i$

$$\int\limits_y^b (\bar{N}_{m0}^{(k)} + \bar{N}_{L0}^{(k)})\,dy = \bar{T}_r \bar{\chi}_{d0}' . \quad (132)$$

2° voor $b_u \geqq b_2 \geqq y \geqq b_1 \geqq b_i$

$$\int_y^b (\bar{N}_{m0}^{(k)} + \bar{N}_{L0}^{(k)})\,dy = T_r \bar{\chi}_{d0}' - k_{21}\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} + k_{22}\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}. \quad (133)$$

3° voor $b_u \geqq b_2 > b_1 \geqq y \geqq b_i$

$$\int_y^b (\bar{N}_{m0}^{(k)} + \bar{N}_{L0}^{(k)})\,dy = T_r \bar{\chi}_{d0}' + (k_{11} - k_{21})\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} + (-k_{12} + k_{22})\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}. \quad (134)$$

Nogmaals integreerend, leidt men hieruit verder af

1° voor $b_u \geqq b_2 > b_1 \geqq y \geqq b_i$

$$\int_0^y \frac{dy}{T_r} \int_y^b (\bar{N}_{m0}^{(k)} + \bar{N}_{L0}^{(k)})\,dy = \bar{\chi}_{d0} - \bar{\chi}_{d0}(b_i) + [(k_{11} - k_{21})\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} + (-k_{12} + k_{22})\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}] \cdot \int_0^y \frac{dy}{T_r}, \quad (135)$$

2° voor $b_u \geqq b_2 \geqq y \geqq b_1 \geqq b_i$

$$\int_{b_1}^y \frac{dy}{T_r} \int_y^b (\bar{N}_{m0}^{(k)} + \bar{N}_{L0}^{(k)})\,dy = \bar{\chi}_{d0} - \bar{\chi}_{d0}(b_1) + [-k_{21}\{\bar{\chi}_{d0}(b_1) - \bar{\varphi}_{d0}(b_1)\} + k_{22}\{\bar{\chi}_{d0}(b_2) - \bar{\varphi}_{d0}(b_2)\}] \cdot \int_{b_1}^y \frac{dy}{T_r}, \quad (136)$$

3° voor $b_u \geqq y \geqq b_2 > b_1 \geqq b_i$

$$\int_{b_2}^y \frac{dy}{T_r} \int_y^b (\bar{N}_{m0}^{(k)} + \bar{N}_{L0}^{(k)})\,dy = \bar{\chi}_{d0} - \bar{\chi}_{d0}(b_2). \quad (137)$$

Stelt men nu tot besluit
in (129): $y = b_1$,
in (130): $y = b_2$,
in (135): $y = b_1$,
in (136): $y = b_2$,
in (134): $y = b_i$,
tevens $\bar{\chi}_{d0}'(b_i) = 0$ invoegend,

dan verkrijgt men 5 lineaire, niet-homogene vergelijkingen voor de 5 onbekende constanten $\bar{\varphi}_{d0}(b_1)$, $\bar{\varphi}_{d0}(b_2)$, $\bar{\chi}_{d0}(b_i)$, $\bar{\chi}_{d0}(b_1)$, $\bar{\chi}_{d0}(b_2)$. Nadat deze zijn opgelost, kan de $\bar{\varphi}_{d0}$-functie met behulp van (129), (130) en (131), en de $\bar{\chi}_{d0}$-functie met (135), (136) en (137) numeriek worden berekend.

074 Voor een volgende flutterberekening zijn nu de 3 functies $\bar{z}_{d0}$, $\bar{\varphi}_{d0}$ en $\bar{\chi}_{d0}$ (desgewenscht: $\bar{\gamma}_{d0} = \bar{\chi}_{d0} - \bar{\varphi}_{d0}(\beta)$) beschikbaar, welke bij convergentie van de iteratie een nauwkeuriger benadering van de deformaties der kritische trilling mogelijk zullen maken dan in de eerste berekening, uitgaande van een ontwikkeling (52) dezer deformatie naar de oorspronkelijk beschikbare functies $z_{d1}, z_{d2} \ldots\ldots \gamma_{d8}$, kon worden verkregen (d.w.z. dan de functies $\bar{z}_{d0}^{(k)}$, $\bar{\varphi}_{d0}^{(k)}$ en $\bar{\gamma}_{d0}^{(k)}$ leverden).

Deze nieuwe flutterberekeningen dienen op de volgende wijze te worden ingericht:

De 3 functies $\bar{z}_{d0}$, $\bar{\varphi}_{d0}$ en $\bar{\gamma}_{d0}$ worden genormeerd en in dien vorm geacht 3 onderling onafhankelijke deformatiecomponenten te definieeren, waarvan ieder één elementaire deformatie bevat. Voor de genormeerde functies worde achtereenvolgens genoteerd

$$\bar{z}_{d1}, \quad \bar{\varphi}_{d2}, \quad \bar{\gamma}_{d3}. \quad (138)$$

Als *normeering komt in aanmerking* het voorschrift

$$\left.\begin{aligned} \bar{z}_{d1}(b) \,.\, \bar{z}_{d1}^{*}(b) &= 1\,; \\ \bar{\varphi}_{d2}(b) \,.\, \bar{\varphi}_{d2}^{*}(b) &= 1\,; \\ \bar{\gamma}_{d3}(b) \,.\, \bar{\gamma}_{d3}^{*}(b) &= 1\,. \end{aligned}\right\} \quad (139)$$

Terwijl van nu af aan de notatie

$$\bar{z}_{d0}, \quad \bar{\varphi}_{d0}, \quad \bar{\gamma}_{d0}$$

weer gereserveerd wordt om de aan de flutterberekening zelve te ontleenen deformaties der kritische trilling aan te duiden, wordt in overeenstemming met de zoo juist vermelde opvatting gesteld

$$\left.\begin{aligned} \bar{z}_{d0} &= \bar{q}_{10} \bar{z}_{d1} \\ \bar{\varphi}_{d0} &= \bar{q}_{20} \bar{\varphi}_{d2} \\ \bar{\gamma}_{d0} &= \bar{q}_{30} \bar{\gamma}_{d3} \end{aligned}\right\} \quad (140)$$

zoodat de nieuwe berekening wordt opgebouwd op een vereenvoudiging van de vroeger aan den meest algemeenen opzet der berekening ten grondslag liggende matrix (56) tot de elementen der hoofddiagonaal, *met dien verstande echter, dat de deformatiefuncties ditmaal niet langer reëel zijn*. Het is inderdaad duidelijk, dat een meer algemeene vorm van de ontwikkeling (140) in het gegeven geval in beginsel minder in aanmerking komt, omdat nu eenmaal niet meer dan drie verbeterde deformatiefuncties bekend zijn.

Wel is het in beginsel mogelijk het uitgangspunt (140) nog verder te vereenvoudigen, b.v. in den vorm

$$\left.\begin{aligned} \bar{z}_{d0} &= \bar{q}_{10} C_{11} \bar{z}_{d1} \\ \bar{\varphi}_{d0} &= \bar{q}_{10} C_{21} \bar{\varphi}_{d1} \\ \bar{\gamma}_{d0} &= \bar{q}_{30} \bar{\gamma}_{d3} \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

waarin voor de deformatiefunctie der torsie de notatie $\bar{\varphi}_{d1}$ is gebruikt. Omdat dergelijke minder *gewenschte vereenvoudigingen echter in den regel* niet worden aangebracht, zal de verdere uitwerking op de aanname (140) worden betrokken. Deze uitwerking kan niet ongewijzigd aan de in de nummers 02 t/m 06 gegeven aanwijzingen worden ontleend, omdat de deformatiefuncties nu complex zijn.

Volledigheidshalve worde er de aandacht op gevestigd, dat de ontwikkeling (140) desgewenscht wel kan worden vervangen door een aanname, welke uitsluitend reëele deformatiefuncties bevat. Deze luidt

$$\begin{aligned} \bar{z}_{d0} &= \bar{q}_{10} \mathrm{Re}(\bar{z}_{d1}) + \bar{q}_{20} \mathrm{Im}(\bar{z}_{d1}) \\ \bar{\varphi}_{d0} &= \bar{q}_{30} \mathrm{Re}(\bar{\varphi}_{d2}) + \bar{q}_{40} \mathrm{Im}(\bar{\varphi}_{d2}) \\ \bar{\gamma}_{d0} &= \bar{q}_{50} \mathrm{Re}(\bar{\gamma}_{d3}) + \bar{q}_{60} \mathrm{Im}(\bar{\gamma}_{d3}). \end{aligned}$$

Deze opzet van de berekening bevat echter meer dan 3 gegeneraliseerde coördinaten $\bar{q}_{i0}$, met het gevolg, dat de numerieke uitwerking een volkomen ontoelaatbaren omvang krijgt. Practisch is deze weg dus onbegaanbaar.

.075 De convergentie der iteratieve bepaling van een kritische trilling.

Een bezwaar van de zoojuist beschreven werkwijze voor een iteratieve berekening van een kritische trilling vormen de vermoedelijk nogal gecompliceerde convergentie-eigenschappen van het procédé. Het is uit de balkentheorie der toegepaste mechanica bekend, dat een naar analoog recept ontwikkelde iteratie van de eigentrillingen van een uitsluitend buigingsvervormingen vertoonenden balk alleen convergeert voor den fundamenteelen trillingsvorm. In dat geval is de convergentie zeer goed, waardoor het in den regel zelfs overbodig is meer dan één stap werkelijk uit te cijferen. Juist daarom divergeert de iteratie echter voor de hoogere trillingsvormen; hoe men de oorspronkelijke aanname voor den trillingsvorm ook kiest, men komt op den duur altijd bij den fundamenteelen trillingsvorm terecht. Om een hoogeren trillingsvorm te krijgen is een wijziging van het procédé noodig, die in dit elementaire geval betrekkelijk eenvoudig is. Om b.v. den eersten hoogeren trillingsvorm te bepalen, moet men alleen iederen naar het bekende voorschrift berekenden „verbeterden trillingsvorm" door orthogonaliseering t.o.v. den fundamenteelen trillingsvorm — die daartoe eerst met voldoende nauwkeurigheid (door iteratie) werd bepaald(!) — voortdurend van het anders op den duur overheerschende aandeel van den fundamenteelen trillingsvorm bevrijden.

Evenzoo is het ter bepaling van den tweeden hoogeren trillingsvorm noodzakelijk iedere verbeterde deformatie te orthogonaliseeren t.o.v. den fundamenteelen en den eersten hoogeren trillingsvorm.

In het geval der fluttertrillingen worden de eigenschappen der natuurlijke trillingen veel gecompliceerder, waardoor het minder eenvoudig wordt het convergentievraagstuk op theoretisch-mathematische basis tot een definitieve oplossing te brengen. Op dit punt is het onderzoek nog niet afgesloten; zelfs wordt in de beschikbare literatuur dienaangaande nog niets aangetroffen. Het gevolg hiervan is, dat het convergentieonderzoek in concrete gevallen voorloopig slechts door „probeeren" kan worden uitgevoerd. In dit verband zouden de volgende punten in overweging kunnen worden genomen:

1e àls de iteratie convergeert, levert zij op den duur een binnen het kader der aanvaarde veronderstellingen *exacte* kritische trilling van het systeem;

2e een snelle convergentie is te meer te verwachten, naarmate de kritische trilling meer een „fundamenteel" karakter heeft, d.w.z. naarmate ook de in eerste instantie aangenomen deformaties meer van het type van den fundamenteelen trillingsvorm zijn;

3e hoewel het in den regel wel „waarschijnlijk" is, heeft men geen volledige zekerheid dat een door iteratie bepaalde kritische trilling ook inderdaad de gevaarlijkste trilling is, die het systeem kan vertoonen. In sommige gevallen moet de mogelijkheid in aanmerking worden genomen, dat bij lagere vliegsnelheid nog een kritische trilling optreedt die bij de iteratie ontsnapt, omdat zij deformaties bevat, die van het bij hoogere trillingsvormen optredende type zijn;

4e het is vooralsnog niet bekend hoe het iteratieprocédé moet worden gewijzigd om voor een convergentie naar kritische trillingen van hooger type zorg te dragen.

08 Flutterberekening met complexe deformatiefuncties.

081 Een flutterberekening, welke complexe deformatiefuncties overeenkomstig de aanname

$$\bar{z}_{d0}=\bar{q}_{10}\bar{z}_{d1};\ \bar{\varphi}_{d0}=\bar{q}_{20}\bar{\varphi}_{d2};\ \bar{\gamma}_{d0}=\bar{q}_{30}\bar{\gamma}_{d3} \qquad (142)$$

bevat, kan niet langer op de reductie volgens Galerkin der exacte bewegingsvergelijkingen van het systeem worden opgebouwd. Want uit de uitdrukking (69) voor den — bij een vooreerst symmetrisch aan te nemen trilling — door de schijnkrachten verrichten arbeid volgt ditmaal, door daarin (142) te substitueeren met de notaties

$$\bar{\varepsilon}_{K0,\,M0,\,N0}=\varepsilon_{K0,\,M0,\,N0}'+i\,\varepsilon_{K0,\,M0,\,N0}''$$

$$\bar{q}_{k0}=\bar{q}_{k0}'+i\,\bar{q}_{k0}''$$

$$\bar{Z}_0=Z_0'+i\,Z_0''$$

$$\bar{\Phi}_0=\Phi_0'+i\,\Phi_0''$$

$$\bar{z}_{d1}=z_{d1}'+i\,z_{d1}''$$

$$\bar{\varphi}_{d2}=\varphi_{d2}'+i\,\varphi_{d2}''$$

$$\bar{\gamma}_{d3}=\gamma_{d3}'+i\,\gamma_{d3}'',$$

na een korte omwerking inplaats van (71)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu}\frac{\delta A}{\delta\tau}=\cos^2\nu\tau\int_0^b[&\varepsilon_{K0}''Z_0'+(\varepsilon_{M0}''+\varepsilon_{N0}'')\Phi_0'+\\&+\varepsilon_{K0}''(q_{10}'z_{d1}'-q_{10}''z_{d1}'')+\varepsilon_{M0}''(q_{20}'\varphi_{d2}'-\\&-q_{20}''\varphi_{d2}'')+\varepsilon_{N0}''\{(q_{30}'\gamma_{d3}'-q_{30}''\gamma_{d3}'')+\\&+(q_{20}'\varphi_{d2}'(\beta)-q_{20}''\varphi_{d2}''(\beta))\}]\,dy-\\-\sin^2\nu\tau\int_0^b[&\varepsilon_{K0}'Z_0''+(\varepsilon_{M0}'+\varepsilon_{N0}')\Phi_0''+\\&+\varepsilon_{K0}'(q_{10}''z_{d1}'+q_{10}'z_{d1}'')+\varepsilon_{M0}'(q_{20}''\varphi_{d2}'+\\&+q_{20}'\varphi_{d1}'')+\varepsilon_{N0}'\{(q_{30}''\gamma_{d3}'+q_{30}'\gamma_{d3}'')+\\&+(q_{20}''\varphi_{d2}'(\beta)+q_{20}'\varphi_{d2}''(\beta))\}]\,dy+\\+\sin\nu\tau\cos\nu\tau\int_0^b[&\{\varepsilon_{K0}'Z_0'+(\varepsilon_{M0}'+\varepsilon_{N0}')\Phi_0'+\\&+\varepsilon_{K0}'(q_{10}'z_{d1}'-q_{10}''z_{d1}'')+\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\}-\{\varepsilon_{K0}''Z_0''+(\varepsilon_{M0}''+\varepsilon_{N0}'')\Phi_0''+\\&+\varepsilon_{K0}''(q_{10}''z_{d1}'+q_{10}'z_{d1}'')+\ldots\\&\ldots\ldots\}]\,dy.\end{aligned} \qquad (143)$$

Om dit voor willekeurige waarden van de coördinaten ($\overline{Z}_0$, Φ_0, $\bar{q}_{k0}$) identiek (voor iedere waarde van τ) nul te maken, zou

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^b \varepsilon_{K0}''\,dy=0\\&\int_0^b \varepsilon_{K0}'\,dy=0\\&\int_0^b (\varepsilon_{M0}''+\varepsilon_{N0}'')\,dy=0\\&\int_0^b (\varepsilon_{M0}'+\varepsilon_{N0}')\,dy=0\end{aligned}\right\}\longrightarrow\begin{aligned}&\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}\,dy=0\\&\int_0^b (\bar{\varepsilon}_{M0}+\bar{\varepsilon}_{N0})\,dy=0\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^b \varepsilon_{K0}''\,z_{d1}'\,dy=0\\&\int_0^b \varepsilon_{K0}''\,z_{d1}''\,dy=0\\&\int_0^b \varepsilon_{K0}'\,z_{d1}'\,dy=0\\&\int_0^b \varepsilon_{K0}'\,z_{d1}''\,dy=0\end{aligned}\right\}\longrightarrow\begin{aligned}&\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}\,z_{d1}'\,dy=0\\&\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}\,z_{d1}''\,dy=0\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\longrightarrow\begin{aligned}&\int_0^b (\bar{\varepsilon}_{M0}\,\varphi_{d2}'+\bar{\varepsilon}_{N0}\,\varphi_{d2}'(\beta))\,dy=0\\&\int_0^b (\bar{\varepsilon}_{M0}\,\varphi_{d2}''+\bar{\varepsilon}_{N0}\,\varphi_{d2}''(\beta))\,dy=0\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\longrightarrow\begin{aligned}&\int_0^b \bar{\varepsilon}_{N0}\,\gamma_{d3}'\,dy=0\\&\int_0^b \bar{\varepsilon}_{N0}\,\gamma_{d3}''\,dy=0\end{aligned}$$

moeten zijn. Dit zijn acht complexe vergelijkingen, die met de vijf beschikbare variabelen $\overline{Z}_0$, Φ_0, $\bar{q}_{10}$, $\bar{q}_{20}$, $\bar{q}_{30}$ in het algemeen niet kunnen worden bevredigd.

Dit beteekent, dat de energiebalans bij gebruik van complexe deformatiefuncties niet exact in stand kan worden gehouden. Geleid door den wensch, de afwijking die moet worden toegestaan zoo onbelangrijk mogelijk te houden, worde nu beproefd de arbeidsverrichting van de schijnkrachten, gesommeerd over één periode van de trilling, nul te maken, d.w.z. deze arbeidsverrichting gemiddeld nul te houden. Dienovereenkomstig dient in de uitdrukking (143)

$$\cos^2 \nu\tau=\tfrac{1}{2}$$
$$\sin^2 \nu\tau=\tfrac{1}{2}$$
$$\sin \nu\tau \cos \nu\tau=0$$

te worden gesteld, hetgeen oplevert

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu}\frac{\overline{\delta A}}{\delta\tau}=\tfrac{1}{2}\int_0^b\Big[&(\varepsilon_{K0}''Z_0''-\varepsilon_{K0}'Z_0')+\\&+\}(\varepsilon_{M0}''+\varepsilon_{N0}'')\Phi_0'-(\varepsilon_{M0}'+\varepsilon_{N0}')\Phi_0''\{+\\&+\}\varepsilon_{K0}''(q_{10}'z_{d1}'-q_{10}''z_{d1}'')-\\&-\varepsilon_{K0}'(q_{10}''z_{d1}'+q_{10}'z_{d1}'')\{+\\&+\}\varepsilon_{M0}''(q_{20}'\varphi_{d2}'-q_{20}''\varphi_{d2}'')-\\&-\varepsilon_{M0}'(q_{20}''\varphi_{d2}'+q_{20}'\varphi_{d2}'')\{+\\&+\}\varepsilon_{N0}''(q_{30}'\gamma_{d3}'-q_{30}''\gamma_{d3}'')-\\&-\varepsilon_{N0}'(q_{30}''\gamma_{d3}'+q_{30}'\gamma_{d3}'')\{+\\&+\}\varepsilon_{N0}''(q_{20}'\varphi_{d2}'(\beta)-q_{20}''\varphi_{d2}''(\beta))-\\&-\varepsilon_{N0}'(q_{20}''\varphi_{d2}'(\beta)+q_{20}'\varphi_{d2}''(\beta))\{\Big]dy.\end{aligned}\qquad(144)$$

Dit wordt voor willekeurige waarden van de coördinaten nul als

$$\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}\,dy=0\qquad(145)$$

$$\int_0^b (\bar{\varepsilon}_{M0}+\bar{\varepsilon}_{N0})\,dy=0\qquad(146)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^b (\varepsilon_{K0}''z_{d1}'-\varepsilon_{K0}'z_{d1}'')\,dy=0\\&\int_0^b (\varepsilon_{K0}''z_{d1}''+\varepsilon_{K0}'z_{d1}')\,dy=0\end{aligned}\right\}\longrightarrow\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}\bar{z}_{d1}^{\star}\,dy=0\qquad(147)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\longrightarrow\int_0^b (\bar{\varepsilon}_{M0}\bar{\varphi}_{d2}^{\star}+\bar{\varepsilon}_{N0}\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta))\,dy=0\qquad(148)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\longrightarrow\int_0^b \bar{\varepsilon}_{N0}\bar{\gamma}_{d3}^{\star}\,dy=0.\qquad(149)$$

Dit zijn 5 complexe vergelijkingen, d.w.z. juist genoeg om de coördinaten vast te leggen. Zij mogen geacht worden de in het gegeven geval meest doelmatige reductie der volledige bewegingsvergelijkingen te definieeren.

De 5 vergelijkingen (145) t/m (149) blijken achteraf direct aan de vroeger verkregen uitkomst (72), (73), (74) te kunnen worden ontleend, wanneer daar de formules (74) worden gegeneraliseerd tot

$$\begin{aligned}\int_0^b\Big[&\bar{\varepsilon}_{K0}\overline{C}_{1h}^{\star}\bar{z}_{dh}^{\star}+\bar{\varepsilon}_{M0}\overline{C}_{2h}^{\star}\bar{\varphi}_{dh}^{\star}+\\&+\bar{\varepsilon}_{N0}(\overline{C}_{3h}^{\star}\bar{\gamma}_{dh}^{\star}+\overline{C}_{2h}^{\star}\bar{\varphi}_{dh}^{\star}(\beta))\Big]dy=0;\\&h=1,2,3\end{aligned}\qquad(150)$$

In het gegeven geval is immers

$$\overline{C}_{ik} = \overline{C}_{ik}^{\star} = 0 \quad \text{voor} \quad i \neq k$$

$$\overline{C}_{ik} = \overline{C}_{ik}^{\star} = 1 \quad \text{voor} \quad i = k\,.$$

Wanneer de trilling antisymmetrisch is, vervalt de voorwaarde (146); (145) moet dan worden vervangen door

$$\int_0^b \bar{\varepsilon}_{K0}' \, y \, dy = 0\,.$$

082 Hoewel de uitwerking der voorwaarden (145) t/m (149) — wegens het zoojuist gesignaleerde nauwe verband met de grondvergelijkingen (72) t/m (74) der eerder uitvoerig beschreven flutterberekening — zonder principieele moeilijkheden aan de in no. 04 en 05 opgenomen ontwikkelingen te ontleenen ware, ligt het in de bedoeling de uitkomst nog even in alle volledigheid op te schrijven. Zij zal ditmaal door het sterk verkleinde aantal deformatiefuncties uiterlijk veel eenvoudiger zijn. Bovendien is zij niet alleen bij de uitcijfering van de iteratie der kritische trilling bruikbaar, doch kennelijk ook bij de ontwikkeling van een eerste benadering, indien de deformatiematrix (56) tot de elementen der hoofddiagonaal is teruggebracht, hetgeen dikwijls het geval is:

0821 Evenals vroeger worde het resultaat van de omvorming der grondvergelijkingen (145) t/m (149) voor symmetrische trillingen weer in den vorm

$$\sum_1^3 (\nu^2 \overline{U}_{gh} - \overline{E}_{gh} + \nu^2 \overline{L}_{gh}) \bar{q}_{h0} + (\nu^2 \overline{U}_{g4} - \overline{E}_{g4} + \nu^2 \overline{L}_{g4}) \overline{Z}_0 +$$
$$+ (\nu^2 \overline{U}_{g5} - \overline{E}_{g5} + \nu^2 \overline{L}_{g5}) \overline{\Phi}_0 = 0 \quad g = 1 \ldots 5 \qquad (151)$$

geschreven.
Dan geldt

$$\overline{U}_{11} = \int_0^b m_{11} \bar{z}_{d1} \bar{z}_{d1}^{\star} \, dy$$

$$\overline{U}_{12} = \int_0^b m_{12} \bar{\varphi}_{d2} \bar{z}_{d1}^{\star} \, dy + \bar{\varphi}_{d2}(\beta) \int_0^b m_{13} \bar{z}_{d1}^{\star} \, dy = \overline{U}_{21}^{\star}$$

$$\overline{U}_{13} = \int_0^b m_{13} \bar{\gamma}_{d3} \bar{z}_{d1}^{\star} \, dy = \overline{U}_{31}^{\star}$$

$$\overline{U}_{14} = \int_0^b m_{11} \bar{z}_{d1}^{\star} \, dy = \overline{U}_{41}^{\star}$$

$$\overline{U}_{15} = \int_0^b (m_{12} + m_{13}) \bar{z}_{d1}^{\star} \, dy = \overline{U}_{51}^{\star}$$

$$\overline{U}_{22} = \int_0^b m_{22} \bar{\varphi}_{d2} \bar{\varphi}_{d2}^{\star} \, dy + \bar{\varphi}_{d2}(\beta) \int_0^b m_{23} \bar{\varphi}_{d2}^{\star} \, dy +$$
$$+ \int_0^b m_{32} \bar{\varphi}_{d2} \, dy \,.\, \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) + m_{33} \bar{\varphi}_{d2}(\beta) \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta)$$

$$\overline{U}_{23} = \int_0^b m_{23} \bar{\gamma}_{d3} \bar{\varphi}_{d2}^{\star} \, dy +$$
$$+ \int_0^b m_{33} \bar{\gamma}_{d3} \, dy \,.\, \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) = \overline{U}_{32}^{\star}$$

$$\overline{U}_{24} = \int_0^b m_{21} \bar{\varphi}_{d2}^{\star} \, dy + \int_0^b m_{31} \, dy \,.\, \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) = \overline{U}_{42}^{\star}$$

$$\overline{U}_{25} = \int_0^b (m_{22} + m_{23}) \bar{\varphi}_{d2}^{\star} \, dy +$$
$$+ \int_0^b (m_{32} + m_{33}) \, dy \,.\, \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) = \overline{U}_{52}^{\star}$$

$$\overline{U}_{33} = \int_b m_{33} \bar{\gamma}_{d3} \bar{\gamma}_{d3}^{\star} \, dy$$

$$\overline{U}_{34} = \int_0^b m_{31} \bar{\gamma}_{d3}^{\star} \, dy = \overline{U}_{43}^{\star}$$

$$\overline{U}_{35} = \int_0^b (m_{32} + m_{33}) \bar{\gamma}_{d3}^{\star} \, dy = \overline{U}_{53}^{\star}$$

$$\overline{U}_{44} = \tfrac{1}{2} m_R + \int_0^b m_{11} \, dy$$

$$\overline{U}_{45} = \overline{U}_{54} = -\tfrac{1}{2} m_R s_R + \int_0^b (m_{12} + m_{13}) \, dy$$

$$\overline{U}_{55} = \tfrac{1}{2} I_R + \tfrac{1}{2} m_R s_R^2 + \int_0^b (m_{22} + m_{32} + m_{23} + m_{33}) \, dy$$

$$\overline{E}_{11}/(1 + i\alpha_{11}) = \int_0^b b_{11} \bar{z}_{d1}'' (\bar{z}_{d1}'')^{\star} \, dy$$

$$\overline{E}_{12}/(1 + i\alpha_{12}) =$$
$$= \int_0^b b_{12} (\bar{z}_{d1}'')^{\star} \bar{\varphi}_{d2} \, dy = \overline{E}_{21}^{\star}/(1 + i\alpha_{21})$$

$$\overline{E}_{22}/(1 + i\alpha_{22}) =$$
$$= \int_0^b b_{22} \bar{\varphi}_{d2}'' (\bar{\varphi}_{d2}'')^{\star} \, dy + \int_0^b T_v \bar{\varphi}_{d2}' (\bar{\varphi}_{d2}')^{\star} \, dy +$$
$$+ k_{11} \{\bar{\varphi}_{d2}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}(b_1)\}\{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_1)\}$$
$$- k_{12} \{\bar{\varphi}_{d2}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}(b_2)\}\{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_1)\}$$
$$- k_{12} \{\bar{\varphi}_{d2}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}(b_1)\}\{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_2)\}$$
$$+ k_{22} \{\bar{\varphi}_{d2}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}(b_2)\}\{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_2)\}$$

$$\overline{E}_{23}/(1 + i\alpha_{23}) = + k_{11} \bar{\gamma}_{d3}(b_1) \{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_1)\} -$$
$$- k_{12} \bar{\gamma}_{d3}(b_2) \{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_1)\} -$$
$$- k_{21} \bar{\gamma}_{d3}(b_1) \{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_2)\} +$$
$$+ k_{22} \bar{\gamma}_{d3}(b_2) \{\bar{\varphi}_{d2}^{\star}(\beta) - \bar{\varphi}_{d2}^{\star}(b_2)\} = E_{32}^{\star}/(1 + i\alpha_{32})$$

$$\overline{E}_{33}/(1+i\alpha_{33})=\int_0^b T_r\,\bar{\gamma}_{d3}'(\bar{\gamma}_{d3}')^*\,dy+$$
$$+k_{11}\bar{\gamma}_{d3}(b_1)\bar{\gamma}_{d3}^*(b_1)-k_{12}\bar{\gamma}_{d3}(b_2)\bar{\gamma}_{d3}^*(b_1)-$$
$$-k_{21}\bar{\gamma}_{d3}(b_1)\bar{\gamma}_{d3}^*(b_2)+k_{22}\bar{\gamma}_{d3}(b_2)\bar{\gamma}_{d3}^*(b_2).$$

Alle overige $\overline{E}_{gh}$'s zijn nul.

Als $\overline{P}_{1n}$ en $\overline{P}_{2n}$ de door (114) gedefinieerde complexe functies zijn, geldt verder

$$\overline{L}_{11}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{11}^{1n}\bar{z}_{d1}\bar{z}_{d1}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{12}=\sum_0^2 P_{1n}\int_0^b m_L\{c_{12}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}+c_{13}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\}t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L\{c_{12}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}+c_{13}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\}t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\{c_{12}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}+c_{13}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\}t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{13}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{13}^{1n}\bar{\gamma}_{d3}t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L c_{13}^{2n}\bar{\gamma}_{d3}t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)c_{13}^{(4)}\bar{\gamma}_{d3}t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{14}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{11}^{1n}\bar{z}_{d1}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{15}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{12}^{1n}+c_{13}^{1n})t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L(c_{12}^{2n}+c_{13}^{2n})t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)(c_{12}^{(4)}+c_{13}^{(4)})t\,\bar{z}_{d1}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{21}=\sum_0^2 P_{1n}\int_0^b m_L\{c_{21}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{31}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t\,\bar{z}_{d1}\,dy$$

$$\overline{L}_{22}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L\{c_{22}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{32}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\varphi}_{d2}\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L\{c_{22}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{32}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\varphi}_{d2}\,dy+$$
$$+V_0^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2\{c_{22}^{(3)}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{32}^{(3)}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\varphi}_{d2}\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\{c_{22}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{32}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\varphi}_{d2}\,dy$$

$$\overline{L}_{23}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L\{c_{23}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{33}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L\{c_{23}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{33}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}\,dy+$$
$$+V_0^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2\{c_{23}^{(3)}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{33}^{(3)}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\{c_{23}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{33}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}\,dy$$

$$\overline{L}_{24}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L\{c_{21}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*+c_{31}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t\,dy$$

$$\overline{L}_{25}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L\{(c_{22}^{1n}+c_{23}^{1n})\bar{\varphi}_{d2}^*+$$
$$+(c_{32}^{1n}+c_{33}^{1n})\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L\{(c_{22}^{2n}+c_{23}^{2n})\bar{\varphi}_{d2}^*+$$
$$+(c_{32}^{2n}+c_{33}^{2n})\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\,dy+$$
$$+V_0^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2\{(c_{22}^{(3)}+c_{23}^{(3)})\bar{\varphi}_{d2}^*+$$
$$+(c_{32}^{(3)}+c_{33}^{(3)})\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\{(c_{22}^{(4)}+c_{23}^{(4)})\bar{\varphi}_{d2}^*+$$
$$+(c_{32}^{(4)}+c_{33}^{(4)})\bar{\varphi}_{d2}^*(\beta)\}t^2\,dy$$

$$\overline{L}_{31}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{31}^{1n}\bar{z}_{d1}t\,\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{32}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L\{c_{32}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}+c_{33}^{1n}\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L\{c_{32}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}+c_{33}^{2n}\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy+$$
$$+V_0^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2\{c_{32}^{(3)}\bar{\varphi}_{d2}+c_{33}^{(3)}\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\{c_{32}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}+c_{33}^{(4)}\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{33}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{33}^{1n}\bar{\gamma}_{d3}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L c_{33}^{2n}\bar{\gamma}_{d3}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy+$$
$$+V_0^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2c_{33}^{(3)}\bar{\gamma}_{d3}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)c_{33}^{(4)}\bar{\gamma}_{d3}t^2\bar{\gamma}_{d3}^*\,dy$$

$$\overline{L}_{34}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{31}{}^{1n}\, t\,\overline{\gamma}_{d3}{}^*\,d\,y$$

$$\overline{L}_{35}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{32}{}^{1n}+c_{33}{}^{1n})\,t^2\,\overline{\gamma}_{d3}{}^*\,d\,y+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L(c_{32}{}^{2n}+c_{33}{}^{2n})\,t^2\,\overline{\gamma}_{d3}{}^*\,d\,y+$$
$$+V_0{}^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2(c_{32}{}^{(3)}+c_{33}{}^{(3)})\,t^2\,\overline{\gamma}_{d3}{}^*\,d\,y+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\,(c_{32}{}^{(4)}+c_{33}{}^{(4)})\,t^2\,\overline{\gamma}_{d3}{}^*\,d\,y$$

$$\overline{L}_{41}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{11}{}^{1n}\,\overline{z}_{d1}\,d\,y$$

$$\overline{L}_{42}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L\left\{c_{12}{}^{1n}\,\overline{\varphi}_{d2}+c_{13}{}^{1n}\,\overline{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t\,d\,y+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L\left\{c_{12}{}^{2n}\,\overline{\varphi}_{d2}+c_{13}{}^{2n}\,\overline{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t\,d\,y+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\left\{c_{12}{}^{(4)}\,\overline{\varphi}_{d2}+c_{13}{}^{(4)}\,\overline{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t\,d\,y$$

$$\overline{L}_{43}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{13}{}^{1n}\,\overline{\gamma}_{d3}\,t\,d\,y+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L c_{13}{}^{2n}\,\overline{\gamma}_{d}{}^{3}\,t\,d\,y+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\,c_{13}{}^{(4)}\,\overline{\gamma}_{d3}\,t\,d\,y$$

$$\overline{L}_{44}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L c_{11}{}^{1n}\,d\,y$$

$$\overline{L}_{45}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{12}{}^{1n}+c_{13}{}^{1n})\,t\,d\,y+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L(c_{12}{}^{2n}+c_{13}{}^{2n})\,t\,d\,y+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(c_{12}{}^{(4)}+c_{13}{}^{(4)})\,t\,d\,y$$

$$\overline{L}_{51}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{21}{}^{1n}+c_{31}{}^{1n})\,t\,\overline{z}_{d1}\,d\,y$$

$$\overline{L}_{52}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L\left\{(c_{22}{}^{1n}+c_{32}{}^{1n})\,\overline{\varphi}_{d2}+\right.$$
$$\left.+(c_{23}{}^{1n}+c_{33}{}^{1n})\,\overline{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t^2\,d\,y+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L\left\{(c_{22}{}^{2n}+c_{32}{}^{2n})\,\overline{\varphi}_{d2}+\right.$$
$$\left.+(c_{23}{}^{2n}+c_{33}{}^{2n})\,\overline{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t^2\,d\,y+$$
$$+V_0{}^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2\left\{(c_{22}{}^{(3)}+c_{32}{}^{(3)})\,\overline{\varphi}_{d2}+\right.$$
$$\left.+(c_{23}{}^{(3)}+c_{33}{}^{(3)})\,\overline{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t^2\,d\,y+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\left\{(c_{22}{}^{(4)}+c_{32}{}^{(4)})\,\overline{\varphi}_{d2}+\right.$$
$$\left.+(c_{23}{}^{(4)}+c_{33}{}^{(4)})\,\overline{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t^2\,d\,y$$

$$\overline{L}_{53}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{23}{}^{1n}+c_{33}{}^{1n})\,t\,\overline{\gamma}_{d3}\,d\,y+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int_0^b m_L(c_{23}{}^{2n}+c_{33}{}^{2n})\,t\,\overline{\gamma}_{d3}\,d\,y+$$
$$+V_0{}^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2(c_{23}{}^{(3)}+c_{33}{}^{(3)})\,t\,\overline{\gamma}_{d3}\,d\,y+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)\,(c_{23}{}^{(4)}+c_{33}{}^{(4)})\,t\,\overline{\gamma}_{d3}\,d\,y$$

$$\overline{L}_{54}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{21}{}^{1n}+c_{31}{}^{1n})\,t\,d\,y$$

$$\overline{L}_{55}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{22}{}^{1n}+c_{32}{}^{1n}+c_{23}{}^{1n}+c_{33}{}^{1n})\,t^2\,d\,y+$$
$$+\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int_0^b m_L(c_{22}{}^{2n}+c_{32}{}^{2n}+c_{23}{}^{2n}+c_{33}{}^{2n})\,t^2\,d\,y+$$
$$+V_0{}^2\int_0^b m_L(1+\xi)^2(c_{22}{}^{(3)}+c_{32}{}^{(3)}+c_{23}{}^{(3)}+c_{33}{}^{(3)})\,t^2\,d\,y+$$
$$+iV_0\int_0^b m_L(1+\xi)(c_{22}{}^{(4)}+c_{32}{}^{(4)}+c_{23}{}^{(4)}+c_{33}{}^{(4)})\,t^2\,d\,y.$$

0822 Voor antisymmetrische trillingen ontstaan vergelijkingen van het type

$$\sum_1^3(\nu^2\,\overline{U}_{gh}-\overline{E}_{gh}+\nu^2\,\overline{L}_{gh})\,\overline{q}_{h0}+$$
$$+(\nu^2\,\overline{U}_{g4}-\overline{E}_{g4}+\nu^2\,\overline{L}_{g4})\,\overline{\Theta}_0=0\qquad(152)$$

Alle coëfficiënten, waarvan de indices uit de nummers 1, 2, 3 zijn samengesteld, kunnen onveranderd met de in het symmetrische geval geldige formules worden berekend. Verder wordt

$$\overline{U}_{14}=\int_0 m_{11}\,\overline{z}_{d1}{}^*\,y\,d\,y=\overline{U}_{41}{}^*$$

$$\overline{U}_{24}=\int_0^b m_{21}\,\overline{\varphi}_{d2}{}^*\,y\,d\,y+\int_0^b m_{31}\,y\,d\,y\,.\,\overline{\varphi}_{d2}{}^*\,(\beta)=\overline{\overline{U}}_{42}{}^*$$

$$\overline{U}_{34}=\int\limits_0^b m_{31}\,\bar{\gamma}_{d3}{}^{\star}\,y\,d\,y=\overline{U}_{43}{}^{\star}$$

$$\overline{U}_{44}=\tfrac{1}{2}\,I_R{}'+\int\limits_0^b m_{11}\,y^2\,d\,y$$

$$\overline{L}_{14}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int\limits_0^b m_L\,c_{11}{}^{1n}\,\bar{z}_{d1}{}^{\star}\,y\,d\,y$$

$$\overline{L}_{24}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int\limits_0^b m_L\left\{c_{21}{}^{1n}\,\bar{\varphi}_{d2}{}^{\star}+c_{31}{}^{1n}\,\bar{\varphi}_{d2}{}^{\star}(\beta)\right\}t\,y\,d\,y$$

$$\overline{L}_{34}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int\limits_0^b m_L\,c_{31}{}^{1n}\,t\,\bar{\gamma}_{d3}{}^{\star}\,y\,d\,y$$

$$\overline{L}_{41}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int\limits_0^b m_L\,c_{11}{}^{1n}\,\bar{z}_{d1}\,y\,d\,y$$

$$\overline{L}_{42}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int\limits_0^b m_L\left\{c_{12}{}^{1n}\,\bar{\varphi}_{d2}+c_{13}{}^{1n}\,\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t\,y\,d\,y+$$

$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int\limits_0^b m_L\left\{c_{12}{}^{2n}\,\bar{\varphi}_{d2}+c_{13}{}^{2n}\,\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t\,y\,d\,y+$$

$$+iV_0\int\limits_0^b m_L(1+\xi)\left\{c_{12}{}^{(4)}\,\bar{\varphi}_{d2}+c_{13}{}^{(4)}\,\bar{\varphi}_{d2}(\beta)\right\}t\,y\,d\,y$$

$$\overline{L}_{43}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int\limits_0^b m_L\,c_{13}{}^{1n}\,\bar{\gamma}_{d3}\,t\,y\,d\,y+$$

$$+\sum_0^2\overline{P}_{2n}\int\limits_0^b m_L\,c_{13}{}^{2n}\,\bar{\gamma}_{d3}\,t\,y\,d\,y+$$

$$+iV_0\int\limits_0^b m_L(1+\xi)\,c_{13}{}^{(4)}\,\bar{\gamma}_{d3}\,t\,y\,d\,y$$

$$\overline{L}_{44}=\sum_0^2\overline{P}_{1n}\int\limits_0^b m_L\,c_{11}{}^{1n}\,y^2\,d\,y\,.$$

9 Samenvatting.

In de nummers 02 t/m 06 wordt de berekening van een eerste benadering voor de kritische trillingen van een romp-vleugel-rolroersysteem ontwikkeld op den meest algemeenen grondslag, die voor numerieke analyse geschikt kan worden geacht. De in aanmerking genomen deformaties van den vleugel zijn buiging en torsie, die van het rolroer in de eerste plaats een uitslag van het roer-als-geheel tegen de elasticiteit van het besturingsmechanisme in en in de tweede plaats torsie. De romp wordt als een volkomen stijf geheel behandeld.

De luchtkrachten op het systeem worden in overeenstemming met de theorie van Küssner en Schwarz (Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder, Luftfahrtforschung Bd. 17-1940-S. 337) in rekening gebracht.

Het uitgangspunt vormen de binnen het bovenomschreven kader als exact op te vatten bewegingsvergelijkingen van het systeem, die voor symmetrische trillingen tot de vergelijkingen (39) t/m (43) en voor antisymmetrische trillingen tot (47) t/m (50) kunnen worden omgewerkt. Deze vergelijkingen worden voor een numerieke uitwerking toegankelijk gemaakt door een naar de voorschriften van Galerkin uitgevoerde reductie, waarbij wordt aangenomen, dat de vervormingen door een uitdrukking, welke binnen het-schema van de formule (52) valt, kunnen worden benaderd.

Uiteindelijk wordt dan voor symmetrische trillingen het in no. 0461 vermelde stelsel van hoogstens 5 en voor antisymmetrische trillingen het in no. 0462 opgenomen stelsel van 4 gewone lineaire vergelijkingen verkregen, dat de oplossing in de nagestreefde benadering bepaalt. In no. 06 is kort samengevat, hoe deze vergelijkingen verder dienen te worden behandeld.

In de nummers 04.6 en 05.3 is er in het bijzonder naar gestreefd de numerieke berekening van de coëfficiënten der voornoemde lineaire vergelijkingen zooveel mogelijk te vergemakkelijken door uitvoerige lijsten der daarbij te gebruiken formules op te nemen. Verder zijn alle numerieke gegevens uit de theorie der luchtkrachten in den vorm, waarin zij uiteindelijk in de formules dienen te worden ingevoerd, in de tabellen 3 en 4 geresumeerd.

Vervolgens wordt in no. 07 een werkwijze beschreven, die het mogelijk maakt een verbeterde berekening eener kritische trilling te ontwikkelen, wanneer daarvoor reeds een (aanvankelijk „eerste") benadering bekend is. Voorwaarde is echter, dat het hieruit volgend iteratieproces convergeert, een vraag, die zich bij den huidigen stand van het onderzoek niet altijd van te voren met zekerheid laat beantwoorden.

Bij deze verbeterde berekening wordt het in eerste benadering verwaarloosde verloop van de phasen der kritische trilling langs de spanwijdte in aanmerking genomen. Hiermede hangt een mathematische complicatie samen, waardoor de toepassing van de reductiemethode der exacte bewegingsvergelijkingen volgens Galerkin tot te bewerkelijke becijferingen zou leiden. Echter kon in no. 081 een generalisatie van deze reductiemethode worden aangewezen, die — onder behoud der essentieele eigenschappen — ook in dit geval bruikbaar blijft. De hierop opgebouwde en ook verder geheel bij het iteratieproces aangepaste berekeningsmethode der kritische trillingen is in no. 08 beschreven, opnieuw in een vorm en detailleering, die de numerieke uitwerking zooveel mogelijk vergemakkelijkt.

De appendix bevat tot besluit eenige aanwijzingen voor de afleiding van de stijfheidsverdeeling der vleugelconstructie uit proefondervindelijk bepaalde eigentrillingsvormen.

10 Appendix.

Afleiding van de stijfheidsverdeelingen van den vleugel uit experimenteel vastgestelde (stand)-trillingsvormen.

Om een flutterberekening met behulp van een iteratieproces te kunnen verbeteren moeten — ter bepaling van „verbeterde deformatiefuncties" — de stijfheidsverdeelingsfuncties $b_{11}=B$ en T_v van den als buigenden- en tordeerenden enkelvoudigen balk opgevatten vleugel en de functie T_r van het rolroer volledig bekend zijn. Ook in andere gevallen kan de kennis van deze functies wenschelijk zijn.

Aannemend, dat als grondslag één of meer bij een standtrillingsproef nauwkeurig opgemeten eigentrillingsvormen van het systeem beschikbaar zijn, kan de verlangde afleiding worden aangeknoopt bij de algemeene bewegingsvergelijkingen (2), (9), (12), waarin K_L, M_L en N_L nul gesteld worden (omdat bij de standtrilling, — afgezien van de virtueele vergrooting van de massa van het systeem — geen luchtkrachten in het spel zijn), terwijl voor z, φ en γ kan worden gesubstitueerd

$$z=z_0(y)\cos\nu\tau\ .\ \varphi=\varphi_0(y)\cos\nu\tau\quad \gamma=\gamma_0(y)\cos\nu\tau.$$

Deze vergelijkingen krijgen dan den vorm

$$(b_{11}z_0'')''=\nu^2(m_{11}z_0+m_{12}\varphi_0+m_{13}\gamma_0)\tag{153}$$

$$\begin{aligned}(T_v\varphi_0')'&+[k_{11}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}-\\&-k_{12}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\delta(y-b_1)+\\&+[-k_{21}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}+\\&+k_{22}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\delta(y-b_2)=\\&=-\nu^2(m_{21}z_0+m_{22}\varphi_0+m_{23}\gamma_0)\end{aligned}\tag{154}$$

$$\begin{aligned}(T_r\gamma_0')'&-[k_{11}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}-\\&-k_{12}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\delta(y-b_1)-\\&-[-k_{21}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}+\\&+k_{22}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\delta(y-b_2)=\\&=-\nu^2(m_{31}z_0+m_{32}\varphi_0+m_{33}\gamma_0).\end{aligned}\tag{155}$$

Minstens één stel amplitudeverdeelingsfuncties z_0, φ_0, γ_0 met bijbehoorende (eigen-)frequentie kan op grond van de beschikbare metingen geacht worden bekend te zijn, waarbij natuurlijk met de beperkte meetnauwkeurigheid samenhangende kleine afwijkingen moeten worden geaccepteerd.

Uit de drie vergelijkingen volgt onmiddellijk, gebruik makend van de randvoorwaarden

$$z_0''(b)=z_0'''(b)=\varphi_0'(b)=0\quad \gamma_0'(b_i)=\gamma_0'(b_u)=0:$$

$$b_{11}=\frac{\nu^2}{z_0''}\int_y^b\int_y^b(m_{11}z_0+m_{12}\varphi_0+m_{13}\gamma_0)(dy)^2\tag{156}$$

$$\begin{aligned}T_v=\frac{\nu^2}{\varphi_0'}&\int_y^b(m_{21}z_0+m_{22}\varphi_0+m_{23}\gamma_0)\,dy+\\&+\frac{1}{\varphi_0'}[k_{11}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}-\\&-k_{12}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\int_y^b\delta(y-b_1)\,dy+\\&+\frac{1}{\varphi_0'}[-k_{21}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}+\\&+k_{22}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\int_y^b\delta(y-b_2)\,dy\end{aligned}\tag{157}$$

$$\begin{aligned}T_r=\frac{\nu^2}{\gamma_0'}&\int_y^b(m_{31}z_0+m_{32}\varphi_0+m_{33}\gamma_0)\,dy-\\&-\frac{1}{\gamma_0'}[k_{11}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}-\\&k_{12}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\int_y^b\delta(y-b_1)\,dy-\\&-\frac{1}{\gamma_0'}[-k_{21}\{\gamma_0(b_1)-\varphi_0(b_1)\}+\\&+k_{22}\{\gamma_0(b_2)-\varphi_0(b_2)\}]\int_y^b\delta(y-b_2)\,dy.\end{aligned}\tag{158}$$

Wil men de gezochte functies met deze formules berekenen, dan wordt het als een bezwaar ondervonden, dat er naast de functies z_0, φ_0 en γ_0 zelve ook de afgeleiden φ_0', γ_0' en vooral z_0'' in optreden. Inderdaad kan men aan de niet altijd onbeteekenende fouten, die ontstaan bij het differentieeren van een aan metingen ontleende kromme, bij gebruik van de formules (156) t/m (158) niet ontkomen. Desondanks leveren deze formules bij doelmatige inrichting der differentiaties een gewoonlijk zeer bruikbare uitkomst die, vooral wat de torsiestijfheidsfunctie T_v betreft, meestal veel betrouwbaarder is dan de resultaten, die hiervoor naar de aanwijzingen der elasticiteitstheorie uit de vleugelconstructie worden afgeleid.

Het verdient te worden opgemerkt, dat het gebruik van de formule (158) voor de torsiestijfheid van het rolroer vaak extra bemoeilijkt wordt door de relatief groote onnauwkeurigheden, die de functie γ_0 — welke aan een niet zoo eenvoudige meting moet worden ontleend — bevat. Men doet dan beter de functie T_r eenvoudig evenredig met de 3e macht van de rolroerkoorde te stellen, overeenkomstig de veronderstelling, dat het tapsche rolroer in de lengterichting constructief homogeen is, met uitzondering van een overal gelijke huiddikte. De evenredigheidsconstante worde zoo gekozen, dat aan (158) langs de geheele breedte van het roer gemiddeld is voldaan.

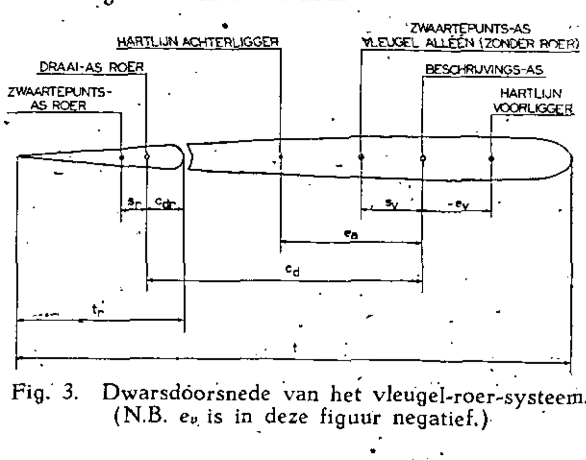


Fig. 3. Dwarsdoorsnede van het vleugel-roer-systeem. (N.B. e_v is in deze figuur negatief.)

11 Notatielijst.

y	= coördinaat langs de beschrijvingsas van den vleugel, tellend vanaf het symmetrievlak van het vliegtuig
$z \equiv z(y)$	= verticale verplaatsing van den vleugel ter plaatse van de beschrijvingsas
$\varphi \equiv \varphi(y)$	= verdraaiïng van den vleugel om de beschrijvingsas
$\gamma \equiv \gamma(y)$	= totale verdraaiïng van het rolroer
$\gamma_r \equiv \gamma_r(y)$	= hoek tusschen de rolroer- en de vleugelkoorde
Z	= verticale verplaatsing van den romp ter plaatse van de beschrijvingsas
Φ	= draaiïng van den romp om de beschrijvingsas
Θ	= draaiïng van den romp om de langsas

Zie fig. 3, en voor z; φ; γ; γ_r ook fig. 1

$t \equiv t(y)$	= vleugelkoorde
$t_r \equiv t_r(y)$	= koorde van het rolroer
$c_v \equiv c_v(y)$	= afstand van de voorste neutrale as van den vleugel tot de beschrijvingsas
$c_d \equiv c_d(y)$	= afstand van de draaias van het rolroer tot de beschrijvingsas
$c_{dr} \equiv c_{dr}(y)$	= afstand van de draaias van het rolroer tot den voorrand van het roer
e_v	= (in de berekeningen constant aangenomen) afstand van de hartlijn van den voorligger tot de beschrijvingsas
e_a	= (in de berekeningen constant aangenomen) afstand van de hartlijn van den achterligger tot de beschrijvingsas
$s_y \equiv s_y(y)$	= afstand van de zwaartepuntsas van den vleugel alléén (dus zonder roer) tot de beschrijvingsas

alle positief, als de beschrijvingsas vóór ligt. Zie ook fig. 3

$s_r \equiv s_r(y)$	= afstand van de zwaartepuntsas van het rolroer tot de draaias (fig. 3). s_r is positief als de draaias vóór ligt
t_0	= referentiekoorde van den vleugel
$\eta \equiv \eta(y)$	$= \dfrac{t_r}{t}$
$\xi \equiv \xi(y)$	$= \dfrac{t_0 - t}{t}$
$\eta_s t$	= breedte van de spleet tusschen den voorrand van het rolroer en den achterrand van den vleugel
b_1; b_2	= y-coördinaten van dwarsdoorsneden, waarin het stuurmechanisme op het rolroer aangrijpt
b_i	= y-coördinaat van den binnenrand van het rolroer
b_u	= y-coördinaat van den buitenrand van het rolroer
b	= y-coördinaat van den vleugeltip
$B_v \equiv B_v(y)$	= buigstijfheid van den voorligger
$B_a \equiv B_a(y)$	= buigstijfheid van den achterligger
$T_v \equiv T_v(y)$	= torsiestijfheid van den vleugel (buiten het aandeel, afkomstig van de buigstijfheid van de liggers)
$T_r \equiv T_r(y)$	= torsiestijfheid van het rolroer
$b_{ik} \equiv b_{ik}(y)$	= stijfheidsverdeelingsfuncties (zie (3) en (10)).
k_0, k_0', k_1, k_2	= constanten van in het stuurmechanisme van het rolroer aangetroffen veeren (zie fig. 2)
$k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$	= volgens (6) bepaalde veerkrachtcoëfficiënten
a_{gh}	= dempingsparameters
$m_v \equiv m_v(y)$	= massa per eenheid van breedte van den vleugel alléén (dus het rolroer niet meegerekend)
$m_r \equiv m_r(y)$	= massa per eenheid van breedte van het rolroer
$m_{ik} \equiv m_{ik}(y)$	= massaverdeelingsfuncties. Zie (3), (10) en (13) of — gecorrigeerd voor de massawerking van de meetrillende lucht — (81).
m_R	= massa van den romp
I_R	= traagheidsmoment van den romp om de beschrijvingsas
I_R'	= traagheidsmoment van den romp om de langsas
ϱ	= luchtdichtheid
m_L	$= \pi \varrho t^2$
v	= vliegsnelheid
ν	= frequentie
τ	= tijd
$V \equiv V(y) = \dfrac{v}{\nu t}$	= gereduceerde snelheid
V_0	$= \dfrac{v}{\nu t_0}$
$\bar{P} \equiv \bar{P}(V) = A(V) - i B(V)$	= complexe luchtkrachtfunctie van Kassner en Fingado
$p_{ik}(V)$; $p_{ik}'(V)$	= uit $\bar{P}$ afgeleide reëele luchtkrachtfuncties, getabelleerd in tabel 3
$R_n \equiv R_n(\eta)$	= functies, die den invloed van de koordeverhouding η op de luchtkrachten vastleggen (tabel 4)
c_{ik}^{1n}; c_{ik}^{2n}; $c_{ik}^{(3)}$; $\dot{c}_{ik}^{(3)}$	= door tabel 2 gedefinieerde samenstellingen van functies R_n
$\bar{a}_{ik}$	= complexe, luchtkrachtcoëfficiënten [1]).

[1]) Complexe grootheden worden in het algemeen door een symbool met een streep erboven voorgesteld.

Tabel 3.

Functies van de gereduceerde snelheid, die de grootte van de luchtkrachten op een trillenden vleugel bepalen.

V_0	$\frac{1}{2V_0}$	p_{10}	p_{10}'	p_{20}	p_{20}'	p_{11}	p_{11}'	p_{21}	p_{21}'	p_{12}	p_{12}'	p_{22}	p_{22}'
0,00000	∞	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,05000	10,00	0,00249	0,10012	0,00501	0,00012	0,00496	0,10036	0,01003	0,00037	0,00238	0,00036	0,00504	0,00037
0,10000	5,00	0,00984	0,20096	0,02010	0,00098	0,01938	0,20281	0,04038	0,00292	0,00911	0,00265	0,02055	0,00285
0,12500	4,00	0,01525	0,25184	0.03148	0,00191	0,02982	0,25532	0,06339	0,00564	0,01372	0,00487	0,03252	0,00544
0,16667	3,00	0,02667	0,33753	0,05626	0,00445	0,05145	0,34523	0,11380	0,01303	0,02252	0,01045	0,05928	0,01232
0,20000	2,50	0,03784	0,40700	0,08140	0,00757	0,07215	0,41954	0,16531	0,02200	0,03013	0,01659	0,08723	0,02046
0,25000	2,00	0,05769	0,51295	0,12824	0,01442	0,10802	0,53534	0,26208	0,04143	0,04203	0,02854	0,14097	0,03753
0,33333	1,50	0,09808	0,69468	0,23156	0,03269	0,17801	0,74038	0,47835	0,09203	0,06146	0,05500	0,26513	0,07982
0,41667	1,20	0,14618	0,88327	0,36803	0,06091	0,25725	0,96043	0,76821	0,16810	0,07813	0,08815	0,43691	0.13974
0,45454	1,10	0,17019	0,97129	0,44149	0,07736	0,29540	1,06521	0,92567	0,21163	0,08441	0,10494	0,53188	0,17264
0,50000	1,00	0,20055	1,07887	0,53943	0,10027	0,34247	1,19478	1,13682	0,27151	0,09078	0,12624	0,66050	0,21663
0,51020	0,98	0,20757	1,10330	0,56290	0,10590	0,35319	1,22440	1,18759	0,28610	0.09201	0,13116	0,69160	0,22714
0,53191	0,94	0,22276	1,15563	0,61469	0,11849	0,37615	1,28810	1,29984	0,31857	0,09441	0,14179	0,76057	0,25030
0,55556	0,90	0,23967	1.21318	0,67400	0,13315	0,40137	1,35850	1,42873	0,35614	0,09664	0,15359	0,84006	0,27669
0,58140	0,86	0,25854	1,27670	0,74227	0,15032	0,42912	1,43658	1,57750	0,39981	0,09870	0,16671	0,93215	0,30688
0,60976	0,82	0,27970	1,34717	0,82145	0,17055	0,45977	1,52362	1,75049	0,45090	0.10039	0,18133	1,03961	0,34156
0,62500	0,80	0,29126	1,38537	0,86585	0,18204	0,47630	1,57097	1,84770	0,47973	0,10108	0,18927	1,10014	0,36086
0,64103	0,78	0,30354	1,42578	0,91397	0,19458	0,49372	1,62117	1,95319	0,51107	0,10158	0,19768	1,16594	0,38162
0,65789	0,76	0,31659	1,46856	0,96615	0,20828	0,51206	1,67444	2,06775	0,54516	0,10197	0,20656	1,23749	0,40396
0,67568	0,74	0,33051	1,51399	1,02297	0,22332	0,53142	1,73115	2,19267	0,58239	0,10216	0,21599	1,31564	0,42810
0,69444	0,72	0,34535	1,56222	1,08487	0,23982	0,55186	1,79148	2,32894	0,62305	0,10213	0,22596	1,40099	0,45415
0,71429	0,70	0,36120	1,61361	1,15258	0,25800	0,57346	1,85590	2,47823	0,66761	0,10183	0,23655	1,49461	0,48236
0,73529	0,68	0,37815	1,66836	1,22674	0,27805	0,59629	1,92470	2,64196	0,71650	0,10122	0,24777	1,59740	0,51289
0,75758	0,66	0,39631	1,72695	1,30830	0,30024	0,62047	1,99843	2,82227	0,77030	0,10031	0,25970	1,71071	0,54605
0,78125	0,64	0,41580	1,78964	1,39816	0,32484	0,64610	2,07748	3,02119	0,82960	0,09897	0,27236	1,83582	0,58207
0,80645	0,62	0,43674	1,85694	1,49753	0,35221	0,67326	2,16250	3,24148	0,89516	0,09715	0,28582	1,97445	0,62130
0,83333	0,60	0,45928	1,92933	1,60777	0,38273	0,70210	2,25410	3,48618	0,96781	0,09478	0,30012	2,12852	0,66407
0,86207	0,58	0,48360	2.00742	1,73054	0,41690	0,73275	2,35306	3,75904	1,04858	0,09180	0,31535	2,30036	0,71082

0,89286	0,56	0,50989	2,09187	1,86774	0,45526	0,76536	2,46021	4,06436	1,13862	0,08807	0,33154	2,49264	0,76200
0,92593	0,54	0,53835	2,18344	2,02171	0,49848	0,80006	2,57652	4,40739	1,23928	0,08350	0,34877	2,70862	0,81812
0,96154	0,52	0,56924	2,28304	2,19523	0,54735	0,83705	2,70313	4,79440	1,35221	0,07793	0,36711	2,95215	0,87979
1,00000	0,50	0,60284	2,39174	2,39174	0,60284	0,87650	2,84139	5,23313	1,47934	0,07121	0,38662	3,22800	0,94771
1,04167	0.48	0,63948	2,51081	2,61543	0,66612	0,91864	2,99287	5,73302	1,62304	0,06316	0,40737	3,54193	1,02271
1,08696	0,46	0,67953	2,64170	2,87142	0,73862	0,96366	3,15938	6,30553	1,78608	0,05355	0,42943	3,90088	1,10566
1,13636	0,44	0,72343	2,78616	3,16608	0,82207	1,01183	3,34304	6,96498	1,97187	0,04211	0,45285	4,31350	1,19765
1,19048	0,42	0,77170	2,94639	3,50761	0,91869	1,06339	3,54657	7,72973	2,18463	0,02855	0,47770	4,79080	1,29993
1,25000	0,40	0,82492	3,12488	3,90610	1,03115	1,11863	3,77295	8,62228	2,42944	0,01251	0,50398	5,34615	1,41391
1,31579	0,38	0,88381	3,32483	4,37478	1,16291	1,17785	4,02602	9,67218	2,71271	—0,00644	0,53173	5,99704	1,54133
1,38889	0,36	0,94921	3,55011	4.93072	1,31835	1,24137	4,31038	10,91736	3,04248	—0,02878	0,56090	6,76568	1,68416
1,47059	0,34	1,02211	3,80557	5.59643	1,50310	1,30950	4,63171	12,40777	3,42884	—0,05509	0,59141	7,68106	1,84473
1,56250	0,32	1,10371	4,09730	6.40204	1,72454	1,38258	4,99707	14,20997	3,88482	—0,08606	0,62310	8,78153	2,02582
1,66667	0,30	1,19546	4,43315	7,38860	1,99244	1,46091	5,41548	16,41441	4,42729	—0,12246	0,65571	10,11867	2,23076
1,78571	0,28	1,29914	4,82320	8,61283	2,31990	1,54479	5,89830	19,14549	5,07845	—0,16524	0,68880	11,76265	2,46349
1,92308	0,26	1,41696	5,28087	10,15554	2,72492	1,63445	6.46055	22,57967	5,86810	—0,21543	0,72174	13,81212	2,72888
2,08333	0,24	1,55161	5,82406	12,13343	3,23252	1,72997	7,12188	26,97065	6,83662	—0,27424	0,75358	16,40716	3,03277
2,27273	0,22	1,70658	6,47747	14,72155	3,87859	1,83130	7,90908	32,69675	8,04064	—0,34298	0,78298	19,75471	3,38254
2,50000	0,20	1,88624	7,27580	18,18950	4,71561	1,93802	8,85917	40,33742	9,56066	—0,42304	0,80800	24,16791	3,78744
2,77778	0,18	2,09637	8,26953	22,97093	5,82324	2,04929	10,02524	50,81884	11.51572	—0,51579	0,82595	30,14218	4,25975
3,12500	0,16	2,34457	9,53465	29,79578	7,32679	2,16348	11,48603	65,68963	14,08767	—0,62230	0,83306	38,49722	4,81621
3,57143	0,14	2,64129	11,19103	39,96797	9,43319	2,27784	13,36411	87,69695	17,56834	—0,74301	0,82421	50,67258	5,48149
4,16667	0,12	3,00121	13,43880	55,99504	12.50507	2,38781	15,86168	122,08541	22,45429	—0,87700	0,79254	69,39257	6,29508
5,00000	0,10	3,44604	16,63848	83,19241	17,23022	2,48609	19,33956	179,89021	29,66067	—1,02049	0,72918	100,34385	7,32797
6,25000	0,08	4,01005	21,51080	134,44247	25,06283	2,56108	24,51463	287,65891	41,06958	—1,16461	0,62354	157,11362	8,72790
8,33333	0,06	4,75314	29,73464	247,78861	39,60952	2,59446	33,05218	523,22337	61,23001	—1,29114	0,46506	279,31020	10,86104
12,50000	0,04	5,80007	46,33509	579,18863	72,50081	2,55708	49,94017	1203,44073	104,46431	—1,36513	0,24978	627,37445	14,89958
25,00000	0.02	7,52079	96,37253	2409,31325	188,01975	2,40053	100,13323	4912,64410	248,03300	—1.32078	0,00416	2503,43557	26,99204
∞	0,00	$0 \times \infty$	∞	∞	$0 \times \infty$								

Tabel 4.

Functies van de koordeverhouding van roer en vleugel, die de grootte der luchtkrachten op een trillenden vleugel bepalen. [1])

η	R_1	R_2	R_3	R_4+	R_4-	$R_5+ = R_5-$	R_6+	R_6-	R_7	R_8
0,40	0,252217	0,294268	0,626470	0	0,779694	0,747783	0	1,247514	0,747783	0,205732
0,35	0,293339	0,330648	0,688082	0	0,867567	0,706661	0	1,214595	0,706661	0,169352
0,30	0,339255	0,364855	0,747685	0	0,972456	0,660745	0	1,166944	0,660745	0,135145
0,25	0,391003	0,396626	0,804500	0	1,102658	0,608997	0	1,102658	0,608997	0,103374
0,20	0,450183	0,425632	0,857620	0	1,273240	0,549817	0	1,018592	0,549817	0,074368
0,15	0,519498	0,451439	0,905939	0	1,515461	0,480502	0	0,909278	0,480502	0,048561
0,10	0,604182	0,473429	0,947956	0	1,909860	0,395818	0	0,763944	0,395818	0,026571
0,09	0,623837	0,477290	0,955421	0	2,024324	0,376163	0	0,728758	0,376163	0,022710
0,08	0,644734	0,480948	0,962522	0	2,158887	0,355266	0	0,690841	0,355266	0,019052
0,07	0,667105	0,484390	0,969229	0	2,320454	0,332895	0	0,649728	0,332895	0,015610
0,06	0,691268	0,487600	0,975503	0	2,519812	0,308732	0	0,604757	0,308732	0,012400
0,05	0,717684	0,490557	0,981306	0	2,774963	0,282316	0	0,554993	0,282316	0,009443
0,00	**1,000000**	**0,500000**	**1,000000**	0	∞	0,000000	0	0,000000	0,000000	0,000000

η	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	$R_{17}+$	$R_{17}-$
0,40	0,373530	0,018967	0,124026	0,004784	0,005582	0,327839	—0,184350	0,275301	0,031281	0,016493
0,35	0,311918	0,013392	0,099364	0,003928	0,004428	0,355520	—0,227513	0,317256	0,029147	0,017529
0,30	0,252315	0,008987	0,077273	0,003049	0,003279	0,376868	—0,272796	0,355868	0,026215	0,017476
0,25	0,195500	0,005624	0,057668	0,002199	0,002231	0,389651	—0,319085	0,391002	0,022548	0,016347
0,20	0,142380	0,003179	0,040521	0,001431	0,001354	0,390928	—0,365032	0,422453	0,018242	0,014194
0,15	0,094061	0,001530	0,025866	0,000795	0,000691	0,376446	—0,408978	0,449909	0,013437	0,011118
0,10	0,052044	0,000549	0,013846	0,000332	0,000260	0,339015	—0,448790	0,472880	0,008366	0,007317
0,09	0,044579	0,000421	0,011784	0,000263	0,000201	0,327676	—0,456013	0,476869	0,007351	0,006499
0,08	0,037478	0,000313	0,009845	0,000202	0,000151	0,314659	—0,462924	0,480635	0,006347	0,005671
0,07	0,030771	0,000224	0,008031	0,000149	0,000109	0,299697	—0,469485	0,484166	0,005358	0,004838
0,06	0,024497	0,000152	0,006353	0,000105	0,000074	0,282429	—0,475656	0,487448	0,004392	0,004009
0,05	0,018694	0,000096	0,004819	0,000069	0,000047	0,262350	—0,481388	0,490461	0,003459	0,003193
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	**—0,500000**	**0,500000**	0,000000	0,000000

η	$R_{18}+ = R_{18}-$	$R_{19}+$	$R_{19}-$	$R_{20}+$	$R_{20}-$	$R_{21}+ = R_{21}-$	$R_{22}+ = R_{22}-$	$R_{23}+$	$R_{23}-$
0,40	0,022314	—0,389073	—0,604334	0,531398	0,835575	0,871809	0,092745	0	0,096702
0,35	0,023391	—0,368809	—0,496951	0,548592	0,887844	0,806025	0,070217	0	0,086205
0,30	0,022256	—0,340439	—0,349684	0,553412	0,919794	0,738018	0,051058	0	0,075145
0,25	0,019448	—0,303963	—0,151981	0,543832	0,927282	0,666665	0,035120	0	0,063588
0,20	0,015500	—0,259382	+0,114638	0,517390	0,905079	0,590338	0,022279	0	0,051593
0,15	0,010942	—0,206695	+0,487157	0,470732	0,845786	0,506368	0,012429	0	0,039199
0,10	0,006338	—0,145902	+1,057098	0,398297	0,736892	0,409664	0,005480	0	0,026444
0,09	0,005466	—0,132771	+1,213914	0,379850	0,707220	0,387947	0,004433	0	0,023855
0,08	0,004624	—0,119316	+1,393928	0,359765	0,674210	0,365111	0,003498	0	0,021254
0,07	0,003816	—0,105536	+1,604539	0,337823	0,637376	0,340926	0,002673	0	0,018636
0,06	0,003051	—0,091432	+1,857178	0,313709	0,596047	0,315085	0,001961	0	0,016008
0,05	0,002337	—0,077004	+2,170773	0,286992	0,549290	0,287135	0,001360	0	0,013373
0,00	0,000000	0,000000	∞	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0	0,000000

Vervolg Tabel 4.

η	$R_{24}+$	$R_{24}- - \frac{8 \ln \eta_s}{\pi^2}$	$R_{25}+$	$R_{25}-$	R_{26}	R_{27}	R_{28}	$R_{29}+$	$R_{29}-$	$R_{30}+ = R_{30}-$
0,40	0	0,195201	0,389073	0,932871	0,014183	0,003902	−0,209720	0,092745	0,107533	0,039699
0,35	0	0,319615	0,368809	0,858305	0,009464	0,002268	−0,195242	0,070217	0,081835	0,026291
0,30	0	0,465554	0,340439	0,771052	0,005938	0,001215	−0,173745	0,051058	0,059797	0,016381
0,25	0	0,638469	0,303963	0,671516	0,003425	0,000581	−0,146457	0,035120	0,041321	0,009386
0,20	0	0,848086	0,259382	0,560036	0,001748	0,000236	−0,114925	0,022279	0,026327	0,004761
0,15	0	1,113191	0,206695	0,436909	0,000735	0,000074	−0,081106	0,012429	0,014748	0,001991
0,10	0	1,476573	0,145902	0,302383	0,000217	0,000015	−0,047557	0,005480	0,006529	0,000585
0,09	0	1,569229	0,132771	0,274130	0,000158	0,000010	−0,041172	0,004433	0,005285	0,000426
0,08	0	1,672053	0,119316	0,245432	0,000111	0,000006	−0,034973	0,003498	0,004174	0,000299
0,07	0	1,787738	0,105536	0,216290	0,000075	0,000003	−0,029005	0,002673	0,003193	0,000200
0,06	0	1,920229	0,091432	0,186706	0,000047	0,000002	−0,023314	0,001961	0,002344	0,000126
0,05	0	2,075648	0,077004	0,156683	0,000027	0,000001	−0,017957	0,001360	0,001626	0,000073
0,00	0	∞	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

η	$R_{32}+$	$R_{32}-$	R_{33}	R_{34}	$R_{35}+$	$R_{35}-$	$R_{36}+$	$R_{36}-$	$R_{37}+$	$R_{37}-$
0,40	+0,091637	−0,212540	0,046417	−0,029083	0,389073	0,136514	0,157142	0,087063	0,465893	0,535972
0,35	−0,024119	−0,363371	0,039223	−0,024421	0,368809	0,149923	0,153849	0,098358	0,370624	0,426115
0,30	−0,126055	−0,492437	0,031562	−0,019360	0,340439	0,155190	0,144982	0,102934	0,282375	0,324423
0,25	−0,210498	−0,593948	0,023846	−0,014248	0,303963	0,151981	0,130335	0,100288	0,202999	0,233046
0,20	−0,273151	−0,660840	0,016509	−0,009454	0,259382	0,140010	0,109953	0,090205	0,134286	0,154034
0,15	−0,308477	−0,683531	0,009995	−0,005348	0,206695	0,119026	0,084291	0,072904	0,077964	0,089351
0,10	−0,308056	−0,646651	0,004760	−0,002270	0,145902	0,088818	0,054522	0,049342	0,035719	0,040899
0,09	−0,302478	−0,629848	0,003908	−0,001803	0,132771	0,081652	0,048266	0,044052	0,029106	0,033320
0,08	−0,294655	−0,609100	0,003129	−0,001389	0,119316	0,074111	0,041977	0,038634	0,023133	0,026476
0,07	−0,284309	−0,583862	0,002427	−0,001030	0,105536	0,066187	0,035699	0,033128	0,017815	0,020386
0,06	−0,271071	−0,553409	0,001806	−0,000726	0,091432	0,057883	0,029474	0,027577	0,013164	0,015061
0,05	−0,254426	−0,516724	0,001271	−0,000478	0,077004	0,049197	0,023371	0,022048	0,009195	0,010518
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

η	R_{38}	R_{39}	R_{40}	R_{41}	R_{42}	R_{43}	R_{44}	R_{45}	R_{46}	R_{47}
0,40	0,076847	0,187552	0,062448	0,050248	0,202636	0,232902	0,017465	−0,059353	0,008573	0,083931
0,35	0,052824	0,204681	0,045319	0,060127	0,191065	0,181198	0,014273	−0,067032	0,005077	0,057001
0,30	0,034099	0,218777	0,031223	0,069221	0,171477	0,135155	0,010881	−0,067555	0,002768	0,036367
0,25	0,020210	0,229959	0,020041	0,077166	0,145358	0,095213	0,007618	−0,062025	0,001348	0,021309
0,20	0,010589	0,238389	0,011611	0,083677	0,114473	0,061772	0,004758	−0,051716	0,000557	0,011041
0,15	0,004568	0,244277	0,005723	0,088569	0,080963	0,035201	0,002502	−0,038126	0,000178	0,004711
0,10	0,001383	0,247899	0,002101	0,091774	0,047529	0,015840	0,000971	−0,023059	0,000035	0,001411
0,09	0,001012	0,248382	0,001618	0,092217	0,041153	0,012862	0,000755	−0,020061	0,000023	0,001031
0,08	0,000714	0,248792	0,001208	0,092598	0,034961	0,010186	0,000569	−0,017118	0,000015	0,000726
0,07	0,000480	0,249133	0,000867	0,092918	0,028998	0,007817	0,000412	−0,014256	0,000009	0,000487
0,06	0,000304	0,249409	0,000591	0,093179	0,023310	0,005757	0,000283	−0,011501	0,000005	0,000308
0,05	0,000177	0,249624	0,000376	0,093384	0,017956	0,004007	0,000182	−0,008889	0,000002	0,000178
0,00	0,000000	**0,250000**	0,000000	**0,093750**	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

[1]) *R-functies, geïndiceerd met een + teeken, gelden in de veronderstelling dat de spleet tusschen vleugel en roer* **geopend** is en *R*-functies, geïndiceerd met een — teeken, in de veronderstelling dat deze **gesloten** is. *R*-functies zonder + of — in deze gelden voor **beide** aannamen.

Belangrijk: Wijzigingen t.o.v. de in rapport V. 1252 gebruikte notatie

1° Voor de coördinaat langs de beschrijvingsas wordt hier y en in V. 1252 x gebruikt.

2° Aan de functies m_{12}, m_{13} en b_{12} is hier — vergeleken bij V. 1252 — het tegengestelde teeken toegekend.

3° De beteekenis der hoeken γ en γ_r is — vergeleken bij V. 1252 — verwisseld.

Drukfouten en vergissingen in rapport V. 1252.

Ondanks de zorgvuldigheid, welke is betracht bij de uitwerking der in rapport V.1252 opgenomen theorie, is gebleken dat sommige uitkomsten nog kleine foutjes — voornamelijk teekenfoutjes — bevatten, die naast een serie drukfouten en kleine verschrijvingen vooral bij de toepassing der formules storend zijn. Een volledige lijst is op aanvrage verkrijgbaar. Hier worde alleen vermeld, dat de tabel der R-functies in rapport V.1252 foutieve getallen voor R_8 en R_{20} bevat. De eerste fout is ontstaan, doordat de R_8-functie op pag. 52 verkeerd is gedefinieerd; de correcte definitie is

$$R_8 = \frac{\Phi_2}{4\pi}\left(\text{i.p.v. } \frac{\Phi_2}{\pi}\right).$$

Beide fouten zijn bij de samenstelling van tabel 4 van dit vervolg op V.1252 vanzelfsprekend gecorrigeerd.

Report V. 1304.

The calculation of the critical speed with respect to flutter of airplane wings II.

Summary.

Parts 03 to 07 contain the description of a method to find a first approximation for the critical flutter-speed of the mechanical system, formed by the fuselage, wings and ailerons of an airplane. This method should have the most general base, suitable for practical application. The deformations of the wing accounted for are bending and torsion, those of the aileron a deflection of the aileron as a whole and aileron-torsion. The fuselage is treated as a rigid body. The aerodynamic forces on wing and aileron are derived from the „two-dimensional theory" of Küssner and Schwarz (*Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder*, Luftfahrtforschung Bd. 17-1940 page 337); using the wellknown hypothesis of „strips without induction", thus considering the flow around every strip of a wing with finite aspect-ratio to be two-dimensional. The induction-effect and the compressibilityeffect are therefore neglected.

The starting point is formed by the equations of motion of the system, based on the assumptions stated above. These equations can be rearranged in the case of symmetrical vibrations to the set (39)-(43) and in the case of antisymmetrical vibrations to (47)-(50). They are made suitable for numerical evaluation by a reduction on the Galerkin method. It is assumed, that to that purpose the deformations may be approximated by a scheme of the type (52).

In this way the set of at most 5 ordinary lineair equations given in nr. 05.6.1 can be obtained applying to symmetrical vibrations and the set of 4 or less equations of nr. 05.6.2 applying to antisymmetrical vibrations. From these equations the critical vibrations can be determined with the desired accuracy. Part 7 contains a short survey of the methods for obtaining this solution.

With the intention to facilitate the numerical calculation of the coefficients of the linear equations quoted above, parts 05.6 and 06.3 contain full lists of the formulae involved. Moreover alle numerical abstracts from the aerodynamical theory are collected in the tables 3 and 4 in such a way, that a direct substitution in the basic equations is possible.

Part 8 contains an examination of the problem how to find a more accurate solution for the flutter-vibration, if a first approximation is available. The proposition, made in part 8, should give the desired result, provided the proces of iteration, implicated in it, converges. It was not yet possibile to investigate fully the conditions for convergence in this report.

These more accurate calculations take account of the variation of the phase of the critical vibration along the span of the wing, neglected in the first approximation. This involves a mathematical complication leading to extremely elaborate numerical calculations, if the Galerkin reduction method is still to be used. This difficulty can be avoided when making use of a generalisation of the Galerkin process, developed in part 09.1. The method of calculation based hereon, fully adapted to an iterative treatment of the flutter-problem, is described in part 09, again in a form especially prepared for numerical elaboration. Finally the appendix contains some propositions on the determination of the wingstiffnes from experimental investigations of the modes of vibration.

Bericht V. 1304.

Die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit für Flatterschwingungen eines Flugzeugflügels II.

Zusammenfassung.

In den Abschnitten 03 bis 07 ist die Berechnung einer ersten Näherung für die kritischen Schwingungen eines Rumpf-Flügel-Querrudersystems in einer für numerische Auswertung geeigneten allgemeinen Fassung dargestellt. Die in die Rechnung eingeführten Formänderungen des Flügels sind Biegung und Torsion; die des Ruders zunächst ein Ausschlag des ganzen Ruders und weiter Ruder-Torsion. Der Rumpf wird als völlig starres Gebilde betrachtet.

Die Luftkräfte auf Flügel und Ruder werden gemäsz der Theorie von Küssner und Schwarz (Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder, Luftfahrtforschung Bd. 17-1940-S. 337) in die Rechnung eingeführt, indem man den Flügel in Streifen teilt und für jeden Streifen die ebene Theorie anwendet. Der Einflusz der Induktion und der Kompressibilitätseffekt werden demnach vernachlässigt.

Die Berechnung knüpft an den im obenerwähnten Rahmen als exakt zu betrachtenden Bewegungsgleichungen des Systemes an. Diese Gleichungen lassen sich für symmetrische Schwingungen zu (39) bis (43) umformen und für antisymmetrische Schwingungen zu (47) bis (50). Diese Gleichungssysteme werden zur numerischen Behandlung nach dem Galerkinschen Verfahren reduziert. Es wird angenommen, dasz die dabei einzuführenden Formänderungen sich in der Form (52) darstellen lassen.

In dieser Weise wird für symmetrische Schwingungen schlieszlich das in Nr. 05.6.1 angeschriebene System von höchstens 5 gewöhnlichen linearen Gleichungen erhalten und für antisymmetrische Schwingungen das System von höchstens 4 Gleichungen dieser Art der Nr. 05.6.2. Diese Gleichungen bestimmen die kritische Schwingung in der erstrebten Annäherung. Im Abschnitt 7 ist kurz zusammengefaszt worden, wie diese Gleichungen ausgewertet werden sollen.

In den Abschnitten 05.6 und 06.3 wurde speziell versucht die numerische Ausrechnung der Koeffizienten der obenerwähnten Gleichungen möglichst zu erleichtern. Deshalb wurden alle dazu zu verwendenden Formeln in vollständiger Fassung ausgeschrieben. Weiter sind alle Zahlen aus der Theorie der Luftkräfte in der Form, in der sie schlieszlich in die Formeln eingehen, in den Tafeln 3 und 4 zusammengefaszt.

Anschlieszend wird im Abschnitt 8 ein Verfahren beschrieben, das eine verbesserte Berechnung einer kritischen Schwingung gestattet, wenn zuerst eine (anfänglich „erste") Näherung bekannt ist. Diese Methode setzt jedoch voraus, dasz das sich daraus ergebende Iterationsverfahren konvergiert. Diese Frage konnte im vorliegenden Bericht noch nicht endgültig geklärt werden.

Bei der verbesserten Berechnung wird die beim ersten Schritt vernachlässigte Aenderung der Schwingungsphase über die Flügelbreite in der Rechnung berücksichtigt. Daraus ergibt sich eine mathematische Komplikation, die die Anwendung der Galerkinschen Reduktion der Bewegungsgleichungen unmöglich macht, wenn man sehr zeitraubende Bezifferungen vermeiden will. Es konnte jedoch im Abschnitt 09.1 eine Art generalisierter Galerkinscher Methode angegeben werden, die auch in diesem Falle brauchbar bleibt. Die Vorteile des Galerkinschen Verfahrens sollen dabei möglichst gut erhalten bleiben. Die auf der generalisierten Reduktionsmethode aufgebaute und auch weiterhin völlig beim Iterationsprozedur angepasste Flatterrechnung ist — wieder in einer Form, die eine Anwendung möglichst erleichtern soll — im Abschnitt 09 dargestellt.

Der Anhang enthält zum Schlusz einige Hinweise für die Ableitung der Steifigkeitsverteilung des Flügels aus experimentell bestimmten Eigenschwingungsformen.

RAPPORT V. 1198.

Kinematografische bepaling van den stand en de plaats van een vliegtuig als functie van den tijd met behulp van een enkele camera op den grond

door

Dr. J. A. KOK en Th. J. BURGERHOUT.

Overzicht.

In dit rapport wordt een methode beschreven volgens welke *de stand en de plaats van een vliegtuig als functie van den tijd* met behulp van één speciaal voor dit doel vervaardigde, op den grond opgestelde filmcamera worden bepaald. Deze *kinematografische meetmethode* is door het N.L.L. ontwikkeld met het doel haar toe te passen op *niet-stationnaire* vluchten, waarbij verschillende grootheden met de thans ten dienste staande in het vliegtuig te gebruiken meetinstrumenten in het geheel niet of onvoldoende nauwkeurig kunnen worden gemeten.

De speciale uitrusting van de filmcamera wordt besproken. Zoo moet de camera voorzien zijn van een inrichting, waardoor bij elk filmbeeld de stand van de camera en het tijdstip van opname worden vastgelegd.

De afstand van het vliegtuig tot de camera en de stand van het vliegtuig ten opzichte van het filmvlak worden berekend aan de hand van uit het filmbeeld op te meten grootheden. Uit de richting, waarin werd gefilmd, wordt dan de stand van het vliegtuig ten opzichte van een vast assenstelsel gevonden. Er zijn eenige nomogrammen geconstrueerd, welke de berekeningen zooveel mogelijk beperken. Als voorbeeld zijn de resultaten van eenige van den grond af gefilmde kunstvluchten medegedeeld. De nauwkeurigheid, die volgens de kinematografische meetmethode kan worden bereikt, wordt aan de resultaten van proeven met een vliegtuigmodel getoetst. Tenslotte worden de mogelijke fouten en hun invloed op de resultaten besproken.

Indeeling.

01 Inleiding.

Voor de studie van de vliegeigenschappen is het *noodig metingen uit te voeren omtrent vliegtuigbewegingen.* In de eerste plaats moeten daarbij de baan van het zwaartepunt van het vliegtuig en de stand van het vliegtuig op ieder oogenblik tijdens het doorloopen van die baan worden vastgelegd.

Wanneer het stationnaire vluchten betreft, of niet-stationnaire vluchten, waarbij de voor de beweging karakteristieke grootheden niet of slechts weinig met den tijd veranderen, kan men de gevraagde gegevens verkrijgen door het uitvoeren van metingen in het vliegtuig met de tot nu toe *gebruikelijke meetinstrumenten. Bij vluchten waarbij* snelle en groote veranderingen van den stand, de vliegsnelheden en de bewegingsrichting optreden, bv. bij kunstvluchten of plotselinge verstoringen van de normale vlucht, zooals het uitvallen van een motor, is dit niet meer mogelijk.

In dit rapport wordt nu een door het N.L.L. ontwikkelde methode beschreven, in het vervolg *kinematografische meetmethode* genoemd, volgens welke ook in deze gevallen de stand en de plaats van een vliegtuig als functie van den tijd worden bepaald. Hiertoe wordt het vliegtuig met een speciaal voor dit doel ontworpen camera („kunstvluchtencamera"), voorzien van een telelens, van den grond af gefilmd. Deze camera dient voorzien te zijn van een *inrichting, waardoor de richting* van de optische as en het tijdstip van opname op het filmbeeld worden vastgelegd. Men kan nu, zooals in het vervolg wordt beschreven, uit elk filmbeeld den stand en de plaats van het vliegtuig bepalen. De opeenvolgende plaatsen geven de *baan* van het vliegtuig. Door combinatie der opeenvolgende opnamen kunnen dan verder de *translatie- en rotatiesnelheden* en daaruit eventueel de *versnellingen* en de *slip- en invalshoeken* worden bepaald. De methoden, die hierbij kunnen worden gevolgd, zullen in het N.L.L.-rapport V. 1229 worden behandeld.

De bij het N.L.L. in gebruik zijnde filmmethode ter verkrijging van gegevens omtrent start en landingen, zooals start- en landingslengte, snelheid bij loskomen en bij landen, enz. is een bijzonder geval van de kinematografische meetmethode. De gunstige ervaringen, welke het N.L.L. met deze filmmethode heeft opgedaan, hebben mede tot de verdere ontwikkeling van de kinematografische meetmethode geleid.

Wanneer in het vliegtuig een automatische waarnemer (zie *lit.* 10) is aangebracht, kan men met behulp hiervan gegevens omtrent de roerstanden, de werking van den motor (bv. toerental en inlaatdruk) en andere, niet door de kunstvluchtencamera vast te leggen grootheden verkrijgen. Zijn de horloges van deze camera en van den automatischen waarnemer nauwkeurig gesynchroniseerd, dan kan men hun gegevens coördineeren. Men verkrijgt op deze wijze een zoo volledig mogelijk inzicht in het gedrag van het vliegtuig onder de beschouwde omstandigheden.

In den automatischen waarnemer kunnen eveneens instrumenten ingebouwd zijn, die grootheden bepalen, welke men ook uit de filmopnamen met de kunstvluchtencamera kan berekenen. Het is dan mogelijk de resultaten van beide methoden te vergelijken. Men dient hierbij te bedenken, dat de aanwijzingen van verschillende instrumenten bij *niet-stationnaire vlucht* niet altijd volkomen betrouwbaar zijn. De aanwijzingen kunnen beïnvloed worden door versnellingen. Ook bezitten verschillende instrumenten een — bij elk instrument weer andere — traagheid, zoodat hun aanwijzingen niet overeenkomen met den waren toestand op het oogenblik van opname. Drukmeters (snelheidsmeters, hoogtemeters) geven slechts een bruikbare aanwijzing, wanneer zij den druk meten in een ongestoorden luchtstroom, hetgeen bij vliegproeven als hier bedoeld niet altijd te verwezenlijken is. Bij *gelijktijdige toepassing* van beide meetmethoden kan men dus tevens de eigenschappen van vliegtuiginstrumenten tijdens de vlucht onderzoeken.

Andere nadeelen, die aan het uitsluitend gebruik van meetinstrumenten in het vliegtuig zijn verbonden, zijn dat niet altijd alle gewenschte instrumenten wegens hun gewicht, de beschikbare plaatsruimte of veiligheidseischen (bv. het gebruik van de onder het vliegtuig gesleepte statische buis in duikvlucht) kunnen worden aangebracht en dat de baan slechts stap voor stap uit de opeenvolgende waarnemingen kan worden berekend.

Bij de filmopnamen met de kunstvluchtencamera vervallen deze moeilijkheden, daar hierbij geen vliegtuiginstrumenten worden gebruikt. Hiertegenover staat, dat hooge eischen aan de afbeelding van het vliegtuig moeten worden gesteld en dat in het algemeen de uitwerking der waarnemingen meer tijd eischt. Snelheden en versnellingen worden met behulp van raaklijnen aan gestrookte krommen verkregen, zoodat men deze grootheden alleen kan bepalen, indien de opeenvolgende standen en plaatsen van het vliegtuig nauwkeurig en met voldoende kleine tijdsintervallen bekend zijn. Men verkrijgt verder de baan van het vliegtuig en de vliegsnelheid t.o.v. den grond, zoodat men de grootte en de richting van de windsnelheid op vlieghoogte moet kennen, teneinde de baan en de snelheid van het vliegtuig t.o.v. de lucht te kunnen berekenen.

Door verscheidene onderzoekers zijn reeds methoden ontwikkeld om met een of meer onafhankelijk van het vliegtuig opgestelde filmcamera's gegevens omtrent de bewegingen van het vliegtuig te verkrijgen; deze methoden werden echter niet voldoende uitgewerkt om zonder meer bevredigende resultaten te bereiken (*lit.* 1 t/m 8, 12 en 13).

De stand en de plaats van het vliegtuig worden vastgelegd door den stand en de plaats van twee onderling loodrechte assen, gaande door op het vliegtuig geschilderde merkteekens. Deze assen worden in het vervolg meetassen genoemd. Onder 02 worden de hoeken en afstanden, waarmede men den stand en de plaats van de meetassen kan vastleggen, gedefinieerd.

Om de uitwerking van de metingen mogelijk te maken en eenvoudig te houden, moet de constructie van de kunstvluchtencamera aan verschillende voorwaarden, die onder 03.1 worden behandeld, voldoen.

Onder 03.2 worden de afbeelding van het vliegtuig op de film en de grootheden, die in het filmbeeld moeten worden opgemeten, besproken.

Hierna wordt onder 04.2 de berekening van den stand en in 04.3 van de plaats van het vliegtuig t.o.v. het in 02.1 gedefinieerde aardassenstelsel uit de opmetingen van het filmbeeld gegeven, nadat eenige veronderstellingen zijn gemaakt, waarvan de voornaamste is, dat de optische as van de camera door het snijpunt der meetassen gaat. De berekening van den stand t.o.v. het aardassenstelsel geschiedt met een tusschenstap in 04.1, waarin de stand t.o.v. het in 02.2 gedefinieerde filmassenstelsel wordt bepaald. In 05 worden de constructie en het gebruik van een grafiek en eenige nomogrammen behandeld, die in plaats van de in 04 gegeven formules kunnen worden gebruikt en waardoor de uitwerking aanzienlijk wordt bekort.

Indien niet aan een van de in 04 gemaakte veronderstellingen is voldaan, kunnen correcties worden aangebracht, die in 06 worden afgeleid. Het *blijkt, dat in het algemeen alleen correcties behoeven* te worden aangebracht voor het geval, dat de optische as van de camera niet door het snijpunt van de meetassen gaat; de overige correcties zijn meestal kleiner dan de meetnauwkeurigheid. De aan te brengen correcties kunnen gemakkelijk met een nomogram worden bepaald.

Men zal in het algemeen niet de langsas zelf of een lijn evenwijdig ermee als meetas kunnen kiezen. In 07 wordt daarom een methode aangegeven, waarmede men den stand van een as, bv. de langsas in het symmetrievlak, uit den stand van de meetassen kan bepalen, indien men den hoek ervan met de in het symmetrievlak gelegen meetas kent.

In 08 worden eenige methoden aangegeven volgens welke men de opeenvolgende berekende standen en de baan van het vliegtuig aanschouwelijk kan voorstellen. Ter illustratie zijn de resultaten van een aantal *volgens de kinematografische* meetmethode waargenomen en uitgewerkte kunstvluchten, uitgezet volgens de verschillende reproductiemethoden, medegedeeld. De metingen van deze kunstvluchten zijn uitgevoerd met een proefcamera volgens het onder 03.1 beschreven principe.

De nauwkeurigheid van de methode werd getoetst door met de proefcamera een modelvliegtuig te filmen, waarvan de stand nauwkeurig bekend was en dat op zoodanigen afstand van de camera was geplaatst, dat de afbeelding op de film van *dezelfde grootte was als bij de uitvoering* van werkelijke metingen normaal het geval zal zijn. De resultaten zijn in 09 besproken. De nauwkeurigheid van de metingen bleek zeer bevredigend te zijn.

Bij de onder 10 gegeven beschouwing van de factoren, die van invloed zijn op de resultaten blijkt, dat vooral de beweging van het vliegtuig t.o.v. de optische as tijdens den belichtingstijd een groote rol kan spelen.

Tenslotte zijn in 11 de in dit rapport gebruikte *notaties samengevat en is in 12 een literatuurlijst* gegeven.

02 Definitie van den stand en de plaats van het vliegtuig.

02.1 Stand en plaats van het vliegtuig t.o.v. het aardassenstelsel.

De stand en de plaats van het vliegtuig zijn volkomen bepaald door den stand en de plaats van twee onderling loodrechte, vast aan het vliegtuig verbonden assen, de *meetassen*, ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel, het *aardassenstelsel*, waarvan de oorsprong O in het optisch middelpunt van het camera-objectief ligt en waarvan de X_k-as horizontaal naar het Noorden, de Y_k-as horizontaal naar het Oosten en de Z_k-as verticaal naar boven is gericht. Met nadruk wordt *er op gewezen, dat het loodrecht op elkaar staan* van de meetassen een absolute voorwaarde bij de in dit rapport gevolgde methode is.

Teneinde er zeker van te zijn, dat men bij het aflezen van de film de metingen steeds betrekt op de meetassen van het vliegtuig, dient men deze assen uitwendig op het vliegtuig aan te geven door aan de uiteinden van romp en vleugel *merkteekens aan te brengen*. De voorwaarden, waaraan deze merkteekens moeten voldoen, worden besproken in 10.1.

De meetassen en hun positieve richtingen worden bij voorkeur zoo gekozen, dat zij evenwijdig zijn met de in *lit.* 11 gedefinieerde langsas en dwarsas van het vliegtuig. Dit zal in het algemeen wel *mogelijk zijn bij* de dwarsas; de merkteekens op den romp zullen echter meestal niet in een lijn evenwijdig met de langsas kunnen worden aangebracht. De meetassen worden in het vervolg *rompas* of x-as en *vleugelas* of y-as genoemd. De vleugelas staat dus loodrecht op het symmetrievlak van het vliegtuig en de rompas is in dit vlak gelegen. In overeenstemming met *lit.* 11 wordt de richting van de rompas positief genomen van den staart naar den neus van het vliegtuig en de richting van de vleugelas positief van *BB* naar *SB* (*zie ook fig. 21*).

De *stand van een meetas* t.o.v. het aardassenstelsel is vastgelegd door de *elevatie* en het *azimuth* van die as t.o.v. het aardassenstelsel. De *elevatie* ϑ *van de rompas* is de hoek, die de positieve rompas of x-as met het grondvlak ($X_k O Y_k$-vlak) van het aardassenstelsel maakt. Deze hoek wordt tusschen -90° en $+90^\circ$ gemeten en positief gerekend, wanneer de positieve rompas naar boven is gericht. Het *azimuth* γ *van de rompas* is de hoek, die de projectie van die as op het grondvlak maakt met de X_k-as van het aardassenstelsel. Deze hoek wordt van 0° tot 360° geteld van de X_k-as af in de richting van Noord naar Oost tot de projectie van de positieve richting van de rompas.

De elevatie ψ *en het azimuth* Δ *van de vleugelas* (y-*as*) worden nagenoeg op dezelfde wijze gedefinieerd als de overeenkomstige hoeken bij de rompas. Het eenige verschil is, dat de elevatie van de vleugelas positief wordt gerekend indien het positieve deel (*SB*-vleugelas) ervan naar beneden is gericht.

Deze definities zijn zoo gekozen, dat indien de rompas en de vleugelas met de langsas en de dwarsas samenvallen, de elevatie en het azimuth van de rompas en de elevatie van de vleugelas identiek worden met resp. de langshelling, de koers en de dwarshelling van het vliegtuig.

Uit symmetrie-overwegingen zal in het vervolg bij de berekeningen steeds de stand van de vleugelas worden vastgelegd door de *elevatie* ψ *en het azimuth* δ *van het negatieve deel van die as*, de $(-y)$ of *BB*-vleugelas. Hierbij worden deze hoeken op precies dezelfde wijze gedefinieerd als de overeenkomstige hoeken van de rompas. Men vervange daar dus „positieve rompas" door „negatieve vleugelas". Bij beide stelsels definities blijft de grootte van ψ, ook wat teeken betreft, hetzelfde, terwijl $\delta = \Delta \pm 180^\circ$.

Aan de bovengenoemde hoeken kunnen nog worden toegevoegd de elevatie ν en het azimuth τ

van de topas, dit is de lijn loodrecht op het vlak van de meetassen door het snijpunt van deze assen. De topas is gericht van de rugzijde naar de borstzijde van het vliegtuig. De hoeken worden weer op dezelfde wijze gedefinieerd als de overeenkomstige hoeken van de rompas.

In fig. 1 zijn de elevaties en de azimuths van de $(+x)$-as en de $(-y)$-as t.o.v. een met het aardassenstelsel evenwijdig assenstelsel door het snijpunt der meetassen aangegeven.

De stand van de meetassen is reeds volkomen bepaald 1e door de elevatie en het azimuth van een der assen en het azimuth van de andere as; 2e door de elevatie en het azimuth van een der assen, de elevatie van de andere as en het halfrond (van de twee, waarin een bol met het snijpunt der meetassen tot middelpunt door het verticale vlak door de gegeven as wordt verdeeld), waarnaar deze as is gericht.

De *plaats van het vliegtuig* wordt bepaald door de *coördinaten* x_k, y_k *en* z_k van het snijpunt S der meetassen ten opzichte van het aardassenstel-

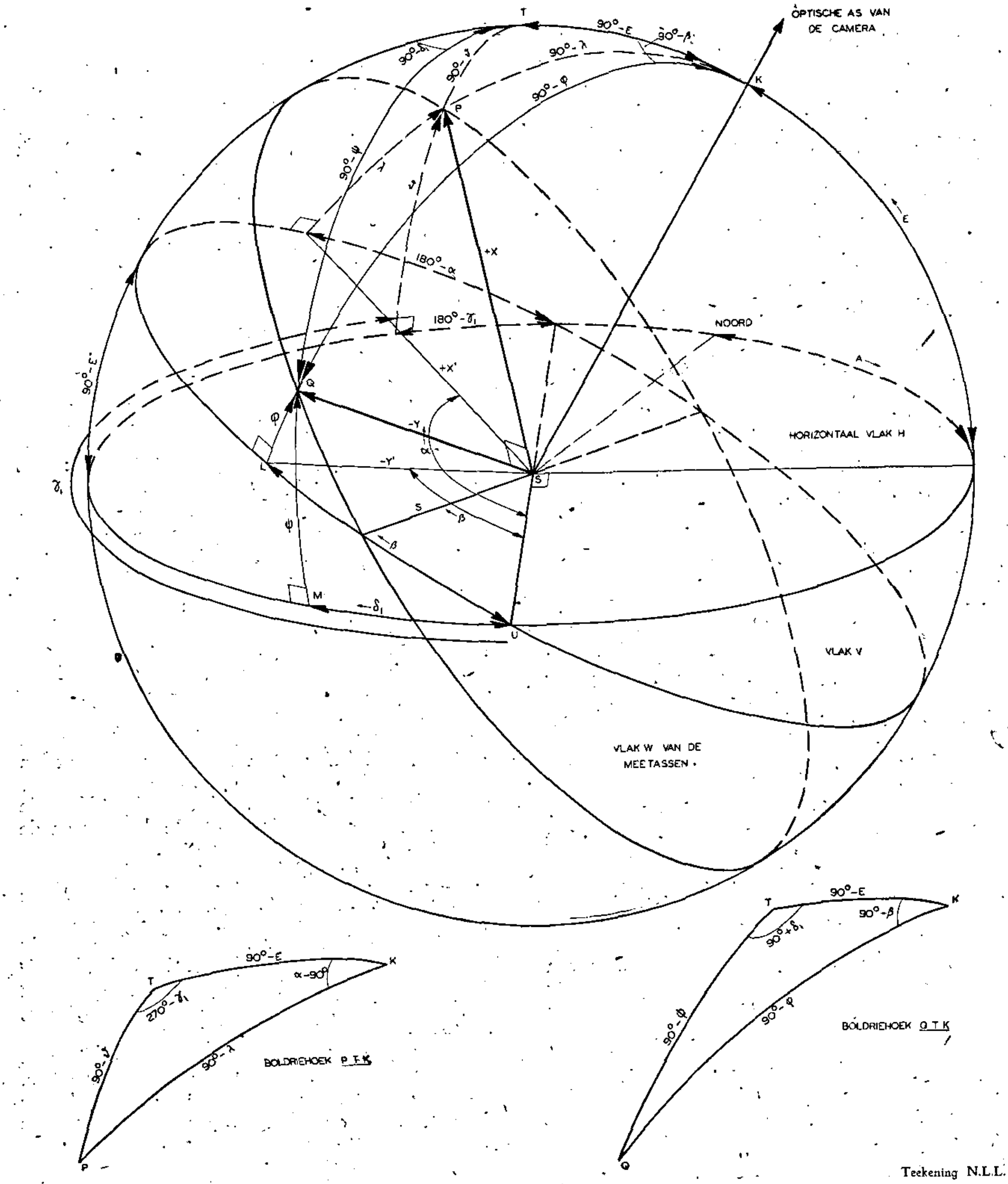


Fig 1. Stand van de meetassen ten opzichte van het aardassenstelsel en het filmassenstelsel.

sel of door de poolcoördinaten r, A' en E', resp. de afstand van het vliegtuig tot de camera, het azimuth en de elevatie van de lijn camera-vliegtuig (zie fig. 2, waarin men A en E door A' en E' vervangen moet denken).

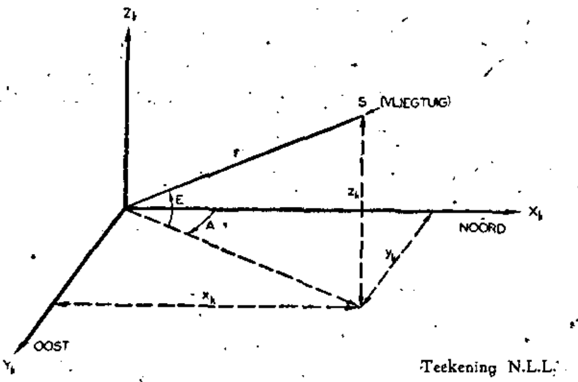


Fig. 2. Plaats van het vliegtuig ten opzichte van het aardassenstelsel.

Indien de meetassen elkaar niet snijden, zijn de resultaten die men verkrijgt met de formules, gebaseerd op de aanname dat de meetassen elkaar wel snijden, in het algemeen voldoende nauwkeurig (zie 06.1).

02.2 Stand van het vliegtuig ten opzichte van het filmassenstelsel.

Bij het uitwerken der metingen is het noodzakelijk, eerst den stand van de meetassen ten opzichte van een assenstelsel — het *filmassenstelsel* (ξ, η, ζ) —, dat vast met het filmvlak is verbonden, *af te leiden. De oorsprong ligt in* het snijpunt van de optische as van de camera met het filmvlak en valt dus practisch samen met den oorsprong O van het aardassenstelsel. De ζ-as valt samen met de optische as van de camera en is naar voren gericht, de ξ-as valt samen met de horizontale lijn in het filmvlak en de η-as staat loodrecht op de ξ- en ζ-assen en ligt dus eveneens in het filmvlak. De positieve richtingen van de ξ- en η-assen worden zoodanig gekozen dat, *als A en E het azimuth en de* elevatie van de optische as van de camera zijn, het filmassenstelsel met het aardassenstelsel samenvalt, wanneer men de camera om de ξ-as over een hoek $90^\circ - E$ naar boven en dan om de ζ-as over een hoek $A + 90^\circ$ in de richting van Oost naar Noord draait (zie fig. 1, waarin het filmvlak door het ermee evenwijdige vlak V door het snijpunt van de meetassen is vervangen).

De stand van het vliegtuig ten opzichte van het filmassenstelsel wordt volkomen bepaald door de hoeken λ en α, φ en β (zie fig. 1 en 3), van welke λ en φ de elevaties resp. van de rompas, $(+x)$-as, en de *negatieve* vleugelas, $(-y)$-as, en α en β de azimuths van deze assen ten opzichte van het filmassenstelsel voorstellen. Deze hoeken worden op dezelfde wijze gedefinieerd als de overeenkomstige hoeken van de meetassen ten opzichte van het aardassenstelsel. De elevaties zijn dus positief, indien de voorzijde van het vliegtuig resp. de *BB*-vleugel van de camera af zijn gericht.

03 Fotografische opname van het vliegtuig.

03.1 Hoofdtrekken van het filmapparaat.

De camera, waarmee het vliegtuig wordt gefilmd is in principe een normale filmcamera, doch moet voor het gestelde doel aan de volgende eischen voldoen:

1e De camera moet, teneinde het vliegtuig te kunnen volgen, *om een horizontale en een verticale as draaibaar* zijn.

2e *De elevatie E en het azimuth A van de optische* as van de camera dienen bij elk filmbeeldje bekend te zijn. Deze hoeken, die op dezelfde wijze worden gedefinieerd als de overeenkomstige hoeken van de rompas ten opzichte van het aardassenstelsel, geven tevens de draaiingshoeken van de camera aan. Door een aan de camera aangebrachte inrichting, die deze draaiingshoeken meet, kunnen dus E en A worden bepaald. *Hierbij* wordt de optische as van de camera positief gerekend naar het vliegtuig toe en is dus identiek met de ζ-as.

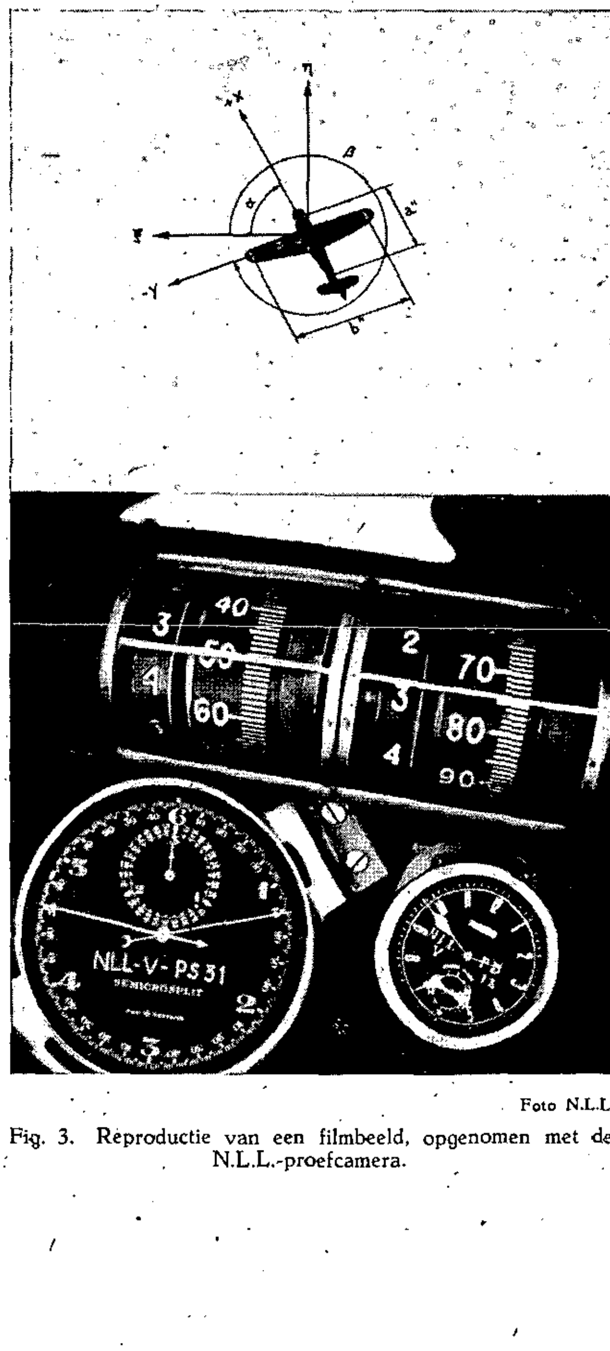


Foto N.L.L.

Fig. 3. Reproductie van een filmbeeld, opgenomen met de N.L.L.-proefcamera.

3e Het *tijdstip van opname* moet bij elk filmbeeldje bekend zijn. Er dient dus tevens een horloge te worden medegefilmd. In fig. 3 ziet men een filmopname afgebeeld, waarop de onder 2e en 3e bedoelde instrumenten mede zijn afgebeeld. Een gedeelte van het beeldvenster wordt door deze instrumenten ingenomen, terwijl het overige deel voor de afbeelding van het vliegtuig is bestemd.

4e. Opdat er steeds een vaste horizontale lijn in het filmvlak aanwezig is, dient ervoor gezorgd te worden, dat bv. *de onderkant van het filmvenster horizontaal* is gericht.

vliegtuig op een afstand van enkele honderden tot duizenden meters goed kan worden gevolgd en voldoend groote afbeeldingen levert. Een foto van deze proefcamera vindt men in fig. 4.

In plaats van de camera om een horizontale as draaibaar te maken kan men een om een horizontale as draaibaren spiegel voor het objectief aanbrengen. Deze methode kan vooral van belang zijn bij zware cameratypen. Een dergelijke camera wordt thans door het N.L.L. ontwikkeld. De methode van uitwerking van de opnamen ondergaat dan geringe wijzigingen, die in 03.2.2 worden besproken.

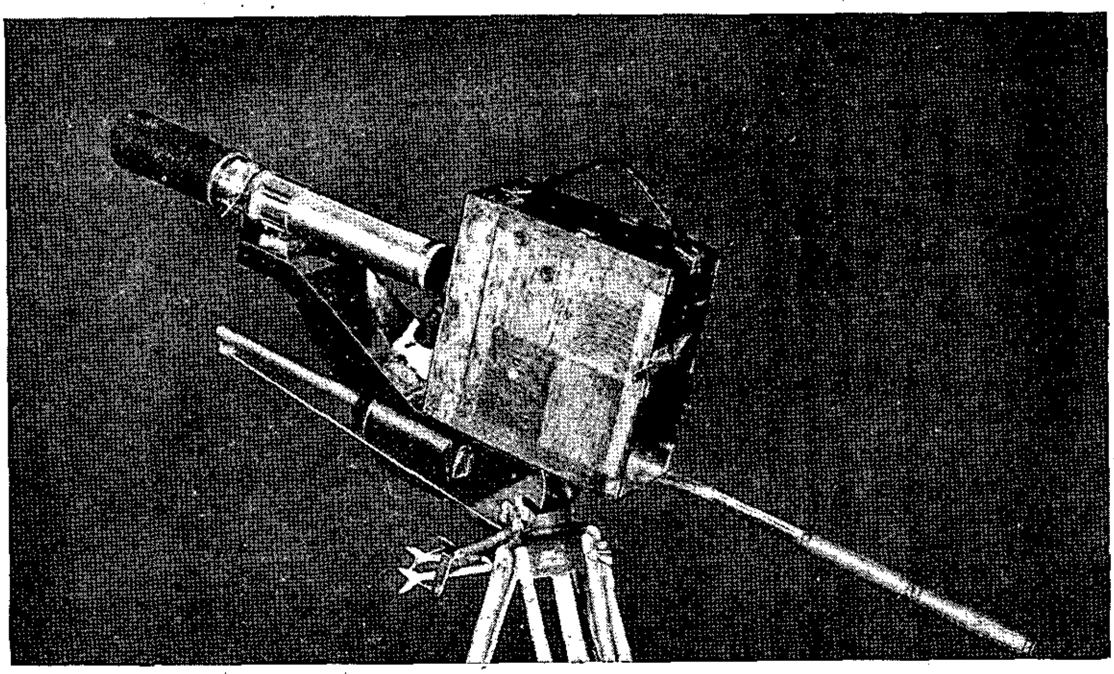


Fig. 4. N.L.L.-proefcamera. Foto N.L.L.

5e De *optische as* van de camera moet het beeldveld, dat bestemd is voor het vliegtuig, in het middelpunt loodrecht snijden. Dit is in fig. 3 het snijpunt van de ξ- en η-assen.

6e *De brandpuntsafstand van het objectief* van de camera moet zoodanig worden gekozen, dat een compromis wordt gevormd tusschen twee tegenstrijdige eischen. Eenerzijds moet deze brandpuntsafstand nl. zoo groot zijn, dat het *filmbeeld* niet te klein wordt, waardoor nauwkeurige opmeting onmogelijk zou zijn; anderzijds mag hij niet te groot zijn, daar anders het *beeldveld* te klein wordt, waardoor het volgen van het vliegtuig te zeer zou worden bemoeilijkt.

Teneinde de verschillende vraagstukken die zich bij de fotografische opnamen van kunstvluchten voordoen te kunnen bestudeeren, werd door het N.L.L. een proefcamera geconstrueerd, waarmede verscheidene kunstvluchten werden gefilmd. Deze camera heeft een objectief met een brandpuntsafstand van 422 mm; het beeldveld bedraagt bij een filmformaat van 18×24 mm in graden uitgedrukt 2 bij 3. Bij proefopnamen bleek, dat een

03.2 Afbeelding van het vliegtuig op de film.

03.2.1 Afbeelding zonder spiegel voor het objectief van de camera.

Het vliegtuig wordt van het optisch middelpunt O van het camera-objectief uit centraal geprojecteerd op het filmvlak. Bekijkt men dus de *celluloid-zijde* van de negatieve film, dan ziet men het vliegtuig, zooals men het ook *in werkelijkheid* zou waarnemen. Bekijkt men echter de *emulsie-zijde* van de film, dan ziet men het vliegtuig in *spiegelbeeld* afgebeeld. Wat men dus als *BB*-vleugel denkt te zien is in werkelijkheid de *SB*-vleugel. In het vervolg zal steeds worden aangenomen, dat de metingen worden verricht op de *emulsie-zijde* van de negatieve film. In 03.2.2 wordt deze keuze nader toegelicht.

In fig. 3 ziet men een filmopname van een vliegtuig tijdens een kunstvlucht. De merkteekens op het vliegtuig waren niet puntvormig en voldoen dus niet aan de in 10.1 gestelde voorwaarden. De horizon ligt beneden het filmvlak. De ξ-as is dus in overeenstemming met 02.2 en 03.1 van O af evenwijdig met den onderkant van het filmvenster horizontaal naar links en de η-as verticaal naar boven gericht. De grootheden, die uit de film opgemeten moeten worden, zijn nu de afstanden a'' en b'' en de hoeken α en β. De afstanden a'' en b'' zijn de lengten van de projecties van de lijnen tusschen de merkteekens op resp. de rompas en de vleugelas van het vliegtuig. De hoeken α en β worden gemeten van de naar *links* gerichte ξ-as af *met de wijzers van de klok mee tot de voorzijde* van de rompas resp. de *BB*-vleugelas (die men als *SB*-vleugelas afgebeeld denkt te zien). De hoeken α en β zijn dus identiek met de gelijknamige in 02.2 gedefinieerde hoeken. Indien het snijpunt van de meetassen niet in de optische as van de camera valt, moeten bovendien eenige correcties worden aangebracht, die eveneens uit opmeting van de film worden bepaald. (zie 06.3).

In 04.1 zal blijken, dat de teekens van λ en φ niet met behulp van berekeningen kunnen worden gevonden. Men zal minstens één van deze teekens uit *directe aanschouwing van de film moeten vinden.*

03.2.2 Afbeelding met een spiegel voor het objectief.

Plaatst men een spiegel voor het objectief van de camera, dan verkrijgt men het spiegelbeeld van de afbeelding, die men zou verkrijgen, indien geen spiegel was aangebracht. Men ziet dus op de *emulsiezijde* van de *negatieve* film het vliegtuig, zooals men het visueel zou hebben waargenomen. Daar door het N.L.L. een kunstvluchtencamera voorzien van een spiegel voor het objectief wordt ontwikkeld, is om deze reden in dit rapport *aangenomen, dat de film op de emulsiezijde* wordt *afgelezen*.

De hoeken α en β worden dan gemeten van de nu naar *rechts* gerichte ξ-as af *tegen de wijzers van de klok in* tot de voorzijde van de rompas resp. de *BB*-vleugelas (*die men nu inderdaad als BB*-vleugelas ziet afgebeeld). De verdere uitwerking is geheel analoog aan de uitwerking van het filmbeeld, dat is verkregen zonder spiegel voor het objectief van de camera.

04 Berekening van den stand en de plaats van het vliegtuig.

04.1 Berekening van den stand ten opzichte van het filmassenstelsel.

Bij de in dit hoofdstuk uitgevoerde berekeningen zullen de volgende *veronderstellingen* worden gemaakt:

1e De *meetassen snijden elkaar.*

2e Het snijpunt S van de meetassen ligt in de optische as van de camera. (De projectie S'' van dit snijpunt komt dus in het midden O van het beeldvlak te liggen).

3e Het vliegtuig is zoover van de camera verwijderd, dat de centrale projectie van het vliegtuig uit het optisch middelpunt van de camera op het vlak V door het snijpunt van de meetassen evenwijdig aan het filmvlak ook als *loodrechte* projectie mag worden beschouwd.

Is niet aan deze veronderstellingen voldaan, dan moeten correcties op de in dit hoofdstuk verkregen resultaten worden aangebracht. Deze correcties worden in 06 besproken.

De stand van het vliegtuig ten opzichte van het filmassenstelsel is bepaald door de hoeken λ, φ, α en β. De *hoeken α en β* kunnen direct uit de afbeelding van het vliegtuig worden afgelezen. De *hoeken λ en φ* kunnen *op het teeken na* worden bepaald uit de waarde

$$p = \frac{a''}{b''} : \frac{b}{a}, \tag{1}$$

waarin a en b de ware afstanden van de lijnen tusschen de merkteekens op den romp resp. op den vleugel en a'' en b'' de projecties van deze afstanden op het filmvlak voorstellen, en uit den hoek $(\alpha-\beta)$. De waarden p en $\alpha-\beta$ vormen tezamen een maatstaf voor de vervorming van de afbeelding van het vliegtuig. Is b.v. $p=1$, dan is $\frac{a''}{b''}=\frac{a}{b}$, d.w.z de verhouding van de afstanden op romp en vleugel op de afbeelding is gelijk aan de werkelijke verhouding. Is $\alpha-\beta=90^\circ$, dan worden de genoemde lijnen op de film onder den juisten hoek gezien.

Men kan nu aantoonen, dat

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi} = p \tag{2}$$

en

$$\operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}\varphi = -\cos(\alpha-\beta). \tag{3}$$

Dit is als volgt in te zien.

In fig. 5 is de stand van een meetas ten opzichte van het vlak V aangegeven. Uit deze figuur volgt:

$$\cos\lambda = \frac{a'}{a},$$

en dus ook

$$\cos\varphi = \frac{b'}{b},$$

waarin a' en b' de projecties van a en b op V zijn.

Hieruit volgt:

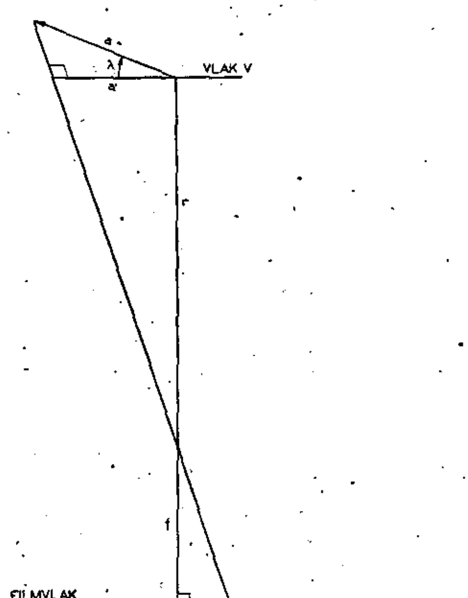


Fig. 5. Projectie van een meetas op het filmbeeld.

$$\frac{\cos\lambda}{\cos\varphi}=\frac{a'}{b'}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a''}{b''}\cdot\frac{b}{a}=p.$$

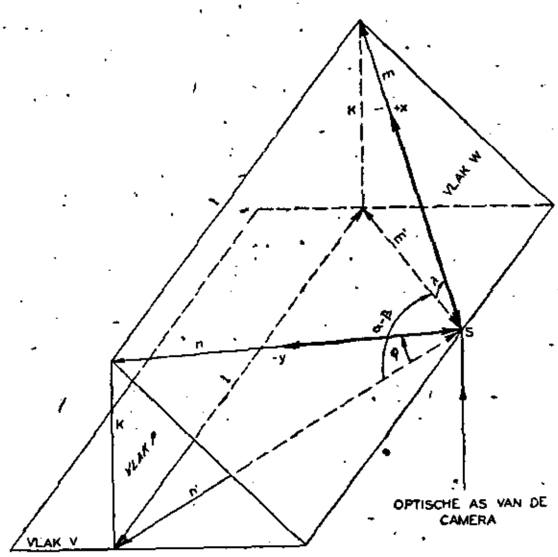
In fig. 6 is het vlak P loodrecht op het vlak V en evenwijdig aan de snijlijn s van vlak V en van vlak W door de beide meetassen. Dan is met de in figuur 6 gegeven notaties

$$l^2=m^2+n^2=m'^2+n'^2-2m'n'\cos(\alpha-\beta),$$

dus

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{m'^2-m^2+n'^2-n^2}{2m'n'}=-$$

$$-\frac{2k^2}{2m'n'}=-\frac{k}{m'}\cdot\frac{k}{n'}=-\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\varphi.$$



Teekening N.L.L.

Fig. 6. Loodrechte projectie van de meetassen op het vlak V.

Lost men λ en φ uit (2) en (3) op, dan verkrijgt men, gebruik makende van de hieronder gedefinieerde hulphoeken q en ε de volgende betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda&=\frac{\sin q}{\cos\varepsilon}\\ \cos\varphi&=\frac{\cos q}{\cos\varepsilon}\end{aligned}\right\}\qquad(4a)$$

of

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda&=\frac{\sin q}{\sin\varepsilon}\\ \cos\varphi&=\frac{\cos q}{\sin\varepsilon}\end{aligned}\right\}\qquad(4b)$$

waarin

$$tg\,q=p \qquad (5)$$

en

$$\sin 2\varepsilon=\sin(\alpha-\beta)\sin 2q: \qquad (6)$$

Van de twee stelsels vergelijkingen (4) geeft slechts *één stelsel bestaanbare waarden* van λ en φ.

Formule (5) volgt onmiddellijk uit (4). Kwadrateert men (3) en (6) en bedenkt men, dat

$$\sin^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)=1$$

is, dan vindt men met behulp van (4) na eenige eenvoudige herleidingen een identiteit. Formule (6) is dus op het teeken na bewezen. Verandering van teeken in (6) beteekent echter alleen, dat (4a) en (4b) worden verwisseld. Men mag (6) dus in bovengenoemden vorm schrijven.

Uit (4a) volgt:

$$\cos^2\lambda+\cos^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varepsilon}$$

en uit (4b):

$$\cos^2\lambda+\cos^2\varphi=\frac{1}{\sin^2\varepsilon}.$$

Wanneer $|\cos\varepsilon|>\frac{1}{2}\sqrt{2}$ is, is volgens (4a)

$$\cos^2\lambda+\cos^2\varphi<2$$

en volgens (4b)

$$\cos^2\lambda+\cos^2\varphi>2.$$

In dit geval geeft dus alleen (4a) reëele waarden. Is $|\cos\varepsilon|<\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan geeft alleen (4b) reëele waarden.

Uit (4) kunnen λ en φ slechts op het teeken na worden bepaald. De teekens, althans tenminste één ervan, moeten uit directe aanschouwing van de film worden afgeleid, waarbij gebruik kan worden gemaakt van de gegevens die zijn verkregen uit de voorgaande afbeeldingen. Is een van de teekens niet direct te bepalen, bv. doordat de hoek te klein is, dan kan men dit uit formule (3) afleiden.

Gaat men bij elken stand van de assen ten opzichte van het vlak V na, of het vliegtuig zijn borstzijde dan wel zijn rugzijde naar de camera heeft toegekeerd, dan komt men tot opstelling van het volgende schema:

Quadrant van $(\alpha-\beta)$	Teekens van λ en φ	Naar de camera gekeerde zijde van het vliegtuig
1	verschillend	Borstzijde
2	gelijk	Borstzijde
3	gelijk	Rugzijde
4	verschillend	Rugzijde

Deze tabel verschaft dus een contrôle op de teekens van λ en φ. Men kan de tabel ook in de plaats van formule (3) gebruiken ter bepaling van het onbekende teeken van λ of φ.

04.2 Berekening van den stand ten opzichte van het aardassenstelsel.

Uit de in 04.1 berekende hoeken λ en φ, de van de film afgelezen hoeken α en β en de op de film vastgelegde hoeken E en A kan men *de elevatie ϑ en het azimuth γ van de positieve rompas* en *de elevatie ψ en het azimuth δ van de negatieve vleugelas*, die tezamen den stand van de meetassen ten opzichte van het aardassenstelsel bepalen, berekenen.

Men kan nl. de volgende formules afleiden:

$$\sin\vartheta=\sin\lambda\sin E+\cos\lambda\cos E\sin\alpha \qquad (7)$$

$$\gamma=\gamma_1+90^\circ+A. \qquad (8)$$

In formule (8) is γ_1 het azimuth van de rompas ten opzichte van de ξ-as (en dus niet ten opzichte van de Noord-richting; zie fig. 1). De hoek γ_1 kan worden berekend uit:

$$\operatorname{tg}\gamma_1=\operatorname{tg}\alpha\sin E-\frac{\operatorname{tg}\lambda\cos E}{\cos\alpha}, \qquad (9)$$

Eveneens:

$$\sin\psi=\sin\varphi\sin E+\cos\varphi\cos E\sin\beta \qquad (10)$$

$$\delta=\delta_1+90^\circ+A. \qquad (11)$$

In formule (11) is δ_1 het azimuth van de (negatieve) vleugelas ten opzichte van de ξ-lijn. De hoek δ_1 kan worden berekend uit:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg} \beta \sin E - \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos E}{\cos \beta}. \qquad (12)$$

Bij de berekening bedenke men, dat

$$-90^\circ < \vartheta < 90^\circ \text{ en } -90^\circ < \psi < 90^\circ$$

is, en dat er een verband bestaat tusschen de grootten van α en γ_1 resp. β en δ_1. Uit fig. 1 volgt nl. dat, indien Q ligt op het halfrond, waarvan U het middelpunt is, L en M ook op dit halfrond liggen. De hoeken β en δ_1 behooren dus tegelijk òf wel òf niet tot het interval van 90° tot 270° (via 180°). De hoek δ_1 wordt door formule (12) op 180° na bepaald; de hier gegeven regel brengt dus beslissing in de vraag, welke waarde voor δ_1 dient te worden genomen. Een analoge redeneering kan men toepassen bij de hoeken α en γ_1. De formules (7) t/m (12) bepalen dus ϑ, γ, ψ en δ *eenduidig*.

De formules (7) t/m (12) kunnen gemakkelijk aan de hand van fig. 1 worden afgeleid. De formules (7) en (9) volgen met behulp van bekende boldriehoekformules uit den boldriehoek *TPK* en (10) en (12) volgen op dezelfde wijze uit boldriehoek *TQK*. De formules (8) en (11) volgen onmiddellijk uit fig. 1.

De practische toepassing van de formules (7) t/m (12) is tijdroovend. Op snellere wijze kan men de hoeken bepalen met nomogrammen, die in 05.2 beschreven zijn.

Uit de hoeken ϑ, γ, ψ en δ kunnen nu ook *de elevatie* ν *en het azimuth* τ *van de topas* worden berekend. Daar de formules hiervoor vrij ingewikkeld zijn en deze grootheden ook met behulp van nomogrammen (zie 05.2) kunnen worden bepaald, worden deze formules achterwege gelaten.

04.3 Berekening van de plaats ten opzichte van het aardassenstelsel.

De *afstand r* van het vliegtuig tot de camera kan berekend worden uit de opgemeten of reeds berekende grootheden a, b, a'', b'', λ en φ en uit den brandpuntsafstand f van de camera. Hier wordt dus voor het eerst van den brandpuntsafstand van de camera gebruik gemaakt. Voor de bepaling van den stand van het vliegtuig behoeft f niet bekend te zijn. Uit fig. 5 volgt:

$$\cos \lambda = \frac{a'}{a}$$

en

$$\frac{a'}{r} = \frac{a''}{f},$$

zoodat

$$r = \frac{a f \cos \lambda}{a''}. \qquad (13a)$$

Evenzoo is

$$r = \frac{b f \cos \varphi}{b''}. \qquad (13b)$$

De plaats van het vliegtuig ten opzichte van het aardassenstelsel is nu bepaald door de *poolcoördinaten r, A en E*. Hieruit volgen de *Cartesische coördinaten* x_k, y_k *en* z_k van het vliegtuig ten opzichte van het aardassenstelsel met behulp van de formules (zie fig. 2):

$$\left.\begin{aligned} x_k &= r \cos E \cos A \\ y_k &= r \cos E \sin A \\ z_k &= r \sin E. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Hierin is z_k de hoogte van het vliegtuig, x_k de afstand van het vliegtuig tot het verticale Oost-West-vlak door de camera en y_k de afstand van het vliegtuig tot het verticale Noord-Zuid-vlak door de camera.

05 Hulpmiddelen ter bekorting van de in 04 gegeven berekeningen.

05.1 Bepaling van den stand ten opzichte van het filmassenstelsel met behulp van een grafiek.

De berekening van $|\lambda|$ en $|\varphi|$ (d.w.z. λ en φ, afgezien van het teeken) als functie van p en $\alpha - \beta$ kan geschieden aan de hand van de formules (4) t/m (6) in 04.1. Voert men deze berekeningen uit voor een groot aantal dicht bij elkaar gelegen waarden van p en $\alpha - \beta$ en stelt men de resultaten grafisch voor, dan kan men voor willekeurige waarden van p en $\alpha - \beta$ door interpolatie uit deze grafiek de bijbehoorende waarden van $|\lambda|$ en $|\varphi|$ bepalen.

Fig. 7 geeft het resultaat van de bovenbeschreven berekeningen. Op de horizontale as is *p uitgezet en op de verticale as* $|\lambda|$ *en* $|\varphi|$. De punten met gelijke $(\alpha - \beta)$ zijn door krommen verbonden. Er zijn twee stelsels $(\alpha - \beta)$ lijnen. Eén ervan geeft den hoek $|\lambda|$ en het andere stelsel den hoek $|\varphi|$.

Bij de constructie van deze grafiek is van de volgende eigenschappen der formules (2) en (3) gebruik gemaakt.

1e Behooren bij $(p, \alpha - \beta)$ de hoeken $|\lambda_1|$ en $|\varphi_1|$, dan behooren bij $\left(\frac{1}{p}, \alpha - \beta\right)$ de hoeken $|\lambda_2| = |\varphi_1|$ en $|\varphi_2| = |\lambda_1|$. Vervangt men nl. in (2) en (3) p door $\frac{1}{p}$ en λ door φ, dan veranderen deze formules niet.

2e De stelsels $(p, \alpha - \beta)$ en $(p, k.180^\circ \pm (\alpha - \beta))$ bepalen dezelfde hoeken $|\lambda|$ en $|\varphi|$. In formule (3) verandert nl. hoogstens één der hoeken λ en φ van teeken, als men in plaats van $(\alpha - \beta)$ de waarden $k.180^\circ \pm (\alpha - \beta)$ invult.

Uit 1e volgt, dat men kan volstaan met een p-schaal voor waarden van p, kleiner dan 1. Indien $p_1 = p < 1$ is, dan leest men in fig. 7 de hierbij behoorende waarden $|\lambda_1|$ en $|\varphi_1|$ af. Is $p > 1$, dan kan men $p_2 = \frac{1}{p}\ (< 1)$ berekenen en hierbij de hoeken $|\lambda_2|$ en $|\varphi_2|$ bepalen.

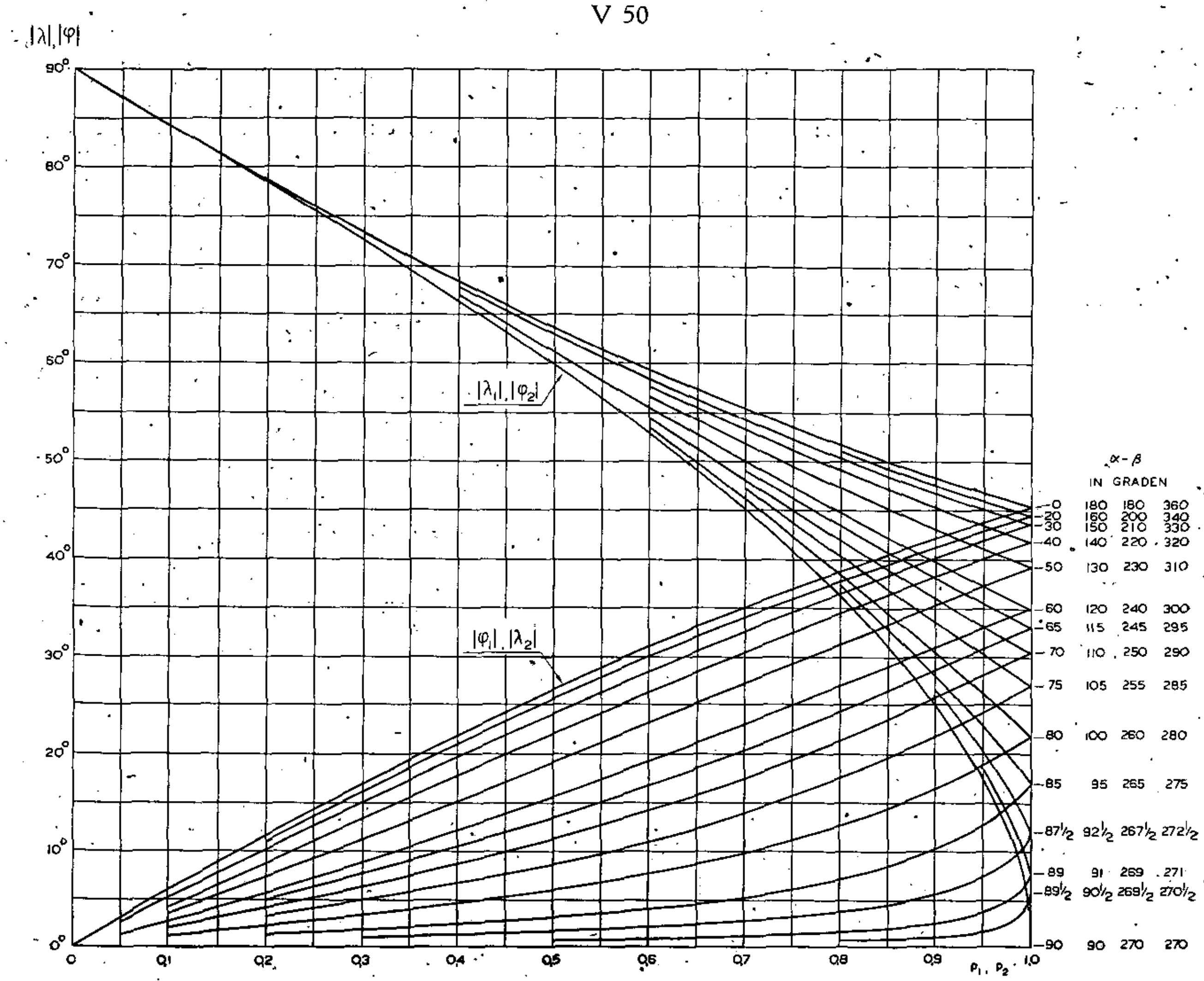


Fig. 7. Grafiek ter bepaling van de hoeken λ en φ uit de waarden p en $\alpha - \beta$. Teekening N.L.L.

05.2 Bepaling van den stand ten opzichte van het aardassenstelsel met behulp van een nomogram.

Denkt men op den bol in fig. 1 twee stelsels graadnetten aangebracht, nl. één voor de hoeken λ, φ, α en β van de meetassen ten opzichte van het filmassenstelsel en het andere voor de overeenkomstige hoeken ϑ, ψ, γ_1 en δ_1 ten opzichte van het aardassenstelsel, en projecteert men deze graadnetten uit een punt van de ξ-as op een vlak loodrecht op die as, dan verkrijgt men een vlakke figuur, waaruit men bij elk punt de hoeken van de overeenkomstige richting ten opzichte van elk assenstelsel kan aflezen. Men verkrijgt dezelfde figuur, indien men 2 congruente projecties van één graadnet zoo op elkaar legt, dat ze elkaar volkomen bedekken en dan de bovenste (die doorzichtig moet zijn) over een hoek $90°$-E met de wijzers van de klok mee om zijn middelpunt draait.

In de fig. 8a en 8b zijn deze netwerken in stereografische projectie geteekend, waarbij men fig. 8a op fig. 8b moet denken. Voor de waarde van E is 60 graden gekozen. De coördinaten zijn in overeenstemming met 02.1 aangebracht; de bovenste horizontale rij behoort tot de cirkels aan den voorkant van den bol. De projectie van de achterzijde van den bol is duidelijkheidshalve weggelaten. In de plaats hiervan is de onderste horizontale coördinatenrij, die de achterzijde van den bol evengoed kan vertegenwoordigen, aangebracht.

Geeft men het punt met de hoeken λ, φ, α en β in de bovenste projectie (fig. 8a) aan, dan kan men de hoeken ϑ, ψ, γ_1 en δ_1 ervan uit de onderste projectie (fig. 8b) aflezen. De hoeken γ_1 en δ_1 moeten op de overeenkomstige horizontale rij worden afgelezen, waartoe ook de hoeken α en β behooren (zie 04.2). Met de formules (8) en (11) kan men dan de hoeken γ en δ uit γ_1, δ_1 en A bepalen.

In fig. 8a is het punt A met de hoeken $\lambda = 32°$ en $\alpha = 72°$ aangegeven. Uit fig. 8 leest men af, dat A ook door de hoeken $\vartheta = 60°$ en $\gamma_1 = 60°$ is bepaald.

De hoeken ν en τ van de topas van het vliegtuig ten opzichte van het aardassenstelsel zijn de coördinaten van één van de twee polen van den grooten cirkel door de punten $P(\vartheta, \gamma)$ en $Q(\psi, \delta)$ in fig. 8b. Men vindt nu een van deze polen als volgt: men legt een met fig. 8b congruent doorzichtig netwerk (dus bv. fig. 8a) weer zoo op fig. 8b, dat hun middelpunten samenvallen en draait dan het bovenste netwerk zoodanig, dat indien de hoeken γ en δ tot dezelfde horizontale coördinatenrij behooren, de punten P en Q of, indien de hoeken γ en δ tot verschillende coördinatenrijen behooren, de punten P en Q' $(-\psi, \delta \pm 180°)$ langs een halven grooten cirkel

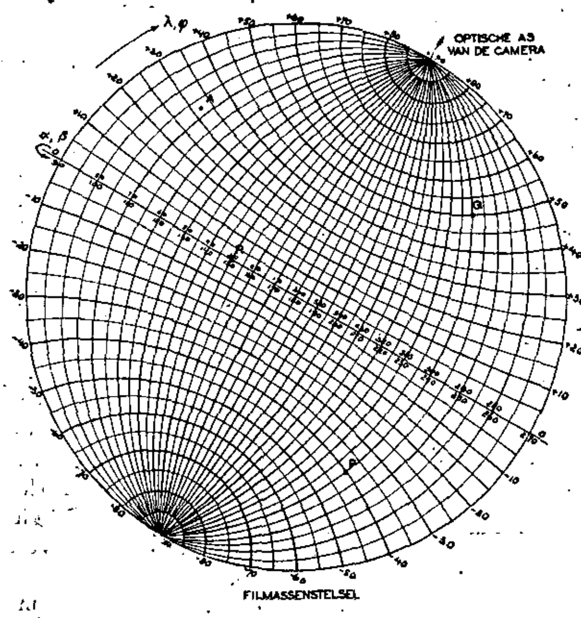


Fig. 8a.

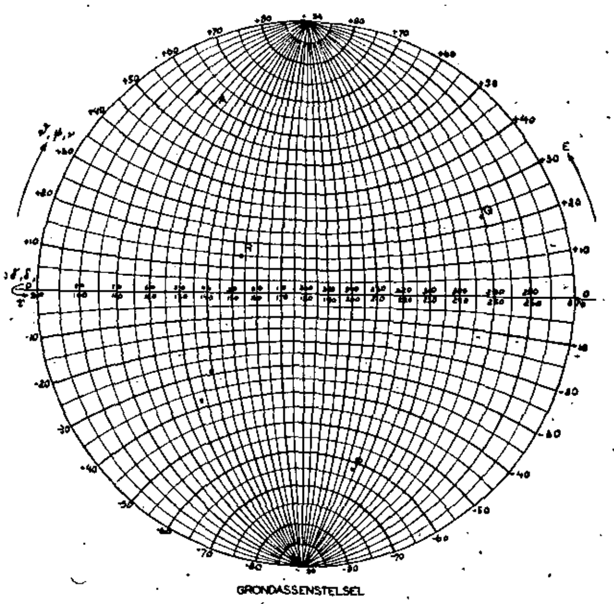


Fig. 8b.

Teekening N.L.L.

Nomogrammen ter bepaling van den stand van de meetassen ten opzichte van het aardassenstelsel uit den stand van deze assen ten opzichte van het filmassenstelsel.

C van fig. 8a vallen. De polen van den cirkel C met coördinaat α op fig. 8a liggen op de rechte lijn $\lambda = 0$ in de punten $\alpha_1 = \alpha \pm 90^\circ$. Men kieze die pool, die op *hetzelfde halfrond is gelegen* als de halve cirkel *C*. Zijn de coördinaten van dit punt op fig. 8b ν' en τ' (τ' is op dezelfde horizontale rij als γ gelegen), dan geldt voor de hoeken ν en τ:

$$\nu = \nu' \,, \tau = \tau'$$

òf:

$$\nu = -\nu' \,, \tau = \tau' \pm 180^\circ.$$

Men kan hieruit het juiste stelsel waarden kiezen met behulp van de grootte van $(\gamma - \delta)$ aan de hand van onderstaande tabel, welke men analoog aan de in 04.1 voorkomende tabel kan opstellen.

Quadrant van $\gamma - \delta$	Borstvlucht of rugvlucht	Teeken van ν
1 en 2	borstvlucht	—
3 en 4	rugvlucht	+

Is bv. $P(\vartheta = +23^\circ, \gamma = 290{,}5^\circ)$ en $Q(\psi = -62{,}5^\circ, \delta = 326{,}5^\circ)$, dan geeft *R* (zie fig. 8a en 8b) de richting van de topas aan, die dus bepaald wordt door $\nu = +15^\circ$ en $\tau = 27^\circ$.

Voor de constructie der netwerken in de figuren 8a en 8b is de stereografische aequatorprojectie[1]) van een bolgraadnet gebruikt. De stereografische projectie is gekozen, omdat zij de volgende voordeelen boven andere projecties bezit:

1e De berekeningen voor de constructie der krommen zijn eenvoudig.

2e De constructie zelf is eenvoudig, daar het netwerk slechts uit cirkels en rechte lijnen bestaat.

Voor de berekeningen van de stralen en de coördinaten van de middelpunten der cirkels maakt men gebruik van de *volgende formules. Een azimuthcirkel met een coördinaat* α heeft een straal $\varrho_\alpha = \dfrac{R}{\sin \alpha}$ (R = de straal van den bol); de coördinaten van het middelpunt zijn: $y_\alpha = 0$; $x_\alpha = R \operatorname{cotg} \alpha$. Een elevatiecirkel met een coördinaat *E* heeft een straal $\varrho_E = R \operatorname{cotg} E$; de coördinaten van het middelpunt zijn $x_E = 0$, $y_E = \dfrac{R}{\sin E}$. Voor het bewijs der genoemde eigenschappen en formules zie men *lit.* 9.

06 Bepaling van correcties, welke moeten worden aangebracht, indien aan de in 04 gemaakte veronderstellingen niet is voldaan.

06.1 De meetassen snijden elkaar niet.

Zij *d* de kortste onderlinge afstand van de meetassen, *N* het midden van *d* en $\varkappa$ de hoek, dien *d* met het filmvlak maakt, dan kan men nagaan, welke fouten worden gemaakt, wanneer men aanneemt, dat de meetassen elkaar in *N* snijden. Denkt men de meetassen in de richting van *d* naar *N* verplaatst, dan ondergaan a'', b'' en p de volgende relatieve grootteveranderingen:

$$\left|\frac{\Delta a''}{a''}\right| = \left|\frac{\Delta b''}{b''}\right| = \frac{d \sin \varkappa}{2r}\,; \left|\frac{\Delta p}{p}\right| = \frac{d \sin \varkappa}{r}. \qquad (16)$$

Is bv. $d = 2\,m$ en $r = 1000\,m$, dan is

$$\left|\frac{\Delta a''}{a''}\right| = \left|\frac{\Delta b''}{b''}\right| \leqq 0{,}1\,\% \text{ en } \left|\frac{\Delta p}{p}\right| \leqq 0{,}2\,\%.$$

Daar deze grootheden dus in het algemeen beneden de meetnauwkeurigheid zullen vallen, mag men bij het uitwerken van de filmbeelden zonder bezwaar aannemen, dat de meetassen elkaar snijden.

De formules (16) verkrijgt men door logarithmische differentiatie van de formules (13) en (1):

$$\frac{\Delta a''}{a''} = -\frac{\Delta r}{r} = \pm \frac{d \sin \varkappa}{2r}.$$

[1]) Ook *andere projecties* (bv. die van Lambert en de orthogonale projectie) zijn bruikbaar, mits het projectiecentrum op de ξ-as ligt.

$$\frac{\Delta b''}{b''} = -\frac{\Delta r}{r} = \mp \frac{d \sin \varkappa}{2r}$$

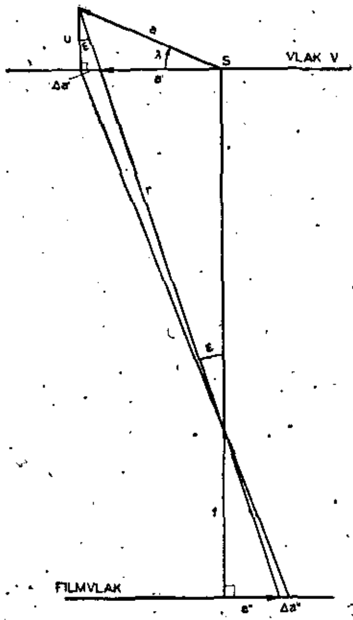
Hieruit volgt:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta a''}{a''} - \frac{\Delta b''}{b''} = \pm \frac{d \sin \varkappa}{r}.$$

06.2 De projectie der meetassen van de camera, uit is niet loodrecht maar centraal.

In fig. 9 is een rompas ingeteekend in het (in het algemeen niet voorkomende) geval, dat een uiteinde ervan samenvalt met het snijpunt S der meetassen. Zij a' de centrale projectie van deze rompas en $a' + \Delta a'$ de loodrechte projectie ervan op V (zie fig. 9), dan is

$$\frac{\Delta a''}{a''} = \frac{\Delta a'}{a'} = \frac{a \sin \lambda}{r}. \qquad (17)$$



Teekening N.L.L.

Fig. 9. Centrale projectie van een meetas op het filmvlak.

Uit fig. 9 volgt nl., daar ε klein is:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{a'}{r} = \frac{\Delta a'}{u} = \frac{\Delta a'}{a \sin \lambda}.$$

Is bv. $a = 10\,m$ en $r = 1000\,m$, dan is $\left|\frac{\Delta a''}{a''}\right| \leq 1\%$.

De invloed van deze correctie zal echter in het algemeen kleiner zijn, daar S meestal niet zal samenvallen met het uiteinde van een meetas. De correcties die worden veroorzaakt door de deelen, die aan weerszijden van S liggen, heffen elkaar geheel — zooals bij de vleugelas — of gedeeltelijk op. De *correcties (17) zullen dus eveneens in het algemeen niet behoeven te worden toegepast.*

06.3 Het snijpunt van de meetassen ligt niet in de optische as van de camera.

06.3.1 Overzicht van de gevolgde correctiemethode.

In dit geval zal als tusschenschakel bij de berekening van den stand van het vliegtuig ten opzichte van het aardassenstelsel *niet* de stand van het vliegtuig *ten opzichte van het vlak* V (zie 02.2) maar (met behulp van de hoeken λ', φ', α' en β') de stand *ten opzichte van het vlak* V' door het snijpunt S van de meetassen loodrecht op de verbindingslijn van de camera met S (met elevatie E' en azimuth A') worden bepaald.

Er zullen nu correcties ΔE enz. worden afgeleid die, aangebracht op de hoeken E, A, λ, φ, α en β, welke volgens de in voorafgaande hoofdstukken gegeven methoden zijn bepaald (en waarvan de laatste vier dus nog slechts formeele beteekenis hebben), de hoeken E' enz. geven.

Vooreerst zal in 06.3.2 een nomogram worden besproken, waarmee men de hoeken E' en A' kan bepalen uit E en A en de plaats van de projectie S'' van S in het filmbeeld. In 06.3.3 zal worden aangetoond, dat de correcties $\Delta\lambda$ en $\Delta\varphi$ zoo klein zijn, dat ze steeds mogen worden verwaarloosd, zoodat λ en φ met voldoende nauwkeurigheid de elevaties van de meetassen ten opzichte van V' voorstellen.

In 06.3.4 wordt wederom een nomogram besproken, waarmee men uit den hoek E en de plaats van S'' in het filmvlak de correcties $\Delta\alpha$ en $\Delta\beta$ kan bepalen.

Resumeerend is de na de aflezing van de noodige gegevens uit het filmbeeld toe te passen werkwijze de volgende:

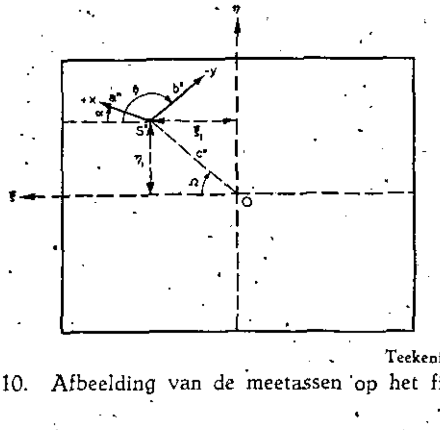
Men berekent de elevatie E en het azimuth A van de optische as van de camera uit de filmregistraties van de elevatie- en azimuth-aanwijzing in het filmbeeld en bepaalt nu met behulp van de nomogrammen 13 en 15 de hoeken E', A', α' en β'. Daarna leest men met behulp van p en $\alpha - \beta$ de hoeken λ en φ af en bepaalt vervolgens met 8a en 8b en de formules (8) en (11) (waarin men A door A' vervangt) uit λ, φ, α', β', E' en A' de hoeken ϑ, ψ, γ en δ. De afstand r berekent men uit (13) en de afstanden x_k, y_k en z_k uit de formules (14), waarin men E en A door E' en A' vervangen denkt.

06.3.2 Bepaling van de elevatie E' en het azimuth A' van de verbindingslijn camera-snijpunt der meetassen.

Zijn ξ_1 en η_1 de afstanden (coördinaten) van de afbeelding S'' van het snijpunt S van de meetassen ten opzichte van de ξ- en η-assen in het filmvlak (zie 02.2 en fig. 10) en zijn

$$\Delta A = A' - A \text{ en } \Delta E = E' - E$$

bekend, dan kan men de plaats van S'' voor $E' < 85^\circ$ vastleggen door



Teekening N.L.L.

Fig. 10. Afbeelding van de meetassen op het filmvlak.

$$\xi_1 = f \frac{\Delta A}{57{,}3} \cos E \qquad (18a)$$

en

$$\eta_1 = f \frac{\Delta E}{57{,}3} + \frac{\xi_1^2}{2f} \operatorname{tg} E. \qquad (18b)$$

Voor het geval, dat $E' > 85^\circ$ is, kan men de plaats van S'' vastleggen door de poolcoördinaten ϱ, (de afstand van S'' tot het punt in het filmvlak, waarvoor $E = 90^\circ$) en ΔA, waarin

$$\varrho = f \frac{90^\circ - E'}{57{,}3} \qquad (19a)$$

en

$$\Delta A = \Delta A. \qquad (19b)$$

De formules (18) kunnen als volgt worden bewezen.

De vergelijking van een bol, beschreven om het optisch middelpunt van de camera en rakende aan het filmvlak is in cartesische coördinaten (zie fig. 11).

$$x^2 + y^2 + z^2 = f^2.$$

De coördinaten $(x_0\, y_0\, z_0)$ van het snijpunt O van de optische as met den bol en met het filmvlak en $(x_1\, y_1\, z_1)$ van het snijpunt B van de verbindingslijn camera-snijpunt S der meetassen met den bol zijn:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= f \cos E \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= f \sin E \end{aligned}\right\} (O) \quad \text{en} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= f \cos E' \cos \Delta A \\ y_1 &= f \cos E' \sin \Delta A \\ z_1 &= f \sin E' \end{aligned}\right\} (B)$$

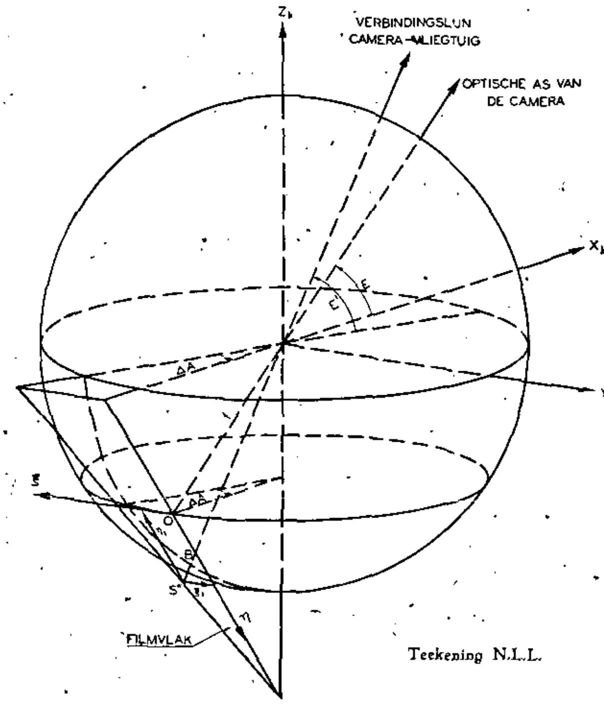


Fig. 11. Projectie van een vliegtuig op het filmvlak.

De vergelijking van het filmvlak, hetwelk samenvalt met het raakvlak aan den bol in $x_0\, y_0\, z_0$ is dan

$$x \cos E + z \sin E = f.$$

De coördinaten van het snijpunt S'' van de verbindingslijn van de camera met S en het filmvlak zijn dan

$$\left.\begin{aligned} x' &= \sigma x_1 \\ y' &= \sigma y_1 \\ z' &= \sigma z_1 \end{aligned}\right\} (S''),\ \text{waarin } \sigma = \frac{f}{x_1 \cos E + z_1 \sin E} = \frac{1}{\cos E \cos E' \cos \Delta A + \sin E \sin E'}$$

De coördinaten ξ_1 en η_1 zijn dus

$$\xi_1 = y' = \sigma y_1 = \frac{f \cos E' \sin \Delta A}{\cos E \cos E' \cos \Delta A + \sin E \sin E'} \qquad (20a)$$

$$\eta_1 = \frac{z' - z_0}{\cos E} = f \frac{\sigma \sin E' - \sin E}{\cos E} = f \frac{\sin E' \cos E - \sin E \cos E' \cos \Delta A}{\cos E \cos E' \cos \Delta A + \sin E \sin E'}. \qquad (20b)$$

Men mag met inachtneming van voldoende nauwkeurigheid voor $E' < 85^\circ$ de noemers van (2.) door 1, de teller van (20a) door $f \cos E \frac{\Delta A}{57{,}3}$ en de teller van (20b) door $f \left\{ \frac{\Delta E}{57{,}3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta A}{57{,}3} \right)^2 \sin E \cos E \right\}$ vervangen. Men verkrijgt dan de formules (18).

Formule (19a) is duidelijk, indien men bedenkt, dat ϱ (zie fig. 12) onder een hoek van $90^\circ - E'$ wordt gezien. Met voldoende nauwkeurigheid geldt dan (nl. als $(90^\circ - E') < 5^\circ$)

$$\varrho = f \sin (90^\circ - E') = f \frac{90^\circ - E'}{57{,}3}$$

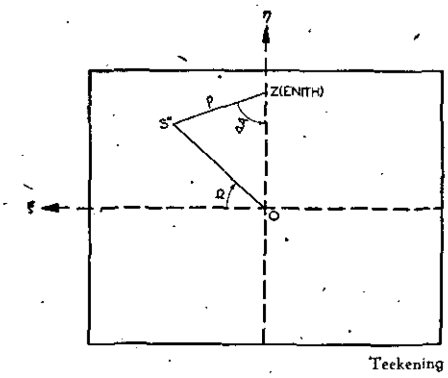


Fig. 12. Afbeelding van een vliegtuig op het filmvlak, ingeval $E > 85^\circ$ is.

Men kan nu op een bepaald filmbeeldje met een elevatie $E(< 85^\circ)$ van de optische as van de camera een netwerk denken met lijnen, waarvoor ΔE resp. ΔA constant zijn. De ligging van deze lijnen wordt dan bepaald door de formules (18). Een lijn met constante ΔE vindt men, door in de genoemde formules deze waarde voor ΔE en verschillende waarden voor ΔA in te voeren. Evenzoo bepaalt men een lijn met constante ΔA door deze waarde en verschillende waarden voor ΔE in de formules (18) in te voeren. Bij elk punt en dus ook bij de afbeelding S'' van het snijpunt S der meetassen kan men met behulp van deze lijnen de bijbehoorende ΔE en ΔA (en dus ook de E' en A') bepalen.

Men kan nu, in plaats van bij elke E een apart netwerkje, één nomogram voor alle E's construeeren. De constructie ervan geschiedt met behulp van de formules

$$x = f \frac{\Delta A}{57{,}3} \cos E'. \qquad (21a)$$

$$y = f \frac{E'}{57{,}3} + \frac{x^2}{2f} \operatorname{tg} E', \qquad (21b)$$

die uit de formules (18) zijn verkregen, door daarin E en ΔE door E' te vervangen. De beteekenis hiervan is alleen, dat men, in plaats van E' te verkrijgen door ΔE af te lezen en hierbij E op te tellen, men nu ineens E' af kan lezen.

In fig. 13 is een gedeelte van een dergelijk nomogram voorgesteld; het is geconstrueerd voor een brandpuntsafstand van 422 mm en een breedte van het beeldvenster van 24 mm.

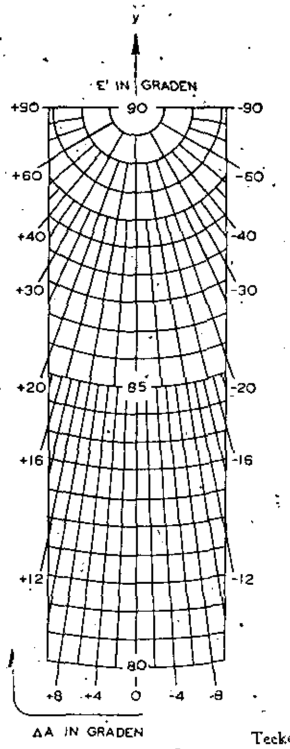


Fig. 13. Nomogram ter bepaling van ΔA en E'.

De bepaling van de elevatie E' en het azimuth A' van de verbindingslijn camera-snijpunt S der meetassen geschiedt nu als volgt: men legt het filmbeeld zoodanig op het nomogram van fig. 13, dat de η-as in het filmvlak en de y-as in het nomogram met inbegrip van hun positieve richtingen samenvallen en dat het midden van het filmbeeld op het punt $E'=E$ (= elevatie van de optische as van de camera) valt. Bij de plaats van S'' leest men dan onmiddellijk de bijbehoorende E' en ΔA af.

Voor $E'>85^{\circ}$ geven de formules (21) geen betrouwbare waarden meer. Men kan dan het nomogram voltooien met behulp van de formules (19). De E'-lijnen zijn nu cirkels met $E'=90^{\circ}$ tot middelpunt en ϱ tot straal. De ΔA-lijnen zijn rechten door $E'=90^{\circ}$, die een hoek ΔA met de y-as maken. De y-coördinaat van $E'=90^{\circ}$ berekent men uit formule (21b). Stelt men hierin $\Delta A=0^{\circ}$ en $E'=90^{\circ}$, dan vindt men

$$y=f\,\frac{90}{57{,}3}\,.$$

Dat de formules (21) en (19) voldoende nauwkeurig zijn blijkt ook hieruit, dat bij den overgang van het eene naar het andere stelsel (bij $E'=85^{\circ}$) geen merkbare discontinuïteit in het nomogram optreedt.

06.3.3 Bepaling van de elevaties λ' en φ' van de meetassen ten opzichte van V'.

Is $\Delta p=p'-p$, waarin

$$p'=\frac{a_1'}{b_1'}\cdot\frac{b}{a}$$

en a_1' en b_1' de projecties van a en b op V' zijn, en is (zie 06.3.1)

$$\Delta(\alpha-\beta)=(\alpha'-\beta')-(\alpha-\beta),$$

dan kan men de volgende formules afleiden:

$$\frac{\Delta p}{p}=-\frac{1}{2}\left(\frac{c''}{f}\right)^2\left\{\cos^2(\alpha-\Omega)-\cos^2(\beta-\Omega)\right\}\quad(22)$$

$$\Delta(\alpha-\beta)=14{,}3\left(\frac{c''}{f}\right)^2\left\{\sin 2(\alpha-\Omega)-\right.$$
$$\left.-\sin 2(\beta-\Omega)\right\}\ldots\text{ in graden.}\quad(23)$$

Daar $\frac{c''}{f}$ klein is, mogen bovengenoemde correcties, die van de orde van $\left(\frac{c''}{f}\right)^2$ zijn, worden verwaarloosd. Is bv. het filmformaat 18 x 24 mm en $f=422$ m, dan is $\frac{c''}{f}<0{,}036$ en dus $\left|\frac{\Delta p}{p}\right|<0{,}1\%$ en $|\Delta(\alpha-\beta)|<0{,}02^{\circ}$.

De hoeken λ' en φ' mogen dus gelijk aan λ en φ worden gesteld.

In fig. 14 zijn de rompas SP en de vlakken V, V' en H (het horizontale vlak door het snijpunt O van de optische as van de camera en V) geteekend. In deze figuur zijn de grootheden λ', α, α', a' en a_1' aangegeven. Verder zijn v en w de snijlijnen van V' en V met het vlak door P en de optische as van de camera (v en w staan dus loodrecht op de snijlijn ST van V' en V), ξ en ξ' de snijlijnen van het horizontale vlak door O met V en V', ε en ε' de hoeken van w en v met P_1S en $P_1'S$ en Ω en Ω' de hoeken, die ξ en ξ' met resp. w en v maken. Uit de figuur volgt:

$$\varepsilon=180^{\circ}+\alpha-\Omega$$
$$\varepsilon'=180^{\circ}+\alpha'-\Omega',$$

dus is

$$\Delta\alpha=\alpha'-\alpha=\varepsilon'-\varepsilon+\Omega'-\Omega=\Delta\varepsilon+\Delta\Omega.$$

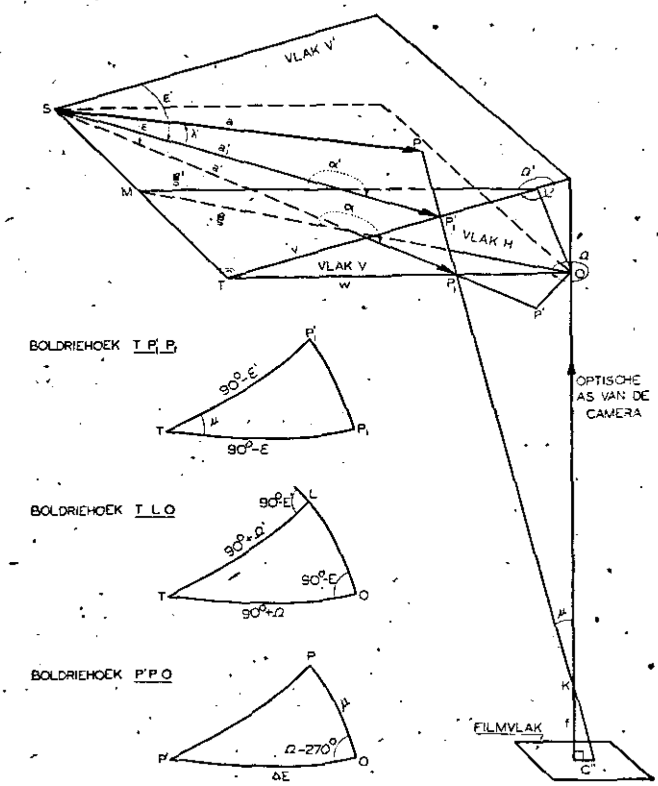


Fig. 14. Projectie van een meetas op de vlakken V en V'.

Nu volgt uit den rechthoekigen drievlakshoek STP_1P_1', of uit den rechthoekigen boldriehoek TP_1P_1':

$$\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\varepsilon'} = \cos\mu \qquad (24)$$

of

$$\frac{\sin(\varepsilon-\varepsilon')}{\sin(\varepsilon+\varepsilon')} = \frac{\cos\mu - 1}{\cos\mu + 1}.$$

Daar $\varepsilon - \varepsilon'$ en μ klein zijn, mag men in deze formule $\sin(\varepsilon-\varepsilon')$ *door* $-\frac{\Delta\varepsilon}{57{,}3}$, $\sin(\varepsilon+\varepsilon')$ *door* $\sin 2\varepsilon$, $\cos\mu - 1$ door $-\frac{1}{2}\left(\frac{c''}{f}\right)^2$ en $\cos\mu + 1$ door 2 vervangen. De formule wordt dan:

$$\Delta\varepsilon = 14{,}3\left(\frac{c''}{f}\right)^2 \sin 2\varepsilon. \qquad (25)$$

Dus is

$$\Delta\alpha = 14{,}3\left(\frac{c''}{f}\right)^2 \sin 2(\alpha - \Omega) + \Delta\Omega. \qquad (26a)$$

Daar Ω en $\Delta\Omega$ alleen van de plaats van S en niet van de grootte en richting van SP afhangen, luidt de overeenkomstige formule voor $\Delta\beta$:

$$\Delta\beta = 14{,}3\left(\frac{c''}{f}\right)^2 \sin 2(\beta - \Omega) + \Delta\Omega. \qquad (26b)$$

Trekt men (26b) van (26a) af, dan krijgt men (23).

De correctie $\frac{\Delta a'}{a'} = \frac{a_1' - a'}{a'}$ kan op analoge wijze worden berekend. Uit fig. 14 volgt:

$$a_1'\cos\varepsilon' = TP_1'\,; \quad a'\cos\varepsilon = TP_1\,; \quad TP_1' = TP_1\cos\mu.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\Delta a'}{a'} = \frac{a_1' - a'}{a'} = \frac{\cos\varepsilon\cos\mu - \cos\varepsilon'}{\cos\varepsilon'} =$$
$$= \cos\Delta\varepsilon\cos\mu + \operatorname{tg}\varepsilon'\sin\Delta\varepsilon\cos\mu - 1.$$

Dit wordt in verband met (24) en (25), wanneer men grootheden van hoogere dan de 2e orde in $\frac{c''}{f}$ verwaarloost

$$\frac{\Delta a'}{a'} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{c''}{f}\right)^2\cos^2\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{c''}{f}\right)^2\cos^2(\alpha - \Omega).$$

Op dezelfde wijze vindt men

$$\frac{\Delta b'}{b'} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{c''}{f}\right)^2\cos^2(\beta - \Omega).$$

Formule (22) volgt nu onmiddellijk uit

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta a'}{a'} - \frac{\Delta b'}{b'}.$$

06.3.4 Bepaling van de azimuths α' en β' van de meetassen ten opzichte van V'.

Met verwaarloozing van fouten van de 2e en hoogere orde in $\frac{c''}{f}$ kan men aantoonen, dat voor $E' < 85^\circ$ geldt:

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = -57{,}3\frac{c''}{f}\operatorname{tg}E\cos\Omega \qquad (27)$$

en voor $E' > 85^\circ$:

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = -\Delta A, \qquad (28)$$

waarin ΔA dezelfde beteekenis heeft als in 06.3.2.

Men kan dit als volgt bewijzen.

De hoeken, welke het horizontale vlak OLM (zie fig 14) maakt met de vlakken V en V' zijn resp. $90°-E$ en $90°-E'$. Uit den drievlakshoek $MLOT$ of uit boldriehoek LOT volgt dus door toepassing van den sinusregel:

$$\frac{\cos\Omega'}{\cos\Omega} = \frac{\cos E}{\cos E'}.$$

Hieruit volgt met eenige benaderingen, die voor $E' < 85°$ mogen worden toegepast:

$$\Delta\Omega = -57{,}3\operatorname{tg}\Delta E\operatorname{tg}E\operatorname{cotg}\Omega. \qquad (29)$$

Uit den rechthoekigen drievlakshoek $KOPP'$, waarbij $OP' \perp OM$ is getrokken, volgt ($\angle OKP' = \Delta E$, $\angle P_1OP' = \Omega - 270°$):

$$\operatorname{tg}\Delta E = \operatorname{tg}\mu\sin\Omega = \frac{c''}{f}\sin\Omega,$$

wat, ingevuld in (29), geeft:

$$\Delta\Omega = -57{,}3\frac{c''}{f}\operatorname{tg}E\cos\Omega.$$

Nu is volgens (26) $\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\Omega$, wanneer men grootheden van hoogere dan de 1e orde in μ verwaarloost. Hiermede is dus (27) bewezen.

Voor $E' > 85°$ is met voldoende nauwkeurigheid

$$\frac{\cos\Omega'}{\cos\Omega} = \frac{\cos E}{\cos E'} = \frac{90° - E}{90° - E'}.$$

Hieruit en uit driehoek $OS''Z$ in fig. 12 volgt:

$$\frac{ZO}{ZS''} = \frac{90° - E}{90° - E'} = \frac{\cos\Omega'}{\cos\Omega} = \frac{\sin ZS''O}{\sin S''OZ} = \frac{\cos(\Omega - \Delta A)}{\cos\Omega},$$

dus is

$$\cos\Omega' = \cos(\Omega - \Delta A),$$

of

$$\Omega' = \Omega - \Delta A.$$

Hieruit volgt:

$$\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\Omega = \Omega' - \Omega = -\Delta A.$$

Men kan nu op dezelfde wijze als in 06.3.2 een netwerk construeeren, waarin men uit de elevatie E van de optische as van de camera en de plaats van het vliegtuig op het filmbeeld de correcties $\Delta\alpha$ en $\Delta\beta$ kan aflezen. De plaats van de projectie S'' van het snijpunt S der meetassen bij de afbeelding van een vliegtuig, waarvoor $E' - E = \Delta E$ en $\alpha' - \alpha = \Delta\alpha$ is, wordt voor $E' < 85°$ bepaald door de cartesische coördinaten

$$\xi_1 = -f\frac{\Delta\alpha}{57{,}3}\operatorname{cotg}E \qquad (30a)$$

$$\eta_1 = f\frac{\Delta E}{57{,}3} + \frac{\xi_1^2}{2f}\operatorname{tg}E \qquad (30b)$$

en voor $E' > 85°$ door de poolcoördinaten ϱ en $\Delta\alpha$, waarin

$$\varrho = f\frac{90° - E'}{57{,}3} \qquad (31a)$$

$$\Delta\alpha = -\Delta A. \qquad (31b)$$

Formule (30a) volgt uit (27), als men hierin $c''\cos\Omega = \xi_1$ stelt. De formules (30b) en (31a) zijn identiek met resp. (18b) en (19a), terwijl (31b) uit (28) volgt.

In overeenstemming met 06.3.2 kan men nu een netwerk construeeren, waarin de coördinaatlijnen voor $E' < 85°$ bepaald zijn door

$$x = -f\frac{\Delta\alpha}{57{,}3}\operatorname{cotg}E' \qquad (32a)$$

$$y = f\frac{E}{57{,}3} + \frac{x^2}{2f}\operatorname{tg}E' \qquad (32b)$$

en voor $E' > 85°$ door

$$\varrho = f\frac{90° - E'}{57{,}3} \qquad (33a)$$

$$\Delta\alpha = -\Delta A. \qquad (33b)$$

Een gedeelte van dit nomogram is in fig. 15 geconstrueerd. Men bepaalt nu $\Delta\alpha$ en $\Delta\beta$ als volgt: men legt op de in 06.3.2 omschreven wijze het filmbeeld op het nomogram van fig. 15 en leest bij de projectie S'' van het snijpunt der meetassen $\Delta\alpha(=\Delta\beta)$ met behulp van de coördinatenlijnen af.

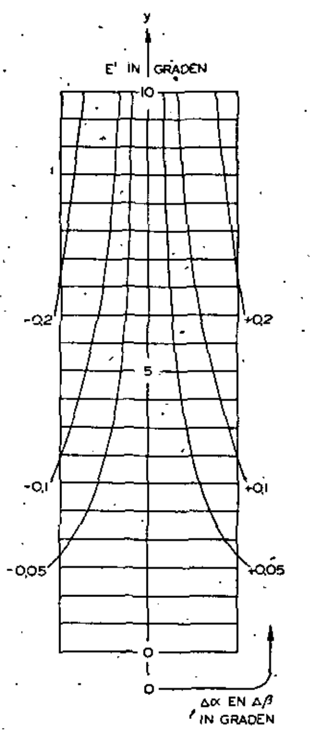


Fig. 15. Nomogram ter bepaling van $\Delta\alpha$ en $\Delta\beta$.

07 Bepaling van den stand van een niet met de rompas samenvallende as in het symmetrievlak van het vliegtuig.

De dwarsas van het vliegtuig zal in het algemeen evenwijdig zijn met de vleugelas, zoodat de dwarshelling en de koers van de dwarsas dan gelijk zijn aan de elevatie en het azimuth van de vleugelas. De langsas zal echter in het algemeen niet evenwijdig zijn aan de rompas, daar deze door uitwendig op den romp aangebrachte merkteekens wordt gedefinieerd. Daarom wordt in dit hoofdstuk een methode aangegeven, waarmede men de elevatie en het azimuth van een in het symmetrievlak van het vliegtuig gelegen as (bv. de langsas), die een hoek σ met de rompas maakt, kan bepalen.

In fig. 16 zijn de negatieve vleugelas MQ ($-y$-as), de rompas MP (x-as) en de langsas MP' (x'-as), gelegen in het symmetrievlak van het vliegtuig, aangegeven. De hoek $\sigma = PMP'$ wordt positief gerekend als P' ten opzichte van MP aan de rugzijde van het vliegtuig is gelegen.

In fig. 8b teekent men nu de punten $P(\vartheta,\gamma)$ en $Q(\psi,\delta)$ (of $Q'(-\psi,\delta\pm180^\circ)$, indien γ en ϑ niet tot dezelfde horizontale coördinatenrij behooren) en bepaalt op de in 05.2 beschreven wijze met het netwerk van fig. 8a een pool Z van den grooten cirkel door de punten P en Q (of Q'). Men legt de punten Z en P langs een grooten cirkel van fig. 8a, terwijl de middelpunten van fig. 8a en 8b blijven samenvallen en bepaalt dan het punt P' op fig. 8a door van P af den hoek σ langs den grooten cirkel in de goede richting uit te zetten. Deze richting laat zich gemakkelijk bepalen wanneer bekend is of het vliegtuig zich in borst- dan wel in rugvlucht bevindt. Dit kan aan de hand van de tabel in 05.2 worden afgeleid. De elevatie en het azimuth van de as $P'M$ kan men nu bij het met P' samenvallende punt van fig 8b aflezen.

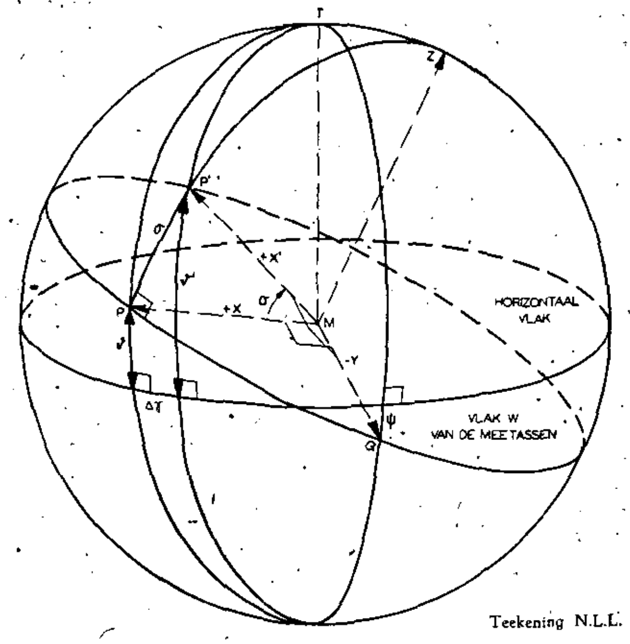


Fig. 16. Stand van een willekeurige as in het symmetrievlak van het vliegtuig.

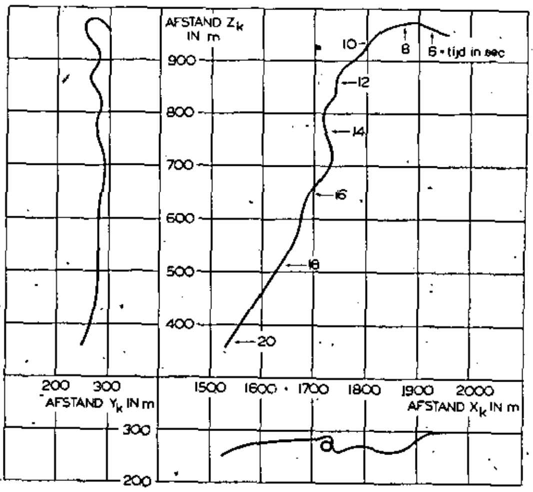
Men kan de hoeken ν en τ ook door berekening bepalen. Daar de formules hiervoor vrij gecompliceerd zijn, worden ze hier niet gegeven.

08 Reproducties van de bewegingen van het vliegtuig.

Het aanschouwelijk voorstellen van de vliegtuigbewegingen op papier, zóó, dat een goede indruk van de bewegingen van het vliegtuig wordt verkregen, is geen gemakkelijke opgave. Bij de bespreking van de verschillende reproductiemethoden zijn eenige resultaten van met de N.L.L.-proefcamera opgenomen kunstvluchten medegedeeld. Men bedenke bij de beschouwing van deze resultaten, dat de opnamen tot het experimenteele stadium behooren, tengevolge waarvan de beeldjes wat vaag zijn. Bovendien voldeden de merkteekens nog niet aan de in dit rapport gestelde voorwaarden.

Het ligt voor de hand de *baan* van het vliegtuig af te beelden met vermelding van de tijdstippen waarop het vliegtuig zich in de verschillende punten van de baan bevond en daarnaast een grafische voorstelling te geven van den *stand der assen* op dezelfde tijdstippen.

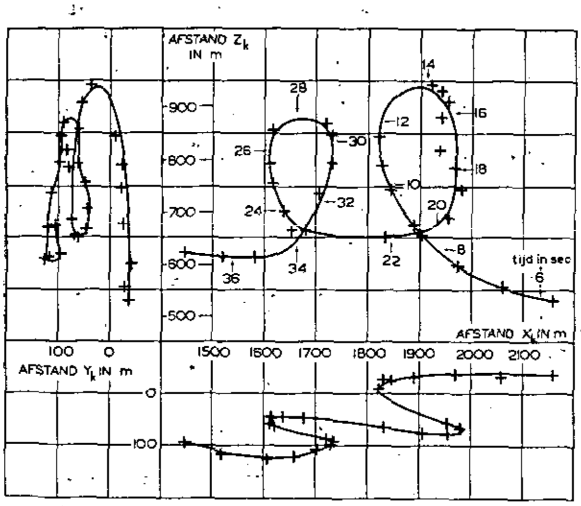
De baan van het vliegtuig kan meestal het beste worden voorgesteld door de loodrechte projecties ervan op de drie onderling loodrechte vlakken van het aardassenstelsel (zie fig. 2). De formules (14), waarin men E en A door E' en A' moet vervangen, wanneer het snijpunt der meetassen van het vliegtuig niet op de optische as van de camera is gelegen, geven dan de coördinaten van de projecties. Ligt de baan ongeveer in een plat vlak, dan zal men bij voorkeur één der projectievlakken evenwijdig aan dit vlak nemen. Is bv. bij een lus γ_0 de koers van het vliegtuig bij het begin van de kunstvlucht, dan denkt men het aardassenstelsel om een hoek γ_0 om de Z-as van Noord naar Oost gedraaid en projecteert men de baan van het vliegtuig op dit nieuwe assenstelsel. De coördinaten van de projecties vindt men dan uit de genoemde formules door hierin in plaats van A' te substitueeren $A'' = A' - \gamma_0$. In de figuren 17 en 18 zijn op deze wijze de banen bij een rechter tolvlucht en van twee opeenvolgende lussen weergegeven.



Teekening N.L.L.

Fig. 17. Baan van een vliegtuig tijdens een rechter tolvlucht.

De aanschouwelijke voorstelling van den *stand* van de assen van het vliegtuig kan geschieden door azimuth en elevatie van elk der assen als functie van den tijd uit te zetten.



Teekening N.L.L.

Fig. 18. Baan van een vliegtuig tijdens 2 opeenvolgende lussen.

In fig. 19 zijn als voorbeeld twee opeenvolgende lussen, waarvan in fig. 18 de baan is afgebeeld, gegeven. Behalve de hoeken ϑ, γ, ψ en δ en de hoogte van het vliegtuig boven den grond, welke volgens de kinematografische meetmethode zijn bepaald, zijn nog eenige door den automatischen waarnemer in het vliegtuig geregistreerde grootheden, nl. hoogte (dit ter vergelijking met de hoogte, bepaald met de kunstvluchtencamera), snelheid, toerental en inlaatdruk van den motor, versnelling, hoogteroerhoek en richtingsroerhoek als functie van den tijd grafisch voorgesteld. De afbeeldingen van het vliegtuig waren wazig tusschen 10 en 15 sec en tusschen 26 en 29 sec; het vliegtuig bevond zich toen in een nevelig gebied. De instrumenten in het vliegtuig waren tusschen 30 sec en 32 sec onderhevig aan trillingen. De elevatie van de negatieve vleugelas schommelt om 0° en het azimuth ervan om 40°; de elevatie van de rompas varieert tusschen +90° en —90°. Bedraagt de elevatie van de rompas precies +90° of —90° (zooals in de figuur ten tijde van 25 sec), dan zal het azimuth plotseling 180° verspringen. In het geval, dat de elevatie van de vleugelas niet precies 0° is, zal het maximum van de elevatie van de rompas kleiner zijn dan +90° en het minimum grooter dan —90°. De sprong in het azimuth van de vleugelas geschiedt dan geleidelijk, het azimuth verandert eerst langzaam, dan steeds sneller, totdat de elevatie van de rompas maximaal of minimaal is, waarna de verandering weer steeds langzamer plaats vindt (zooals ten tijde van 10,5, 17,5 en 30,5 sec).

De boven beschreven methode, welke in vele gevallen een bevredigende voorstelling geeft, heeft de volgende nadeelen:

1e de grootheden, die *tezamen* den stand van een as bepalen, worden gescheiden;

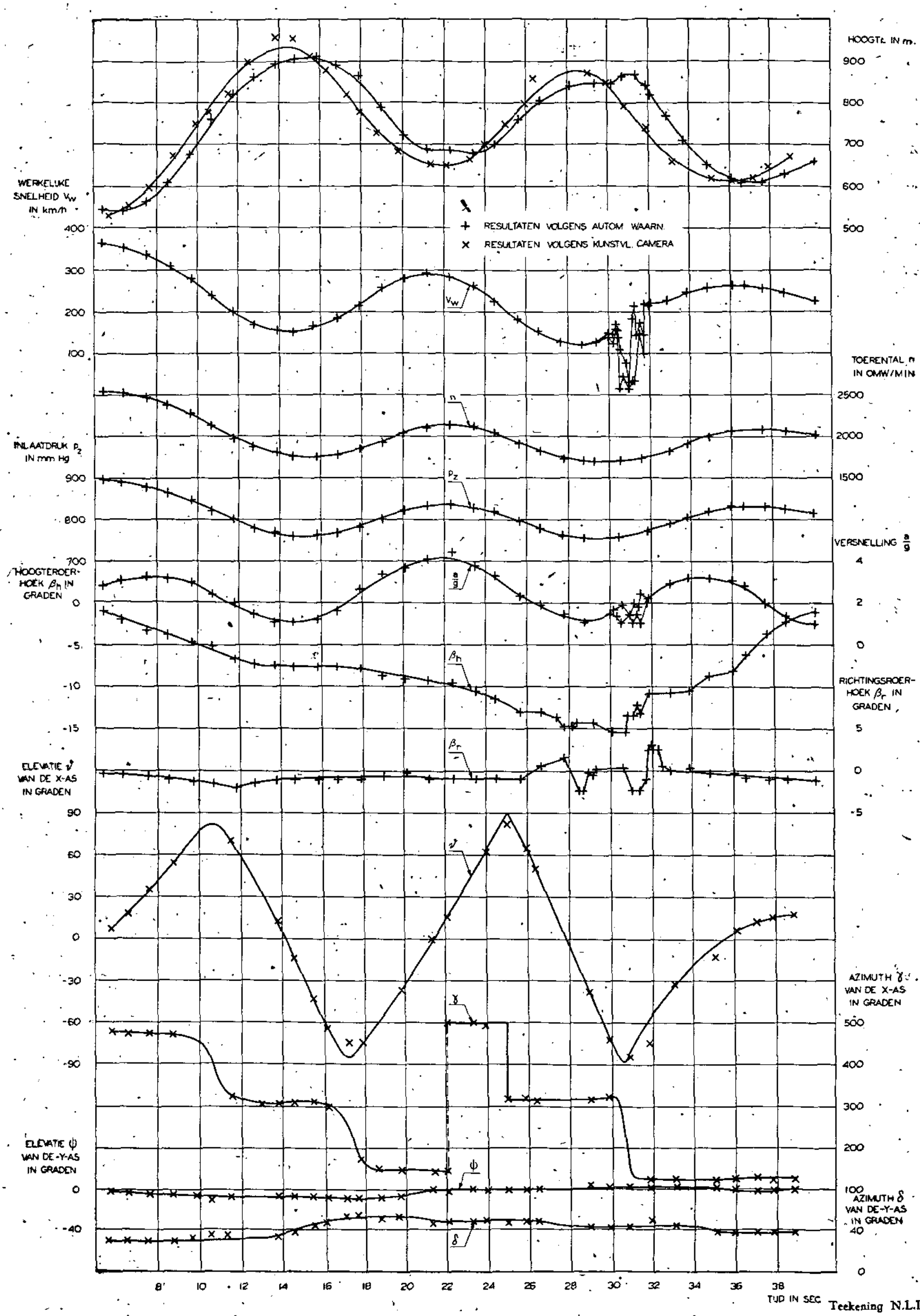
2e *bij elevaties van circa 90° ondergaat het azimuth* bij kleine standsveranderingen van de as groote veranderingen.

Deze nadeelen kunnen door toepassing van de volgende reproductiemethode worden vermeden. Men geeft de *standen* van elk der assen aan door punten in de projectie van een bolgraadnet van azimuth- en elevatiecirkels (bv. fig. 8b) Door de *twee* krommen van langs- en dwarsas is de rotatiebeweging van het vliegtuig volkomen bepaald. Ter bevordering van de duidelijkheid dient men de op de achterzijde van den bol gelegen gedeelten te stippelen.

Voor de bolprojectie kan soms (bv. bij tolvlucht of duikvlucht) met voordeel gebruik worden gemaakt van een azimuthale stereografische projectie. *Hierbij ligt het projectiecentrum in het bovenste* punt van den bol en het projectievlak in het horizontale aequatorvlak. De elevatiecirkels *blijven na* projectie cirkels met stralen $\varrho = R \operatorname{tg} \frac{1}{2}(90 - E)$, waarin R de straal van den bol is. De azimuthcirkels worden geprojecteerd als stralen van deze cirkels. Op deze wijze is in fig. 20 de standsverandering van de rompas bij de rechter tolvlucht, waarvan in fig. 17 de baan is afgebeeld, gegeven.

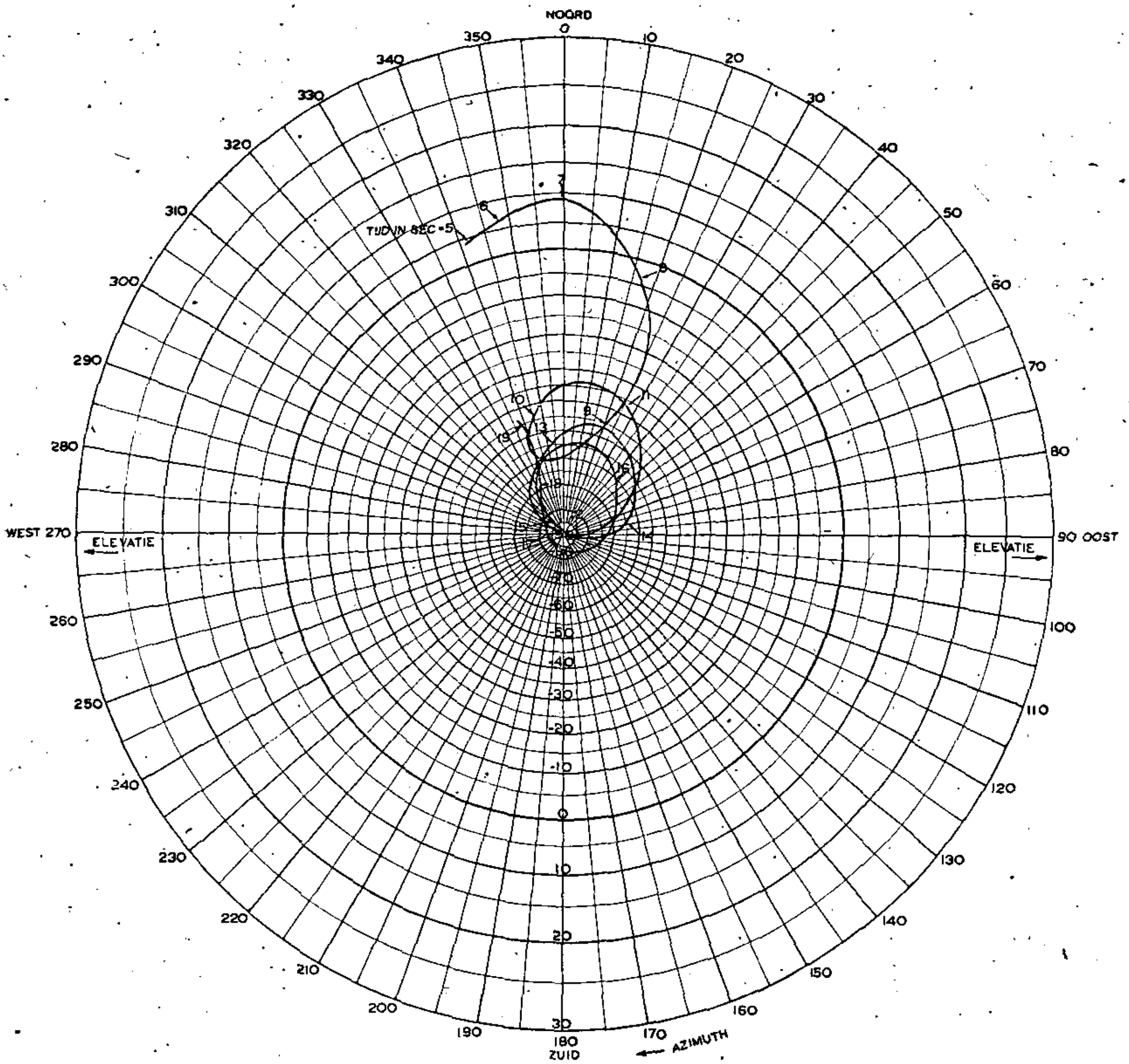
09 Bespreking van proeven met een vliegtuigmodel uitgevoerd ter toetsing van de kinematografische meetmethode.

Teneinde na te gaan, welke nauwkeurigheid volgens de kinematografische meetmethode kon worden bereikt met de ter beschikking staande meet-



Teekening N.L.L.

Fig. 19. Grootheden gemeten met automatischen waarnemer en met kunstvluchtencamera tijdens 2 opeenvolgende lussen, uitgezet als functie van den tijd.



Teekening N.L.L.

Fig. 20. Standsverandering van de rompas van een vliegtuig tijdens een rechter tolvlucht.

apparatuur zijn opnamen gemaakt van een vliegtuigmodel, waarvan de stand ook direct kon worden afgelezen met een nauwkeurigheid van ongeveer 0,5° tot 1°.

In fig. 21 is dit vliegtuigmodel, voorzien van de in 10.1 voorgeschreven merkteekens, afgebeeld. Fig. 22 laat zien hoe dit model tijdens de proeven op een statief bevestigd was. Met behulp van schaalverdeeling *A* kon de langshelling, met schaalverdeeling *B* de koers en met schaalverdeeling *C* de rolhoek (dit is de hoek, waarover de vleugelas om de rompas moet draaien om in horizontalen stand te komen) worden afgelezen.

Het model werd bij helder zonlicht in 6 verschillende standen bij verschillende belichtingstijden met de in 03.1 genoemde proefcamera, waarvan het objectief een brandpuntsafstand van 422 mm bezat, gefilmd. De grootste afmetingen van de projectie van het vliegtuigmodel bedragen circa 2,5 mm. Een vliegtuig met een spanwijdte van 10 m zou zich op circa 2100 m afstand moeten bevinden om even groot te worden afgebeeld. In stand 1 waren de meetassen evenwijdig aan het filmvlak. Dit is de ongunstigste stand voor het bepalen van de richting der meetassen, maar de gunstigste voor het bepalen van den afstand van het vliegtuig. (zie 10.2 en 10.3). In stand 2 viel de rompas bijna samen met de optische as van de camera en in stand 3 was dit het geval met de vleugelas. In laatstgenoemden stand werd de zon door het vliegtuig in de richting van de camera weerspiegelt. De standen 4, 5 en 6 waren willekeurig. Van stand 6, waarbij de directe hoekaflezingen ontbreken, werd een aantal opnamen gemaakt, waarbij het vliegtuig op verschillende plaatsen van het filmvlak werd geprojecteerd, dit in tegenstelling met de andere opnamen, waarbij het snijpunt der meetassen zich in de optische as van de camera bevond.

In tabel 1 zijn de resultaten vermeld. Het blijkt, dat de beeldjes met een belichtingstijd van 1/15 sec scherp zijn behalve bij stand 3, waarbij weerspiegeling van de zon op het vliegtuig plaats had. De beeldjes met een belichtingstijd van 1/60 en 1/270 sec zijn vaag.

Bij de uitwerking werden de hoeken in halve graden afgelezen. De hoeken blijken in het algemeen, althans bij de scherpe beeldjes, niet meer dan 1 graad te verschillen met de directe waarneming. Een uitzondering hierop vormt stand 1, de ongunstigste stand voor de hoekbepaling. De afstand blijkt bij de scherpe beeldjes niet meer dan 0,6 m of 0,8% van den opgemeten afstand te verschillen. Bij de vage beeldjes bedraagt het verschil maximaal 1,6 m of 2,0%.

De resultaten van stand 6 loopen onderling weinig uiteen. De hoeken bv. verschillen maximaal 1,5° van het gemiddelde en de afstanden niet meer dan 1,0 m. = 1,3% van het gemiddelde, de vage beeldjes inbegrepen.

De door twee personen onafhankelijk van elkaar uitgevoerde aflezingen en uitwerkingen van beeld no. 36 geven de volgende resultaten (zie tabel 1): hoekverschil maximaal 1 graad, afstandsverschil 0,3 m = 0,4%.

Uit deze proeven kan men de volgende *conclusies* trekken:

1e Bij goede filmafbeeldingen ter grootte van circa 1 à 2 mm van een vliegtuig, voorzien van de in 10.1 voorgeschreven merkteekens kan een nauwkeurigheid in de hoeken van tenminste 1° (uitgezonderd in den „ongunstigen stand") en in den afstand van tenminste 1% worden bereikt.

2e Vage beeldjes kunnen soms nog bruikbare resultaten geven, indien de merkteekens volgens de voorschriften zijn aangebracht. Men dient echter steeds naar zoo scherp mogelijke beeldjes te streven.

3e Spiegeling van den zon op het vliegtuig kan vaagheid van het beeld veroorzaken.

4e Indien het vliegtuig niet in het optisch middelpunt van het filmvlak wordt afgebeeld, kunnen met de hiervoor afgeleide correcties eveneens nauwkeurige resultaten worden verkregen.

5e De individueele fouten, die bij de aflezing van film en nomogrammen door geoefende personen worden gemaakt, kunnen worden verwaarloosd.

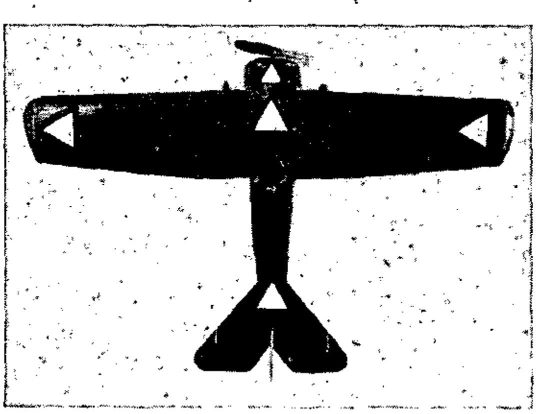


Foto N.L.L.

Fig.21. Vliegtuigmodel met merkteekens.

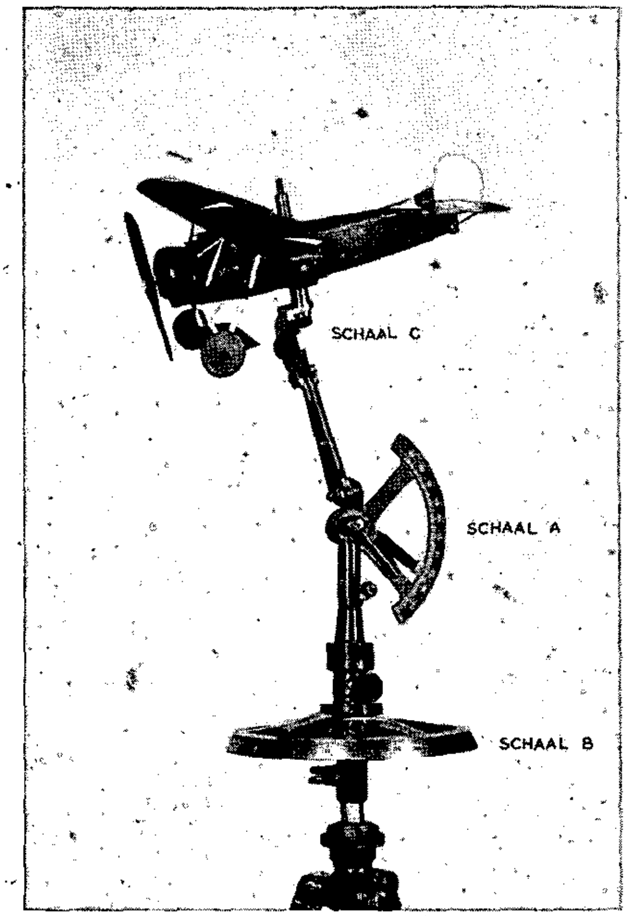


Foto N.L.L.

Fig. 22. Proefopstelling ter toetsing van de nauwkeurigheid der meetmethode.

10 Bespreking van de fouten, die in de eindresultaten kunnen optreden.

10.1 Bespreking van de verschillende factoren, die fouten kunnen veroorzaken.

Neemt men aan, dat de camera-apparatuur aan de in 03.1 gestelde eischen voldoet, dan kunnen fouten in de resultaten worden veroorzaakt door:

1e fouten bij het opmeten der filmbeeldjes,

2e fouten in de uitwerkingsmethode,

3e fouten, die veroorzaakt worden door onscherpe afbeelding van het vliegtuig op het filmvlak.

ad 1e Bij een goed afleesapparaat, dat speciaal voor het opmeten van films is geconstrueerd, mag men een grootste onnauwkeurigheid verwachten van ongeveer ± 0,005 mm bij afstandsmeting en van ongeveer ± 0,05 graden bij hoekmeting[2]). Men mag dus fouten in de opmetingen of in de uitwerkingen, waarvan de invloed kleiner is dan van bovengenoemde onnauwkeurigheden, verwaarloozen. Zijn de afmetingen van de afbeelding van het vliegtuig circa

[2]) Een dergelijk apparaat wordt thans door het N.L.L. geconstrueerd.

2 mm, dan is de door de opmeetnauwkeurigheid veroorzaakte fout in p maximaal 1 %. Met de in 10.2 en 10.3 besproken formules en grafieken kan men in elk voorkomend geval de door deze onnauwkeurigheid veroorzaakte fout in γ, φ en r bepalen.

ad 2e Bij de in 04, 05 en 06 afgeleide formules zijn slechts grootheden verwaarloosd, die in het algemeen niet grooter zijn dan de bovengenoemde opmeetnauwkeurigheid. Men kan de nomogrammen 7 en 8 zoo nauwkeurig aflezen als gewenscht is door de figuren groot genoeg te construeeren. De nomogrammen 13 en 15 dienen ter bepaling van correcties, zoodat fouten in de aflezing ervan slechts fouten van de 2e orde in de resultaten veroorzaken. De resultaten van stand 6 van de in 09 beschreven proeven toonen ook aan, dat de fouten in de uitwerking mogen worden verwaarloosd.

ad 3e Gaat men alle factoren na, die vervorming van het filmbeeld kunnen veroorzaken, dan blijken slechts de volgende factoren een grooteren invloed te hebben dan de opmeetnauwkeurigheid.

a De diepte-onscherpte van het filmbeeld.

Deze onscherpte wordt veroorzaakt, doordat het vliegtuig niet in het vlak is gelegen, waarop de camera is ingesteld. Is de afstand van dit vlak r en van het vliegtuig r_1, dan zal de afbeelding van het vliegtuig een vagen rand hebben ter breedte van

$$\Phi = m f \frac{|r - r_1|}{r r_1},$$

waarin m de diameter van het diafragma is. Is bv. $r = 1500$ m, $r_1 = 1000$ m, $m = 5$ cm en $f = 400$ mm, dan heeft het vliegtuig overal een vagen rand van 0,005 mm.

Stelt men den eisch, dat Φ bij de vliegtuigafstanden r_1 en r_2 even groot is, dan moet de camera op een afstand van

$$r = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

worden ingesteld. Is bv. $r_1 = 1000$ m en $r_2 = 3000$ m, dan is $r = 1500$ m. Wenscht men, dat de procentueele fout in de afmeting van het vliegtuig op de afstanden r_2 en r_1 even groot zijn, dan moet

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

zijn. In bovengenoemd geval is dus $r = 2000$ m.

b Beweging van het vliegtuig ten opzichte van de camera tijdens den belichtingstijd.

Beweegt het vliegtuig zich gedurende den belichtingstijd ten opzichte van de optische as van de camera, dan veroorzaakt dit eveneens een vaagheid in de afbeelding van het vliegtuig.

Wordt het geheele beeld tegelijk belicht en verondersteld men, dat de camera niet bewogen wordt, dan is

$$\frac{\Delta a''}{a''} \leqq \frac{v t}{a} \text{ of: } \Delta a'' \leqq \frac{f t v \cos \lambda}{r},$$

waarin v de snelheid van het vliegtuig en t de belichtingstijd is. Is bv. $t = \frac{1}{300}$ sec, $v = 100$ m/sec, $a = 10$ m, $f = 400$ mm en $r = 1000$ m, dan is: $\frac{\Delta a''}{a''} \leqq 3\%$ en $\Delta a'' \leqq 0{,}135$ mm; $\Delta b''$ is steeds gelijk aan 0. Wordt de camera bewogen, dan kan de vaagheidszône nog aanmerkelijk grooter worden.

c Granulatie van de film.

Dit effect doet de afbeelding eveneens grooter schijnen. Blijkens opnamen met de bij het N.L.L. in gebruik zijnde film van een op grooten afstand opgesteld raster kunnen 50 streepen per mm nog goed gescheiden worden waargenomen. Men kan dus aannemen, dat de vaagheidsstrook tengevolge van de granulatie van de film kleiner is dan 0.010 mm.

d Diverse oorzaken.

Dit kunnen eenige factoren zijn, die bij elke proef weer anders zullen zijn, zooals: verkeerde belichtingstijd, niet heldere lucht, te zwak licht, verkeerde ontwikkeling, e.d. waarvan de grootte dus niet kan worden aangegeven, doch die bij goed gekozen omstandigheden en behandeling van zeer geringen invloed kunnen zijn.

In het algemeen zal de beweging van het vliegtuig ten opzichte van de camera tijdens den belichtingstijd verreweg den grootsten invloed hebben. Het is dus van het grootste belang voor de resultaten, dat men het vliegtuig tijdens de vlucht zoo goed mogelijk met de camera volgt, opdat de beweging van het vliegtuig ten opzichte van de as van de camera zoo klein mogelijk is. Verder moet men bij de constructie van de camera en de keuze van het filmmateriaal streven naar een zoo kort mogelijken belichtingstijd.

De onder 3e genoemde factoren veroorzaken alle een vaagheidsstrook, die zoo goed mogelijk kan worden geëlimineerd door op gelijkstandige zijden van de merkteekens af te lezen. De merkteekens bij de uiteinden van een as moeten dus gelijk en gelijkgericht (niet symmetrisch!) zijn. Verder verdient het aanbeveling, dat men aan een merkteeken zelf de richting van de er doorheen gaande as kan zien. Bruikbare merkteekens zijn dus bv. een gelijkzijdige driehoek, waarvan een zijde of een T-vormig merkteeken, waarvan de horizontale streep loodrecht op de asrichting staat. Teneinde een zoo duidelijk mogelijke afbeelding van de merkteekens te verkrijgen, dient men deze wit te schilderen in een flinke zwarte omlijsting. Het vliegtuigmodel in fig. 21 is van dergelijke merkteekens voorzien.

10.2 Invloed van de fouten op de standsbepaling van het vliegtuig.

Uit de formules (2) en (3) kan men door differentiatie de volgende formules afleiden:

$$\Delta\lambda = -\frac{\sin 2\lambda}{2p(\sin^2\lambda + \sin^2\varphi)}\Delta p \qquad (34a)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2p(\sin^2\lambda + \sin^2\varphi)}\Delta p \qquad (34b)$$

$$\Delta\lambda = -\frac{\sin 2\varphi\cos^2\lambda\sin(\alpha-\beta)}{2(\sin^2\lambda+\sin^2\varphi)}\Delta(\alpha-\beta) \qquad (35a)$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sin 2\lambda\cos^2\varphi\sin(\alpha-\beta)}{2(\sin^2\lambda+\sin^2\varphi)}\Delta(\alpha-\beta). \qquad (35b)$$

Met deze formules en fig. 7 kan men op de onder 05.1 aangegeven wijze grafieken construeeren, waarin men bij verschillende waarden van p en $\alpha-\beta$ de fout in λ en φ kan aflezen, indien in $\alpha-\beta$ een fout van bv. 1° resp. in p een fout van bv. 1% is gemaakt. In de figuren 23 en 24 zijn eenige voorbeelden hiervan gegeven. In fig. 23 kan men de fout in λ aflezen bij een fout van 1% in p en in fig. 24 de fout in φ bij een fout van 1° in $\alpha-\beta$. De figuren kunnen ook gebruikt worden ingeval p grooter dan 1 is en vóor andere waarden van $\alpha-\beta$. De lijnen voor $\alpha-\beta$ gelden ook voor $180° \pm (\alpha-\beta)$. In fig. 23 gelden de punten voor p ook voor $\frac{1}{p}$. In fig. 24 leest men, wanneer $p > 1$ is, $\frac{1}{p}$ op de horizontale schaal af en verwisselt men $|\Delta\lambda|$ en $|\Delta\varphi|$. Het blijkt, dat de formules (34) en (35) het gevoeligst zijn, wanneer $\alpha-\beta$ omstreeks 90° of 270° en p omstreeks 1 is, dus wanneer de meetassen ongeveer evenwijdig met het filmvlak zijn (zie 04.1). Men krijgt bv. bij $\alpha-\beta = 89°$ en $p = 0.98$ in λ een fout van 2,4° bij een fout van 1% in p en in φ een fout van 4,0° bij een fout van 1° in $\alpha-\beta$.

Een fout in α, β, λ of φ heeft een hoogstens even groote fout in ϑ en ψ tengevolge. De fout in γ en δ kan, in graden gemeten, aanzienlijk worden, wanneer ϑ resp. ψ *in de omgeving van* ±90° liggen, hoewel de grootte, langs een grootcirkelboog gemeten, natuurlijk niet verandert.

10.3 Invloed van de fouten op de plaatsbepaling van het vliegtuig.

Door differentiatie van (13a) en (13b) kan men de volgende formule verkrijgen:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\operatorname{tg}\lambda\,\Delta\lambda - \frac{\Delta a''}{a''} = -\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\varphi - \frac{\Delta b''}{b''}.$$

De fout in de afstandsbepaling kan aanzienlijk worden, indien a'' of b'' klein is, dus indien λ of φ ongeveer 90° zijn.

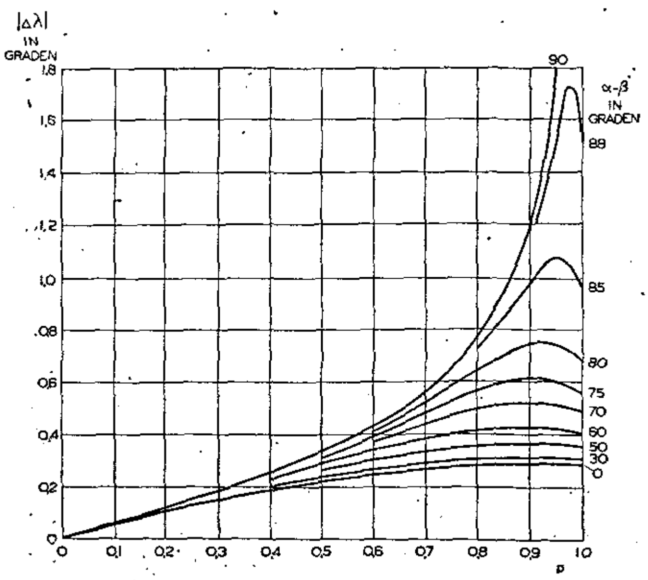


Fig. 23. Grafiek ter bepaling van de fout in λ tengevolge van een fout van 1 % in p.

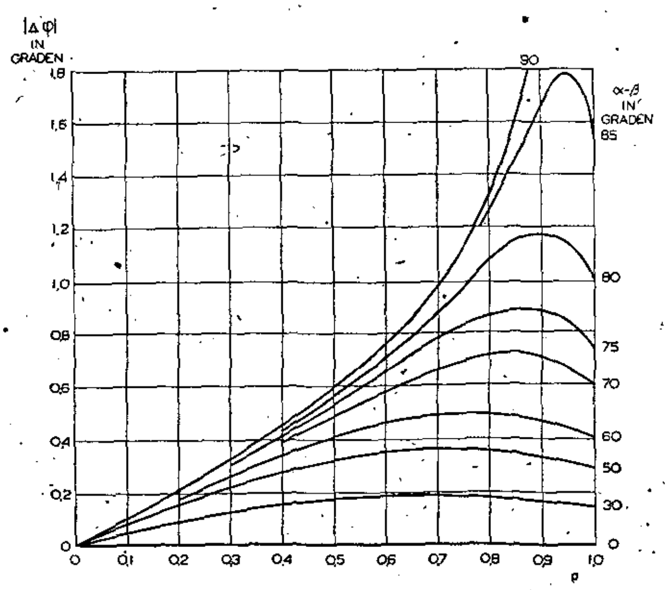


Fig. 24. Grafiek ter bepaling van de fout in φ tengevolge van een fout van 1° in $\alpha-\beta$.

11 Notaties.

Toelichting van de hieronder gebruikte termen „elevatie" en „azimuth":

De elevatie van een as ten opzichte van een assenstelsel XYZ is de hoek tusschen die as en het XY-vlak. De elevatie ligt tusschen $-90°$ en $+90°$ en is positief, wanneer de as naar dezelfde zijde van het XY-vlak is gericht als de Z-as.

Het azimuth van een as ten opzichte van een assenstelsel XYZ is de hoek tusschen de projectie van deze as op het XY-vlak en de X-as. Het azimuth wordt gemeten van de positieve X-as met de wijzers van de klok mee (indien men in de negatieve richting van de Z-as kijkt) tot de positieve projectie van de as en ligt tusschen 0° en 360°.

x-as = rompas; as door de merkteekens op den romp (positief in de richting van den staart naar den neus).

y-as = dwarsas (positief in de richting van BB naar SB).

$-y$-as = vleugelas; as door de merkteekens op den vleugel (positief in de richting van SB naar BB).

z-as = topas, as door het snijpunt van de rompas en de vleugelas loodrecht op deze assen (positief van rugzijde naar borstzijde van het vliegtuig).

S = snijpunt van rompas en vleugelas.

S'' = projectie van S op het filmvlak.

V = vlak door S evenwijdig aan het filmvlak.

O = middelpunt van het voor het vliegtuig bestemde deel van het filmvlak; snijpunt van de optische as en het filmvlak.

$\xi\,\eta\,\zeta$-assenstelsel = filmassenstelsel.

ξ-as = horizontale as in het filmvlak door O (positief naar links).

η-as = as in het filmvlak door O loodrecht op de ξ-as (positief naar boven).

ζ-as = as door O loodrecht op het filmvlak; optische as van de camera (positief naar voren).

$X_k\,Y_k\,Z_k$-assenstelsel = aardassenstelsel door O.

X_k-as = horizontale as van het aardassenstelsel (positief naar het Noorden).

Y_k-as = horizontale as van het aardassenstelsel (positief naar het Oosten).

Z_k-as = verticale as van het aardassenstelsel (positief naar boven).

a = afstand van de merkteekens op den romp.

b = afstand van de merkteekens op den vleugel.

a' = lengte van de projectie van a op V.

b' = lengte van de projectie van b op V.

a'' = lengte van de projectie van a op het filmvlak.

b'' = lengte van de projectie van b op het filmvlak.

p = $\frac{a''}{b''} : \frac{b}{a}$; grootheid, te gebruiken bij de bepaling van λ en φ.

σ = hoek tusschen een willekeurige as in het symmetrievlak van het vliegtuig en de rompas. Deze hoek is positief, wanneer de rompas naar de andere zijde van het xy-vlak van het vliegtuig is gericht als de z-as.

E = elevatie van de optische as van de camera ten opzichte van het aardassenstelsel.

A = azimuth van de optische as van de camera ten opzichte van het aardassenstelsel.

E' = elevatie van de as, die O met S verbindt, ten opzichte van het aardassenstelsel.

A' = azimuth van de as, die O met S verbindt, ten opzichte van het aardassenstelsel.

λ = elevatie van de x-as ten opzichte van het filmassenstelsel.

α = azimuth van de x-as ten opzichte van het filmassenstelsel.

φ = elevatie van de $-y$-as ten opzichte van het filmassenstelsel.

β = azimuth van de $-y$-as ten opzichte van het filmassenstelsel.

ϑ = elevatie van de x-as ten opzichte van het aardassenstelsel.

γ = azimuth van de x-as ten opzichte van het aardassenstelsel.

γ_1 = azimuth (in het $X_k\,Y_k$-vlak) van de x-as ten opzichte van de ξ-as.

ψ = elevatie van de $-y$-as ten opzichte van het aardassenstelsel.

δ = azimuth, van de $-y$-as ten opzichte van het aardassenstelsel.

δ_1 = azimuth (in het $X_k\,Y_k$-vlak) van de $-y$-as ten opzichte van de ξ-as.

Δ = azimuth van de y-as ten opzichte van het aardassenstelsel.

ν = elevatie van de z-as ten opzichte van het aardassenstelsel.

τ = azimuth van de z-as ten opzichte van het aardassenstelsel.

r = afstand van S tot de camera.

ξ_1, η_1 = coördinaten van S'' ten opzichte van het filmassenstelsel.

c'' = afstand van S'' tot O.

ϱ = afstand van het punt in het filmvlak, waarbij $E = 90°$ is, tot S''.

Ω = hoek tusschen de ξ-as en de lijn, welke O met S'' verbindt.

12 Literatuuropgave.

1. *Francis, H. A.*: The comparison of the manoeuvrability of aeroplanes by the use of a cinematograph camera. Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Committee, No. 825, 1922.
2. *Raethjen, P. und Knott, H.*: Flugeigenschaftbestimmung durch kinematographische Flugvermessung, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1926, blz. 512.
3. *Hübner, W. und Pleines, W.*: Kinematographische Messung der Trudelbewegung an einem Flugzeug vom Muster Albatros L 68, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1929, blz. 29.
4. *Raethjen, P.*: Bemerkungen zum Trudelbewegung und zum kinematographischen Flugvermessung, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1929, blz. 413 en 482.
5. *Hübner, W. und Pleines W.* Stellungsnahme zu „Bemerkungen zum Trudelbewegung und zum kinematographischen Flugvermessung" von P. Raethjen, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1929, blz. 418.
6. *Lacman, O.* Einfaches Verfahren zur photogrammetrischer Festlegung von Flugbahnen aus erdfesten Stationen, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1932, blz. 232.
7. *Schnittger, W.*: Flugleistungsprüfungen mit Hilfe visueller photogrammetrischer Meszmethoden aus erdfesten Stationen, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1933, blz. 241.
8. —Flugleistungsmessungen vom Boden aus, Die Askania-Warte, 1939, blz. 105.
9. *Bourgeois, R. und Fürtwängler, Ph.* Kartographie, Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften VI, 1905-1909, blz. 245.
10. *van Oosterom, T.*: Het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Marineblad 1942, 1e aflevering.
11. N.L.L.-rapport „Definities".
12. *Schieferdecker, A. und Gebhardt, W.*: Ergebnisse von Flugmessungen mit der Kino-Theodolit-Anlage System „Raethjen" der deutschen Forschungsanstalt für Segelflug e.V., Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, 1938, I blz. 611.
13. *Hart:* Vermessung beschleunigter Flugzustände, Luftfahrtforschung XII, 1935, blz. 240.

TABEL 1.

Vergelijking tusschen de directe waarnemingen en de resultaten van filmopnamen met het vliegtuigmodel.

Filmbeeld no	Stand no	Directe waarneming: Langs-helling graden	Koers graden	Rolhoek¹ graden	Afstand m	Filmafbeelding: Langs-helling graden	Koers graden	Rolhoek graden	Afstand m	Belichtings-tijd sec
1	1	—80	180	180	79,1	—84	182^5	180	79,5	1/15
4 1)	1	—80	180	180	79,1	$—83^5$	183	183	79,5	1/60
5 1)	1	—80	180	180	79,1	$—83^5$	182	180	79,4	1/270
7 1)	2	—30	180	0	79,1	—30	179^5	0	79,0	1/270
11	2	—30	180	0	79,1	—30	179^5	359^5	79,5	1/15
14 2)	3	—30	90	338^5	79,1	$—30^5$	89	339	79,8	1/15
16 3)	3	—30	90	338^5	79,1	—	—	—	—	1/270
18 1)	4	—30	237^5	201^5	79,1	—29	237^5	205	80,2	1/270
21	4	—30	237^5	201^5	79,1	—29	238	204^5	79,7	1/15
22	5	$—62^5$	334^5	211^5	79,1	$—62^5$	334	211^5	79,3	1/15
24 1)	5	$—62^5$	334^5	211^5	79,1	$—63^5$	337^5	207^5	77,5	1/270
26 1)	6	—	—	—	79,1	$+49^5$	113	328^5	80,3	1/270
28	6	—	—	—	79,1	+50	111^5	327^5	78,5	1/15
31	6	—	—	—	79,1	+50	113	329	79,1	1/15
33 1)	6	—	—	—	79,1	+49	114	328	79,8	1/270
35 1)	6	—	—	—	79,1	+49	114	326	79,4	1/270
36 4)	6	—	—	—	79,1	+49	112^5	329	79,4	1/15
36 4)	6	—	—	—	79,1	+49	113	328	79,7	1/15

1) Filmbeeld vaag wegens te korten belichtingstijd.
2) Filmbeeld vaag wegens weerspiegeling van den zon op het vliegtuig.
3) Filmbeeld niet af te lezen wegens weerspiegeling van den zon op het vliegtuig.
4) Aflezing en uitwerking door twee verschillende personen onafhankelijk van elkaar.

Afgesloten October 1943.

IAI/Ia

REPORT V. 1198.

Cinematographical determination of the attitude and the place of an aeroplane as a function of time by means of a single camera on the ground.

Summary.

For the study of the flying qualities of an aeroplane, it is necessary to carry out measurements about its motion. In the first place its flight-path and its attitude at any moment in the corresponding point of the path must be known. In uniform flights these measurements are by preference made by means of instruments mounted in the aeroplane. In unsteady flights this is often not possible or very difficult with the instruments known at present (see 01). In those cases results are obtainable by using apparatus fixed to the ground.

In this report now a method developed by the N.L.L. is described, by which the attitude and the place of the aeroplane can be determined as a function of time by means of a single cinematograph camera on the ground.

The aeroplane must be provided with marks at the extremities of the body and of the wing. The attitude of the aeroplane is fixed by the direction of the lines through the marks on the body and on the wing (measurement-axes). The direction of a measurement-axis is fixed by first: the angle between the axis and its orthogonal projection on a given plane (elevation) and second: the angle between this projection and a fixed axis in that plane (azimuth). Under 02 this matter is explained circumstantially.

The position of the optical axis of the camera and the time at the moment of every exposure must be known and therefore must be recorded. This and other conditions the camera has to fulfill are discussed in 03, followed by a consideration about the image on the film and the quantities to be read from it.

In 04.1 first the elevations of the measurements-axes with reference to the plane of the film and their azimuths with reference to a horizontal axis in this plane are determined from the lengths of the projections of the measurement-axes on the film and from the angles enclosed by these projections and a horizontal line on the film; these quantities can be measured in the filmimage. Thereafter under 04.2 the attitude of the aeroplane with reference to the plane of the film is reduced to a horizontal plane by means of the filmrecords about the position of the optical axis. For the purpose of these derivations some suppositions had to be made in 04, the most important of which is, that the intersection of the measurement-axes coincides with the optical axis of the camera. In case these suppositions are not fulfilled, corrections which are deduced under 06, have to be applied. By using the nomograms mentioned under 05 and 06 extensive calculations can be avoided.

In the discussion in 08 of the graphical representations of the results, some examples are given of aerobatics filmed and elaborated by the N.L.L.

To test the accuracy attainable with the method developed in this report a model of an aeroplane, whose attitude and distance from the camera could be measured also directly, was filmed in various attitudes. The results are discussed under 09. It turns out, that, when using the provisional apparatus developed by the N.L.L., a minimum inaccuracy of 1% in the distance and of 1 degree in the attitude, could be attained.

Finally the errors, which can occur in the measurements and in the elaborations and their influence on the results are discussed in 10.

Notations.

Explanation of the terms „elevation" and „azimuth", used below:

The elevation of an axis with reference to a coordinate system XYZ is the angle between the axis and the XY plane. The elevation is measured from $-90°$ to $+90°$ and is positive, if the axis is directed to the same side of the XY plane as the Z axis.

The azimuth of an axis with reference to a coordinate system XYZ is the angle between the projection of the axis on the XY plane and the X axis. The azimuth is measured from the positive X axis clockwise (looking in the direction of

BERICHT V. 1198.

Kinematographische Bestimmung der Lage und des Ortes eines Flugzeuges als Funktion der Zeit unter Benutzung einer einzelnen erdfesten Kinokamera.

Zusammenfassung.

Für das Studium der Flugeigenschaften eines Flugzeuges sind Messungen dessen Bewegungen erforderlich. An erster Stelle sind die Bahn und die Lage des Flugzeuges in jedem Moment im zugehörigen Punkt der Bahn zu bestimmen. Diese Messungen werden bei stationären Flügen vorzügsweise ausgeführt mittels im Flugzeug montierter Instrumente. Bei nicht-stationären Flügen sind zuverlässige Messungen im Flugzeug mit den jetzt zur Verfügung stehenden Instrumenten nicht möglich, oder sehr schwierig auszuführen. Unter 01 wird dieses erläutert. In diesen Fällen können die Messungen ausgeführt werden mit Hilfe von am Boden aufgestellten Apparaten.

In diesem Bericht wird nun ein vom N.L.L. entwickeltes Verfahren beschrieben, mit dem die Lage und der Ort eines Flugzeuges als Funktion der Zeit mit einer einzelnen Kinokamera vom Boden aus festgelegt werden kann.

Das Flugzeug soll mit Kennzeichen an den Endpunkten des Flügels und des Rumpfes versehen werden. Mit der Richtung der Linien durch die Kennzeichen (Meszachsen) am Rumpf und am Flügel ist die Lage des Flugzeuges gegeben. Die Richtung einer Meszachse wird festgelegt erstens: durch den Winkel zwischen der Achse und ihrer senkrechten Projektion auf einer bestimmten Ebene (Höhenwinkel) und zweitens: durch den Winkel zwischen dieser Projektion und einer bestimmten Achse in jener Ebene (Seitenwinkel). Unter 02 wird die Bestimmung der Lage des Flugzeuges ausführlich besprochen.

Die Lage der optischen Achse der Kamera und der Zeitpunkt der Aufnahmen müssen bekannt sein und deshalb auch auf dem Film festgelegt werden. Zusammen mit dem Filmbild des Flugzeuges und den aus dem Film zu ermittelnden Gröszen sind diese und andere Bedingungen, welche die Filmkamera erfüllen soll, unter 03 besprochen.

Von den Meszachsen werden zuerst in 04.1 die Höhenwinkel in Bezug auf der Filmebene und die Seitenwinkel in Bezug auf einer horizontalen Achse in dieser Ebene bestimmt aus den Gröszen der Projektionen der Meszachsen auf der Filmebene und den Winkeln zwischen diesen Projektionen und einer horizontalen Linie in der Filmebene. Darauf wird in 04.2 die Lage des Flugzeuges in Bezug auf der Filmebene umgerechnet für eine horizontale Ebene. Die Richtung der optischen Achse soll dabei bekannt sein. Bei diesen Ableitungen müssten einige Voraussetzungen gemacht werden, von denen die wichtigste ist, dasz der Schnittpunkt der Meszachsen in der optischen Achse der Kamera liegt. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so müssen Korrekturen angebracht werden, welche in 06 abgeleitet sind.

Mittels der in 05 und 06 besprochenen Nomogramme können umfangreiche Berechnungen vermieden werden.

Bei der Besprechung der graphischen Darstellung der Ergebnisse in 08 sind als Beispiel einige Meszergebnisse von Kunstflügen beigefügt, welche mit einer vom N.L.L. gebauten Probekamera erhalten wurden.

Um die erreichbare Genauigkeit zu prüfen, ist ein Flugzeugmodell, dessen Lage und Entfernung von der Kamera auch unmittelbar gemessen werden konnten, in mehreren Lagen gefilmt worden. Die Ergebnisse sind in 09 besprochen worden. Es stellte sich heraus, dasz mit der angewandten provisorischen Apparatur ein Meszfehler erreicht werden konnte der unter 1% in der Entfernung und unter 1 Grad in der Lage liegt.

Zum Schlusz sind in 10 die Fehler, welche bei der Vermessung und Auswertung der Filmbilder auftreten können, und ihr Einflusz auf die Ergebnisse besprochen.

Formelzeichen.

Definition der nachstehend benutzten Ausdrücke „Höhenwinkel" und „Seitenwinkel":

Der Höhenwinkel einer Achse bezüglich eines Koördinatensystems XYZ ist der Winkel zwischen dieser Achse und der XY-Ebene. Der Höhenwinkel liegt zwischen $-90°$ und $+90°$ und ist positiv, wenn die Achse derselben Seite der XY-Ebene zugewandt ist wie die Z-Achse.

Der Seitenwinkel einer Achse bezüglich eines Koördinatenthe negative Z axis) to the positive projection of the axis and therefore lies between 0° and 360°.

x axis = body axis; axis through the marks on the body (positive from the tail to the nose).

y axis = lateral axis (positive in the direction from PS to SB).

$-y$ axis = wing axis; axis through the marks on the wing (positive in the direction from SB to PS).

z axis = normal axis; axis through the intersection point of the body axis and the wing axis perpendicular to these axes (positive from the top to the bottom of the aeroplane).

S = intersection point of body axis and wing axis.

S'' = projection of S in the filmplane.

V = plane through S parallel to the filmplane.

O = centre of the part of the filmplane available for the image of the aeroplane; intersection point of the optical axis and the filmplane.

$\xi\,\eta\,\zeta$ coordinate system = film-coordinate system.

ξ axis = horizontal axis in the filmplane through O (positive to the left)

η axis = axis in the filmplane trough O perpendicular to the ξ axis (positive in upward direction).

ζ axis = axis trough O perpendicular to the filmplane; optical axis of the camera (positive in forward direction).

$X_k\,Y_k\,Z_k$ coordinate system = ground-coordinate system with its origin in the camera.

X_k axis = horizontal axis of the ground-coordinate system (positive to the north).

Y_k axis = horizontal axis of the ground-coordinate system (positive to the east).

Z_k axis = vertical axis of the ground-coordinate system (positive in upward direction).

a = distance of the marks on the body.

b = distance of the marks on the wing.

a' = length of the projection of a on V.

b' = length of the projection of b on V.

a'' = length of the projection of a on the filmplane.

b'' = length of the projection of b on the filmplane.

p = $\frac{a''}{b''} \cdot \frac{b}{a}$; quantity to be used for the determination of λ and φ.

σ = angle between an arbitrary axis in the symmetry plane of the aeroplane and the x axis. The angle is positive, if the x axis is turned to the side of the xy plane opposite to the z axis.

E = elevation of the optical axis of the camera with reference to the ground-coordinate system.

A = azimuth of the optical axis of the camera with reference to the ground-coordinate system.

E' = elevation of the line from O to S with reference to the ground-coordinate system.

A' = azimuth of the line from O to S with reference to the ground-coordinate system.

λ = elevation of the x axis with reference to the film-coordinate system.

α = azimuth of the x axis with reference to the film-coordinate system.

φ = elevation of the $-y$ axis with reference to the film-coordinate system.

systems XYZ ist der Winkel zwischen der Projektion der Achse auf der XY-Ebene und der X-Achse. Dieser Winkel wird gemessen von der positiven X-Achse aus in der Richtung des Uhrzeigers (Blickrichtung in negative Richtung der Z-Achse) bis zur positiven Projektion der Achse und liegt somit zwischen 0° und 360°.

x-Achse = Rumpfachse; Achse durch die Kennzeichen am Rumpf (positiv in der Richtung von hinten nach vorne).

y-Achse = Querachse (positiv in der Richtung von $B.B.$ nach $S.B.$).

$-y$-Achse = Flügelachse; Achse durch die Kennzeichen am Flügel (positiv von $S.B.$ nach $B.B.$)

z-Achse = Hochachse; Achse durch den Schnittpunkt der Rumpfachse und der Flügelachse senkrecht auf diesen Achsen (positiv von Oben- nach Unterseite des Flugzeuges).

S = Schnittpunkt der Rumpfachse und der Flügelachse.

S'' = Projektion von S auf der Filmebene.

V = Ebene durch S parallel zur Filmebene.

O = Mittelpunkt der, für die Abbildung des Flugzeuges zur Verfügung stehenden Filmfläche; Schnittpunkt der optischen Achse und der Filmebene.

$\xi\,\eta\,\zeta$-Koordinatensystem = Filmkoordinatensystem.

ξ-Achse = horizontale Achse in der Filmebene durch O (positiv nach links).

η-Achse = Achse in der Filmebene durch O senkrecht auf der ξ-Achse (positiv nach oben).

ζ-Achse = Achse durch O senkrecht auf der Filmebene; optische Achse der Kamera (positiv nach vorne).

$X_k\,Y_k\,Z_k$-Koordinatensystem = Boden-Koordinatensystem mit Ursprung in der Kamera.

X_k-Achse = horizontale Achse des Boden-Koordinatensystems (positiv nach dem Norden).

Y_k-Achse = horizontale Achse des Boden-Koordinatensystems (positiv nach dem Osten).

Z_k-Achse = vertikale Achse des Boden-Koordinatensystems (positiv nach oben).

a = Abstand der Kennzeichen auf dem Rumpf.

b = Abstand der Kennzeichen auf dem Flügel.

a' = Länge der Projektion von a auf V.

b' = Länge der Projektion von b auf V.

a'' = Länge der Projektion von a auf der Filmebene.

b'' = Länge der Projektion von b auf der Filmebene.

p = $\frac{a''}{b''} \cdot \frac{b}{a}$; eine bei der Bestimmung von λ und φ zu benutzender Grösse.

σ = Winkel zwischen einer willkürlichen Achse in der Symmetrieebene des Flugzeuges und der x-Achse. Der Winkel ist positiv, wenn die Achse der anderen Seite der xy-Ebene zugewandt ist wie die z-Achse.

E = Höhenwinkel der optischen Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

A = Seitenwinkel der optischen Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

E' = Höhenwinkel der Linie von O nach S bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

A' = Seitenwinkel der Linie von O nach S bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

λ = Höhenwinkel der x-Achse bezüglich des Film-Koordinatensystems.

α = Seitenwinkel der x-Achse bezüglich des Film-Koordinatensystems.

φ = Höhenwinkel der $-y$-Achse bezüglich des Film-Koordinatensystems.

β = azimuth of the $-y$ axis with reference to the film-coordinate system.

ϑ = elevation of the x axis with reference to the ground-coordinate system.

γ = azimuth of the x axis with reference to the ground-coordinate system.

γ_1 = azimuth (in the $X_k\,Y_k$ plane) of the x axis with reference to the ξ axis.

ψ = elevation of the $-y$ axis with reference to the ground-coordinate system.

δ = azimuth of the $-y$ axis with reference to the ground-coordinate system.

δ_1 = azimuth (in the $X_k\,Y_k$ plane) of the $-y$ axis with reference to the ξ axis.

Δ = elevation of the y axis with reference to the ground-coordinate system.

ν = elevation of the z axis with reference to the ground-coordinate system.

τ = azimuth of the z axis with reference to the ground-coordinate system.

r = distance from S to the camera.

ξ_1, η_1 = coordinates of S'' with reference to the film-coordinate system.

c'' = *distance from S'' to O.*

ϱ = distance from the point in the filmplane with $E = 90°$ to S''.

Ω = angle between the ξ axis and the line from O to S''.

β = Seitenwinkel der $-y$-Achse bezüglich des Film-Koordinatensystems.

ϑ = Höhenwinkel der x-Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

γ = Seitenwinkel der x-Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

γ_1 = Seitenwinkel (in der $X_k\,Y_k$-Ebene) der x-Achse bezüglich der ξ-Achse.

ψ = Höhenwinkel der $-y$-Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

δ = Seitenwinkel der $-y$-Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

δ_1 = Seitenwinkel (in der $X_k\,Y_k$-Ebene) bezüglich der ξ-Achse.

Δ = Seitenwinkel der y-Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

ν = Höhenwinkel der z-Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

τ = Seitenwinkel der z-Achse bezüglich des Boden-Koordinatensystems.

r = Abstand von S zur Kamera.

ξ_1, η_1 = Koordinaten von S'' bezüglich des Film-Koordinatensystems.

c'' = Abstand von S'' zu O.

ϱ = Abstand vom Punkte in der Filmebene mit $E = 90°$ zu S''.

Ω = Winkel zwischen der ξ-Achse und der Linie von O zu S''.

RAPPORT A 810.

Een methode voor het zichtbaar maken van stroomingen.

door

ir. A. DE LATHOUDER.

Een ook door anderen toegepaste methode voor het zichtbaar maken van stroomingen wordt beschreven. De verkregen beelden wijken sterk af van de stroomlijnen, die men zichtbaar te maken. Voor de verschillen wordt een verklaring gegeven.

Indeeling.

1. *Inleiding en omvang van het onderzoek.*

Teneinde een beter inzicht te verkrijgen in het karakter en de eigenschappen van stroomingsvelden, is het veelal gewenscht de stroomlijnen zichtbaar te maken. Hiervoor is een aantal methoden bekend. In het onderstaande wordt een van deze methoden nader beschouwd. Hierbij worden in de omgeving van een in de strooming geplaatst lichaam stroomingsbeelden verkregen, die afwijken van de stroomlijnen, welke men zichtbaar wenscht te maken.

Deze methode, die reeds eerder door andere onderzoekers is toegepast, bestaat daarin, dat in de strooming een vlakke plaat wordt gebracht, die bestreken is met een vloeistof, waarin zich een fijn verdeelde vaste stof bevindt. Onder invloed van den wind stroomt dit mengsel over de vlakke plaat en teekent daarop lijnen af. Bij de hier beschreven proeven werd hiervoor een mengsel van petroleum en lampenzwart gebruikt. Ook bij andere mengsels zullen de hierna vermelde verschijnselen in meerdere of mindere mate optreden.

Daar de plaat zelf geen invloed mag hebben op het stroomingsveld, is de bovenbedoelde methode alleen bruikbaar voor het zichtbaar maken van tweedimensionale stroomingen. Weliswaar vindt de methode ook toepassing bij het onderzoek van driedimensionale stroomingen, doch dan is de plaat niet aanwezig en wordt het oppervlak van het in de strooming geplaatste lichaam zelf met vloeistof bestreken. In dat geval wordt dus alleen de strooming langs dat oppervlak zichtbaar gemaakt. De verschijnselen, die zich daarbij voordoen, worden hier niet behandeld; zij vertoonen echter overeenkomst met die, welke in het volgende voor het tweedimensionale geval worden besproken.

Bij de hier beschreven proeven was in de windtunnel een *horizontale plaat* opgesteld. Hierop werd een cylinder met verticale beschrijvende lijnen vastgekit. Als doorsnede van den cylinder werd een vleugelprofiel gekozen. Ook bij andere vormen van doorsnede doen zich echter soortgelijke verschijnselen als de hier behandelde voor.

2. *Verkregen stroomingsbeelden.*

Wordt de plaat, voordat de wind is aangezet, geheel met vloeistof bestreken, dan ontstaat het in fig. 2 gegeven stroomingsbeeld. Hoewel dit bij oppervlakkige beschouwing gelijkenis vertoont met het verloop van de stroomlijnen om een vleugelprofiel in tweedimensionale strooming, vallen bij nauwkeuriger beschouwing toch eenige typische afwijkingen op (zie ook fig. 1, waarin het stroomingsbeeld *schematisch is weergegeven*). Op eenigen afstand voor den vleugelneus ontstaat een stuwpunt, waarin de strooming *zich splitst en de vloeistof, zonder den profielneus te raken*, zijdelings en vervolgens naar achteren wordt afgevoerd. In *het gebied tusschen den vleugelneus en dit stuwpunt* teekenen zich lijnen af, die den indruk wekken alsof er zich een bron (*punt, waar vloeistof in het veld wordt gebracht*) op den vleugelneus bevindt. De vloeistof stroomt vanaf dit bronpunt tegen den wind in, buigt daarna zijdelings af en stroomt langs het profiel naar achteren. De in dit gebied afgeteekende lijnen loopen dicht bij het vleugeloppervlak, echter niet evenwijdig daaraan, maar snijden den omtrek van het profiel.

De indruk werd verkregen, dat de vloeistof in bovengenoemde twee gebieden zich niet vermengt. Dit werd bevestigd door proeven, waarbij getracht werd alleen de strooming in het buitengebied zichtbaar te maken.

Wordt namelijk niet de geheele plaat met vloeistof bestreken, maar slechts het voorste deel, dan ontstaat het in fig. 3 gegeven stroomingsbeeld. De buitenstrooming laat om

Teekening N.L.L.

Fig. 1. Schematische weergave van het stroomingsbeeld om een vleugelprofiel bij de hier toegepaste methode van zichtbaar maken.

I Gebied van de buitenstrooming.
II Gebied van de binnenstrooming.
III Gebied van de staartstrooming.
S Stuwpunt in de vloeistofstrooming.
B_1 „Bron" op den vleugelneus.
B_2 „Bron" aan den vleugelachterrand.
- - - - - Scheidingslijnen tusschen de gebieden *I* t/m *III*.

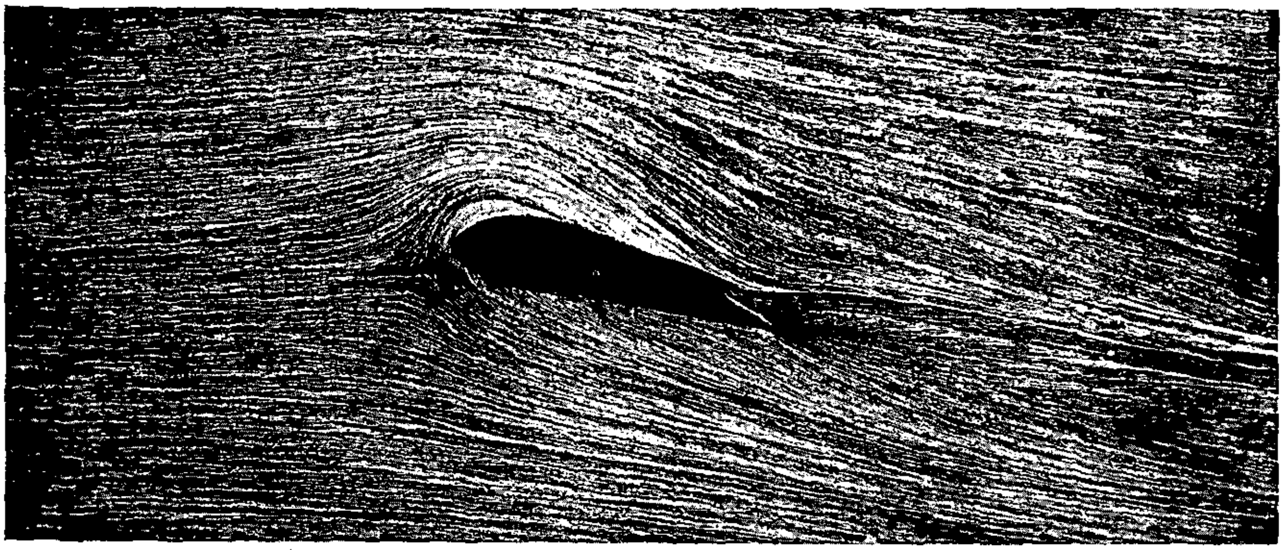


Foto N.L.L.

Fig. 2. Het stroomingsbeeld om een vleugelprofiel bij de hier toegepaste methode van zichtbaar maken.

het profiel een gebied vrij. Het stuwpunt voor den vleugelneus treedt op dezelfde plaats op als in fig. 2.

Ook de binnenstrooming kan afzonderlijk gedemonstreerd worden door alleen vloeistof te brengen in de omgeving van den vleugelneus en wel binnen het gebied, dat in fig. 3 niet door de buitenstrooming wordt bestreken (fig. 4). Daarbij doet zich echter de merkwaardigheid voor, dat de strooming zich aan den achterrand van het profiel splitst en een gebied vrij laat. Bij aandachtige beschouwing van fig. 2 is dit verschijnsel ook in het volledige stroomingsbeeld waarneembaar. Het lijkt of zich in de achterpunt van het profiel eveneens een bron bevindt.

De strooming in dit laatste gebied (staartstrooming) kan afzonderlijk verkregen worden door eenige druppels vloeistof bij den vleugelachterrand te leggen en daarna de wind over de plaat te laten blazen (*fig. 5*).

De aandacht zij erop gevestigd, dat bovengenoemde verschijnselen niet een enkelen keer optraden, maar volkomen reproduceerbaar zijn. De grootte van de windsnelheid, de hoeveelheid opgebrachte vloeistof, de samenstelling van het mengsel en de plaats van de opgebrachte vloeistof hebben binnen zeer wijde grenzen geen invloed op het verkregen beeld (doch wel op de scherpte van de afgeteekende lijnen).

3. *Verklaring van de waargenomen verschijnselen.*

31. *Algemeen.*

Voor de verklaring van de waargenomen verschijnselen wordt erop gewezen, dat de opgeteekende lijnen de stroomlijnen van de vloeistof en niet die van de zich daarboven bevindende lucht zijn. Daar op de vloeistof andere krachten werken dan op de lucht, wijkt het verkregen stroomingsbeeld af van dat om een vleugelprofiel in tweedimensionale strooming.

De op de vloeistof werkende krachten zijn:

a) wrijvingskrachten, veroorzaakt door het snelheidsverschil tusschen de lucht en de vloeistof,

b) wrijvingskrachten, die de plaat op de vloeistof uitoefent,

c) drukkrachten, ten gevolge van de in de lucht boven de vloeistof heerschende drukverschillen,

d) inwendige wrijvingskrachten in de vloeistof (viscositeit).

De krachten *a*) zijn meesleepende, de krachten *b*) daarentegen remmende krachten. De drukkrachten veroorzaken een beweging van de vloeistof van gebieden, waar hooge druk boven — en dus ook in — de vloeistof heerscht, naar gebieden van lagen druk. Deze krachten kunnen dus zoowel meesleepend als remmend werken, alsook verplaatsingen loodrecht op de algemeene bewegingsrichting van de vloeistof, dus kromming van de stroomlijnen, veroorzaken.

Naast bovengenoemde krachten kan ook de zwaartekracht nog van invloed zijn op het stroomingsbeeld. Deze invloed zal alleen dan van belang zijn, wanneer de dikte van de vloeistoflaag, b.v. als gevolg van opstuwing, groote verschillen vertoont.

Met behulp van deze krachten is het mogelijk voor den vorm van het waargenomen stroomingsbeeld een verklaring te geven. In het onderstaande wordt dit gedaan voor de belangrijkste verschillen tusschen de stroomlijnen van de vloeistof en van de zich erboven bewegende lucht.

Alvorens echter over te gaan tot een nadere beschouwing van de verkregen stroomingsbeelden, wordt de aandacht erop gevestigd, dat de hier beschreven verschijnselen overeenkomst vertoonen met die bij stroomingen in grenslagen, echter met dit verschil, dat deze in het laatste geval beheerscht worden door één middenstof.

32. *Het stuwpunt voor den vleugelneus* (*S*).

De druk voor den vleugelneus is hoog en neemt naar voren toe (dus tegen de windrichting in) af. De drukkrachten hebben dus een remmenden invloed op de naar den vleugelneus stroomende vloeistof. De som van de remmende krachten (plaatwrijving en drukkrachten) wordt in de omgeving van den vleugelneus blijkbaar grooter dan de meesleepende krachten, zoodat de vloeistof in het punt S (zie fig. 1) tot stilstand komt. De in het punt S aangevoerde vloeistof moet weer afgevoerd worden en stroomt derhalve zijdelings weg naar gebieden van lageren druk.

33. *De bron op den vleugelneus.* (B_1)

In het gebied tusschen het stuwpunt S en den vleugelneus zijn de drukkrachten maatgevend voor de stroomingsrichting van de vloeistof (vgl. de verklaring van het stuwpunt). De vloeistof stroomt dus van het gebied met hoogen druk naar dat met lagen druk, d.w.z. van den vleugelneus af en tegen de windrichting in. In het punt S is evenwicht tusschen remmende en meesleepende krachten. De „binnenstrooming" buigt dus hier eveneens zijdelings af, voordat het punt S bereikt is.

34. *De richting van de „stroomlijnen" aan het vleugelboven- en ondervlak.*

De druk op het vleugelbovenvlak is lager, die op het ondervlak hooger dan in de ongestoorde strooming. In het eerste geval neemt de druk langs de normaal op het profiel toe en in het tweede geval af met toenemenden afstand tot het profiel. De drukkrachten stuwen de vloeistof dus naar den vleugelbovenkant toe en van den onderkant af.

Aan den bovenkant wordt de vloeistof zoo sterk tegen den vleugel opgestuwd, dat de breedte van het gebied der binnenstrooming tot nul gereduceerd wordt en ook de buiten-

strooming het vleugeloppervlak raakt. Aan het achterdeel van het profiel is de drukgradiënt langs de normaal op het profiel minder groot en kan de vloeistof het vleugeloppervlak weer verlaten. In het tegen den vleugel opgestuwde deel van de vloeistof zal ongetwijfeld vermenging van vloeistof uit de buiten- en binnenstrooming optreden. Het gevolg hiervan is, dat de plaats van de scheidingslijn tusschen buiten- en binnenstrooming op *fig.* 2, 3 *en* 4 *niet volkomen* gelijk is, terwijl dit voor de andere scheidingslijnen op de verschillende foto's steeds wel het geval is.

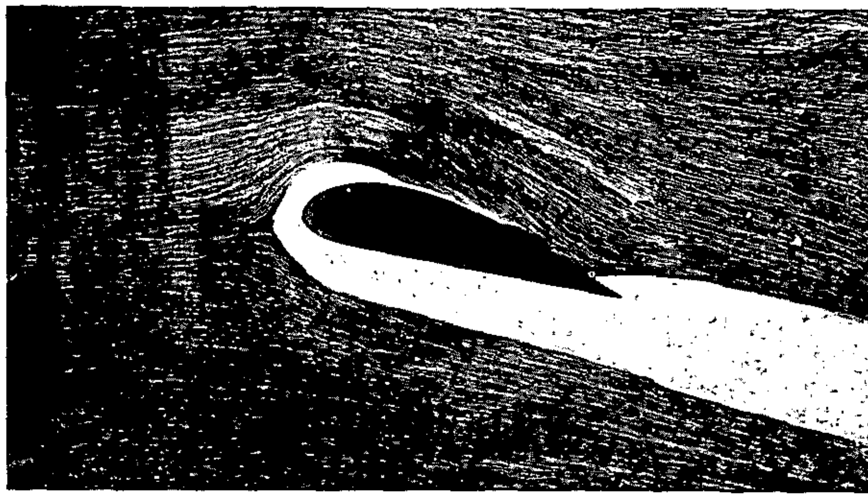


Fig. 3. De „buitenstrooming".

35. *De staartstrooming.*

Aan den achterrand van een vleugelprofiel is soms een klein gebied aanwezig, waarin de statische druk hooger is dan in de ongestoorde strooming[1]). Dit is blijkbaar ook bij het onderzochte profiel het geval. Direct achter het profiel divergeert de staartstrooming daardoor vrij snel, daarna blijft de breedte van dit gebied praktisch constant.

De zwaartekracht heeft een soortgelijken invloed op de strooming in het staartgebied. Deze is echter niet de eenige of belangrijkste oorzaak van het gedrag van die strooming, want bij den in fig. 4 gegeven stroomingstoestand blijft het gebied van de staartstrooming juist vrij van vloeistof, hetgeen zeker niet door den invloed van de zwaartekracht kan worden verklaard.

4. *Door andere onderzoekers gedane waarnemingen met de hier beschreven methode van zichtbaar maken.*

Aan het eind van dit rapport zijn enkele publicaties vermeld, waarin proeven beschreven zijn, waarbij van de hier beschouwde of een soortgelijke methode van zichtbaar maken van stroomingen gebruik is gemaakt. De meeste van de auteurs merken op, dat het verkregen stroomingsbeeld niet juist is, zonder er een verklaring voor te geven. In twee gevallen (lit. 5 en 8) wordt gewezen op den invloed van statische drukverschillen op het stroomingsbeeld.

5. *Conclusies.*

a) Door op de strooming begrenzende wanden of op in de strooming gebrachte platen een vloeistof, vermengd met een fijn verdeelde vaste stof (b.v. petroleum met lampenzwart) aan te brengen, is het mogelijk een stroomingsbeeld te verkrijgen.

b) Het onder a) genoemde stroomingsbeeld kan in de omgeving van wanden en van in de strooming geplaatste lichamen sterk van het stroomingsbeeld, dat men zichtbaar wenscht te maken, afwijken.

c) De onder b) genoemde verschillen worden veroorzaakt, doordat op de vloeistof in het algemeen andere krachten werken dan op de er langs stroomende lucht. Het verloop van den statischen druk in de luchtstrooming heeft in het bijzonder een belangrijken invloed op de vloeistofstrooming.

d) De in conclusie a) genoemde methode van zichtbaar maken van strooming geeft dan ook in het algemeen geen juiste stroomingsbeelden.

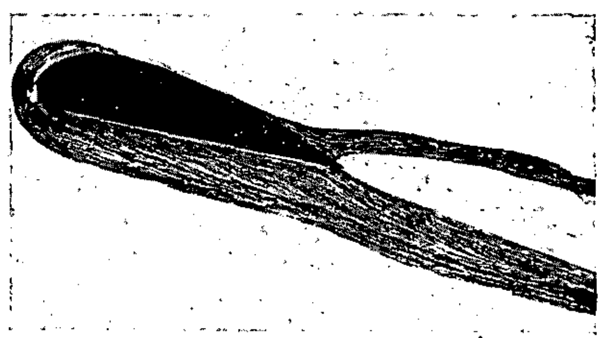


Fig. 4. De „binnenstrooming".

Foto's N.L.L.

Fig. 5. De „staartstrooming".

6. *Literatuuropgave.*

1. Fales, E. N.: Visual study of flow discontinuity on 6×13". 15 cylindrical camber airfoil. *Air Service Information Circular* 564 (1926).

2. Gough, M. N. and Johnson, E.: Methods of visually determining the airflow around airplanes. *N.A.C.A. Technical Note* 425 (1932).

3. Hinderks, A.: Nebenströmungen in gekrümmten Kanälen. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 1927, S. 1779.

4. Kam, W. H.: Experimenteel onderzoek van vloeistofstroomingen langs de wanden van roteerende kanalen. *De Ingenieur* 1935, blz. W. 71.

5. Klein, G. J., Tupper, K. F. and Green, J. J.: The design of corners in fluid channels. *Canadian Journal of Research* 1930, p. 272.

6. Kopp, A.: Ermittlung räumlicher Strömungsvorgänge mit Hilfe des Farbanstrichverfahrens. Dissertatie 1933.

7. Weick, F. E.: Study of open jet windtunnel cones. *N.A.C.A. Technical Note* 260 (1927).

8. Winter, H.: Strömungsvorgänge an Platten und profilierten Körpern bei kleinen Spannweiten. *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* 1935, S. 40.

Afgesloten Mei 1941.

[1]) Zie o.a. Göttinger Ergebnisse II, 1923, S. 77.

Report A 810.

A method of visualising flows.

Summary.

In this report is described a method of making flows visible. The body, around which the fluid-motion is to be visualised, is placed on a sheet of plate glass which is coated with a mixture of petroleum and lamp-black. When the plate is brought into an airstream, the excess of liquid is carried off by the wind, the flow-pattern being traced in the remaining solid particles. When the whole surface of the plate is covered with the mixture, the pattern of fig. 2 is obtained. This result does not correspond with the flow existing around the aerofoil parallel to the plate. The flow-pattern consists of three separate parts (marked in fig. 1 with I, II and III), each of which can also be obtained separately as given in the fig. 3, 4 and 5. At some distance in front of the nose of the aerofoil a stagnation point is formed in the flow (S in fig. 1) while sources arise at the nose (B_1 in fig. 1) as well as at the trailing edge (B_2 in fig. 1). The streamlines seem to arise from the outline of the profile and to end in it.

The difference between the obtained flowpattern and the flow which is to be made visible, is caused by the difference which generally exists between the forces acting on the fluid on the glass-plate and those in the flow around the aerofoil. In this report the peculiar course of the streamlines is explained by means of the forces acting on the fluid.

The results obtained are leading to the conclusion, that in general the above-mentioned method does not give a correct flow-picture.

Bericht A 810.

Ein Verfahren zur Sichtbarmachung von Strömungen.

Zusammenfassung.

Im vorliegenden Bericht wird ein Verfahren zur Sichtbarmachung von Strömungen beschrieben. Hierzu wird der Körper, um den man das Strömungsbild sichtbar zu machen wünscht, auf eine Glasplatte aufgestellt, die mit einer Mischung von Petroleum und Kienrusz bestrichen worden ist. Wird nun die Platte in eine Luftströmung gebracht, so wird die Flüssigkeit vom Winde mitgeführt und zeichnen sich in den zurückbleibenden festen Teilchen „Stromlinien" ab.

Wird die ganze Scheibe mit der Flüssigkeit bestrichen, dann entsteht das Bild in Abb. 2. Das Bild stimmt nicht mit der wirklichen Strömung um das Flügelprofil überein. Es besteht aus drei getrennten Gebieten (in Abb. 1 mit I, II und III bezeichnet), die auch separat erzielt werden können, wie die Bilder 3, 4 und 5 zeigen. In einiger Entfernung vor der Flügelnase bildet sich in der Strömung ein Staupunkt (S in Abb. 1), während an der Nase (B_1 in Abb. 1) und an der Flügelhinterseite (B_2 in Abb. 1) Quellen entstehen. Die Stromlinien scheinen dem Profilumrisz zu entspringen und darin zu enden.

Die Ursache der Unterschiede zwischen der Strömung die man sichtbar zu machen wünscht und dem erzielten Strömungsbild liegt darin, dasz die auf die Flüssigkeit ausgeübten Kräfte den Kräften auf die um das Profil fliessenden Luftteilchen ungleich sind. In diesem Bericht wird der eigentümliche Verlauf der erlangten Stromlinien erklärt aus den auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften.

Die erzielten Ergebnisse führen zur Folgerung, dasz das besprochene Verfahren im allgemeinen kein richtiges Strömungsbild liefert.

RAPPORT A 832.

Beproeving van windtunnel 2 van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium.

door

ir. A. DE LATHOUDER en ir. S. I. WISELIUS.

Overzicht.

Van windtunnel 2, d.i. het model op schaal 1 : 10 van de groote windtunnel (3), wordt een korte beschrijving gegeven. De resultaten van de beproeving, die uitgevoerd werd om vóór den bouw van windtunnel 3 zooveel *mogelijk gegevens* ter toetsing van het ontwerp te verkrijgen, worden gegeven. Daarbij wordt speciaal aandacht besteed aan die grootheden en eigenschappen, die bij grootere windtunnels niet of slechts met groote moeite bepaald kunnen worden en waarover dientengevolge in de literatuur vrijwel geen gegevens bekend zijn.

Indeeling.

1. Inleiding.

Tijdens het ontwerp van windtunnel 3 van het N.L.L. (*lit.* 1) werd de behoefte gevoeld aan een aantal gegevens ter contrôle van het ontwerp en wel voordat met den bouw van die tunnel werd begonnen. Wijzigingen in den vorm van een tunnel brengen als regel zeer hooge verbouwingskosten met zich mede. Er was dus alle reden het risico, dat achteraf zou blijken, dat de vorm van de tunnel gewijzigd zou moeten worden, tot een minimum te beperken door een model van de tunnel te vervaardigen en dit model te beproeven.

Daardoor was het ook mogelijk het schroefontwerp te controleeren, terwijl verder gegevens verkregen werden over den invloed van verstelling van de hoekschoepen en van de bladen van de schroef op de strooming door de tunnel. Hiervan zou later, bij eventueel blijkende noodzakelijkheid van verstelling van deze onderdeelen, een nuttig gebruik gemaakt kunnen worden.

Bovendien heeft het bouwen van een model het voordeel, dat ook de invloed van onderdeelen als gelijkrichter en vanggaas op de kwaliteit van de strooming gemeten kan worden, hetgeen bij de werkelijke tunnel niet het geval is. Bij het model zijn deze onderdeelen namelijk demonteerbaar, terwijl zij in de groote tunnel vast ingebouwd zijn.

In het volgende zullen slechts een deel van de uitkomsten van de uitvoerige beproeving van het model, dat als windtunnel 2 aangeduid wordt, beschreven worden. In hoofdzaak zijn die resultaten gegeven, welke in de literatuur niet of slechts sporadisch voorkomen.

2. Beschrijving van de windtunnel.

Windtunnel 2 is een model van windtunnel 3 (groote tunnel). Zij werd, zooals in punt 1 reeds is opgemerkt, gebouwd met het doel op een snelle en weinig kostbare wijze gegevens betreffende de luchtstrooming, de kanaalweerstand en de werking van het schroefaggregaat van tunnel 3 te verkrijgen.

De afmetingen van het model werden derhalve bepaald door den eisch, dat de aanbouw- en bedrijfskosten gering zouden zijn en de invloed van het schaaleffect op de metingsresultaten tot een minimum beperkt zou blijven. Op grond van die overwegingen werd het tunnelmodel uitgevoerd op schaal 1 : 10, terwijl de luchtsnelheid gelijk aan die van tunnel 3 zou zijn. Het getal van REYNOLDS wordt op deze *wijze 1/10 van dat van windtunnel 3.*

Met uitzondering van den gelijkrichter, het vanggaas en de schroefas is de inwendige vorm van het kanaal met de daarin opgestelde onderdeelen gelijkvormig aan dien van windtunnel 3. Voor een beschrijving van den kanaalvorm enz. kan derhalve verwezen worden naar *lit.* 1. In het volgende worden slechts enkele opmerkingen gemaakt over de constructie, enz. van tunnel 2.

De *gelijkrichter* werd, wegens moeilijkheden bij de vervaardiging, uitgevoerd met een plaatdikte van 0,3 mm (0,05 mm) en een maaswijdte van 10 mm (6 mm), het *vanggaas* met een draaddikte van 0,3 mm (0,2 mm) en een maaswijdte van 9 mm (5 mm), de *schroefas* met een diameter van 36 mm (10,9 mm); bij deze laatste werd de ondersteuning in het midden weggelaten. De hier tusschen haakjes genoemde maten zijn die van windtunnel 3 op schaal 1 : 10.

Het *omloopkanaal* werd vervaardigd van 10 mm dik multiplex. Ter vergemakkelijking van de toegankelijkheid werd het opgebouwd uit verschillende losneembare mooten. De deelvlakken tusschen deze mooten staan loodrecht op de kanaalhartlijn. De kanaalwand werd inwendig geplamuurd en witgeschilderd; op deze wijze wordt de wandwrijving zoo klein mogelijk gehouden en is door de witte kleur de strooming met behulp van windvaantjes goed gade te slaan. Het kanaal werd uitwendig op verschillende plaatsen met spanten verstijfd. Voor het inbrengen van meetinstrumenten werden op een aantal plaatsen in elk der zijwanden en bij elk der vier rijen hoekschoepen doorvoergaten aangebracht, waarin de instrumenten met hun geleidingen en vastzetinrichtingen pasten. Om met behulp van windvaantjes het gedrag van den luchtstroom in het omloopkanaal te kunnen observeeren, zijn op de meest belangrijke plaatsen vensters in de wanden aangebracht.

Fig. 1. Windtunnel 2 van het N.L.L. in zijn definitieve opstelling. *Foto N.L.L.*

De groote *uitstroomtuit* (afm. 300 × 400 mm) werd uit gebogen triplex vervaardigd, de kleine uitstroomtuit (afm. 210 × 300 mm) uit koperplaat. Deze koperen tuit is losneembaar op de groote uitstroomtuit bevestigd. De kanaaltoestanden met en zonder de kleine tuit zullen in het volgende met kleine resp. groote meetplaats worden aangeduid.

De *opvangtrechter* is verstelbaar en van multiplex vervaardigd met uitzondering van de naar buiten gebogen koperen mondstukken van de hoekplaten. Met een eenvoudige klemverbinding kunnen de opvangtrechterwanden in elken gewenschten stand aan een houten portaalconstructie worden vastgeklemd; de verstelmogelijkheid is zoodanig, dat de opvangtrechter zoowel voor de kleine als de groote meetplaats bruikbaar is. De hoekplaten worden elk met behulp van vier spiraalveeren buitenwaarts tegen de hoofdplaten getrokken. Door verwisseling van mondplaten is het mogelijk den opvangtrechter aan te passen aan de gesloten, respectievelijk de open meetplaats. Om bij de open meetplaats de, door den opvangtrechter opgevangen, overtollige hoeveelheid lucht te verwijderen, zijn in de zijwanden drie rijen gaten aangebracht.

Het *inzetstuk*, dat gebruikt wordt voor de metingen met gesloten meetplaats, is eveneens vervaardigd van 10 mm dik multiplex. Aan één zijde wordt het op de koperen tuit geschoven, aan de andere zijde door een, op het onderste deel van het omloopkanaal aangebrachte, stellage ondersteund. De wanden zijn evenwijdig en niet verstelbaar. In het midden van de zijwanden zijn twee vensters aangebracht; in doorsneden voor en achter de vensters bevinden zich doorvoergaten voor instrumenten.

Om een indruk te kunnen verkrijgen van de te verwachten luchtstrooming in de toekomstige meetruimte, werd ook een model van deze *meetkamer*, vervaardigd.

De *hoekschoepen* zijn vervaardigd uit in het juiste profiel gefraisd beukenhout. Elk der vier rijen hoekschoepen is vereenigd in een uitschuifbaar houten raam, waarin de schoepen draaibaar zijn bevestigd. Door middel van een stelschroef is het mogelijk alle schoepen gelijktijdig te verstellen; de grootte van deze verstelling is op een schijf buiten het kanaal afleesbaar.

Het schroefaggregaat, uitgevoerd volgens de eerste schroefberekening van prof. dr. J. M. BURGERS, bestaat uit een zes-bladigen schroef, opgesteld achter een elfbladig leidapparaat. Bij de vervaardiging van de schroefbladen bleek, dat de maximum profieldikte niet geringer dan 12% van de bladbreedte gemaakt kon worden; tengevolge van een misverstand werd verzuimd de instelhoek der betreffende bladelementen in verband hiermede te wijzigen. Vooral aan den tip, waar het grootste verschil in dikte aanwezig is (zie tabel 3), ontstond daardoor een verhoogde werking der bladelementen.

Het toerental van de, overigens aan de ware grootte uitvoering gelijkvormige, schroef is, aangezien de diameter slechts 1/10 bedraagt en de luchtsnelheid dezelfde zou zijn als bij windtunnel 3, 10 maal zoo groot als bij die tunnel en bedraagt 8500 omw/min (V/nD in beide gevallen gelijk). Om dit hooge toerental te bereiken werd aanvankelijk een tandwieloverbrenging (overbrengingsverhouding 140/24) tusschen den electromotor en de schroefas aangebracht; bij de definitieve opstelling is deze vervangen door een riemoverbrenging (450/80).

De *schroefaandrijving* geschiedt door een 440 Volt gelijkstroommotor (N = 10 pk, n = 1600 t/min), gevoed door het omvormeraggregaat van windtunnel 4. Goede fijnregeling werd verkregen door toepassing van de Ward-Leonard schakeling.

De tunnel werd, met uitzondering van het schroefaggregaat, door het N.L.L. vervaardigd. Het schroefaggregaat en de aanvankelijk gebruikte tandwieloverbrenging werden geleverd door de N.V. Machinefabriek „Jaffa", voorheen Louis Smulders en Co. te Utrecht. De bladen van de schroef en het leidapparaat werden gefraisd door het „Nederlandsch Scheepsbouwkundig Proefstation" te Wageningen.

In fig. 1 is een afbeelding van windtunnel 2, die thans hoofdzakelijk voor het ijken van instrumenten wordt gebruikt, in zijn definitieve opstelling gegeven.

3. De meetmethoden.

Het algemeene stroomingsonderzoek, d.w.z. het opsporen van plaatsen met min of meer onrustige strooming en het globaal bepalen van de stroomingsrichting (o.a. achter de hoekschoepen, vóór en achter de schroef, in de meetruimte en in de omgeving van opvangtrechter en uitstroomtuit) geschiedde met behulp van windvaantjes.

Het op constante luchtsnelheid regelen van de windtunnel geschiedde met behulp van een statisch drukkanaal, dat uitmondt in het omloopkanaal tusschen den gelijkrichter en de kanaalcontractie vóór de uitstroomtuit.

De stuwdruk- en statische drukmetingen, waarbij inbegrepen de metingen vóór en achter de schroef, werden uitgevoerd met een pitotbuis; de statische druk werd hierbij steeds gemeten t.o.v. den atmosferischen druk. Bij de schroefmetingen bevindt de pitotbuis zich in een strooming waarvan de richting op vele plaatsen aanzienlijk afwijkt van de hartlijn van het omloopkanaal. Dit heeft een foutieve aanwijzing van de pitotbuis tengevolge; de metingen ter plaatse bleken dan ook op slechts ± 0,04 q_{gem} nauwkeurig.

De richtingsmetingen geschiedden met een richtingsmeter, bestaande uit een cirkelcylinder, waarin in een dwarsdoorsnede onder hoeken van 60° drie drukopeningen zijn aangebracht. De richtingsmeter werd bij de metingen in één vasten stand ten opzichte van de tunnel opgesteld. Uit de drukverschillen, gemeten tusschen de drie drukopeningen, werden met behulp van ijkgrafieken de aanstroomrichting en de windsnelheid bepaald. Met dit type richtingsmeter is het slechts mogelijk de aanstroomrichting in een vlak loodrecht op de as van den cylinder te bepalen, doch niet de andere richtingscomponente.

De drukken werden gemeten met behulp van alcohol-micromanometers. Bij de uitwerking van de waarnemingen werden variaties in het s.g. van de alcohol en in de temperatuur in rekening gebracht.

Het *toerental* van de schroef werd met een Hasler-toerenteller gemeten.

De meetnauwkeurigheid bij de uitgevoerde metingen bedraagt, voor zoover niet anders vermeld is, voor den stuwdruk $\pm$ 0,3% q, den statischen druk $\pm$ 0,1% q, de snelheid $\pm$ 0,2% V en de windrichting $\pm$ 0,3°. De fout bij het meten van het toerental is te verwaarloozen.

4. Resultaten.

41. Algemeen.

Bij de in bedrijfstelling van de modeltunnel bleek de op de meetplaats bereikbare snelheid ruim 50 m/sec te zijn. Bij hoogere windsnelheden begon de tunnel in zijn geheel sterke trillingen uit te voeren, terwijl bovendien de tandwieloverbrenging te warm werd. In zijn definitieve opstelling is de tunnel goed verankerd aan het betonskelet van het tunnelgebouw en de tandwieloverbrenging vervangen door een riemtransmissie. In dezen toestand bedroeg de windsnelheid bij 8500 omw/min ongeveer 65 m/sec.

Verder werd reeds dadelijk na de in bedrijfstelling een tweede hinderlijk verschijnsel waargenomen en wel dat de druk in de opening, waarop de regelmanometer aangesloten is, van tijd tot tijd zich bij gelijkblijvende windsnelheid plotseling iets wijzigt. Dit is hetzelfde verschijnsel, dat bij windtunnel 3 (zie *lit.* 2; punt 61) werd waargenomen en waarvoor nog geen verklaring werd gevonden.

Voor de eischen, die aan de kwaliteit van de strooming in een windtunnel gesteld moeten worden, kan verwezen worden naar rapport A 796, punt 4 (*lit.* 2). Zij luiden voor de meetplaats in het kort: statische-drukverloop langs de hartlijn minimaal, snelheidsverdeeling over een dwarsdoorsnede constant, richting van den wind evenwijdig aan de hartlijn en turbulentiegraad laag. De turbulentiegraad werd nog niet gemeten, daar de straalafmetingen te klein zijn voor metingen met bollen en de apparatuur voor het meten van turbulentie met gloeidraden nog niet ver genoeg ontwikkeld is.

Behalve metingen in den luchtstraal op de meetplaats werden ook metingen verricht in het omloopkanaal en wel in het bijzonder achter de hoekschoepen en voor en achter de schroef. Deze worden in de volgende punten nader besproken.

Het grootste deel der metingen werd uitgevoerd bij den volgenden toestand van de tunnel:

Meetkamer	: niet aanwezig
Meetplaats	: open
Uitstroomtuit	: klein; 210 × 300 mm
Opvangtrechteropening	: 265 × 355 mm
Gaten in den trechter	: open
Stand hoekschoepen	: zie tabel 1 onder oorspronkelijk
Stand schroefbladen	: zie tabel 3 onder oorspronkelijk
Gelijkrichter en vanggaas	: afwezig
Windsnelheid	: 41 m/sec in de kleine en 25 m/sec in de groote meetplaats

Slechts indien de tunneltoestand van den hieromschreven afwijkt wordt dit afzonderlijk vermeld.

Bij gebruik van de groote uitstroomtuit (300 × 400 mm) werd steeds een opvangtrechteropening van 330 × 430 mm toegepast.

De verdeelingen gegeven in de fig. 3, 5 t/m 8 en 11 t/m 15 zijn alle gezien in de richting met den wind mee. De coördinaten x, y en z geven den afstand van het meetpunt tot respectievelijk de uitstroomzijde van de tuit, het symmetrievlak van de tunnel en het vlak door de tunnelhartlijn, dat loodrecht op dit symmetrievlak staat. De laatste twee coördinaten zijn nul in de tunnelhartlijn.

42. Het stroomingsonderzoek in het omloopkanaal.

421. *Het stroomingsonderzoek met windvaantjes.*

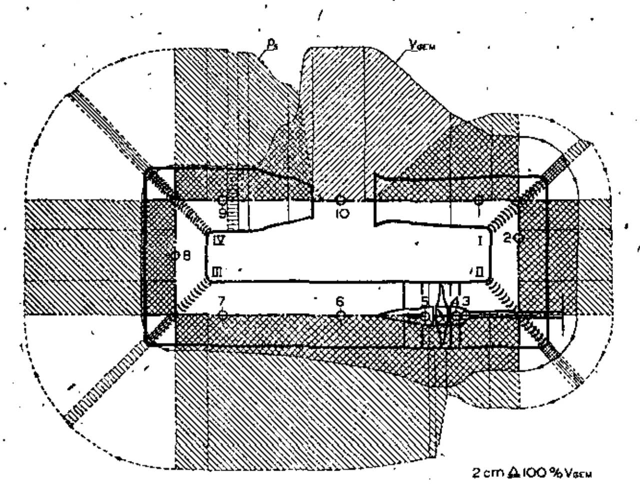
Het globale stroomingsonderzoek met behulp van windvaantjes wees uit, dat, met uitzondering van eenige plaatsen met wervelende strooming, gelegen in de hoeken van het omloopkanaal, de strooming regelmatig is. Aan de rugzijde van de hoekschoepen werd waargenomen, dat, op ongeveer de halve koorde vanaf den voorrand, neiging tot loslating bestaat; daarachter is een dunne luchtlaag met geringe wervelbeweging aanwezig.

Aan de onderzijde van de schroefas is de strooming, waarschijnlijk als gevolg van de schaduwwerking van deze relatief dikke as, sterk wervelend. Langs de stroomlijnvormige bekleeding van de schroefnaaf en de vier gestroomlijnde pooten ligt de strooming goed aan, achter de schroefnaaf is echter een gebied met werveling aanwezig. Op grooteren afstand van de naaf wordt dit gebied kleiner en neemt de sterkte der werveling af.

De strooming in de gesloten meetplaats is zeer rustig; evenzoo in de open meetplaats, zoowel met de groote als de kleine straaldoorsnede. In het randgebied tusschen de bewegende en de stilstaande lucht treedt een wervellaag op, die zich op grooteren afstand van de uitstroomtuit zoowel binnenwaarts als buitenwaarts uitbreidt. Trillingen of pulsaties zijn, zoowel met als zonder de om de meetplaats gemonteerde meetkamer, niet waargenomen. De luchtstrooming in de meetkamer is buiten den straal en het randgebied gering en gaf geen aanleiding een voor de waarnemers in de werkelijke tunnel hinderlijken tocht te verwachten.

422. *De stuwdrukmetingen.*

Het berekende verloop van de snelheid en de statische druk in het omloopkanaal is in fig. 2 gegeven. Het snelheidsverloop volgt uit de continuïteitsvoorwaarde; bij de berekening van het drukverloop werd rekening gehouden met den weerstand van het kanaal en de erin opgestelde onderdeelen, die op grond van literatuurgegevens zoo goed mogelijk geschat werd, en werd ervoor gezorgd, dat de som van deze verliezen gelijk is aan den bij de proeven bepaalden druksprong in het schroefvlak. In fig. 3 zijn de resultaten van de metingen langs de hartlijnen (loodrecht op het symmetrievlak van de tunnel) van de in fig. 2 aan-



Teekening N.L.L.

Fig. 2. Het berekende verloop van de snelheid V_{gem} en den statischen druk p_s in het omloopkanaal. //// snelheidsverloop, \\\\ drukverloop.

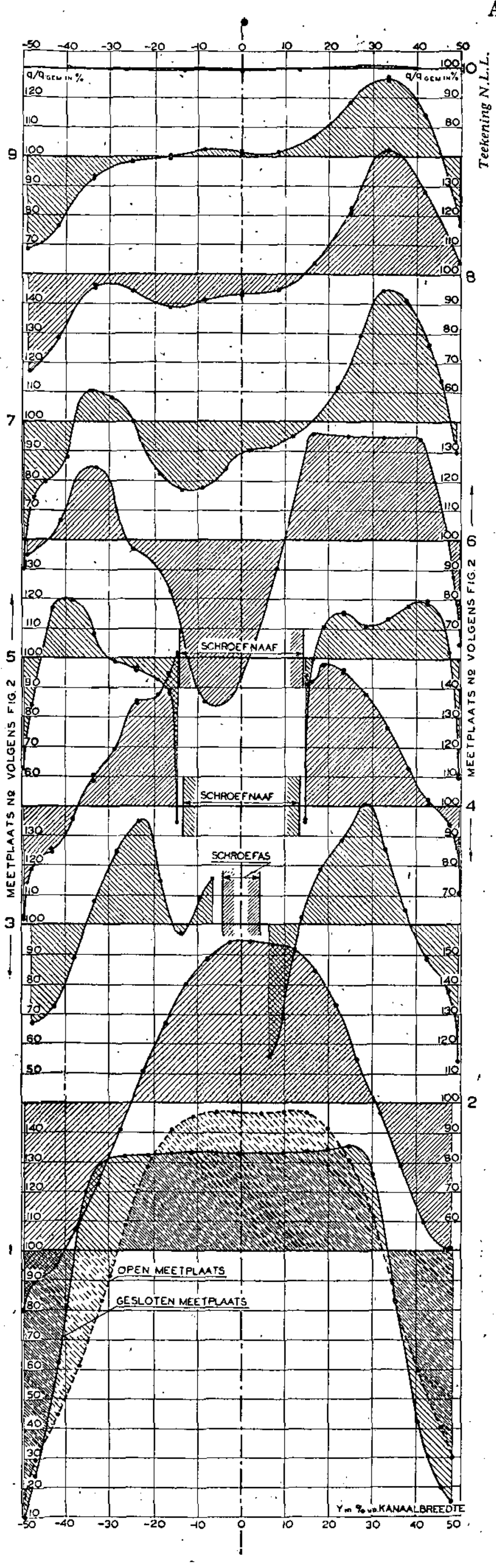
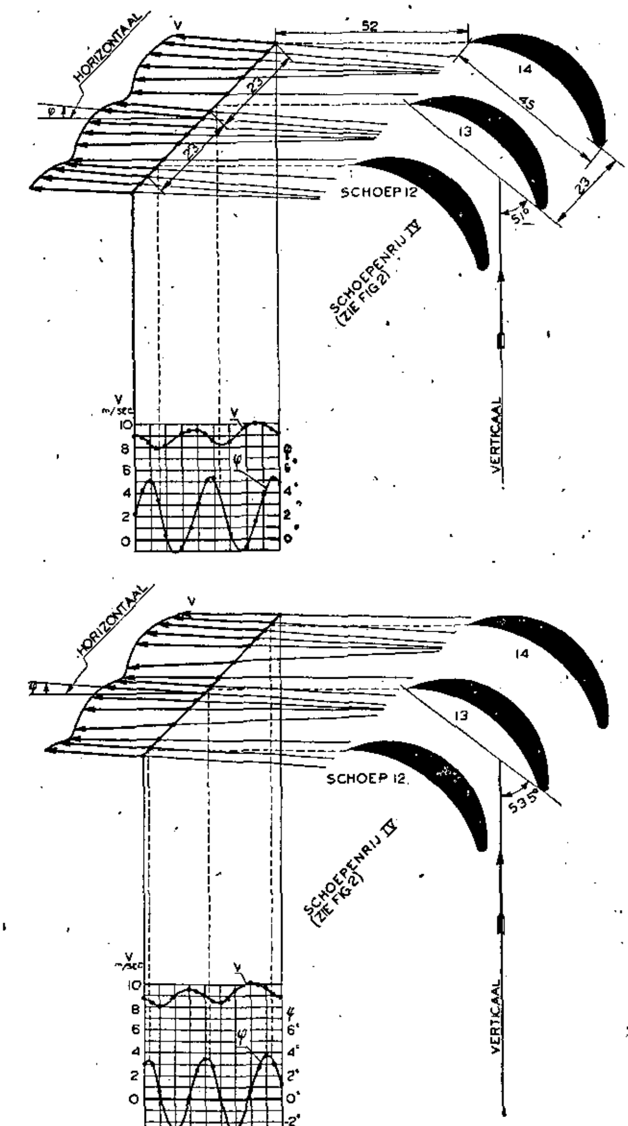


Fig. 3. De stuwdrukverdeeling langs de hartlijnen (loodrecht op het symmetrievlak der tunnel) van 10 doorsneden van de windtunnel.

gegeven doorsneden weergegeven. Opgemerkt zij, dat deze verdeelingen zijn uitgezet op de dimensieloos gemaakte kanaalbreedte. Hoewel de kanaalbreedten in de doorsneden onderling verschillen, wordt daardoor bereikt, dat „overeenkomstige snelheden" op dezelfde verticaal zijn uitgezet. De figuur laat zien, hoe de kern van regelmatige strooming, afkomstig van de open of gesloten meetplaats 10, bij het doorloopen van het kanaal kleiner wordt (meetplaats 1 en 2). Het vertragende effect van de schroefas (meetplaats 3) is zichtbaar. Door de aanwezigheid van de dikke schroefnaaf wordt de luchtstroom, in de nabijheid daarvan, sterk versneld (meetplaats 4); er is dus geen sprake van een uniforme snelheidsverdeeling vóór het schroefaggregaat. Door de schroef wordt de stuwdrukverdeeling (meetplaats 5) geheel gewijzigd; gebieden met geringen stuwdruk vóór de schroef worden gewijzigd in gebieden met hoogen stuwdruk en omgekeerd. Voor de verklaring van dit verschijnsel kan naar punt 43 worden verwezen. Ook blijkt in deze doorsnede een zekere asymmetrische stuwdrukverdeeling te zijn ontstaan. Achter de schroefnaaf (meetplaats 6) is een gebied van sterk vertraagde strooming aanwezig, de ligging daarvan is eenigszins asymmetrisch; in



Teekening N.L.L.

Fig. 4. Het verloop van de snelheid V en de richting φ achter schoepenrij IV bij twee instelhoeken van de schoepen (Voor instelhoek = 51°: φ_{gem} = 2°; voor 53,5°: φ_{gem} = 0,5°).

de volgende doorsneden (7 t/m 9) blijkt dit gebied steeds meer af te vlakken. Het verschil in stuwdrukverdeeling op meetplaats 9 en 10 toont het effect van de kanaalcontractie; stuwdrukvariaties van 25 à 30% worden gereduceerd tot circa 1%.

423. *De richtingsmetingen.*

Voordat aangevangen werd met de richtings- en snelheidsmetingen achter de hoekschoepen werden deze laatste *zoodanig versteld (schoephoeken 3° grooter), dat de uit* de schoepenrijen tredende strooming op het oog horizontaal was (waargenomen met windvaantjes).

De resultaten van de daarna achter alle schoepenrijen uitgevoerde snelheids- en richtingsmetingen vertoonen alle een gelijkvormig beeld. Van het verloop van de richting en de snelheid wordt als voorbeeld die achter schoepenrij IV weergegeven (fig. 4). Op ruim een koorde afstand voorbij de hoekschoepen bezit de strooming een ongeveer sinusvormig richtingsverloop; de snelheidsverdeeling vertoont eveneens periodiek gebieden met vertraagde luchtsnelheid. De midden tusschen de schoepen doorstroomende lucht heeft een grootere snelheid (tot 10%) dan die, welke langs de schoepen stroomt en is gericht naar de gebieden met lage snelheid.

Bij de met behulp van windvaantjes bepaalde instelling der hoekschoepen (51°) varieert de stroomingsrichting van —1° tot +5°, met als gemiddelde +2° opwaarts; bij +2,5° verstelling der hoekschoepen varieert de stroomingsrichting van —2,5° tot +3,5° met als gemiddelde +0,5° opwaarts, 2,5° schoepverstelling blijkt dus gemiddeld 1,5° hoekverdraaiïng van de strooming ten gevolge te hebben. In tabel 1 worden de oorspronkelijke instelhoeken en die, welke na de richtingsmetingen als de meest juiste beschouwd worden, voor alle schoepenrijen gegeven. Tevens zijn daarin opgenomen de schoephoeken, die in tunnel 3 zijn toegepast.

TABEL 1.

Instelling van de hoekschoepen van tunnel 2 en 3.

Bocht No.[1]	Schoep No.[2]	Schoephoek [3]) Tunnel 2 Oorspronkelijk	Tunnel 2 Gewijzigd	Tunnel 3
I	alle	50°	52°	52°
II	1 ÷ 6	50°	52°	51° [4])
	7 ÷ 10	50°	52°	52° [4])
	11 ÷ 17	50°	52°	53° [4])
III	alle	49°	51°	51°
IV	alle	48°	52,5°	52,5°

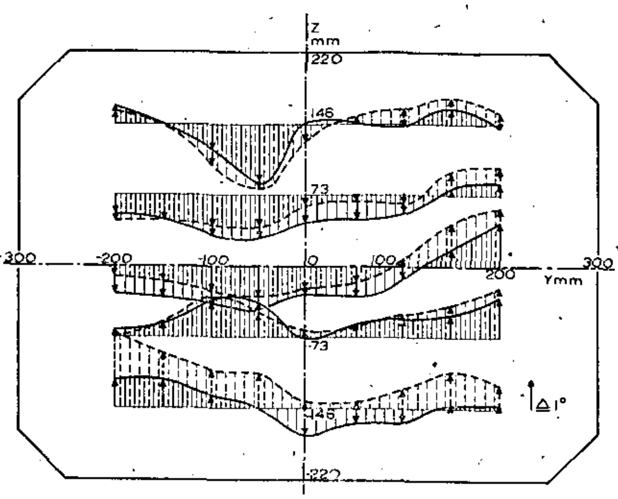
[1]) Voor bochtnummer zie fig. 2.

[2]) De schoepen in de tweede bocht zijn vanaf de onderzijde genummerd.

[3]) De schoephoek is de hoek tusschen de hartlijn van het tunnelbeen, dat — in de stroomingsrichting — vóór de schoep ligt en de schoepkoorde (zie fig. 4).

[4]) Het doel van het verschil in instelhoek bij deze schoepen was het snelheidstekort in de onderste helft van het kanaal te verminderen. (Bij tunnel 2 was het niet mogelijk de schoepen van één rij verschillende instelhoeken te geven).

De invloed van een verstelling der hoekschoepen op de stroomingsrichting in het omloopkanaal (meetplaats 9) wordt in fig. 5 weergegeven. De beschouwde doorsnede ligt op 320 mm afstand achter het midden van schoepenrij IV. Het algemeene stroomingsbeeld, d.w.z. de onderlinge richtingsverschillen der luchtdeeltjes, is door de schoepverstelling nagenoeg niet veranderd; de strooming als geheel verkreeg echter een andere richting. De tunnelwanden oefenden hierbij een richtenden invloed uit, zoodat op grooteren afstand van de hoekschoepen de richtingswijziging vermoedelijk geringer zal zijn. Bij een schoepverstelling van —1,5° wordt de geheele strooming in de hier beschouwde doorsnede gemiddeld 0,5° meer opwaarts gericht.



Teekening N.L.L.

Fig. 5. De verticale richtingsafwijkingen in het omloopkanaal in meetdoorsnede 9 (vóór de kanaalcontractie).
———— instelhoek van schoepenrij IV = 53,5°.
— — — — instelhoek van schoepenrij IV = 52°.

43. Het schroefonderzoek.

431. *Algemeen.*

De werking van het schroefaggregaat wordt eenerzijds beoordeeld naar het nuttig effect, anderzijds naar den geleverden druksprong en de kwaliteit van de strooming achter het schroefaggregaat. Het was niet mogelijk het nuttig effect van de schroef te bepalen, aangezien het schroefasvermogen niet nauwkeurig gemeten kon worden. Het onderzoek bleef daarom beperkt tot het stroomingsonderzoek.

Het schroefonderzoek werd uitgevoerd met de tunnel in normalen toestand (zie punt 41), behoudens de hiernagenoemde verschillen. Bij de metingen zonder vanggaas en gelijkrichter bedroeg de luchtsnelheid V_0 = 41 m/sec en 52 m/sec, de schroefbladinstelling was daarbij eerst gelijk aan de oorspronkelijke instelling (zie tabel 3) doch werd daarna gewijzigd met een bedrag van —1,7°. Bij de metingen met vanggaas en gelijkrichter bedroeg de luchtsnelheid weer normaal V_0 = 41 m/sec, doch de schroefbladen waren —1,7° versteld en de hoekschoepen waren ingesteld zooals in tabel 1 onder gewijzigd is vermeld.

432. *Het stroomingsonderzoek.*

In fig. 6 en 7 zijn de resultaten van de stuwdruk- en statische drukmetingen vóór en achter de schroef weergegeven. Door deeling door den stuwdruk, berekend uit de gemiddelde snelheid door het schroefvlak (q_{gem}), zijn *dimensielooze waarden verkregen. Uit de beide figuren* blijkt, dat vóór de schroef de hoogste snelheid voorkomt bij de naaf; achter de schroef — met uitzondering aan de bovenzijde (—Z-zijde) — daarentegen bij de buitenste deelen van den schroefcirkel. Dit gewijzigde stroomingsbeeld kan slechts tot stand zijn gekomen door de aanwezigheid van radiaal gerichte snelheidscomponenten, welke met den beschikbaren richtingsmeter echter niet gemeten konden worden. De statische druk vertoont slechts geringe afwijkingen van de gemiddelde waarde; de grootste druksprong treedt op aan de onderzijde van de schroef (+Z-zijde). Uit beide bovenstaande resultaten blijkt — hetgeen ook is aan te toonen door beschouwing van de snelheidsdiagrammen van een schroefbladelement — dat de schroef het meest werkzaam is op de plaatsen met de geringste aanstroomsnelheid. De verhoogde werking van het buitendeel van de schroef is ontstaan of wordt versterkt door de dikke bladprofielen ter plaatse (zie punt 2 en tabel 3). Daardoor is namelijk de lijn voor lift nul verdraaid zonder

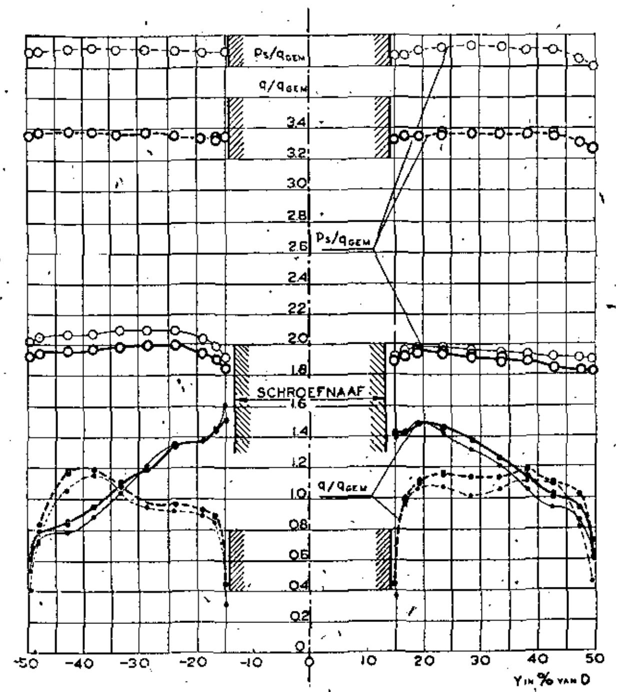


Fig. 6. De stuwdruk- en statische drukverdeeling vóór en achter de schroef gemeten langs de horizontale hartlijn van de kanaaldoorsnede, $V_o = 41$ m/sec.

Zonder gelijkrichter en vanggaas, Hoekschoepen in oorspronkelijken stand (zie tabel 1) Schroefbladen in oorspronkelijken stand (zie tabel 3)	——— gemeten vóór de schroef - - - - gemeten achter de schroef
Met gelijkrichter en vanggaas Hoekschoepen in gewijzigden stand (zie tabel 1) Schroefbladen —1,7° versteld (zie tabel 3)	——— gemeten vóór de schroef - - - - - gemeten achter de schroef

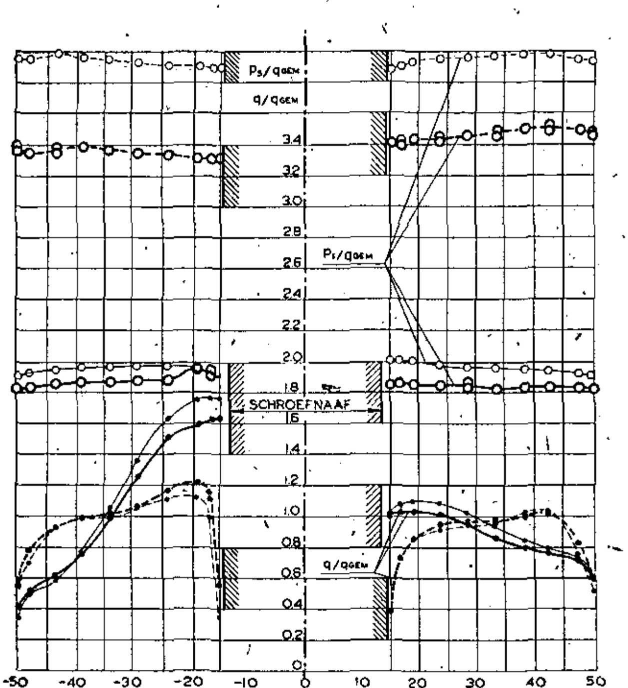


Fig. 7. De stuwdruk- en statische drukverdeeling vóór en achter de schroef gemeten langs de verticale hartlijn van de kanaaldoorsnede, $V_o = 41$ m/sec. De +Z-as wijst naar beneden, de —Z-as naar boven. Voor de beteekenis der lijnen en teekens zie fig. 6.

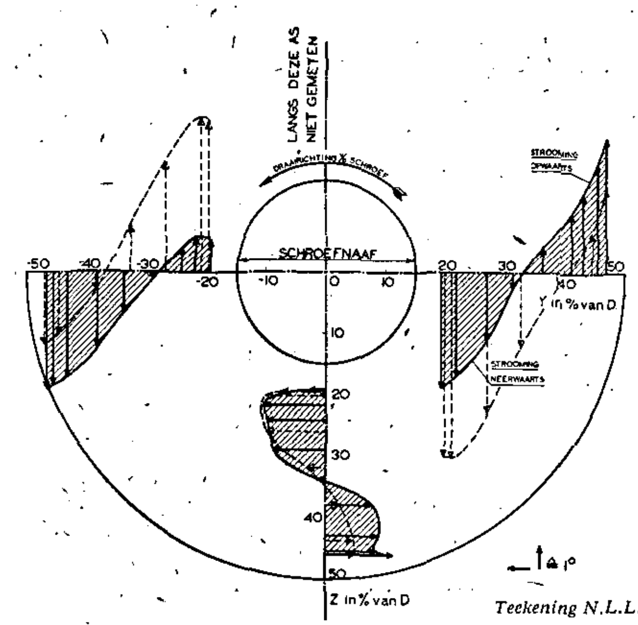


Fig. 8. De tangentiëele richtingscomponenten van de strooming achter het schroefaggregaat.
——— gemeten bij de oorspronkelijke instelling der schroefbladen (zie tabel 3).
- - - - - - gemeten bij een verstelling der schroefbladen van —1,7°.

dat de standhoek daarvoor gecorrigeerd werd, waardoor de invalshoek grooter is dan volgens het ontwerp noodig was.

Uit de richtingsmetingen (fig. 8) kan een overeenkomstige conclusie getrokken worden: de bladelementen van het leidapparaat geven aan den luchtstroom tangentieele snelheidscomponenten, welke tegengesteld gericht zijn aan de draairichting van de schroef. Deze blijken bij de naaf alle grootendeels nog aanwezig en dus niet geheel door de schroef gecompenseerd te zijn, bij den schroefring zijn echter tegengesteld gerichte snelheidscomponenten aanwezig; hier is de schroefwerking derhalve veel grooter.

Verstelling van den instelhoek der schroefbladen met —1,7° bleek geen noemenswaardige wijziging in de stuwdrukverdeeling te geven; de afwijkingen liggen binnen 1% *van den gemiddelden stuwdruk en zijn niet in fig. 6 en 7* weergegeven. De rotatiecomponenten achter de schroef werden door deze verstelling echter wel gewijzigd (zie fig. 8). Bovendien werd het schroeftoerental behoorende bij de windsnelheid van 40 m/sec daardoor verhoogd van 4870 tot 5330 t/min.

De aanwezigheid van gelijkrichter en vanggaas heeft meer invloed op de snelheidsverdeeling dan de schroefbladverstelling; in hoofdzaak is de verdeeling echter dezelfde gebleven. De stuwdrukverdeeling wordt dus blijkbaar beheerscht door den kanaalvorm in het algemeen.

De rotatiecomponenten achter het schroefaggregaat blijken in het omloopkanaal geheel te verdwijnen (vergelijk fig. 8 met 14 en 15).

433. *De verliesfactor van de windtunnel.*

Uit de stuwdruk- en statische drukmetingen bij de schroef kunnen, indien een regelmatig verloop van de snelheid en den statischen druk in tangentieele richting wordt verondersteld, op eenvoudige wijze de gemiddelde snelheid door het schroefvlak en de gemiddelde druksprong worden bepaald. Hierdoor is het mogelijk het verliesgetal van de windtunnel te berekenen. In het verliesgetal is hier *niet* inbegrepen het nuttig effect van het schroefaggregaat; het is derhalve niet direct vergelijkbaar met het verliesgetal van windtunnel 3 van het N.L.L., dat in *lit.* 2 gegeven is. Het hier gegeven verliesgetal is gedefinieerd door:

$$a' = \frac{16 \Delta p}{V_o^2}, \text{ waarin}$$

Δp = verschil van den statischen druk vóór en achter de schroef in kg/m^2 en
V_o = snelheid op de meetplaats in m/sec.

Onderstaande tabel geeft de waarde van dezen verliesfactor bij verschillende bedrijfstoestanden van tunnel 2.

TABEL 2.

Verliesfactor van tunnel 2 met kleine, open meetplaats.

Gelijkrichter en vanggaas	Schroefblad-instelling [5])	V_o in m/sec	a'
afwezig . . .	oorspronkelijk	40,8	0,357
afwezig . . .	oorspronkelijk	52,0	0,352
aanwezig . .	—1,7° versteld	40,8	0,417
Aangenomen bij de schroefberekening (η_{schr} = 0,86)			0,323
Gemeten bij windtunnel 3 (η_{schr} geschat = 0,86)			0,301

[5]) Zie tabel 3.

Hoewel het verliesgetal van de complete modeltunnel grooter blijkt dan bij het ontwerp werd aangenomen, werd bij de schroefberekening van windtunnel 3 hiermede geen rekening gehouden. Verwacht mocht worden, dat de weerstand van de windtunnel bij een hoogere waarde van het getal van Reynolds geringer wordt; een aanwijzing voor de juistheid van deze veronderstelling geeft ook reeds de afname van den verliesfactor bij toename van de snelheid van 40,8 m/sec tot 52,0 m/sec. Het bewijs van de juistheid werd bovendien achteraf geleverd door den geringeren verliesfactor, die windtunnel 3 bleek te bezitten.

Wel werd het schroefontwerp aangepast aan de in tunnel 2 gemeten statische druk- en snelheidsverdeeling vóór het schroefaggregaat, terwijl aan den luchtstroom bij de schroefnaaf extra bewegingsenergie medegedeeld werd (door bladhoekvergrooting) om de schaduwwerking van de stroomlijnvormige schroefnaaf te compenseeren. In tabel 3 worden de gegevens van het schroefaggregaat vóór en na de wijziging van het ontwerp gegeven.

44. Het stroomingsonderzoek op de meetplaats.

In de open meetplaats (zoowel de groote als de kleine) werd het stroomingsonderzoek uitvoerig verricht. In de gesloten meetplaats bleef het onderzoek hoofdzakelijk beperkt tot een stroomingsonderzoek met behulp van windvaantjes en enkele stuwdrukmetingen langs een horizontale en verticale hartlijn; de uitkomsten daarvan geven geen aanleiding tot bespreking. Tijdens dit en het verdere onderzoek waren de schroefbladen —1,7° versteld; bij de metingen met vanggaas en gelijkrichter was de instelling der hoekschoepen zooals in tabel 1 onder gewijzigd is vermeld.

441. *De drukgradiënt.*

De drukgradiënt langs de hartlijn van de groote en de kleine meetplaats is in fig. 9 gegeven. Daaruit blijkt, dat in de groote meetplaats bij de uitstroomtuit nog een aanzienlijke contractie in den luchtstroom aanwezig is, de druk verloopt daar namelijk nog sterk. Op circa 280 mm vanaf de uitstroomtuit bereikt de statische druk een minimum waarde en neemt vervolgens weer toe. Een statisch drukverloop van hoogstens 1% q_o komt alleen voor in het gebied van x_1 = 180 mm tot x_1 = 380 mm. Vergelijkt men dezen afstand met dien, waar een overeenkomstig statisch drukverschil in de kleine meetplaats voorkomt, nl. van x_1 = 230 mm tot x_1 = 440 mm (gerekend vanaf de groote uitstroomtuit) bij den gunstigsten toestand, dan blijkt, dat het gebied van gering drukverloop in de groote meetplaats, ondanks de grootere straallengte, zelfs iets kleiner dan in de kleine meetplaats is.

Bij de kleine meetplaats is de invloed op het statisch drukverloop van meerdere rijen gaten in den opvangtrechter nagegaan. De aanwezigheid van drie rijen gaten blijkt

TABEL 3.

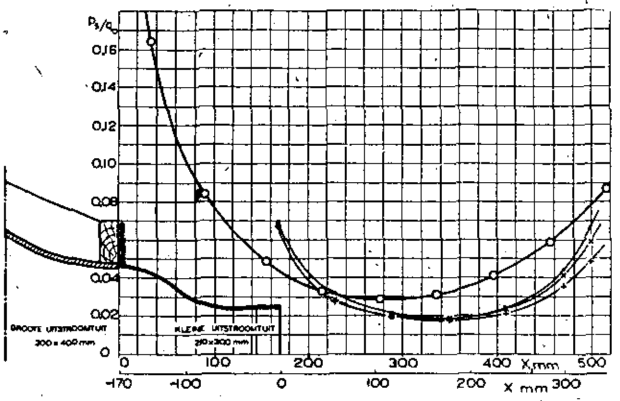
Gegevens van het leidapparaat en de schroef, zooals uitgevoerd in de windtunnels 2 en 3.

	$\frac{r}{R}$	Eerste ontwerp (Dec. 1938) [6]) n = 8500 t/min; V_o = 65 m/sec Uitgevoerd in windtunnel 2						Gewijzigd ontwerp (Oct. 1939)[6]) n = 850 t/min; V_o = 66,2 m/sec Uitgevoerd in windtunnel 3.			
		Profiel USNPS	t	d/t ontw.	d/t uitv.	α oorspr.	α versteld	Profiel USNPS	t	$\frac{d}{t}$	α
Leidapparaat 11 bladen	0,30	4	55	0,12	0,12	109,48	—	4	500	0,12	104,4
	0,44	4	51,25	0,12	0,12	104,38	—	4	500	0,12	98,6
	0,58	4	50	0,12	0,12	101,65	—	4	500	0,12	97,8
	0,72	4	50	0,12	0,12	99,92	—	4	500	0,12	99,8
	0,86	4	50	0,12	0,12	99,00	—	4	500	0,12	101,7
	1,0	4	50	0,12	0,12	98,48	—	4	500	0,12	103,4
Schroef 6 bladen	0,30	4 à 5 [7])	43,50	0,14	0,14	26,23	24,53	4 à 5 [7])	435,0	0,14	29,0
	0,44	4	28,44	0,12	0,12	21,10	19,40	4	284,4	0,12	22,0
	0,58	4	23,96	0,11	0,12	17,07	15,37	3 à 4 [7])	239,6	0,11	16,8
	0,72	4	21,49	0,10	0,12	14,20	12,50	3	214,9	0,10	14,0
	0,86	4	20,31	0,09	0,12	12,12	10,42	2 à 3 [7])	203,1	0,09	12,1
	1,0	4	19,34	0,08	0,12	10,70	9,00	2	193,4	0,08	10,8

r = straal waarop het beschouwde element zich bevindt.
R = *schroefstraal (0,21 resp. 2,10 m).*
t = profielkoorde (mm).
d = maximum profieldikte.
α = *bladhoek (hoek tusschen koorde en het* schroefvlak in graden).

[6]) Bij het gewijzigde ontwerp is uitgegaan van de verdeelingen van snelheid en druk, welke bij de metingen aan de modeltunnel waren gevonden. Het eerste ontwerp was daarentegen gebaseerd op de veronderstelling van een constante axiale toestroomsnelheid en een constanten statischen druk vóór het schroefaggregaat.

[7]) 4 à 5 beteekent een profielvorm, die het gemiddelde is tusschen profiel 4 en profiel 5.



Teekening N.L.L.

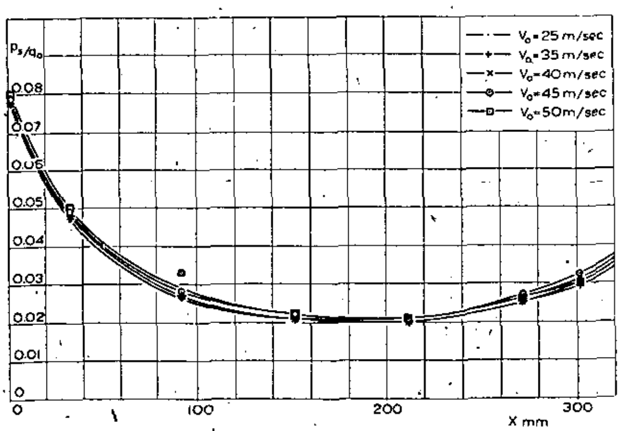
Fig. 9. Het verloop van den statischen druk langs de hartlijn van de groote en de kleine meetplaats.

—o— groote meetplaats (schroefbladen —1,7° versteld).
—•— kleine meetplaats (geen gaten in den opvangtrechter).
—×— idem, twee rijen gaten in den opvangtrechter.
—+— idem, drie rijen gaten in den opvangtrechter.

de waarde van den statischen druk bij den opvangtrechter vrij veel te verlagen, bij de uitstroomtuit is slechts een geringen invloed merkbaar. Naar aanleiding van deze uitkomst werd windtunnel 3, waarbij slechts twee rijen geprojecteerd waren, voorzien van een derde rij gaten.

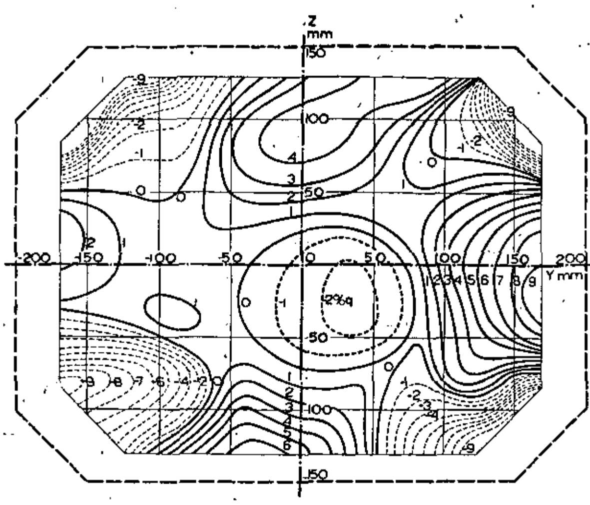
Opmerkelijk is, dat bij de kleine meetplaats de kleinste waarde van den statischen druk ongeveer 2% q_o, bij de groote meetplaats 3% q_o bedraagt, d.w.z., dat de druk in den open straal iets hooger is dan de atmosferische er buiten.

In fig. 10 is de invloed van de snelheid op het verloop van den statischen druk langs de hartlijn van de kleine meetplaats gegeven. Dit onderzoek vond plaats geruimen tijd na beëindiging van de beproeving van windtunnel 2 en wel naar aanleiding van het in windtunnel 3 waargenomen verschijnsel, waarbij het statisch drukverloop sterk door de luchtsnelheid werd beïnvloed. De snelheid kon bij deze metingen echter niet hooger dan circa 50 m/sec opgevoerd worden, zoodat geen volledig beeld van het verschijnsel werd verkregen. In het beschouwde snelheidsgebied (V_o = 25 m/sec tot 50 m/sec) wordt het verloop van den statischen druk vrijwel niet door de snelheid beïnvloed. Bij V_o = 45 m/sec treedt bij den opvangtrechter een nog juist merkbare verhooging van den statischen druk t.o.v. die bij V_o = 40 en 50 m/sec op. Dit zou een soortgelijk verschijnsel kunnen zijn als bij windtunnel 3 werd waargenomen (zie *lit.* 2, punt 62).



Teekening N.L.L.

Fig. 10. De invloed van de snelheid op den drukgradiënt langs de hartlijn van de kleine meetplaats (Stand hoekschoepen volgens tabel 1 onder „gewijzigd", drie rijen gaten in den opvangtrechter, gelijkrichter en vanggaas aanwezig, schroefbladen —1,7° versteld).



Teekening N.L.L.

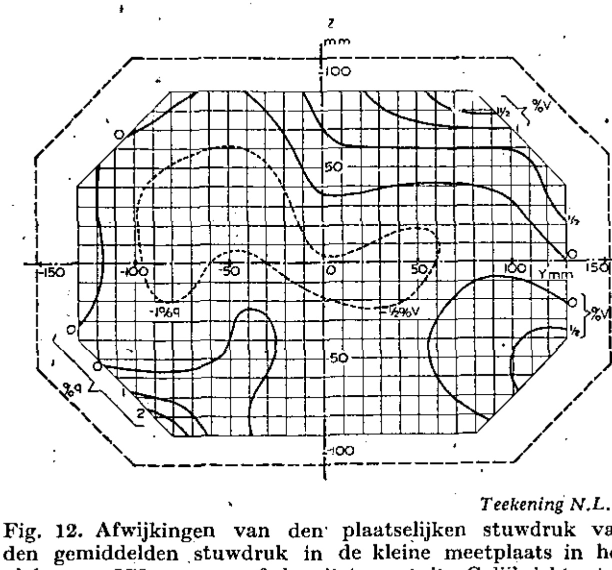
Fig. 11. Afwijkingen van den plaatselijken stuwdruk van den gemiddelden stuwdruk in de groote meetplaats in het vlak x_1 = 240 mm. (Schroefbladen —1,7° versteld).

442. *De stuwdrukverdeeling.*

De stuwdrukverdeeling over de straaldoorsnede werd in de groote meetplaats gemeten op een afstand x_1 = 240 mm vanaf de uitstroomtuit. In de kleine meetplaats werd gemeten bij af- en aanwezigheid van gelijkrichter en vanggaas op afstanden x = 178 mm resp. 175 mm vanaf de uitstroomtuit.

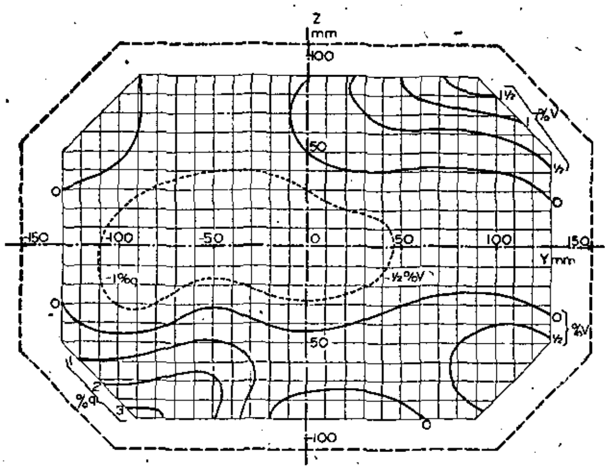
Bij de stuwdrukverdeeling in de groote meetplaats (fig. 11) blijken in de vier hoeken gebieden met lage, in het midden van de zijden van den omtrek daarentegen gebieden met hooge snelheid aanwezig te zijn. In de kern van den straal is een klein gebied van lagere snelheid aanwezig met als centrum y = +30 mm en z = —25 mm. Over het geheel wordt de indruk verkregen, dat de straalcontractie niet voldoende groot is om de, in het omloopkanaal aanwezige onregelmatigheden voldoende te vereffenen (vergelijk ook het stuwdrukverloop op meetplaats 9 in fig. 3 waar het gebied van hoogen stuwdruk aan de $+Y$-zijde overeenkomt met het gebied van hoogen stuwdruk op die plaats in fig. 11).

Op de kleine meetplaats vertoonen de stuwdrukverdeelingen gemeten bij af- en aanwezigheid van gelijkrichter en vanggaas — zooals te verwachten is — veel overeenkomst (zie fig. 12 en 13). Het gebied met lagen stuwdruk heeft in beide gevallen dezelfde asymmetrische ligging in de kern van den straal; de gebieden met hoogen stuwdruk bevin-



Teekening N.L.L.

Fig. 12. Afwijkingen van den plaatselijken stuwdruk van den gemiddelden stuwdruk in de kleine meetplaats in het vlak x = 178 mm vanaf de uitstroomtuit. Gelijkrichter en vanggaas niet aanwezig. (Schroefbladen —1,7° versteld).



Teekening N.L.L.

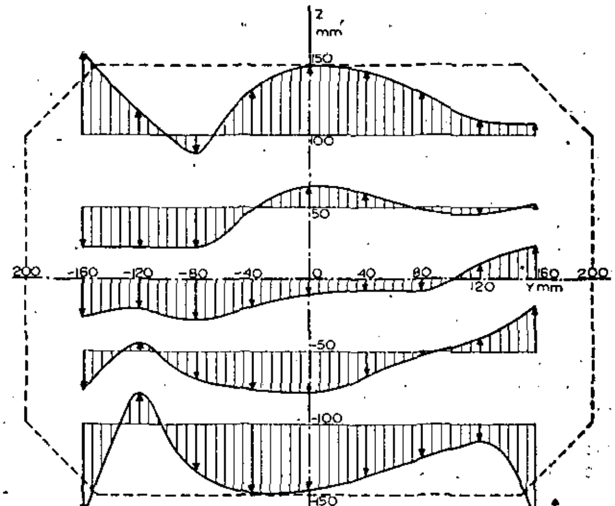
Fig. 13. Afwijkingen van den plaatselijken stuwdruk van den gemiddelden stuwdruk in de kleine meetplaats in het vlak $x = 175$ mm. Gelijkrichter en vanggaas aanwezig. (Schroefbladen —1,7° versteld, hoekschoepen in gewijzigden stand, zie tabel 1).

den zich in beide gevallen in den linkerbenedenhoek en den rechterbovenhoek. De aanwezigheid van gelijkrichter en vanggaas komt slechts tot uiting in een eenigszins gelijkmatiger verloop van de lijnen; zij is echter niet in staat de stuwdrukverschillen kleiner te maken.

443. *De richtingsafwijkingen.*

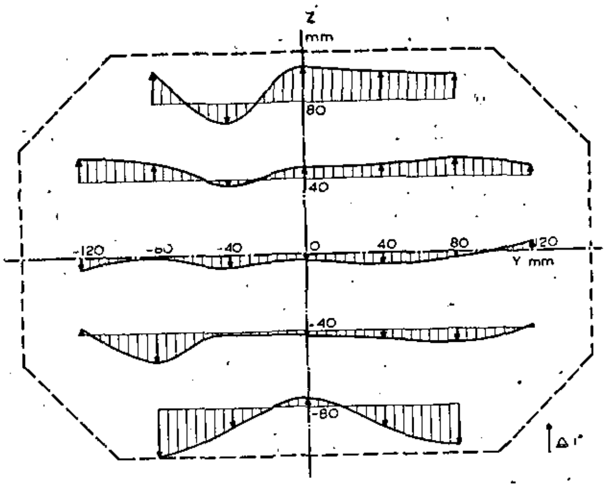
De verticale richtingsafwijkingen, welke in de groote en de kleine straaldoorsnede werden gemeten, worden in fig. 14 resp. fig. 15 weergegeven.

Het verloop met y van de richtingsafwijkingen in het midden van de groote meetplaats ($z = 0$) vertoont hetzelfde karakter als dat in het omloopkanaal in de doorsnede 9 voor $z = 0$ (zie fig. 5). In de groote en de kleine meetplaats zijn de afwijkingen echter in de bovenhelft van de doorsnede over het geheel meer opwaarts, in de onderhelft meer neerwaarts gericht. De grootte van de richtingsafwijkingen is in de groote meetplaats tengevolge van de straalcontractie echter niet afgenomen, eerst in de kleine meetplaats is door de grootere contractie een beduidende verbetering in dit opzicht merkbaar. Uit het statische drukverloop langs de tunnelhartlijn (fig. 9) is reeds gebleken, dat de divergentie langs de hartlijn eerst op grooteren afstand van de tuit optreedt. De richtingsmetingen (fig. 14 en 15) toonen echter



Teekening N.L.L.

Fig. 14. De verticale richtingsafwijkingen in de groote meetplaats in het vlak $x_1 = 245$ mm (Schroefbladen —1,7° versteld).



Teekening N.L.L.

Fig. 15. De verticale richtingsafwijkingen in de kleine meetplaats in het vlak $x = 140$ mm. (Schroefbladen —1,7° versteld).

aan, dat deze divergentie in de gebieden boven en onder de hartlijn reeds eerder aanwezig is.

De conclusie kan verder getrokken worden, dat de kleine meetplaats, gezien de geringe neerwaartsche en symmetrisch verloopende richting (—0,2°) van den luchtstroom langs de Y-as ook in dit opzicht, goed is voor het verrichten van ijkingen. De groote meetplaats echter, waarin aan de —Y-zijde de luchtstroom —1,3° neerwaartsch en aan de $+Y$-zijde tot +1,1° opwaartsch is gericht, daarentegen minder.

5. Conclusies.

Bij het onderzoek van de strooming in het omloopkanaal, bij het schroefaggregaat en in de meetplaats van windtunnel 2 zijn de volgende uitkomsten verkregen:

a. Het globale strömingsonderzoek met behulp van windvaantjes heeft uitgewezen, dat de strooming op de meetplaats, in de meetkamer en in het omloopkanaal, met uitzondering van die aan de onderzijde van de schroefas en die achter de stroomlijnvormige schroefnaaf, zeer rustig was. De onrustige en sterk vertraagde strooming onder de schroefas moet toegeschreven worden aan de relatief groote dikte daarvan, bij windtunnel 3 zal de strooming waarschijnlijk gunstiger zijn. Trillingen of pulsaties werden niet waargenomen (punt 421).

b. De stuwdrukmetingen in het omloopkanaal hebben aangetoond, dat de schroefas een groote schaduwwerking vertoont, evenals de stroomlijnvormige schroefnaaf. De strooming in het omloopkanaal heeft echter de neiging groote snelheidsverschillen te vereffenen, zoodat een gelijkmatiger strooming ontstaat (punt 422).

c. De werking van de hoekschoepen is goed, het stroomingsbeeld wordt bij het doorloopen van de hoekschoepen niet gewijzigd. Wijziging van den instelhoek van een schoepenrij geeft een gelijkmatige richtingsverandering van de strooming in het omloopkanaal: 2,5° schoepverstelling geeft 1,5° richtingsverandering aan de strooming vlak achter de schoepenrij en ongeveer 1° op eenigen afstand daarachter (punt 423).

d. Vóór noch achter de schroef is de snelheidsverdeeling gelijkmatig en evenmin rotatievrij. Schroefbladverstelling beïnvloedt de snelheidsverdeeling heel weinig, de rotatie daarentegen wel. Er blijken ter plaatse van het schroefaggregaat radiaal gerichte snelheden op te treden (punt 432).

e. In het schroefontwerp voor tunnel 3 werden correcties aangebracht

1e. voor de ongelijkmatige snelheidsverdeeling vóór de schroef,

2e. voor de schaduwwerking van de stroomlijnvormige schroefnaaf (punt 433).

f. Het was niet mogelijk het schroefasvermogen voldoende nauwkeurig te bepalen. Om deze reden werd de verliesfactor bepaald uit den druksprong in de schroef $\left(a' = \frac{16\triangle p}{V_o^2}\right)$ (punt 433).

g. De verliesfactor van de modeltunnel bedraagt 0,417, deze waarde is grooter dan bij het ontwerp van de ware grootte tunnel was aangenomen (0,323). De oorzaak wordt toegeschreven aan het lage getal van REYNOLDS. Bij het schroefontwerp voor tunnel 3 werd dan ook geen correctie op den aangenomen kanaalweerstand aangebracht (punt 433).

h. De stuwdrukverdeeling in de groote meetplaats vertoont een zekere asymmetrie, de afwijkingen van de gemiddelde waarde bedragen in het meetgebied tot circa $\pm$ 2%. De betrekkelijk geringe contractie blijkt niet voldoende te zijn om de onregelmatigheden van den luchtstroom in het omloopkanaal geheel te verwijderen (punt 442).

i. Bij de kleine meetplaats is de drukgradiënt gunstiger dan bij de groote; verbetering werd verkregen door het aanbrengen van een derde rij gaten in den opvangtrechter (punt 441).

j. De invloed van de snelheid op den drukgradiënt blijkt gering te zijn. (punt 441).

k. De stuwdrukverdeeling in het meetgebied van de kleine meetplaats vertoont, zoowel bij af- als aanwezigheid van den gelijkrichter, een zekere asymmetrie. De afwijkingen van de gemiddelde waarde bedragen in het meetgebied $\pm$ 1% (punt 442).

l. De aanwezigheid van den gelijkrichter is niet in staat de grootte van de snelheidsafwijkingen veel te verminderen (punt 442).

m. Zoowel bij de groote als de kleine meetplaats bevindt zich in het midden van de meetplaats een gebied van geringere snelheid; waarschijnlijk is zij het gevolg van de schaduwwerking van de stroomlijnvormige schroefnaaf (punt 442).

n. Bij de groote meetplaats zijn de verticale richtingsafwijkingen vrij groot, langs de Y-as varieeren zij van —1,3° tot +1,1°. De betrekkelijk geringe contractie is niet in staat de in het omloopkanaal aanwezige richtingsafwijkingen voldoende te verminderen (punt 443).

o. Bij de kleine meetplaats zijn, tengevolge van de groote contractie, de richtingsafwijkingen belangrijk verminderd; de richtingsafwijkingen langs de Y-as zijn gering (—0,2) (punt 443).

6. Notaties.

a'	=	verliesfactor van de windtunnel = $16\triangle p/V_o^2$.
V	=	snelheid in het meetpunt (m/sec).
V_o	=	snelheid in het hart van den straal op 285 mm afstand vanaf de groote of 200 mm vanaf de kleine uitstroomtuit (m/sec).
$\triangle p$	=	druksprong veroorzaakt door het schroefaggregaat (kg/m²).
q	=	stuwdruk in het meetpunt (kg/m²).
q_o	=	stuwdruk behoorende bij V_o (kg/m²).
q_{gem}	=	stuwdruk, berekend uit de gemiddelde snelheid door de beschouwde doorsnede (kg/m²).
p_s	=	statische druk (kg/m²).
x	=	afstand van het meetpunt tot de kleine uitstroomtuit (kleine meetplaats) (mm).
x_1	=	afstand van het meetpunt tot de groote uitstroomtuit (groote meetplaats) (mm).
y	=	afstand van het meetpunt tot het verticale symmetrievlak van de tunnel (mm).
z	=	afstand van het meetpunt tot het vlak loodrecht op het tunnel-symmetrievlak, dat gaat door de tunnelhartlijn (mm).
D	=	schroefdiameter (mm).

7. Literatuur.

1. DE LATHOUDER, A.: De groote windtunnel van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium. Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XI, blz. A 1.

2. DE LATHOUDER, A. en WISELIUS, S.I.: De beproeving van windtunnel 3 van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium. Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XI, blz. A 25.

Afgesloten Maart 1942.

Report A 832.

The calibration of windtunnel 2 of the Nationaal Luchtvaartlaboratorium.

Summary.

The report includes a short description of windtunnel 2, a one tenth scale model of windtunnel 3*) of the Nationaal Luchtvaartlaboratorium. The tunnel has been built to get information about the quality of the airstream in the tunnel, the drag of the tunnel and the working of the propeller set.

The results of the flow investigation in the return passage and in the large and the small jet proved to be satisfactory. In the large jet the variation in the velocitydistribution at the test section is about $\pm$ 1%; in the small jet about $\pm$ ½% of the mean value. The wind direction was horizontal within $\pm$ 1,2° (large jet) and —0,2° (normal jet).

The influence of the guide vane setting on the direction of the flow in the return passage has been studied, the right setting being determined.

The velocitydistribution before and behind the propeller set has been measured, the results being accounted for in the propeller design of the large tunnel. By measuring the increase in static pressure in the airscrew, it was possible to determine the power factor of the tunnel defined by $a' = \frac{16\triangle p}{V_o^2}$. The propeller efficiency is not included in this power factor, having a

*) Report A 795: „The large windtunnel of the Nationaal Luchtvaartlaboratorium" Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XI, p. A 1.

Bericht A 832.

Die Untersuchung des Windkanals Nr. 2 des Nationaal Luchtvaartlaboratoriums.

Zusammenfassung.

Eine kurze Beschreibung des Windkanals (Nr. 2), ein Modell im Maszstab 1 : 10 des geplanten Windkanals Nr. 3*) des Nationaal Luchtvaartlaboratoriums, wird gegeben. Das Modell wurde zur Bestimmung der Qualität der Strömung, des Kanalwiderstandes und der Wirkung des Gebläses während des Entwurfes des groszen Windkanals hergestellt.

Die Strömungsmessungen im Umlaufkanal und in der groszen und kleinen Versuchsstrecke sind zufriedenstellend. Im groszen Freistrahl (Abm. 300 × 400 mm) betragen die Abweichungen der Geschwindigkeit $\pm$ 1% des Mittelwertes, im kleinen Freistrahl (Abm. 210 × 300 mm) $\pm$ ½%. Die Strömungsrichtung weicht im groszen Freistrahl $\pm$ 1,2°, im kleinen —0,2° von der Horizontalen ab.

Der Einflusz der Umlenkschaufelverstellung auf die Strömungsrichtung im Umlaufkanal wurde untersucht und die richtige Einstellung ermittelt.

Vor und hinter dem Gebläse wurde die Geschwindigkeitsverteilung gemessen und das Ergebnis in der Schraubenberechnung der Groszausführung berücksichtigt. Durch Ermittlung der erzeugten Drucksprunges wurde die Leistungsbedarfzahl des Windkanals, die sich aus $a' = 16\triangle p/V_o^2$ ergibt,

*) Bericht A 795: „Der grosze Windkanal des Nationaal Luchtvaartlaboratoriums" Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XI, S. A 1.

value of 0,417. This factor is higher than that measured afterwards in the large tunnel**). The difference must be ascribed to the low REYNOLDS' number.

The windtunnel has been kept in service for calibrating instruments.

Symbols.

a' = power factor of the windtunnel $= \frac{16 \triangle p}{V_o^2}$.

V = velocity (m/sec).

V_o = velocity in the centerline of the jet at 285 mm distance from the large or 200 mm from the small entrance cone (m/sec).

$\triangle p$ = increase of static pressure in the propeller set (kg/m²).

q_o = dynamic pressure corresponding with V_o (kg/m²).

q_{gem} = dynamic pressure, calculated from the mean windvelocity in a cross section (kg/m²).

q = dynamic pressure (kg/m²).

p_s = static pressure (kg/m²).

x = distance of a point from the small entrance cone (mm).

x_1 = distance of a point from the large entrance cone (mm).

y = distance of a point from the plane of symmetry of the tunnel (mm).

z = distance of a point from a plane normal to the plane of symmetry of the tunnel and containing the tunnel-axis (mm).

D = diameter of the propeller (mm).

**) Report A 796: „The calibration of windtunnel 3 of the Nationaal Luchtvaartlaboratorium" Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XI, p. A 25.

bestimmt. Diese Zahl hat, also ohne Rücksicht auf den Wirkungsgrad der Schraube, einen Wert von 0,417. Die Leistungsbedarfzahl des groszen Windkanals zeigte sich nachher 0,301 zu sein; die Differenz ist der niedrigen REYNOLDschen Zahl zuzuschreiben.**)

Der Windkanal ist in Gebrauch geblieben für die Eichung kleinerer Instrumenten.

Formelzeichen.

a' = Leistungsbedarfzahl des Windkanals $= \frac{16 \triangle p}{V_o^2}$.

V = Geschwindigkeit (m/sec).

V_o = Geschwindigkeit in der Strahlmitte auf 285 mm Entfernung der groszen oder 200 mm der kleinen Düse (m/sec).

$\triangle p$ = Drucksprung im Schraubengebläse (kg/m²).

q_o = Staudruck gehörend zu V_o(kg/m²).

q_{gem} = Staudruck, berechnet aus der mittleren Windgeschwindigkeit in einem Kanaldurchschnitt (kg/m²).

q = Staudruck (kg/m²).

p_s = statische Druck (kg/m²).

x = Entfernung des Messpunktes bis zur kleinen Düse (mm).

x_1 = Entfernung des Messpunktes bis zur groszen Düse (mm).

y = Entfernung des Messpunktes bis zur Symmetrie-Ebene des Kanals (mm).

z = Entfernung des Messpunktes bis zur Ebene durch die Kanalachse und senkrecht zur Symmetrie-Ebene des Kanals (mm).

D = Schraubendurchmesser (mm).

**) Bericht A 796: „Untersuchung des Windkanals 3 des Nationaal Luchtvaartlaboratoriums" Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XI, S. A 25.

RAPPORT A 928.

De tunnelcorrectie voor een schroef in een „gemengde" tunnel.

II. De schroef, opgesteld in het vrijstraalgedeelte van de gemengde tunnel [1])

door

Ir. A. BOELEN en Ir. J. G. SLOTBOOM.

Overzicht.

De invloed van de straalbegrenzing op de eigenschappen van een in een windtunnel opgestelde schroef wordt berekend en wel voor het geval, dat de schroef zich bevindt in het vrijstraalgedeelte van een tunnel, die gedeeltelijk door vaste wanden en gedeeltelijk door een vrijstraaloppervlak is begrensd. Voor een enkel geval wordt het verloop van dezen invloed met de parameters, die het vraagstuk beheerschen, ook numeriek gegeven.

Indeeling.

1. Inleiding.

De beperkte doorsnede van den luchtstroom in een windtunnel heeft invloed op de eigenschappen van een daarin onderzochte schroef. Voor toepassing van de in windtunnels gemeten schroefkarakteristieken op vrij opgestelde schroeven moet derhalve voor dezen invloed een correctie worden aangebracht. Deze correctie is bekend voor het geval, dat de schroef in een geheel gesloten kanaal, dus in een tunnel met vaste wanden, is opgesteld (*lit.* 2) en voor het geval, dat zij in het scheidingsvlak van een gemengde tunnel staat (*lit.* 1). Onder gemengde tunnel wordt hier verstaan een tunnel, waarvan het voorste gedeelte begrensd is door een vasten wand en het achterste door een oppervlak van constanten druk, dus door een vrijstraaloppervlak en onder het scheidingsvlak het vlak, waarin de vaste wand eindigt.

In de practisch voorkomende gevallen zal de modelschroef evenwel als regel, hetzij in een gesloten tunnel worden opgesteld, hetzij in het vrijstraalgedeelte van een tunnel. Het is derhalve gewenscht ook voor dezen laatsten toestand de correcties te kennen. Daarom wordt in het volgende de schroef beschouwd, die opgesteld is in het vrijstraalgedeelte van een gemengde tunnel. Dit geval is weliswaar niet identiek met het bovenbedoelde practisch voorkomende — in het beschouwde geïdealiseerde geval wordt namelijk geen rekening gehouden met de aanwezigheid van een opvangtrechter, die bij een tunnel vrijwel steeds zal bestaan — doch er kan worden aangenomen, dat aldus berekende correcties de werkelijke aanzienlijk beter zullen benaderen dan de andere tot nu toe bekende.

Bij het vraagstuk, waarbij de schroef in het scheidingsvlak opgesteld gedacht is, moeten eenige veronderstellingen worden gemaakt om het voor berekening toegankelijk te maken. Deze zijn evenwel zeer voor de hand liggend en veroorzaken slechts verschillen van ondergeschikte beteekenis tusschen werkelijkheid en geïdealiseerd geval. Na het invoeren van deze veronderstellingen is het probleem oplosbaar, daar evenveel vergelijkingen kunnen worden opgesteld als er onbekenden zijn.

Anders is dit evenwel bij de schroef opgesteld in het vrijstraalgedeelte. Ook daarbij moeten dezelfde algemeene veronderstellingen worden gemaakt, doch daarna is het aantal vergelijkingen, dat opgesteld kan worden één kleiner dan dat der onbekenden. De oorzaak hiervan is, dat niet door eenvoudige berekening kan worden bepaald, welken invloed de schroef zal hebben op snelheidsverdeelingen in vlakken op eenigen afstand voor de schroef. Om toch tot een oplossing te geraken moet voor dit geval daarom nog een veronderstelling worden ingevoerd, die een veel grooteren invloed op de uitkomsten van het onderzoek kan hebben dan de overige.

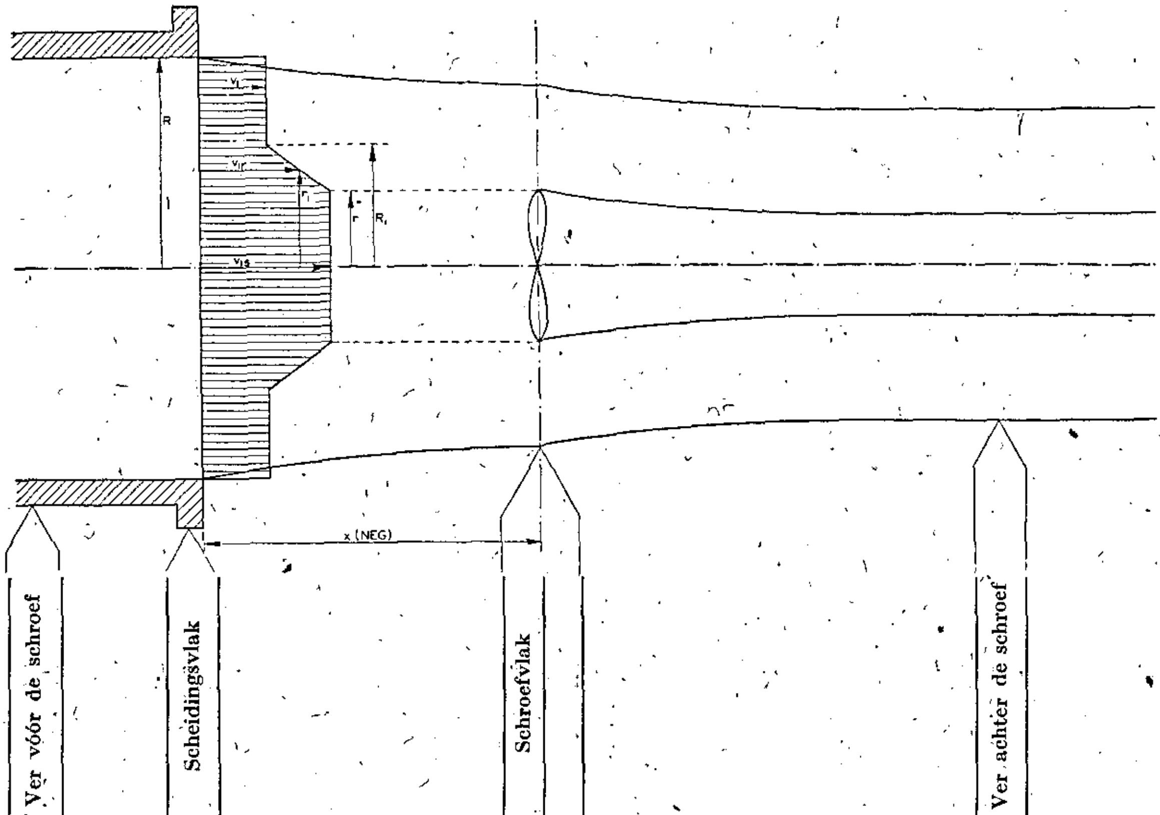
Hiervoor werd gekozen de snelheidsverdeeling in het scheidingsvlak, dus op eenigen afstand voor de schroef, omdat het mogelijk is daarvan eenige voorstelling te vormen op grond van physisch goed gefundeerde, doch voorloopig voor berekening ontoegankelijke overwegingen. Om de mogelijkheid te hebben deze veronderstelling aan de werkelijkheid aan te passen is in den aan de snelheidsverdeeling in het scheidingsvlak te stellen eisch een nog te kiezen parameter opgenomen. Voor dezen parameter wordt een waarde voorgesteld. Indien bij metingen van genoemde snelheidsverdeeling blijkt, dat een andere waarde de werkelijkheid beter benadert, dan is het zonder bezwaar mogelijk deze andere waarde te gebruiken.

2. De veronderstellingen.

21. *Algemeen.*

De algemeene onderstellingen, die gemaakt zijn om het vraagstuk voor berekening toegankelijk te maken, zijn in

[1]) Deel I van dit onderzoek is gegeven als rapport A 589, dat het geval behandelt, waarbij de schroef opgesteld is in het scheidingsvlak tusschen gesloten en vrijstraalgedeelte. Verslagen en Verhandelingen Deel VIII, blz. 117.



0	1	2	3	Nummer		4
R	R	R_2	R_2	Straal	van de stroming buiten den slipstroom	—
D	D	D_2	D_2	Diameter		—
O	O	O_2	O_2	Oppervlak		—
p_0	p_1	p_1	p_1	Druk		p_1
v_0	v_1	v_1	v_1	Snelheid		v_1
—	r, R_1	r	r	Straal	van den slipstroom	—
—	d, D_1	d	d	Diameter		—
—	S, O_1	S	S	Oppervlak		—
p_0	—	p_{2s}	p_{3s}	Druk		p_1
v_0	v_{1s}	v_{2s}	v_{2s}	Snelheid		v_{4s}

Fig. 1. Aangenomen snelheidsverdeeling in het scheidingsvlak en notaties. *Teekening N.L.L.*

lit. 1, punt 2 beschreven en luiden, aangevuld met het oog op het hier beschouwde geval, in het kort:

a) de tunneldoorsnede is cirkelvormig,

b) de hartlijnen van schroef en tunnel vallen samen,

c) de schroef wordt vervangen gedacht door een dunne schijf, waarin een over het schroefvlak gelijkmatig verdeelde druksprong optreedt, doch de snelheid onveranderd blijft.

d) de invloed van radiale en tangentieele snelheden wordt verwaarloosd,

e) in iedere te beschouwen doorsnede van de strooming (loodrecht op de hartlijn), behalve in het scheidingsvlak, hebben, zoowel binnen als buiten den slipstroom, de druk en de axiale snelheid een constante waarde. In deze gebieden kunnen die waarden echter onderling verschillen. In het scheidingsvlak geldt deze onderstelling slechts voor zoover gebieden binnen en buiten de om den slipstroom gedachte overgangslaag worden beschouwd. In deze overgangslaag wordt een lineair met den straal verloopende snelheid aangenomen (zie fig. 1),

f) de invloed van wrijving en samendrukbaarheid wordt verwaarloosd.

22. *De snelheidsverdeeling in het scheidingsvlak.*

Zooals in punt 1 reeds is vermeld, moest nog een aanname worden gedaan teneinde voldoende vergelijkingen te verkrijgen om het vraagstuk te kunnen oplossen. Daarvoor werd de snelheidsverdeeling in het scheidingsvlak gekozen. Deze veronderstelling moet zoodanig zijn, dat die verdeeling afhankelijk is van den afstand x tusschen schroef en scheidingsvlak, daar deze nog niet voorkomt in de algemeene vergelijkingen, die kunnen worden opgesteld (zie punt 3) en toch zeker invloed zal hebben op de tunnelcorrectie. Voor $x = 0$ is deze correctie namelijk niet gelijk nul (zie *lit.* 1) en voor $x = -\infty$ (schroef in onbegrensden vrijstraal) wel.

Voor dit doel wordt het scheidingsvlak in drie concentrische gebieden verdeeld gedacht (zie fig. 1):

a. het gebied binnen den slipstroom.

De diameter hiervan wordt gelijk gesteld aan dien van de schroef (d); de snelheid v_{1s} in dit gebied wordt constant verondersteld en alleen afhankelijk van de verhouding van den schroefstraal tot den afstand van de schroef tot het scheidingsvlak, van de snelheid v_0 ver voor de schroef en van de snelheid v_{2s} in het schroefvlak. Voor het verband wordt dat gekozen, dat bij de vrij opgestelde schroef bestaat nl. (zie b.v. *lit.* 3):

$$v_{1s} = v_0 + (v_{2s} - v_0)\left(1 + \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right) = v_0 + (v_{2s} - v_0)\alpha . \quad (1)$$

Voor $x = 0$ krijgt v_{1s} de waarde v_{2s} en voor $x = -\infty$ de waarde v_0, zooals vereischt is.

b. het buiten den slipstroom en de overgangslaag gelegen gebied.

De snelheid daarin is constant en gelijk aan v_1.

c. de overgangslaag met binnenstraal r en buitenstraal R_1.

In dit randgebied wordt de snelheid verondersteld lineair van v_{1s} tot v_1 te verloopen, dus bij gebruik van de in fig. 1 gegeven notaties volgens de formule:

$$v_{1_r} = \frac{v_{1s}R_1 - v_1 r}{R_1 - r} + \frac{v_1 - v_{1s}}{R_1 - r} r_1. \qquad (2)$$

Zooals uit punt 21 blijkt, is aangenomen, dat dit randgebied ter plaatse van de schroef en verder stroomafwaarts niet meer aanwezig is.

De buitenstraal R_1 van het randgebied kan nog betrekkelijk willekeurig worden gekozen, zij moet echter aan een aantal voorwaarden voldoen en wel:

1. R_1 moet voor iedere waarde van x en r gelijk zijn aan of grooter zijn dan r en gelijk aan of kleiner dan R;
2. voor $r = 0$, dus oneindig kleine schroef, zal de snelheidsverstoring in het scheidingsvlak gelijk nul, dus $R_1 = 0$, moeten zijn;
3. voor $r = R$, dus schroef even groot als de tunnel, zal ook de straal R_1 even groot als de tunnelstraal moeten worden ($R_1 = R$);
4. indien de schroef in het scheidingsvlak is opgesteld, moet de overgangslaag een dikte nul hebben verkregen, dus $R_1 = r$ voor $x = 0$;
5. staat de schroef oneindig ver weg, dan moet de straal R_1 zoo groot mogelijk, dus gelijk aan den tunnelstraal zijn, derhalve $R_1 = R$ voor $x = -\infty$.

Verder moet de straal R_1 een zoodanige functie van r en x zijn, dat R_1 met r ongeveer lineair toeneemt en met x eveneens toeneemt, doch zeker niet lineair. Een functie, die aan deze voorwaarden voldoet en bovendien nog een te kiezen constante c bevat, die de snelheid van aangroeien van R_1 met x bepaalt, is de volgende:

$$R_1 = R \frac{r - \frac{r}{R}xc}{R - \frac{r}{R}xc} \quad (x < 0). \qquad (3)$$

$c = 0$ geeft het geval, waarbij geen overgangslaag aanwezig is; dan is $R_1 = r$. Een waarde van c, waarbij de toename van R_1 met x en r redelijk lijkt is $c = 1$. Dit is te zien in fig. 2, waarin R_1 voor één waarde van r, doch verschillende van x en c is gegeven.

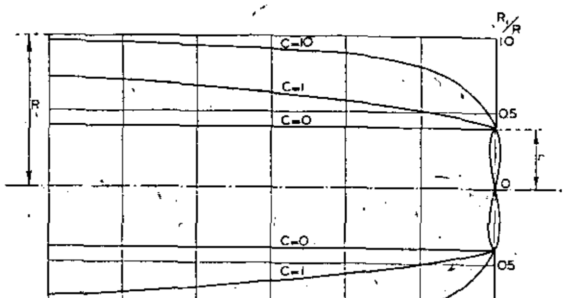


Fig. 2. Verandering van den buitenstraal R_1 van de overgangslaag met den afstand x van schroef tot scheidingsvlak en met den te kiezen parameter c.

Het blijft echter gewenscht experimenteel na te gaan, welke snelheidsprofielen in het scheidingsvlak bij verschillende waarden van x en r optreden. Met deze gegevens zou voor c een waarde kunnen worden bepaald, die de werkelijkheid zooveel mogelijk benadert.

3. De vergelijkingen ter bepaling van de snelheden.

31. *Eenige eenvoudige betrekkingen en notaties.*

Uit de wet van Bernoulli volgt bij toepassing op de strooming tusschen eenige van de in fig. 1 gegeven doorsneden de gelijkheid van een aantal drukken en snelheden. Hiervan is bij het teekenen van die figuur reeds gebruik gemaakt.

In deze figuur zijn verder de voor de stralen, diameters, oppervlakken, drukken en snelheden gebruikte notaties toegelicht; zij zijn voorzien van indices, die gelijk zijn aan het nummer van de beschouwde doorsnede of van die doorsnede, waarin bedoelde grootheid voor het eerst optreedt. Bovendien zijn de grootheden, die op de strooming binnen den slipstroom betrekking hebben, nog voorzien van den index s.

Verder worden de volgende notaties gebruikt:

V = *gecorrigeerde snelheid*,
T = schroeftrek (positief, indien hij tegen de strooming in gericht is),
x = afstand van het schroefvlak tot het scheidingsvlak (negatief, indien de schroef in den vrijstraal is opgesteld),
ρ = massadichtheid van de lucht,
c = een te kiezen constante.

Bij het oplossen van de vergelijkingen worden nog de volgende dimensielooze parameters ingevoerd:

$$t = \frac{2T}{\rho v_o^2 S},$$

$$\alpha = 1 + \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}},$$

$$\beta = \frac{S}{0} = \left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

$$\gamma = \frac{R_1^2 + R_1 r + r^2}{3R^2},$$

$$\delta = \frac{\alpha\gamma}{1 - \gamma}.$$

Tenslotte wordt de onbekende v_{2s} uitgedrukt in de dimensielooze grootheid

$$z = \frac{v_{2s}}{v_o}.$$

32. *Het opstellen van de vergelijkingen.*

Het opstellen van de vergelijkingen, die het vraagstuk beheerschen, geschiedt geheel overeenkomstig den in *lit.* 1, punt 3*c* gevolgden gang van zaken. Dit leidt tot de volgende uitkomsten.

De wet van Bernoulli toegepast op de strooming buiten den slipstroom:

$$p_o - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho\,(v_1^2 - v_o^2). \qquad (4)$$

Dezelfde wet toegepast op den slipstroom en wel afzonderlijk *in de gedeelten vóór en achter de schroef:*

$$p_o - p_{2s} = \tfrac{1}{2}\rho\,(v_{2s}^2 - v_o^2), \qquad (5)$$

$$p_{3s} - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho\,(v_{4s}^2 - v_{2s}^2). \qquad (6)$$

De druksprong in de schroef veroorzaakt den schroeftrek, dus:

$$(p_{3s} - p_{2s})\,S = T. \qquad (7)$$

Verder levert de continuïteitsvergelijking, toegepast van vlak 0 tot vlak 2:

$$Ov_o = (O_2 - S)v_1 + Sv_{2s} \qquad (8)$$

en dezelfde vergelijking, toegepast van vlak 0 tot vlak 1:

$$Ov_o = (O - O_1)v_1 + Sv_{1s} + \int_r^{R_1} 2\pi r_1\, v_{1_r}\, dr_1. \qquad (9)$$

Tenslotte geeft de impulsvergelijking:

$$\rho S v_{2s} v_{4s} + \rho\,(O_2 - S)v_1^2 - \rho O v_o^2 = T + O\,(p_o - p_1). \qquad (10)$$

Voor de toelichting van deze laatste vergelijking zij in het bijzonder verwezen naar punt 3*c* van *lit.* 1.

4. Oplossing der vergelijkingen.

41. *Eliminatie van alle onbekenden op één na.*

Substitueert men v_{1_r} uit (2) in (9) dan verkrijgt deze laatste vergelijking na uitvoering van de integratie den vorm:

$$v_o - v_1 = (v_{1_s} - v_1)\gamma. \tag{11}$$

Elimineert men vervolgens de drukken p_o, p_1, p_{2_s} en p_{3_s}, die tezamen voor drie onbekenden tellen, omdat alleen hun verschillen van belang zijn, de snelheden v_1, v_{1_s} en v_{4_s} en het oppervlak O_2 uit de vergelijkingen (1), (4) t/m. (8), (10) en (11) dan blijft een vergelijking in de onbekende $v_{2_s}(z)$ over. Deze luidt, indien bovendien de in punt 31 gedefinieerde dimensielooze grootheden t, β, δ en z worden ingevoerd:

$$\delta^3(\delta-4\beta)z^4 + 4\delta^2(\beta+3\beta\delta-\delta^2)z^3 + 2\left\{\beta t(\delta^2-2\beta\delta-2\beta) + \right.$$
$$\left. + \delta^2(3\delta^2-6\beta\delta-4\beta)\right\}z^2 + 4(\beta t+\delta^2)(\beta+\beta\delta-\delta^2)z +$$
$$+ (\beta t+\delta^2)^2 = 0. \tag{12}$$

Deze vergelijking is in gesloten vorm niet oplosbaar, zoodat zij voor ieder geval afzonderlijk numeriek moet worden opgelost. Alleen de wortel, die ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+t})$ en overeenkomt met $V \sim v_o$ is van belang voor het hierbeschouwde vraagstuk.

Uit de aldus bepaalde onbekende $z = v_{2_s}/v_o$ volgt tenslotte de voor tunnelwandinvloed gecorrigeerde snelheid V (verg. *lit.* 1, punt 4) met

$$\frac{V}{v_o} = \frac{v_{2_s}}{v_o} - \frac{t}{4}\frac{v_o}{v_{2_s}}. \tag{13}$$

Het bewijs van de juistheid van deze formule geschiedt op dezelfde wijze als in *lit.* 1. Dat ook dezelfde uitkomst wordt verkregen, vindt zijn oorzaak daarin, dat ervoor gezorgd is, dat de vergelijking, die het verband tusschen v_{2_s} en t in de onbegrensde strooming geeft, in beide gevallen gelijk is (zie punt 42).

42. *Contrôle op vergelijking (12).*

Vergelijking (12) kan gecontroleerd worden door na te gaan, welke wortels zij geeft voor enkele bijzondere waarden van β, δ en t dus van x, r en t en deze uitkomst te vergelijken met die, welke voor deze (meer eenvoudige) gevallen reeds langs anderen weg werden bepaald.

Geval a: Schroef in onbegrensden vrijstaal; $x = -\infty$, $r \neq 0$, $t \neq 0$. Voor $x = -\infty$ is $\alpha = 0$ en dus ook $\delta = 0$, daar $\gamma \neq 1$. (γ is alleen gelijk aan 1 als $r = R$ is, welk geval buiten beschouwing wordt gelaten, daar het geen reëele beteekenis heeft). Verder zijn β en $t \neq 0$. Vergelijking (12) gaat daardoor over in

$$-4\beta^2tz^2+4\beta^2tz+\beta^2t^2 = 0$$

of

$$z^2 - z - \frac{t}{4} = 0$$

en

$$z = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+t},$$

hetgeen inderdaad de uitkomst is, die bij de schroef in onbegrensden vrijstraal wordt verkregen.

Geval b: Schroef in scheidingsvlak van een gemengde tunnel; $x = 0$, $r \neq 0$, $t \neq 0$.

Voor $x = 0$ is $\alpha = 1$; $R_1 = r$; $\gamma = \beta$ dus $\delta = \dfrac{\beta}{1-\beta}$. Voert men deze waarden in in verg. (12), dan wordt na vermenigvuldiging met $(1-\beta)^4$ en deeling door β^2, hetgeen toelaatbaar is omdat $\beta \neq 0$ en $\beta \neq 1$, verkregen:

$$\beta^2(4\beta-3)z^4+4\beta(1-2\beta^2)z^3+2\left\{t(3\beta-2)(1-\beta)^2+\beta(2\beta^2+\right.$$
$$\left.+5\beta-4)\right\}z^2+4(1-2\beta)\left\{t(1-\beta)^2+\beta\right\}z+\left\{t(1-\beta)^2+\beta\right\}^2=0.$$

Aan deze vergelijking moet voldaan worden door de in *lit.* 1 verkregen wortel

$$z_1 = \frac{1+\lambda-\lambda^2+\sqrt{1-t+2t/\lambda}}{(1+\lambda)(2-\lambda)},$$

waarbij het verband tusschen λ en β luidt: $1/\lambda^2 = 1-\beta$.

Het bewijs, dat dit een wortel van bovenstaande vergelijking is, wordt het eenvoudigst verkregen door ook de drie andere wortels z_2 t/m z_4 van de vergelijkingen (12), (13) en (15) uit *lit.* 1 te berekenen en het product $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$ te bepalen. Dit blijkt dan op een constanten factor na gelijk te zijn aan het linkerlid van de bovenstaande vergelijking.

Geval c: Schroef in onbegrensde strooming; x = willekeurig, $r = 0$ (of $R = \infty$), $t \neq 0$.

In dit geval wordt de vrij opgestelde schroef verkregen door den straal van de tunnel tot ∞ te laten naderen of wat op hetzelfde neerkomt, die van de schroef tot nul. Dan worden evenwel α, β en δ alle nul. Om dit geval te kunnen bekijken, moet dus eerst nagegaan worden, welken vorm (12) aanneemt voor kleine waarden van r. Daartoe moet δ

TABEL 1.

Tunnelwandinvloed op een schroef, opgesteld in het vrijstraalgedeelte van een gemengde tunnel.

Verband tusschen $\frac{V}{v_o}$ en $\frac{x}{R}$ voor $t = +1{,}0$; $\frac{r}{R} = 0{,}4$				Verband tusschen $\frac{V}{v_o}$ en $\frac{r}{R}$ voor $t = +1{,}0$; $\frac{x}{R} = -0{,}2$			Verband tusschen $\frac{V}{v_o}$ en t voor $\frac{r}{R} = 0{,}4$; $\frac{x}{R} = -0{,}2$		
$\frac{x}{R}$	$c = 0$	$c = 1$	$c = 10$	$\frac{r}{R}$	$c = 0$	$c = 1$	t	$c = 0$	$c = 1$
0	0,9754	0,9754	0,9754	0	1,0000	1,0000	—1,0	1,0346	1,0380
—0,1		0,9782		0,1	0,9998	0,9997	—0,5	1,0121	1,0134
—0,2	0,9833	0,9816		0,2	0,9977	0,9974	0	1,0000	1,0000
—0,4	0,9899			0,3	0,9924	0,9915	+0,5	0,9909	0,9899
—0,5		0,9900		0,4	0,9833	0,9816	+1,0	0,9833	0,9816
—0,8	0,9960	0,9941	0,9873						
—1,0		0,9956							
—1,2	0,9980								
—1,5		0,9975							
—1,6	0,9989								
—2,0	0,9993	0,9984							
—2,4	0,9994								
—3,0		0,9991							

en dus eerst α, γ en R_1 worden ontwikkeld in machtreeksen van r. Dit geeft als uitkomst:

$$\alpha \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}\left(\frac{r}{x}\right)^2,$$

$$\frac{R_1}{R} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \frac{r}{R}\left(1-\frac{xc}{R}\right),$$

$$\gamma \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \left(\frac{r}{R}\right)^2\left\{1-\frac{xc}{R}+\frac{1}{3}\left(\frac{xc}{R}\right)^2\right\},$$

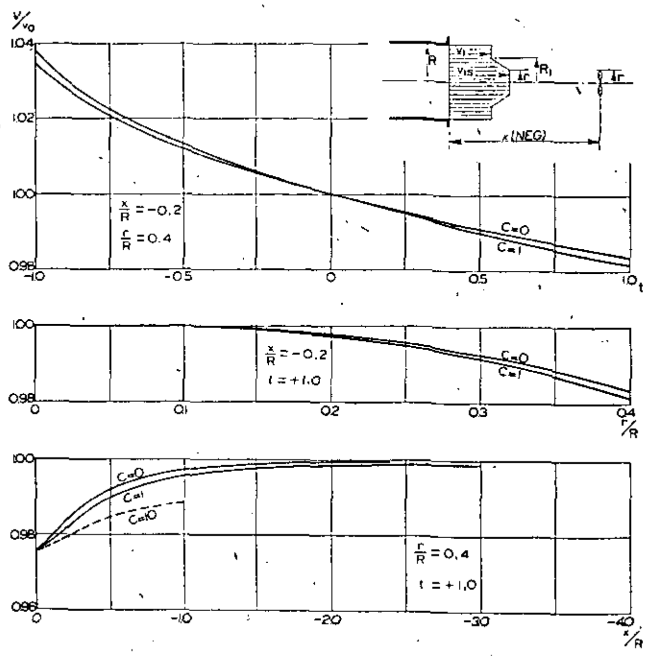
$$\delta \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}\left(\frac{r}{x}\right)^2\left(\frac{r}{R}\right)^2\left\{1-\frac{xc}{R}+\frac{1}{3}\left(\frac{xc}{R}\right)^2\right\}.$$

Wordt deze waarde van δ en die van $\beta = (r/R)^2$ in (12) ingevoerd, dan kan door $-4t(r/R)^4$ worden gedeeld. Wordt daarna $r = 0$ gesteld, dan blijft de volgende tweede-graadsvorm in z over:

$$z^2 - z - \frac{t}{4} = 0.$$

Dit is dezelfde vergelijking, die in geval a werd verkregen, hetgeen dus juist is.

Geval d: Niet trekkende schroef; x = willekeurig, r = willekeurig, $t = 0$. Voert men $t = 0$ in (12) in, dan wordt een vierde-graadsvergelijking in z verkregen, welke inderdaad een wortel $z = 1$ (overeenkomende met $V/v_0 = 1$) blijkt te bezitten.



Teekening N.L.L.

Fig. 3. De voor tunnelwandinvloed gecorrigeerde snelheid V bij enkele waarden van de grootheden t, r, x en c.

5. Resultaten.

Met behulp van de hiervoor afgeleide formules is de correctiefactor V/v_0 bij enkele waarden van de veranderlijken t, x/R en r/R berekend. Telkens zijn twee van deze grootheden constant gehouden en is de derde gevarieerd. Bovendien is voor de te kiezen constante c (zie punt 22) zoowel de waarde 0 als 1 en in een enkel geval de waarde 10 gekozen, om te bepalen, welken invloed deze c op de uitkomsten van de berekening heeft.

De resultaten zijn verzameld in tabel 1 en uitgezet in figuur 3. In een volgend rapport zullen de correcties berekend worden voor alle praktisch voorkomende combinaties van de variabelen x, r en t.

Het verloop van de correctie met de veranderlijken geeft weinig aanleiding tot opmerkingen. De grootte is voor extreme waarden van de onafhankelijke variabelen ($t = 1$; $r/R = 0{,}4$; $x/R = 0$) enkele procenten van de ongestoorde snelheid. Voor normale gevallen (b.v. $t = 0{,}6$; $r/R = 0{,}4$; $x/R = -1{,}0$) *is de correctie evenwel veel kleiner, nl. enkele* tiende deelen van procenten van v_0.

De invloed van de grootte van de te kiezen constante c op de correctie is niet groot; de verschillen voor de correcties bij $c = 0$ en $c = 1$ zijn in de hier beschouwde gevallen hoogstens 0,3 % van v_0. Voor $c = 10$ worden de correcties vrij veel grooter. Men dient hierbij echter te bedenken dat $c = 10$ een geval voorstelt, waarbij het door de schroef versnelde gebied vóór de schroef overdreven groote afmetingen heeft. In het in tabel 1 beschouwde geval ($t = 1{,}0$; $r/R = 0{,}4$; $x/R = -0{,}8$) bedraagt het verschil tusschen de correctie voor $c = 0$ en $c = 10$ ongeveer 0,8 % van v_0. De correctie zal in werkelijkheid tusschen die voor deze twee extreme gevallen in liggen en vermoedelijk het dichtste bij die voor $c = 0$. De fout, die gemaakt zal worden, indien de correcties berekend worden met $c = 1$, zal dan ook voor groote schroeven met grooten trek zeer waarschijnlijk hoogstens 0,3 % van v_0 en voor kleinere schroeven meestal kleiner dan 0,1 % van v_0 zijn.

Op grond hiervan kan de gekozen methode, hoewel daarbij een ruwe aanname is gedaan over de snelheidsverdeeling in het scheidingsvlak, als bruikbaar voor het corrigeeren van windtunnelmetingen worden beschouwd.

6. Literatuur.

1. Koning, C.: De tunnelcorrectie voor een schroef in een „gemengde" tunnel. *Verslagen en Verhandelingen* N.L.L. Deel VIII, blz. 117.

2. Glauert, H.: Airplane propellers in Durand: Aerodynamic Theory, Deel IV, blz. 296.

3. Koning, C.: Influence of the propeller on other parts of the airplane structure in Durand: Aerodynamic Theory, Deel IV, blz. 367.

Afgesloten November 1942.

Report A 928.

The wall interference for a propeller in a mixed windtunnel.

II. The propeller in the free jet part of the mixed windtunnel.

Summary.

a. Extend of the problem treated here (point 1).

The behaviour of a propeller in a windtunnel is discussed for the case in which the flow is partly constrained by a cylindrical fixed wall and partly bounded by a surface of constant pressure. The propeller is situated at an arbitrary point of the axis in the latter part of the tunnel (fig. 1).

b. Velocity equations (point 2, 3, 41).

By application of the axial momentum theory the relations (4) till (10) between velocities and pressures in the sections indicated in fig. 1 are obtained. In the problem treated here

Bericht A 928.

Die Windkanalkorrektur für eine Luftschraube in einem „gemischten" Windkanal.

II. Die Schraube im Freistrahlteil des gemischten Kanals.

Zusammenfassung.

a. Umfang des behandelten Problems (Punkt 1).

Die Wirkung einer Luftschraube in einem Windkanal, der zum Teil von einer festen kreiszylindrischen Wand und zum Teil von einer Oberfläche konstanten Druckes begrenzt wird, wird betrachtet. Die Luftschraube steht an einer willkürlichen Stelle in der Achse des letztgenannten Kanalteiles (Abb. 1).

b. Gleichungen zur Bestimmung der Geschwindigkeiten (Punkt 2, 3, 41).

Die Bernoulli'schen Gleichung und die Kontinuitäts- und Impulsbedingungen geben den Zusammenhang zwischen den

the number of unknowns is one more than the number of equations. To get a solution it is necessary to make a supposition from which the missing equation can be derived. This supposition concerns the velocities in the section between the fixed wall and the free air part and leads with (1), (2) and (9) to (11). Elimination of the pressures and of all velocities but one leads to (12), the solution of which can be obtained only numerically.

c. Correction for wall interference (point 41).

The correction is obtained in the form of an equivalent free air speed divided by the velocity in the tunnel får in front of the propeller and given by equation (13).

d. Discusion of the results (point 5).

The tunnelcorrection depends on r/R; x/R; t and a parameter c, which is introduced in the supposition about the velocities in the section between the fixed wall and the free jet part.

The value of c is chosen ($c = 1$) and some figures to show the relation between V/v_0; r/R; x/R and t are given. V/v_0 draws quickly near to 1, when the propeller stands further downstreams of the fixed wall section.

e. Notations (see fig. 1 and point 31).

The symbols used in this report have the following meaning.

R = radius of the tunnel.
r = radius of the propeller.
S = πr^2 = area of the propeller disc.
x = distance between the propeller and the end of the fixed wall (negative, when the propeller stands downstreams).
v = axial velocity.
V = equivalent free air speed.
p = pressure.
ρ = mass density of air.
t = $\dfrac{2T}{\rho v_0{}^2 S}$ = reduced thrust.
T = thrust.

Suffices:

0 = far upstreams of the propeller.
1 = in the tunnelsection between fixed wall and free jet.
2 = just upstreams of the propeller.
3 = just downstreams of the propeller.
4 = far downstreams of the propeller.
s = in the slipstream.

Geschwindigkeiten und Drücken in den in Abb. 1 angedeuteten Querschnitten (Gleichungen (4) b/e (10)). Die Anzahl der Unbekannte ist im hier behandelten Fall um Eins grösser als die Anzahl dieser Gleichungen. Um doch eine Lösung erhalten zu können ist es also notwendig einen Ansatz zu machen mittels dem die noch fehlende Gleichung abgeleitet werden kann. Dieser Ansatz betrifft die Geschwindigkeitsverteilung in der „Trennungsfläche" des Kanals (siehe Abb. 1) und führt mit (1), (2) und (9) zu der Gleichung (11). Durch Elimination der Drücke und der Geschwindigkeiten bis auf eine wird schliesslich Gleichung (12) erhalten, deren Lösung nur zahlenmässig geschehen kann.

c. Windkanalkorrektur (Punkt 41).

Die Korrektur wird bestimmt in die Form einer aequivalenten Geschwindigkeit der unendlich ausgedehnten Strömung V dividiert durch die Kanalgeschwindigkeit v_0 weit stromaufwärts der „Trennungsfläche". Sie wird durch Gleichung (13) gegeben.

d. Besprechung der Ergebnisse (Punkt 5).

Die Windkanalkorrektur hängt ab von r/R; x/R; t und von einem Parameter c, der mit dem Ansatz über die Geschwindigkeitsverteilung in der Trennungsfläche eingeführt wurde. Der Wert von c wird gewählt ($c = 1$) und einige Abbildungen um die Abhängigkeit der Korrektur V/v_0 von r/R, x/R und t zu zeigen sind gegeben. V/v_0 nähert sich schnell zu 1, wenn der Propeller sich von der Trennungsfläche entfernt.

e. Formelzeichen (siehe auch Abb. 1 und Punkt 31).

R = Radius des Kanals.
r = Radius der Schraube.
S = πr^2 = Schraubenkreisfläche.
x = Entfernung des Propellers von der Trennungsfläche. (negativ, wenn der Propeller stromabwärts steht).
v = Axialgeschwindigkeit.
V = korrigierte Geschwindigkeit.
p = Druck.
ρ = Massendichte der Luft.
t = $\dfrac{2T}{\rho v^2{}_0 S}$ = reduzierter Schub.
T = Schub.

Zeiger:

0 = weit stromaufwärts der Trennungsfläche.
1 = in der Trennungsfläche.
2 = stromaufwärts unendlich dicht bei dem Propeller.
3 = stromabwärts unendlich dicht bei dem Propeller.
4 = weit stromabwärts von dem Propeller.
s = im Schraubenstrahl.

RAPPORT A 929.

De tunnelcorrectie voor schroeven.

door

ir. A. BOELEN en ir. J. G. SLOTBOOM.

Overzicht.

De methoden om de tunnelcorrectie voor een schroef, opgesteld in een gesloten straal en voor een schroef, opgesteld in het vrijstraalgedeelte of het scheidingsvlak van een z.g. gemengde tunnel, te bepalen zijn elders gegeven. Hier wordt deze correctie berekend voor de practisch voorkomende gevallen en in tabellen en figuren gegeven. Tevens wordt de toelaatbaarheid van het gebruik van een uit de literatuur bekende benaderingsformule voor de tunnelcorrectie in de gesloten windtunnel beoordeeld.

Indeeling.

1. Inleiding.

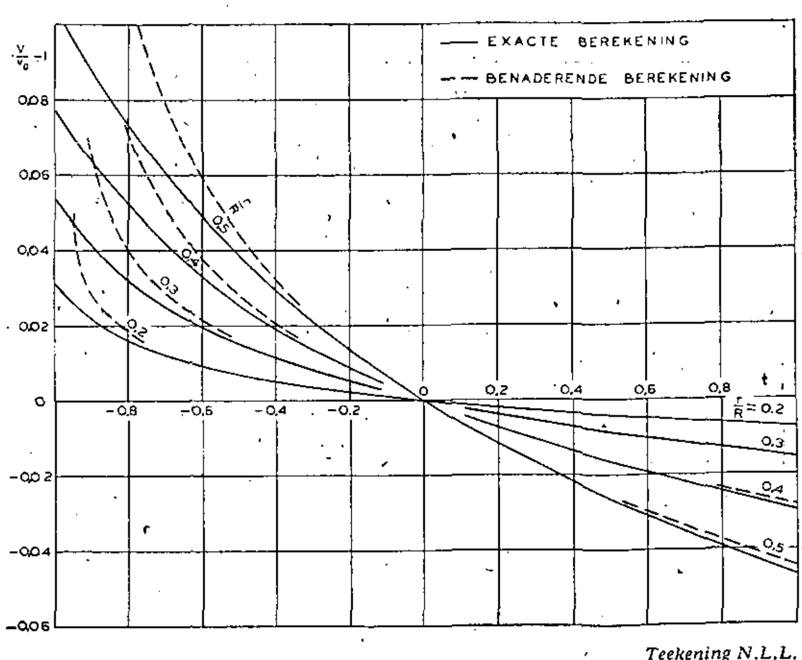
Door GLAUERT (*lit.* 1) werd de tunnelcorrectie voor een schroef in een gesloten windtunnel met ronde doorsnede behandeld. Bij *windtunnelproeven* wordt de modelschroef evenwel veelal in het vrijstraalgedeelte van een tunnel opgesteld. Het N.L.L. heeft daarom een berekeningsmethode ontwikkeld, waarmede de correctie ook voor dit laatste geval kan worden bepaald. Weliswaar kon niet het werkelijke geval, waarbij de windstroombegrenzing achtereenvolgens bestaat uit een vasten wand, een vrijstraaloppervlak en weer een vasten wand worden bekeken, daar dit te ingewikkeld is voor berekening. Voor het eenigszins geïdealiseerde geval van de gemengde tunnel kon echter een berekeningsmethode worden opgesteld. Onder gemengde tunnel wordt hier verstaan een tunnel met ronde doorsnede, waarvan het eerste deel van den windstroom is begrensd door een vasten wand en het verdere gedeelte door een vrijstraaloppervlak.

Aanvankelijk werd alleen het geval opgelost, waarbij de schroef in het scheidingsvlak — vlak, waarin de vaste wand eindigt — is opgesteld (*lit.* 2); later werd ook het meer algemeene geval, waarbij de schroef in het vrijstraalgedeelte is geplaatst, door het invoeren van een geschikte veronderstelling voor berekening toegankelijk gemaakt (*lit.* 3). Deze meer algemeene methode geeft ook de oplossing voor het geval, waarbij de schroef in het scheidingsvlak staat en wel dezelfde als die verkregen in *lit.* 2. In het volgende wordt dan ook slechts van de methode, gegeven in *lit.* 3, gebruik gemaakt. In *lit.* 1 t/m. 3 zijn de berekeningsmethoden voor de desbetreffende gevallen ontwikkeld; tevens is daarin voor enkele waarden van de parameters, die het vraagstuk beheerschen, de numerieke waarde van de tunnelcorrectie gegeven. In het hiernavolgende is deze correctie berekend voor het geheele gebied, waarin die parameters bij windtunnelproeven gewoonlijk varieeren. Hierdoor wordt een volledig overzicht over het verloop van de correctie met de parameters in het van belang zijnde gebied verkregen.

De berekening is in alle gevallen betrekkelijk bewerkelijk. In *lit.* 1 is daarom voor de tunnelcorrectie in de gesloten tunnel een eenvoudige benaderingsformule gegeven. Volgens den auteur voldoet de benadering goed in het gebied van positieve schroeftrekken. Hier wordt nagegaan of dit ook bij negatieve trekken (molens) het geval is.

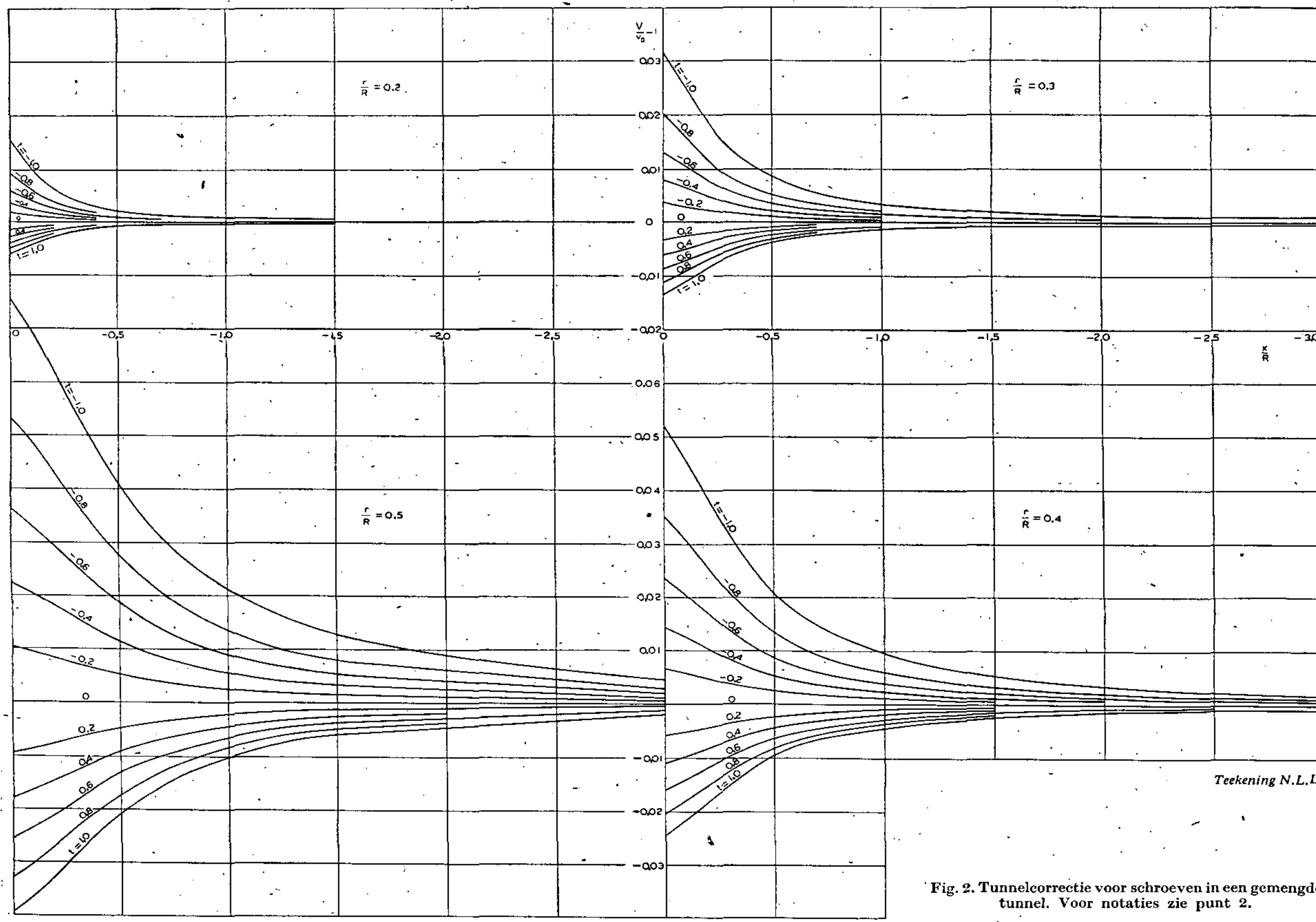
2. Formules, waarmede de correcties zijn berekend en beteekenis van de gebezigde notaties.

De formules, die gebruikt zijn om de tunnelcorrectie te berekenen, zijn in de hierboven aangehaalde literatuur



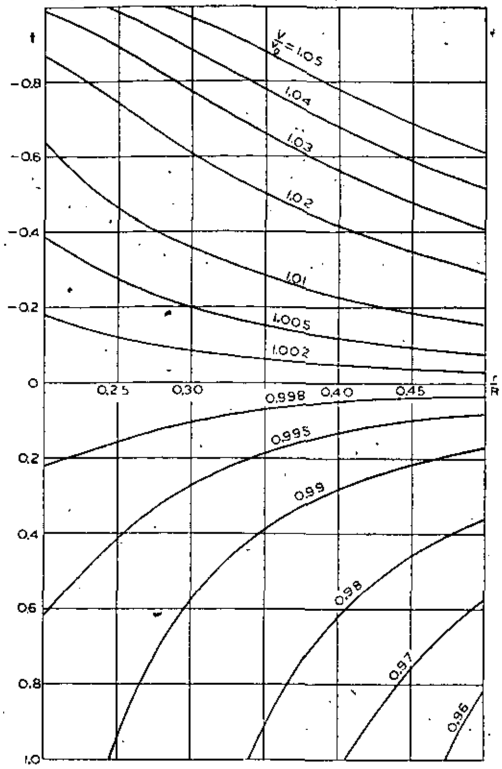
Teekening N.L.L.

Fig. 1. Tunnelcorrectie voor schroeven in een gesloten windtunnel, Voor notaties zie punt 2.



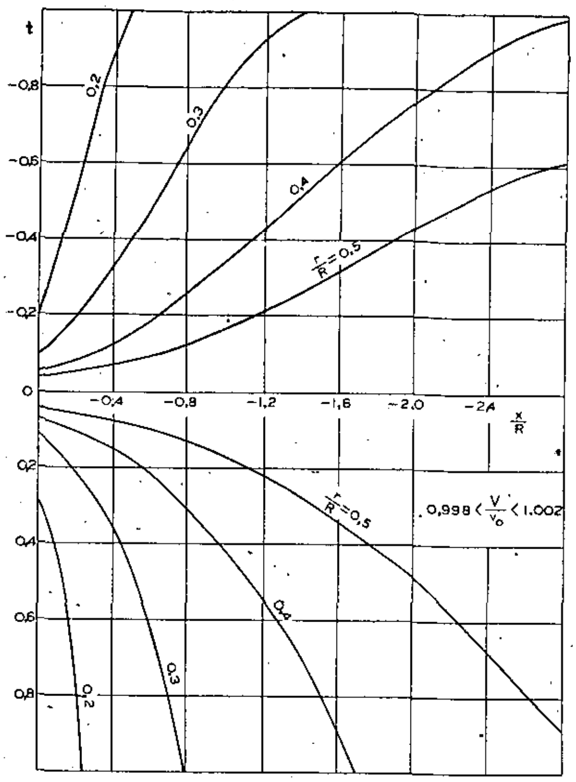
Teekening N.L.L.

Fig. 2. Tunnelcorrectie voor schroeven in een gemengde tunnel. Voor notaties zie punt 2.



Teekening N.L.L.

Fig. 3. Lijnen van constante tunnelcorrectie voor de gesloten tunnel.



Teekening N.L.L.

Fig. 4. Lijnen voor tunnelcorrectie = ± 0,2 % voor de gemengde tunnel.

gegeven. Zij zullen hier niet worden herhaald; slechts zij opgemerkt, dat zij op de volgende plaatsen kunnen worden gevonden:

voor gesloten tunnel: *lit.* 1 { exact blz. 298, form. 2.12 t/m 2.14[1]) benaderd blz. 299, form. 2.15 }

en voor gemengde tunnel: *lit.* 3, punt 41, form. 12 en 13.

Bij de hier gegeven resultaten is van de volgende notaties, welke gelijk zijn aan die toegepast in *lit.* 3, gebruik gemaakt:

x = afstand van schroef tot scheidingsvlak (negatief, indien de schroef in het vrijstraalgedeelte staat),
r = straal van den schroefcirkel,
S = oppervlak van den schroefcirkel,
R = tunnelstraal,
t = gereduceerde schroeftrek = T/qS,
T = schroeftrek (positief, indien hij tegengesteld gericht is aan de windsnelheid),
q = stuwdruk van de ongestoorde tunnelsnelheid (ver voor de schroef),
v_0 = ongestoorde tunnelsnelheid (ver voor de schroef),
V = gecorrigeerde tunnelsnelheid = snelheid op grooten afstand voor de schroef in een onbegrensde strooming.

De correcties (V/v_0—1), welke tengevolge van den tunnelwandinvloed op de tunnelsnelheid moeten worden aangebracht, zijn berekend voor de volgende waarden van de parameters x, r en t

x/R = 0; —0,1; —0,2; —0,4; —0,7; —1,0; —1,5 en —3,0;
r/R = 0,2; 0,3; 0,4 en 0,5.
t = —1,0; —0,8; —0,6, enz. tot + 0,8; + 1,0.

De correctie verloopt voor kleine waarden van x sneller met x dan bij groote waarden. Daarom werden zoodanige waarden van x gekozen, dat hun verschillen toenemen met den afstand van de schroef tot het scheidingsvlak. In een tunnel heeft het vrijstraalgedeelte zelden een grootere lengte dan 4 à 5 maal den tunnelstraal; bovendien zal de afstand van schroef tot uitstroomtuit als regel niet veel grooter zijn dan de helft van de vrijstraallengte. Op deze gronden leek het onnoodig voor den afstand van schroef tot tuit grootere waarden te kiezen dan 3 R. *Overigens is de correctie bij deze groote afstanden reeds* zoo klein, dat het ook op grond daarvan geen zin heeft nog grootere afstanden te beschouwen.

Voor de bovengrens van den schroefstraal werd de halve tunnelstraal gekozen. Deze grens zal vrijwel nooit worden overschreden, omdat anders de tunnelcorrectie zoo groot zou worden, dat het de vraag is of het dan nog toelaatbaar is deze correctie te berekenen met een methode, waarbij een aantal vereenvoudigende veronderstellingen is gedaan. Voor een schroefstraal kleiner dan 0,2 R werd de correctie niet berekend, omdat deze dan verwaarloosbaar klein is in het geheele gebied van x en t, dat beschouwd is.

Voor den gereduceerden trek werden de grenzen + 1,0 en —1,0 gekozen, omdat t in verreweg de meeste gevallen tusschen deze grenzen zal liggen. Alleen bij schroefproeven bij lage waarden van V/nD kan t boven de grens +1,0 komen.

3. Resultaten.

De berekende correcties zijn gegeven in tabel 1 en 2 en uitgezet in fig. 1 en 2. Zij zijn opgegeven tot in 0,001 v_0 nauwkeurig; dit zal als regel ruimschoots voldoende zijn. De berekening is evenwel met grootere nauwkeurigheid

---

[1]) Deze formules kunnen zonder veel moeite tot de volgende eenvoudiger en overzichtelijker vorm worden herleid:

$$\frac{V}{v_0} = \frac{\sigma\,(1-\omega\sigma)^2 - (1-\sigma)\,(1-\omega)}{(1-\omega\sigma)\left\{(1-\omega\sigma)-2\,(1-\sigma)\,(1-\omega)\right\}} \text{ en}$$

$$t = \frac{4\,\sigma\,(1-\sigma)\,(1-\omega)}{\left\{(1-\omega\sigma) - 2\,(1-\sigma)\,(1-\omega)\right\}^2}.$$

Hierin is:

$\sigma = \frac{O_4}{S}$; $\omega = \frac{O_4}{O}$; O_4 = oppervlak van de slipstroomdoorsnede ver achter de schroef; S = oppervlak van den schroefcirkel; O = oppervlak van de tunneldoorsnede.

uitgevoerd, zoodat nauwkeuriger cijfers desgewenscht bij het N.L.L. verkrijgbaar zijn.

De correctie is voor de *schroef in den gesloten straal* grooter dan voor de schroef in het scheidingsvlak van een gemengde tunnel; vooral bij negatieve trekken is het verschil aanzienlijk. In den open straal neemt zij sterk af bij toenemenden afstand van schroef tot uitstroomtuit. Zij verloopt verder regelmatig met den schroeftrek — bijna lineair — en met den straal van de schroef — ongeveer kwadratisch.

De benaderende berekening voor de schroef in de gesloten tunnel geeft bij positieve trekken, zooals in *lit.* 1 ook reeds werd geconcludeerd, vrij goede uitkomsten; bij negatieve trekken in de omgeving van $t = -1{,}0$ is de overeenstemming tusschen de uitkomsten van de benaderende en de exacte berekening slecht. Het is dan ook niet toelaatbaar de benaderende berekening in dat gebied te gebruiken.

In fig. 3 en 4 zijn de resultaten van de berekeningen nog eens gegeven en wel op zoodanige wijze, dat gemakkelijk kan worden overzien, bij welke combinaties van de parameters de correctie beneden een zekere waarde ligt. In fig. 3 zijn daartoe voor de gesloten tunnel lijnen voor een aantal constante waarden van de correctie geteekend. In het gebied van t en r *links* van een dergelijke lijn is de correctie kleiner dan het getal, dat bij de beschouwde kromme behoort.

Voor de gemengde tunnel kunnen dergelijke gebieden niet op dezelfde wijze worden aangegeven, omdat daarbij het aantal onafhankelijk veranderlijken één grooter is. In fig. 4 is evenwel een bundel krommen gegeven, waarvoor de correctie $\pm\ 0{,}002\ v_0$ bedraagt en waarbij iedere kromme geldt voor een constante waarde van den straal r van de schroef. In het gebied van x en t, dat *rechts* van een der krommen ligt is de correctie voor de waarde van r gegeven bij de beschouwde kromme kleiner dan $0{,}002\ v_0$.

4. Literatuuropgave.

1. GLAUERT, H.: Airplane propellers in Durand: Aerodynamic Theory, Vol. IV, p. 296.
2. KONING, C.: De tunnelcorrectie voor een schroef in een „gemengde" tunnel. Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel VIII, blz. 117.
3. BOELEN, A. en SLOTBOOM, J. G.: De tunnelcorrectie voor een schroef in een „gemengde" tunnel. II. De schroef, opgesteld in het vrijstraalgedeelte van de gemengde tunnel Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XII, blz. A 17.

Afgesloten December 1943.

TABEL 1.

De tunnelcorrectie $\left(\frac{V}{v_0} - 1\right)$ *voor schroeven in een gesloten tunnel.*

	Benaderende berekening				Exacte berekening			
t \ r/R	0,2	0,3	0,4	0,5	0,2	0,3	0,4	0,5
—1,0	∞	∞	∞	∞	0,030	0,054	0,078	0,104
—0,8	0,018	0,040	0,072	0,111	0,016	0,032	0,052	0,073
—0,6	0,009	0,021	0,038	0,059	0,009	0,020	0,033	0,049
—0,4	0,005	0,012	0,021	0,032	0,005	0,011	0,020	0,029
—0,2	+0,002	+0,005	+0,009	+0,014	+0,002	+0,005	+0,009	+0,013
+0,2	—0,002	—0,004	—0,007	—0,011	—0,002	—0,004	—0,007	—0,012
0,4	—0,003	—0,008	—0,014	—0,021	—0,003	—0,007	—0,014	—0,022
0,6	—0,005	—0,011	—0,019	—0,030	—0,005	—0,010	—0,019	—0,031
0,8	—0,006	—0,013	—0,024	—0,037	—0,006	—0,013	—0,024	—0,039
1,0	—0,007	—0,016	—0,028	—0,044	—0,007	—0,016	—0,029	—0,047

Voor beteekenis notaties zie punt 2.

TABEL 2.

De tunnelcorrectie $\left(\frac{V}{v_0} - 1\right)$ *voor schroeven in een gemengde tunnel.*

$\frac{r}{R}$	t \ $\frac{x}{R}$	—3,0	—1,5	—1,0	—0,7	—0,4	—0,2	—0,1	0
0,2	—1,0	0	0	0,001	0,001	0,003	0,006	0,010	0,016
	—0,8	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,006	0,009
	—0,6	0	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,006
	—0,4	0	0	0	0	0,001	0,001	0,002	0,004
	—0,2	0	0	0	0	0	+0,001	+0,001	+0,002
	+0,2	0	0	0	0	0	—0,001	—0,001	—0,001
	0,4	0	0	0	0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,003
	0,6	0	0	0	0	—0,001	—0,002	—0,003	—0,004
	0,8	0	0	0	0	—0,001	—0,002	—0,003	—0,005
	1,0	0	0	0	—0,001	—0,001	—0,003	—0,004	—0,006
0,3	—1,0	0,001	0,002	0,003	0,005	0,011	0,019	0,025	0,032
	—0,8	0	0,001	0,002	0,003	0,007	0,012	0,016	0,020
	—0,6	0	0,001	0,001	0,002	0,004	0,008	0,011	0,013
	—0,4	0	0	0,001	0,001	0,003	0,005	0,006	0,008
	—0,2	0	0	0	+0,001	+0,001	+0,002	+0,003	+0,004
	+0,2	0	0	0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,003	—0,003
	0,4	0	0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,004	—0,005	—0,006
	0,6	0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,003	—0,006	—0,007	—0,009
	0,8	0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,004	—0,007	—0,009	—0,011
	1,0	0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,005	—0,009	—0,011	—0,014
0,4	—1,0	0,002	0,005	0,009	0,015	0,026	0,038	0,045	0,052
	—0,8	0,001	0,003	0,006	0,009	0,017	0,025	0,030	0,035
	—0,6	0,001	0,002	0,004	0,006	0,011	0,017	0,020	0,023
	—0,4	0	0,001	0,002	0,004	0,007	0,010	0,012	0,014
	—0,2	0	+0,001	+0,001	+0,002	+0,003	+0,005	+0,006	+0,007
	+0,2	0	—0,001	—0,001	—0,002	—0,003	—0,004	—0,005	—0,006
	0,4	0	—0,001	—0,002	—0,003	—0,005	—0,008	—0,010	—0,011
	0,6	—0,001	—0,002	—0,003	—0,004	—0,008	—0,012	—0,014	—0,016
	0,8	—0,001	—0,002	—0,004	—0,006	—0,010	—0,015	—0,018	—0,020
	1,0	—0,001	—0,002	—0,004	—0,007	—0,012	—0,018	—0,022	—0,025
0,5	—1,0	0,005	0,013	0,021	0,031	0,047	0,062	0,069	0,075
	—0,8	0,003	0,008	0,014	0,020	0,032	0,043	0,048	0,053
	—0,6	0,002	0,005	0,009	0,014	0,022	0,029	0,033	0,036
	—0,4	0,001	0,003	0,006	0,008	0,013	0,018	0,020	0,022
	—0,2	0,001	+0,002	+0,003	+0,004	+0,006	+0,008	+0,009	+0,010
	+0,2	0	—0,001	—0,002	—0,004	—0,006	—0,008	—0,009	—0,009
	0,4	—0,001	—0,003	—0,005	—0,007	—0,011	—0,015	—0,016	—0,018
	0,6	—0,001	—0,004	—0,007	—0,010	—0,016	—0,021	—0,023	—0,026
	0,8	—0,002	—0,005	—0,008	—0,013	—0,020	—0,027	—0,030	—0,033
	1,0	—0,002	—0,006	—0,010	—0,015	—0,024	—0,032	—0,036	—0,040

Voor beteekenis notaties zie punt 2.

Report 929.

The tunnelwall interference on propellers.

Summary.

By using formulae, partly given in literature (*lit.* 1), partly derived by N.L.L. (*lit.* 2 and 3), the tunnelwall interference on propellers has been calculated both for the propeller in a closed tunnel and for one at an arbitrary section of the open jet of a mixed tunnel. The tunnelcorrection has been calculated numerically for those values of the reduced thrust and of the propellerradius, that will normally occur in windtunneltests.

The usefulness of an approximating formula proposed in *lit.* 1 is discussed. The approximation shows to be bad for big negativ thrusts ($t < -0{,}8$).

Notations:

x = distance of the propeller from the plane in which the closed part of the tunnel ends (negativ, when the propeller stands in the free jet part).

r = radius of the propeller.

R = radius of the tunnel.

S = area of the propellerdisc.

V = aquivalent free air speed.

v_o = axial velocity in the tunnel far upstreams of the propeller.

t = T/qS = reduced thrust.

T = thrust.

q = dynamic pressure of the velocity v_o.

σ = O_4/S.

ω = O_4/O.

O_4 = area of the slipstream cross section far behind the propeller.

O = area of the tunnel cross section.

Bericht A. 929.

Der Kanalwandeinflusz auf Propellern.

Zusammenfassung.

Mit Hilfe von teilweise in der Literatur (*Lit.* 1) gegebenen, teilweise beim N.L.L. (*Lit.* 2 und 3) abgeleiteten Formeln ist der Kanalwandeinflusz auf Propellern berechnet sowohl für den Propeller in einem geschlossenen Kanal, wie für den Propeller an einer willkürlichen Stelle im Freistrahlteil eines gemischten Windkanals. Die Windkanalkorrektur ist zahlenmäszig berechnet für die in normalen Fällen bei Windkanaluntersuchungen vorkommenden Schubzahlen und Propellergröszen.

Die Zulässigkeit der Anwendung einer in *Lit.* 1 gegebenen Näherungsformel zur Bestimmung der Windkanalkorrektur im geschlossenen Kanal wird betrachtet. Die Verwendung der Näherungsformel ist nicht zulässig für grosze negative Schubzahlen ($t < -0{,}8$).

Formelzeichen:

x = Entfernung des Propellers von der Trennungsfläche (negativ, wenn der Propeller im Freistrahlteil steht).

r = Propellerhalbmesser.

R = Halbmesser des Kanalquerschnittes.

S = Oberfläche des Propellerkreises.

V = korrigierte Geschwindigkeit.

v_o = ungestörte Kanalgeschwindigkeit (weit stromaufwärts vom Propeller).

t = T/qS = reduzierter Schub.

T = Schub.

q = Staudruck der ungestörten Kanalgeschwindigkeit.

σ = O_4/S.

ω = O_4/O.

O_4 = Oberfläche des Schraubenstrahlquerschnittes weit stromabwärts vom Propeller.

O = Oberfläche des Kanalquerschnittes.

RAPPORT S. 278[1]).

De invloed van elastische ribvervormingen op de spanningsverdeeling in vleugels met twee liggers en elastisch vervormbare bekleeding

door

ir. W. T. KOITER en dr. ir. A. VAN DER NEUT.

Overzicht.

De spanningsverdeeling bij torsiebelasting wordt berekend voor een aantal vleugels, die onderling slechts verschillen in afschuifstijfheid der ribben. De bedoeling van dit onderzoek is vast te stellen in hoever verwaarloozing van de ribvervormingen onnauwkeurigheden geeft van toelaatbare grootte. Op grond van de berekeningsresultaten zijn enkele minimumvoorwaarden voor de ribstijfheid opgesteld, waaraan voldaan zal moeten zijn om in de berekening de ribvervormingen buiten beschouwing te kunnen laten.

Indeeling.

1. Inleiding.

In de N.L.L.-rapporten (*lit.* 1, 2, 3) werd een methode ontwikkeld voor de berekening van vleugels, bestaande uit twee evenwijdige liggers en bekleed met een weerstandbiedenden huid. De voornaamste veronderstellingen, die aan deze berekening ten grondslag lagen, waren:

1e. de ribben zijn oneindig stijf in hun eigen vlak;

2e. de ribben zijn continu verdeeld.

Voor de vroeger gevolgde bouwwijze van houten vleugels waren deze veronderstellingen gerechtvaardigd, zooals bleek uit de goede overeenstemming met belastingsproeven (*lit.* 4) en ook uit eenige uitgevoerde contrôleberekeningen, waarbij de ribafschuiving globaal in rekening werd gebracht.

Bij de huidige houten vleugelconstructies, waarbij het bekleedingstriplex diagonaalsgewijs wordt aangebracht, is de torsiestijfheid ongeveer 4 maal zoo groot als bij gebruik van normaal triplex. De krachten in den vleugelhuid zijn dan ook ongeveer in dezelfde verhouding grooter geworden en dienovereenkomstig is het ribverband zwaarder belast voor wat betreft de overdracht van dwarskrachten uit de liggers naar de bekleeding. Deze grootere ribbelasting maakt, dat de vervormingen van de ribben grooter zijn en daarom van beteekenis kunnen zijn voor de krachtsverdeeling in den vleugel.

In dit rapport wordt met het oog hierop de onder 1e. genoemde veronderstelling uitgeschakeld en wordt de invloed van de vervormbaarheid der ribben onderzocht. De ribvervorming zal hoofdzakelijk uit afschuiving van de ribben bestaan, omdat de ribben bij de krachtsoverdracht, die hier in geding is, slechts in geringe mate op buiging worden belast; derhalve wordt alleen de ribafschuiving in rekening gebracht.

Bij discontinuïteiten in de dikte van de bekleeding, op plaatsen, waar torsiemomenten worden ingeleid, enz., moeten de ribben geconcentreerde krachten overbrengen van de liggers naar de bekleeding. Omdat continu verdeelde, vervormbare ribben geen geconcentreerde krachten kunnen overbrengen, moeten op dergelijke plaatsen in de berekening geconcentreerde ribben worden verondersteld.

Eveneens moeten geconcentreerde ribben gedacht worden op plaatsen, waar de ribben stijver zijn uitgevoerd, indien deze stijvere ribben niet op regelmatige afstanden langs de geheele vleugelbreedte voorkomen.

Resumeerend wordt dus ten aanzien van de stijfheid der ribben het volgende aangenomen:

1e. de ribben zijn in hun eigen vlak oneindig stijf tegenover buiging, doch vervormbaar tegenover afschuiving;

2e. de ribben zijn continu verdeeld in de gebieden, waarin de stijfheden en de torsiemomenten continu verloopen;

3e. waar discontinuïteiten in de stijfheden of in de torsiemomenten aanwezig zijn, bevinden zich geconcentreerde ribben;

4e. waar om constructieve redenen een zware rib is aangebracht, wordt, indien deze constructie zich op regelmatige afstanden langs de vleugelbreedte niet herhaalt, eveneens met geconcentreerde ribben gerekend.

Op grond van deze veronderstellingen en van nog eenige andere, die in dit verband van ondergeschikt belang zijn, zijn de differentiaalvergelijkingen en hun

[1]) Verkorte inhoud van een uitgebreid intern N.L.L.-rapport S. 132.

randvoorwaarden afgeleid, die het vraagstuk beheerschen. Deze differentiaalvergelijkingen bevatten slechts één onbekende functie, namelijk het statisch onbepaalde buigende moment X in de liggers, en zij laten een directe oplossing toe. Bij de vroeger gevolgde methode van afleiding der vergelijkingen traden als onbekenden de liggerdoorbuigingen y en de liggerafschuivingen v op en verkreeg men een systeem van vier simultane vergelijkingen, die alleen met een iteratieproces tot oplossing konden worden gebracht (*lit.* 1, 2, 3). Het belangrijke voordeel van de enkele vergelijking in X kon bereikt worden door de vroeger gevolgde methode van afleiding, waarbij de geometrische voorwaarden voor aaneensluiting van de onderdeelen de gezochte betrekkingen leverden, te vervangen door de energetische voorwaarde voor aaneensluiting der onderdeelen: namelijk, dat de variatie der inwendige energie bij variatie van de statisch onbepaalde grootheid gelijk nul is. Voor dergelijke gecompliceerde constructies als vleugels zijn, vooral als daarbij ook nog de vervormbaarheid der ribben in acht genomen wordt, is deze energetische methode zeer veel eenvoudiger te hanteeren dan de geometrische.

Hoewel de volledige weergave van de afleiding, die van den eerstgenoemden schrijver afkomstig is, op zichzelf zeer zeker zin zou hebben, wordt zij hier in verband met plaatsgebrek en om een nog nader te noemen reden achterwege gelaten. Van directe practische beteekenis is de methode namelijk niet meer, omdat de combinatie van continue en geconcentreerde ribben, die hier verondersteld is, bijzondere complicaties invoert, welke vermeden worden wanneer uitsluitend geconcentreerde ribben worden aangenomen. Deze laatste schematiseering is in *lit.* 5 verondersteld, en daar wordt de theorie, die langs denzelfden gedachtengang verloopt, geheel uitgewerkt weergegeven. Bovendien is deze afleiding van meer algemeene strekking, doordat het vleugelschema meer algemeen is. In verband hiermee, wordt de afleiding in dit rapport achterwege gelaten en wordt slechts haar resultaat vermeld (punt 2).

De bedoeling van dit rapport is een indruk te geven van de beteekenis, die de ribvervorming voor de krachtsverdeeling in vleugels heeft. Daartoe zijn berekeningen uitgevoerd over een vleugel met diagonaaltriplex bekleeding, voor een continu verdeeld torsiemoment en voor een geconcentreerd torsiemoment. Een achttal mogelijkheden voor de ribstijfheden is onderzocht en de resultaten worden onderling vergeleken. Daarbij blijkt, dat bij zekere ribstijfheden de invloed van de ribvervormingen op de krachtsverdeeling belangrijk is. In den regel zal men echter de ribconstructie zoodanig kunnen uitvoeren, dat de afwijkingen in de krachtsverdeeling van de verdeeling, die bij oneindig stijve ribben zou volgen, van ondergeschikte beteekenis zijn. De eischen, die daartoe aan de ribconstructie te stellen zijn, worden aangegeven. Indien aldus wordt geconstrueerd, zal de invloed der ribvervormingen in de berekening buiten beschouwing kunnen worden gelaten.

2. De vergelijkingen van de spanningsverdeeling.

Behalve de veronderstellingen over de ribstijfheid, die in de inleiding zijn besproken, worden ter vereenvoudiging van het probleem nog eenige veronderstellingen ingevoerd. Deze zijn in het verband van dit onderzoek, dat den invloed der ribvervormingen betreft, niet van essentieel belang en zij mogen dus zonder bezwaar ter vereenvoudiging worden gebruikt.

Het zijn:

1e. de normaalspanningen in de bekleeding worden verwaarloosd; hieruit volgt, dat de schuifspanning in de bekleeding in z-richting constant is;

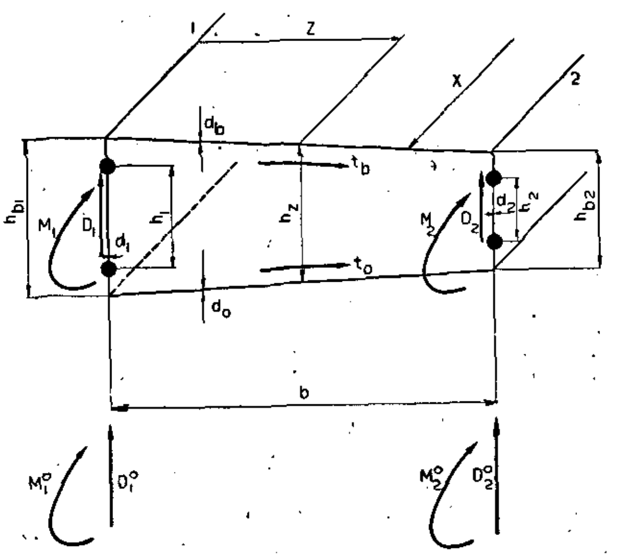
2e. de torsiestijfheid van de liggers wordt verwaarloosd.

Ter motiveering van deze veronderstellingen dient nog het volgende.

Over de eerste veronderstelling wordt opgemerkt, dat reeds bij vleugels met normaaltriplex was gebleken, dat de normaalspanningen in de bekleeding van ondergeschikt belang zijn en dat de schuifspanningen in de bekleeding bij torsie vrijwel constant zijn (zie *lit.* 3). Bij vleugels met bekleedingen van diagonaaltriplex neemt de beteekenis van de normaalspanningen nog verder af, omdat de elasticiteitsmodulus van diagonaaltriplex slechts $^1/_4$ van de elasticiteitsmodulus van gewoon triplex is.

Over de tweede veronderstelling wordt opgemerkt, dat het gebruikelijk is het diagonaaltriplex alleen tusschen de liggers aan te brengen. De eigen torsiestijfheid der liggers is dan slechts een gering percentage van de totale torsiestijfheid, zoodat zij van sterk ondergeschikte beteekenis is.

Voorts is de vleugeldoorsnede geschematiseerd zooals aangegeven is in fig. 1. De liggergordingen zijn geconcentreerd gedacht in hun zwaartepunt en de bekleeding wordt gedacht tot aan de zwaartepunten der liggergordingen door te loopen; de gedeelten $h_b—h$ van de bekleeding zijn daarbij oneindig stijf tegenover afschuiving verondersteld.



Teekening N.L.L.

Fig. 1. Krachten in de vleugeldoorsnede x op het deel van den vleugel binnen x, $(D^0 = —M^{0\prime})$.

De krachten, die in een vleugeldoorsnede x op het binnen x gelegen deel van den vleugel werken, zijn in fig. 1 aangegeven; het zijn de liggermomenten M_1 en M_2, de dwarskrachten in de liggers D_1 en D_2 en de dwarskrachten per lengte-eenheid van de bekleeding t_b en t_o. Als men de bekleeding van de liggers losgemaakt denkt, is de constructie statisch bepaald en de dan optredende krachtenverdeeling M_1^0, M_2^0, D_1^0, D_2^0 (zie fig. 1) kan op eenvoudige wijze uit de uitwendige belasting worden berekend. De met ^{0} geïndiceerde grootheden representeeren dus de gegeven belasting. Tusschen deze grootheden en de inwendige belastingen in de vleugeldoorsnede bestaan de volgende betrekkingen:

$$M_1 = M_1^0 + X, \tag{1}$$

$$M_2 = M_2^0 — X, \tag{2}$$

$$D_1 = D_1^0 — \left(1 — \frac{h_1}{h_{b1} + h_{b2}}\right) X', \tag{3}$$

$$D_2 = D_2^0 + \left(1 — \frac{h_2}{h_{b1} + h_{b2}}\right) X', \tag{4}$$

$$t_b = —t_o = t = \frac{X'}{h_{b1} + h_{b2}}. \tag{5}$$

In deze vergelijkingen treedt een belastingsfunctie X op, die als statisch onbepaalde grootheid mag worden opgevat.

De dwarskrachten, die de lijfplaat van de ribben be-

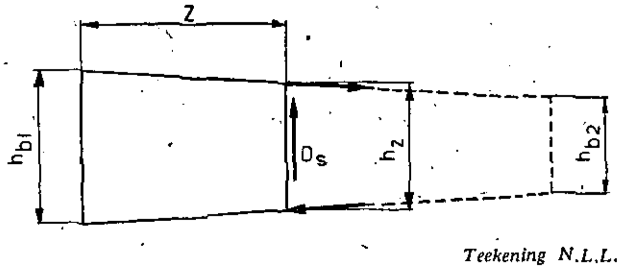


Fig. 2. Inwendige ribbelasting.

lasten (fig. 2), bedragen voor de continu verdeelde ribben:

$$D_{sr} = t' \frac{h_{b1} h_{b2}}{h_z} + t(h_{b2} - h_{b1})' \left[1 - \frac{z}{b} \left(1 + \frac{h_{b2}}{h_z} \right) \right], \qquad (6)$$

in de geconcentreerde rib i

$$D_{si} = \left[\frac{-W_1 h_{b2} + W_2 h_{b1}}{b h_z} + \frac{\Delta X'}{h_z} \frac{h_{b1} h_{b2}}{h_{b1} + h_{b2}} \right]_i . \qquad (7)$$

Hierin zijn W_{1i} en W_{2i} de torsiemomenten, die bij rib i *geconcentreerd op den vleugel aangrijpen (fig. 3).*

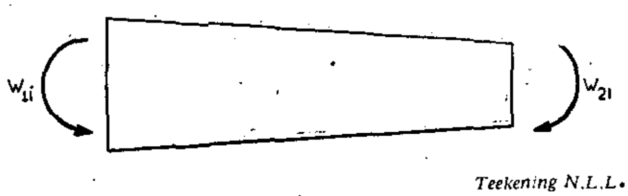


Fig. 3. Uitwendige belasting van rib i.

De dwarskrachten in de liggerwanden bedragen

$$D_{s1} = D_1 + M_1 \frac{h_1'}{h_1}, \qquad (3a)$$

$$D_{s2} = D_2 + M_2 \frac{h_2'}{h_2}. \qquad (4a)$$

De integro-differentiaalvergelijking waaraan X moet voldoen is voor *symmetrische belasting*

$$(X''H)' - X'T + \int_0^x X(B_1 + B_2)\,dx + [X(C_1 + C_2)]_0 =$$
$$= \int_0^x \left(-M_1^0 B_1 + M_2^0 B_2 - \frac{D_1^0}{S_{s1}} \frac{h_1'}{h_{b1} + h_{b2}} + \frac{D_2^0}{S_{s2}} \frac{h_2'}{h_{b1} + h_{b2}} \right) dx -$$
$$- D_1^0 C_1 \frac{h_1}{h_1'} + D_2^0 C_2 \frac{h_2}{h_2'} + (-M_1^0 C_1 + M_2^0 C_2)_0 \qquad (8)$$

en haar randvoorwaarden zijn

$$x = 0 : \; X' = 0, \qquad (9a)$$
$$x = L : \; X = X' = 0. \qquad (9b, c)$$

Voorts gelden ter plaatse x_i de overgangsvoorwaarden

$$x = x_i : \; X_{i-} = X_{i+}, \qquad (9d)$$
$$x = x_i : \; [H(X'' + aX')]_{i-} = [H(X'' + aX')]_{i+} =$$
$$= [K(\Delta X' + P)]_i, \qquad (9e, f)$$

waarin $\quad a = - \frac{h_{b1}' + h_{b2}'}{h_{b1} + h_{b2}}.$

De oplossing der differentiaalvergelijking verkrijgt men op principieel dezelfde wijze als in *lit.* 3, punt 4b, c is aangegeven voor de daar behandelde Z-vergelijking.

Opmerking.

De in het vervolg besproken berekeningen, die alle gevallen van symmetrische belasting betreffen, gingen uit van formules, die bij een vroegere afleiding gevonden waren en die niet volkomen juist waren. Het verschil bestond hierin, dat soms in plaats van h_b de liggerhoogte h was ingevoerd. Daarmee wordt ten opzichte van bepaalde grootheden een fout gemaakt van de orde $\frac{h_b - h}{h}$. Deze fouten zijn van geringe beteekenis, zoodat de resultaten der uitgevoerde berekeningen als voldoende nauwkeurig mogen worden beschouwd; vooral ook, omdat het hier beoogde doel een onderlinge vergelijking is van verschillende berekeningsresultaten, die systematisch dezelfde kleine fout bevatten.

3. De beschouwde vleugelconstructies.

De vleugelconstructie, waarop de hier te bespreken berekeningen betrekking hebben, is gegeven in fig. 4.

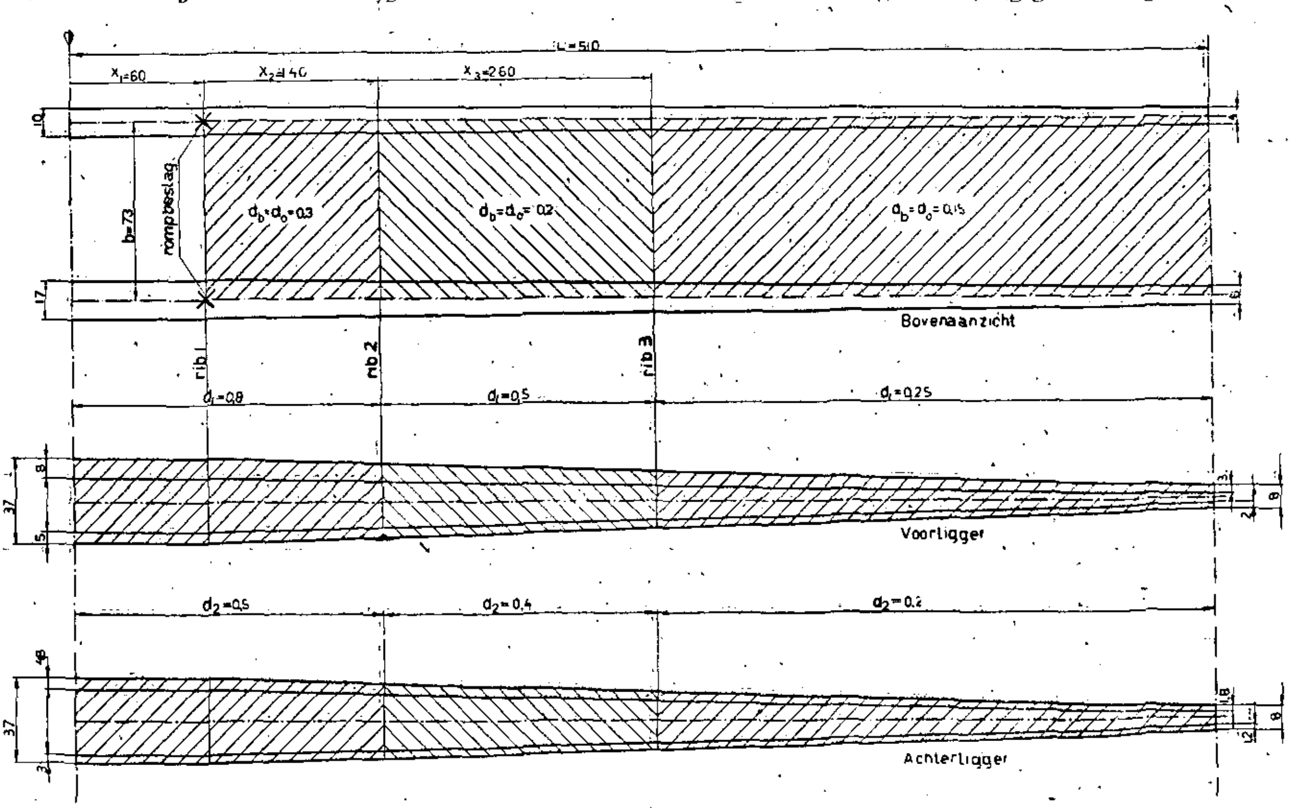


Fig. 4. Vleugelconstructie met afmetingen (cm). Alle wanden zijn van diagonaal triplex.

Tusschen de rompbeslagen ($x_1 = 60$ cm) ontbreekt de bekleeding. Liggerwanden en bekleeding bestaan uit diagonaaltriplex; zij hebben discontinuïteiten in dikte bij $x_2 = 140$ cm, $x_3 = 260$ cm.

De afmetingen: liggerhoogte, gordingbreedte en gordingdikte verloopen lineair van $x_1 = 60$ cm tot $x_L = 510$ cm.

De volgende materiaalconstanten zijn aangenomen:

$E = 133.000$ kg/cm²,
$G = 9.000$ kg/cm² voor normaal triplex,
$G = 44.000$ kg/cm² voor diagonaal triplex.

TABEL 1.

Ribstijfheden Gd.

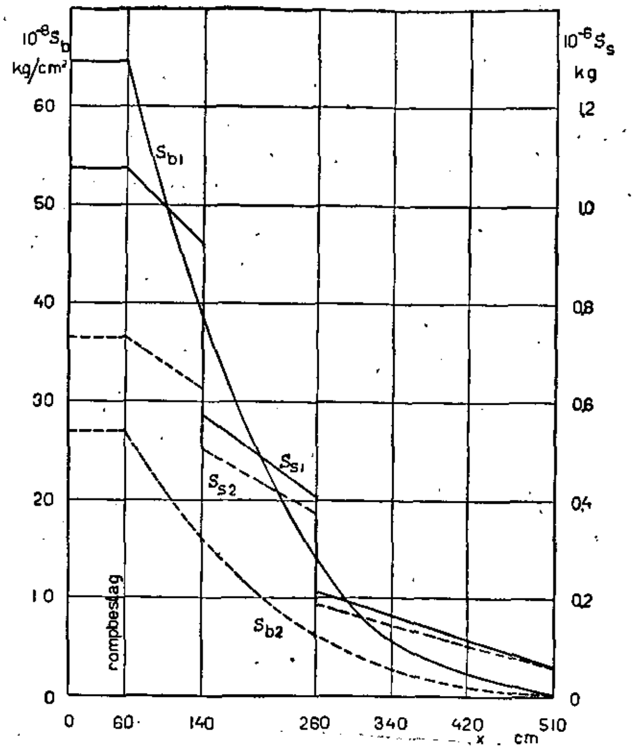
Vleugel	$G_r d_r$ kg/cm²	$G_i d_i$ kg/cm rib 1	rib 2	rib 3
I	∞	—	—	—
II	40	2.160	900	900
III	40	8.000	900	900
IV	40	8.000	8.000	900
V	40	2.160	24.000	900
VI	40	24.000	24.000	900
VII	120	6.480	24.000	2.700
VIII	120	24.000	24.000	2.700

TABEL 2.

Dikte en soort der geconcentreerde ribben.

$G_i d_i$ kg/cm	Triplexsoort	d_i cm
900	normaal	0,1
2.160	normaal	0,24
2.700	diagonaal	0,06
6.480	diagonaal	0,15
8.000	normaal	0,9
24.000	diagonaal	0,55

De ribstijfheden zijn aangegeven in tabel 1. Daarbij is verschil gemaakt tusschen de acht vleugels I t/m VIII, die elk weer een andere combinatie van ribstijfheden weergeven. Door vergelijking van de resultaten voor deze verschillende vleugels wordt een inzicht verkregen in de beteekenis der ribvervormingen. Vleugel I heeft oneindig stijve ribben en vertegenwoordigt dus de berekeningswijze, waarbij de ribvervormingen worden verwaarloosd. Bij de vleugels II t/m VI zijn de continu verdeelde ribben van normaal triplex gedacht en afgeleid uit een ribafstand van 27 cm met 0,12 cm ribdikte $\left(\frac{0{,}12 \cdot 9000}{27} = 40\right)$; bij de



Teekening N.L.L.

Fig. 5. Buigings- en afschuifstijfheid van de liggers.

vleugels VII en VIII zijn de continu verdeelde ribben van diagonaaltriplex gedacht, terwijl de ribdikte tot 0,075 cm is verminderd.

De geconcentreerde ribben 1, 2 en 3 in de punten x_1, x_2 en x_3 hebben onderling verschillende stijfheden. De aangenomen ribdikten zijn in tabel 2 vermeld.

De buigings- en afschuivings-stijfheden van de liggers zijn in fig. 5 gegeven; de voornaamste stijfheidsfactoren, die in de berekening voorkomen, alsmede hun samenstellende deelen, zijn in tabel 3 gegeven. Daaruit blijkt voorts, dat met goede benadering mag worden gesteld

$$B_1 + B_2 = \frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}},$$

$$T = \frac{1}{(h_{b1} + h_{b2})^2}\left[b\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_o d_o}\right) + \frac{h_{b2}^2}{S_{s1}} + \frac{h_{b1}^2}{S_{s2}}\right].$$

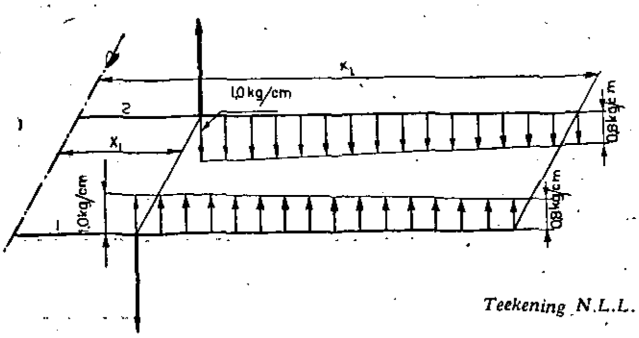
4. De belastingen.

De berekeningen hebben betrekking op symmetrische belastingsgevallen, waarbij in iedere vleugeldoorsnede slechts een wringend moment optreedt, zoodat $D_1^0 = -D_2^0 = D^0$, $M_1^0 = -M_2^0 = M^0$.

TABEL 3.

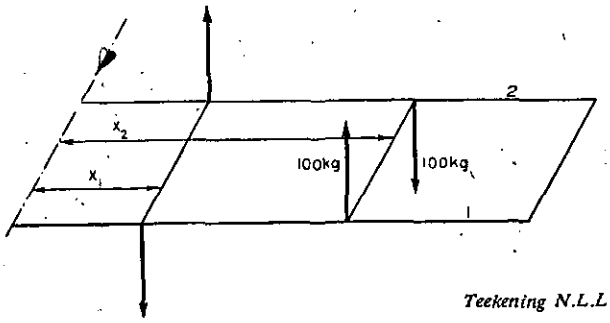
Stijfheidsfactoren.

cm	10^{-10} kg^{-1} cm^{-2}		10^{-6} kg^{-1}			
x	$\frac{1}{S_{b1}} + \frac{1}{S_{b2}}$	$B_1 + B_2$	$(G_r d_r = \infty)$ T	$(G_r d_r = 40)$ T	$(G_r d_r = 120)$ T	$C_1 \frac{h_1}{h_1'} + C_2 \frac{h_2}{h_2'}$
0—60	5,262	5,266	2,596	2,559	2,584	1,152
100	6,830	6,825	2,955	2,909	2,940	1,242
140—	9,040	9,043	3,401	3,342	3,381	1,346
140+	9,040	9,056	5,028	4,969	5,008	1,874
180	12,21	12,20	5,86	5,78	5,83	2,05
260—	24,18	24,21	8,39	8,25	8,34	2,51
260+	24,18	24,07	12,02	11,88	11,97	5,01
340	55,49	55,44	18,62	18,34	18,53	6,47
420	162,5	161,4	33,61	32,89	33,37	9,14
510	962	967	94,91	91,21	93,68	17,01



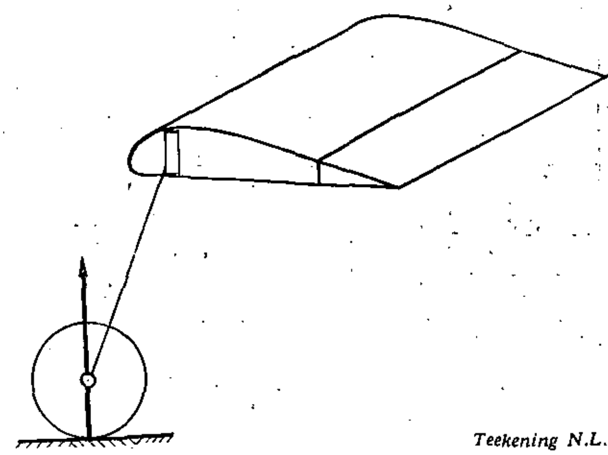
Teekening N.L.L.

Fig. 6a. Continu verdeelde torsiebelasting (belasting *a*).



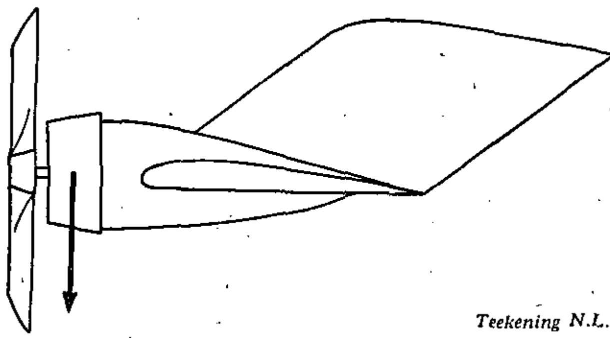
Teekening N.L.L.

Fig. 6b. Geconcentreerde torsiebelasting (belasting *b*).



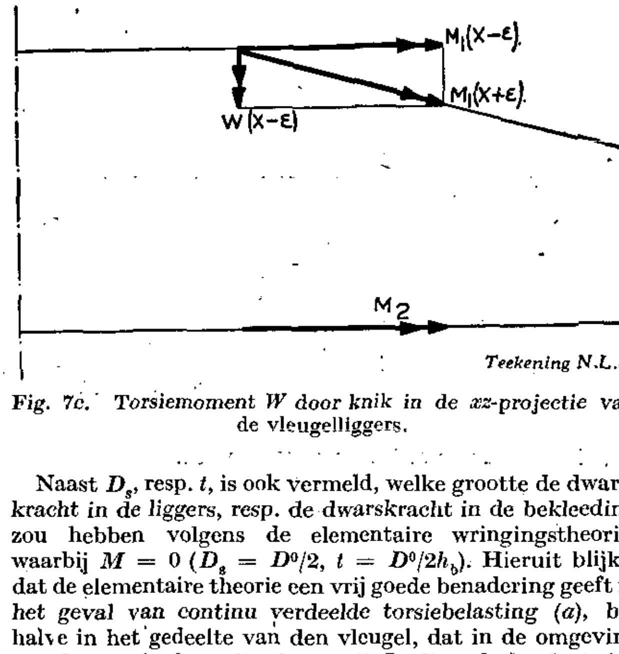
Teekening N.L.L.

Fig. 7a. Torsie door landingsstoot.



Teekening N.L.L

Fig. 7b. Torsie door massakrachten van den zijmotor.



Teekening N.L.L.

Fig. 7c. *Torsiemoment W door knik in de xz-projectie van de vleugelliggers.*

Twee belastingsgevallen worden onderzocht:

a) Een continu verdeelde liggerbelasting over de geheele vleugelbreedte buiten de rompbeslagen; zij bedraagt ter plaatse $x_1 = 60$ cm 1 kg/cm en ter plaatse $x_L = 510$ cm 0,8 kg/cm en verandert tusschen x_1 en x_L lineair. De reacties worden in x_1 geleverd (fig. 6a).

b) Een geconcentreerde liggerbelasting ter plaatse $x_2 = 140$ *cm van 100 kg. De reacties worden in* x_1 geleverd (fig. 6b).

De belasting *a*) vertegenwoordigt het belastingtype, dat het gevolg is van luchtkrachten; de belasting *b*) vertegenwoordigt de torsiebelastingen, die het gevolg zijn van landingsstooten (fig. 7a), van traagheidskrachten bij aanwezigheid van zijmotoren (fig. 7b), of van knikken in de xz-projectie van de liggers (fig. 7c).

5. De resultaten van de berekeningen.

De resultaten van de berekeningen zijn gegeven in fig. 8 *t/m 10 en tabel 4 voor belasting a) en in fig. 11 t/m 13* en tabel 5 voor belasting *b*). Deze figuren en tabellen vermelden de buigende momenten in de liggers (M), de dwarskracht in den liggerwand (D_s), de dwarskracht in de bekleeding *per lengte-eenheid* (t), *de dwarskrachten in de* continu verdeelde ribben per oppervlakte-eenheid (t_r) en de dwarskrachten in de geconcentreerde ribben per lengte-eenheid (t_i).

Omdat $h_{b1} = h_{b2} = h_b$, verder omdat $\frac{h_1'}{h_1} = \frac{h_2'}{h_2} = \frac{h'}{h}$ en wegens de onder punt 2 reeds genoemde fout worden deze grootheden gegeven door de volgende formules

$$M_1 = -M_2 = M = M^0 + X, \qquad (10)$$

$$D_{s1} = -D_{s2} = D_s = D^0 - \frac{1}{2} X' + M \frac{h'}{h}, \qquad (11)$$

$$t = \frac{X'}{2h_b}, \qquad (12)$$

$$t_r = \left(\frac{X'}{2h_b}\right)', \qquad (13)$$

$$t_i = \left(\frac{\varDelta X'}{2h_b}\right)_i. \qquad (14)$$

Naast D_s, resp. t, is ook vermeld, welke grootte de dwarskracht *in de liggers*, resp. de dwarskracht in de bekleeding zou hebben volgens de elementaire wringingstheorie, waarbij $M = 0$ ($D_s = D^0/2$, $t = D^0/2h_b$). Hieruit blijkt, dat de elementaire theorie een vrij goede benadering geeft in *het geval van continu verdeelde torsiebelasting* (*a*), behalve in het gedeelte van den vleugel, dat in de omgeving van de rompbeslagen ligt ($x < 200$). In dit gedeelte doet zich de invloed van de discontinuïteit in de belasting bij $x_1 = 60$ *gevoelen. De elementaire theorie geeft echter voor belasting b*) groote verschillen met de nauwkeurige berekening.

6. Onderlinge vergelijking der resultaten en conclusies.

De berekening voor ribben met oneindig groote stijfheid is minder bewerkelijk dan de berekening voor vervormbare ribben. In verband daarmee is het van belang na te gaan in hoeverre de verwaarloozing der ribvervormingen toelaatbaar is en van welke ribben de stijfheid belangrijken invloed heeft op de krachtenverdeeling.

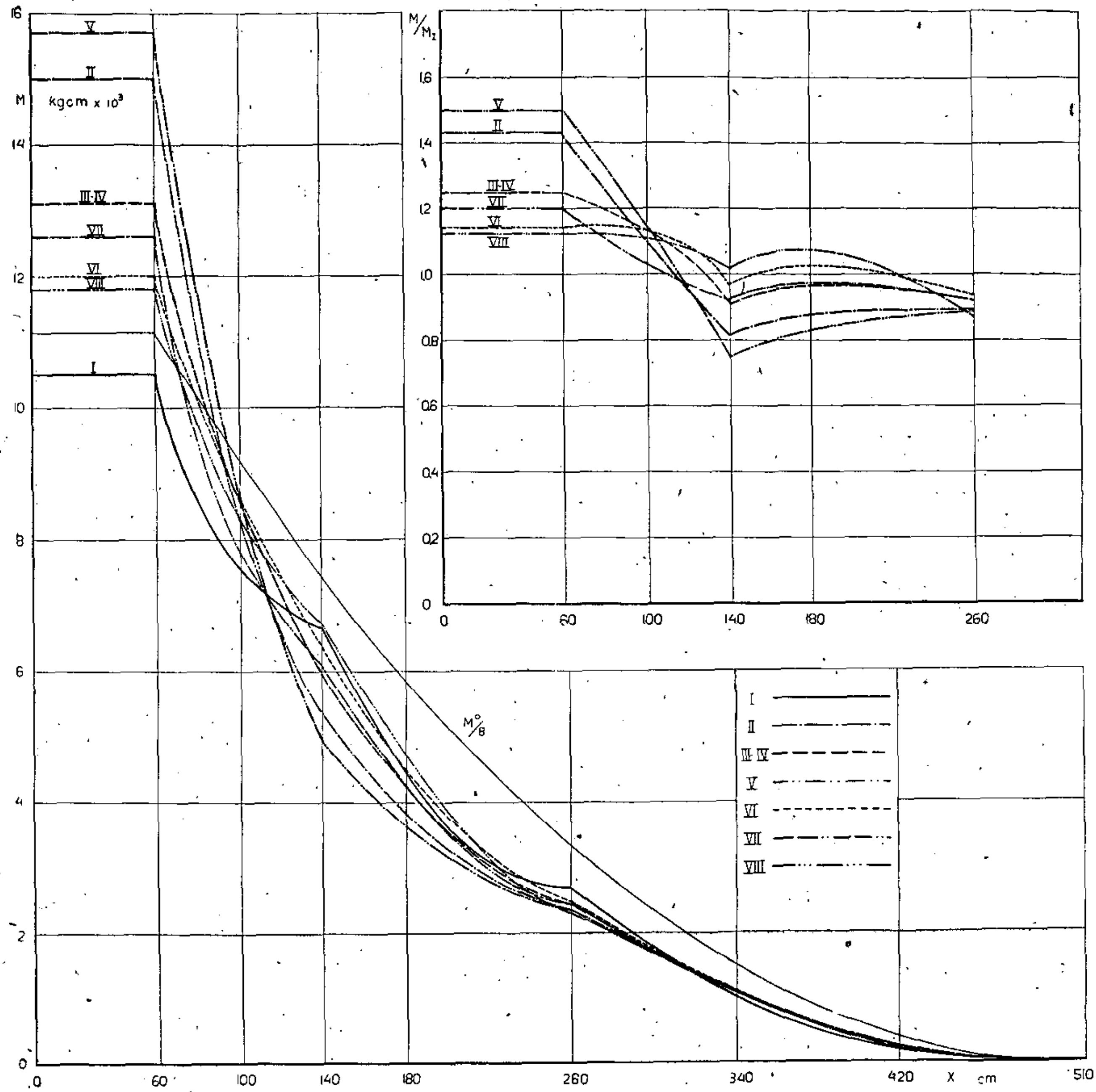


Fig. 8. Buigende momenten (M) bij belasting a. *Teekening N.L.L.*

61. De continu verdeelde torsiebelasting.

611. *Invloed van stijfheidsverandering van rib 1.*

Uit de vergelijking van II met III, V met VI en VII met VIII, welke gevallen onderling slechts verschillen in stijfheid van rib 1, blijkt, dat de stijfheid van rib 1 een belangrijken invloed heeft op M, D_s en t in het gebied $60 < x < 140$.

612. *Invloed van stijfheidsverandering van rib 2.*

Uit de vergelijking van II met V en III met IV, welke gevallen onderling slechts verschillen in stijfheid van rib 2, blijkt, dat de stijfheid van rib 2 een zeer ondergeschikten invloed heeft op M, D_s en t. Zelfs een zeer groote verandering als tusschen II en V heeft nauwelijks invloed.

613. *Invloed van stijfheidsverandering van rib 3.*

Omdat M, D_s en t bij $x = 260$ weinig van elkaar verschillen, is de invloed van de stijfheid van rib 3 eveneens van ondergeschikte beteekenis.

614. *Invloed van stijfheidsverandering van de continu verdeelde ribben.*

De gevallen VI en VIII verschillen alleen in stijfheid van de continue ribben en van rib 3. Daar de stijfheidsverandering van rib 3 niet van beteekenis is, kan het verschil tusschen VI en VIII worden opgevat als alleen te zijn veroorzaakt door het verschil in stijfheid der continue ribben. Dit verschil is voor M, D_s en t gering. Het blijkt dus, dat de stijfheid der continue ribben niet belangrijk is, althans indien, zooals in de gevallen VI en VIII, rib 1 een groote stijfheid bezit.

Om den invloed van stijfheidsverandering der continu verdeelde ribben na te gaan voor het geval, dat rib 1 minder stijf is, is de vergelijking van IV met VII van belang. De verschillen in stijfheid van rib 2 en 3 zijn blijkens punt 612 en 613 van ondergeschikte beteekenis. Het verschil in stijfheid van rib 1 is gering; voor zoover het invloed heeft, heeft het de neiging den invloed van het verschil in stijfheid van de continue ribben te compenseeren. Het blijkt nu, dat de verschillen in M, D_s en t belangrijker zijn dan in de vergelijking van VI met VIII. Als de stijfheid van rib 1 nog

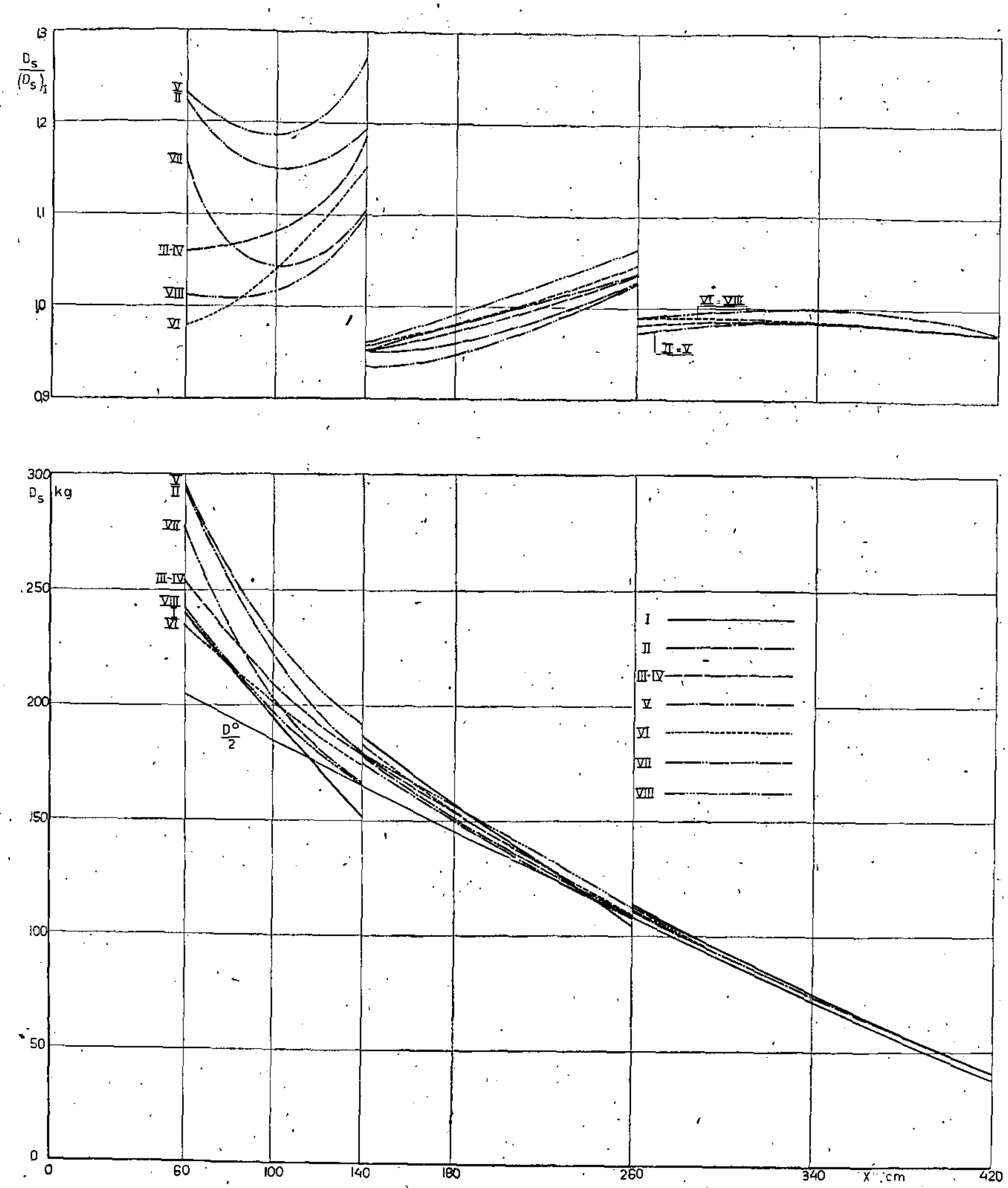


Fig. 9. Dwarskrachten in de liggerwanden (D_s) bij belasting *a*. *Teekening N.L.L.*

verder zou afnemen, moet dus verwacht worden, dat de stijfheid der continue ribben nog meer beteekenis krijgt.

615. *Samenvattende conclusies.*

M, D_s en t zijn bij vleugels met vervormbare ribben in het gebied $x > 180$ onderling nagenoeg gelijk en eveneens vrijwel gelijk aan deze grootheden bij I. Een berekening, die oneindig stijve ribben veronderstelt, is voor dit gebied in den regel voldoende nauwkeurig.

Voor $x < 180$ zijn de verschillen ten opzichte van I kleiner, naarmate rib 1 en de continu verdeelde ribben stijver zijn. Indien rib 1 ongeveer dubbel zoo stijf is als de bekleeding, $(Gd)_1 \backsim 2\ (Gd)_{\text{bekleeding}}$, blijven deze verschillen in M (in $x = 0$), D_s en t kleiner dan 15 %. Veelal zal men dus, mits rib 1 zeer stijf is, in de berekening oneindig stijve ribben mogen veronderstellen. Natuurlijk kan, ook wanneer rib 1 minder stijf is, een berekening, waarbij oneindig stijve ribben zijn verondersteld, voldoende betrouwbaar zijn, of zelfs kan dit het geval zijn met een berekening, die de elementaire torsietheorie toepast, indien de torsiebelasting in vergelijking tot andere belastingen onbelangrijk is of indien de minder nauwkeurige berekening een veilige benadering geeft.

62. De geconcentreerde torsiebelasting.

621. *Invloed van stijfheidsverandering van rib 1.*

Uit de vergelijking van II met III, V met VI en VII met VIII, welke gevallen onderling slechts verschillen in stijf-

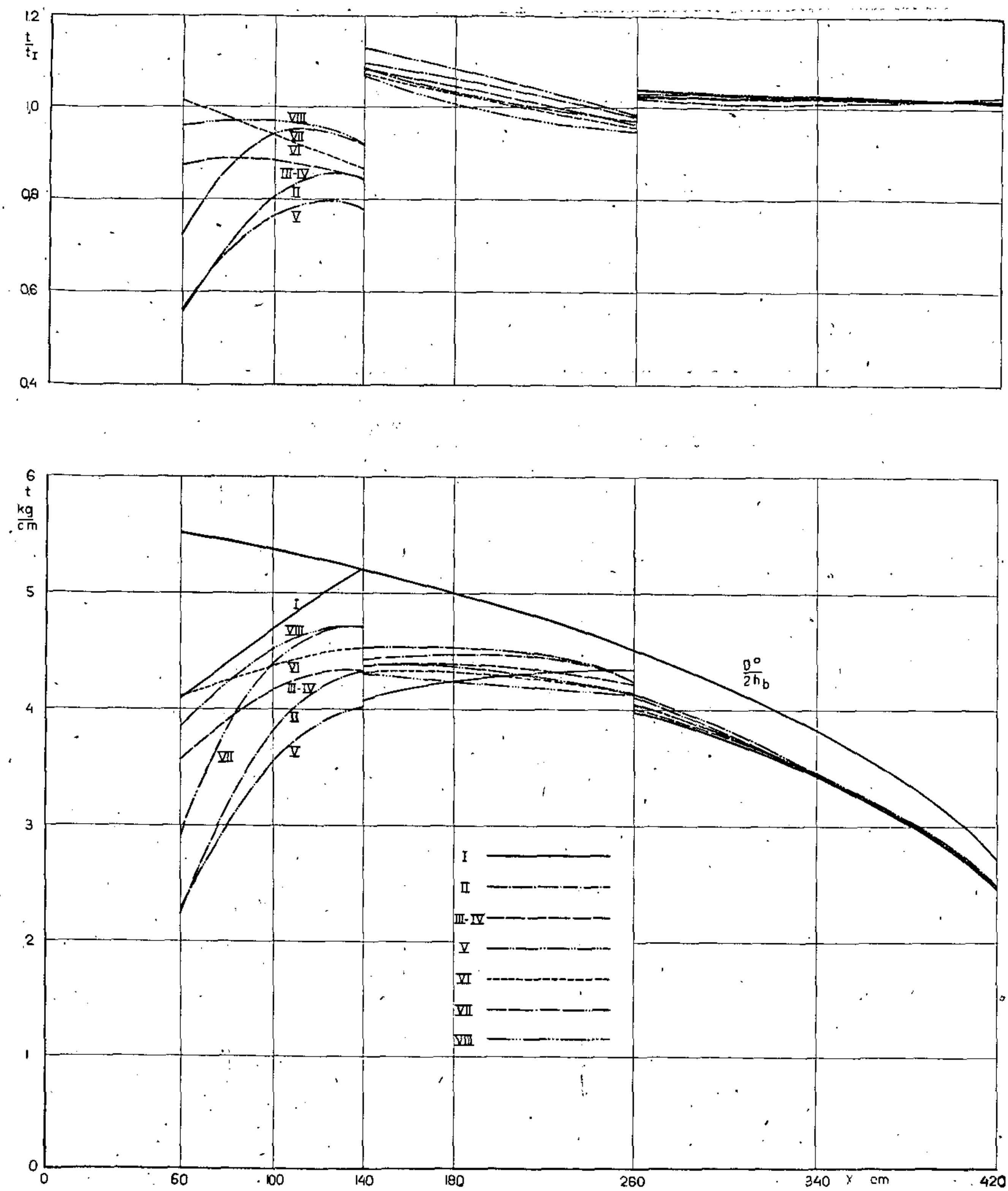


Fig. 10. Dwarskracht per lengte-eenheid der bekleeding (t) bij belasting *a*. *Teekening N.L.L.*

heid van rib 1, blijkt, dat de stijfheid van rib 1 een belangrijken invloed kan hebben op M, D_s en t in het gebied $60 < x < 140$. Deze invloed is het minst sterk op M en het sterkst op t. Het blijkt, dat de stijfheid van deze rib meer invloed heeft naarmate rib 2 stijver en de continue ribben slapper zijn.

622. *Invloed van stijfheidsverandering van rib 2.*

Uit de vergelijking van II met V en III met IV, welke gevallen onderling slechts verschillen in stijfheid van rib 2, blijkt, dat de stijfheid van rib 2 een ondergeschikten invloed heeft op M, weinig invloed heeft op D_s en van veel beteekenis kan zijn voor t. Deze invloed lijkt belangrijker te zijn, naarmate rib 1 minder stijf is.

Dit geldt voor wat betreft D_s en t voor het gebied binnen rib 2. Buiten rib 2 heeft de stijfheids-verandering van rib 2 grooten invloed op de dwarskrachtenverdeeling, doch hier zijn de spanningen lager dan in het deel binnen rib 2, zoodat in den regel met een minder nauwkeurige kennis van de spanning genoegen kan worden genomen.

623. *Invloed van stijfheidsverandering van rib 3.*

Omdat de krachten in de omgeving van rib 3 zeer klein

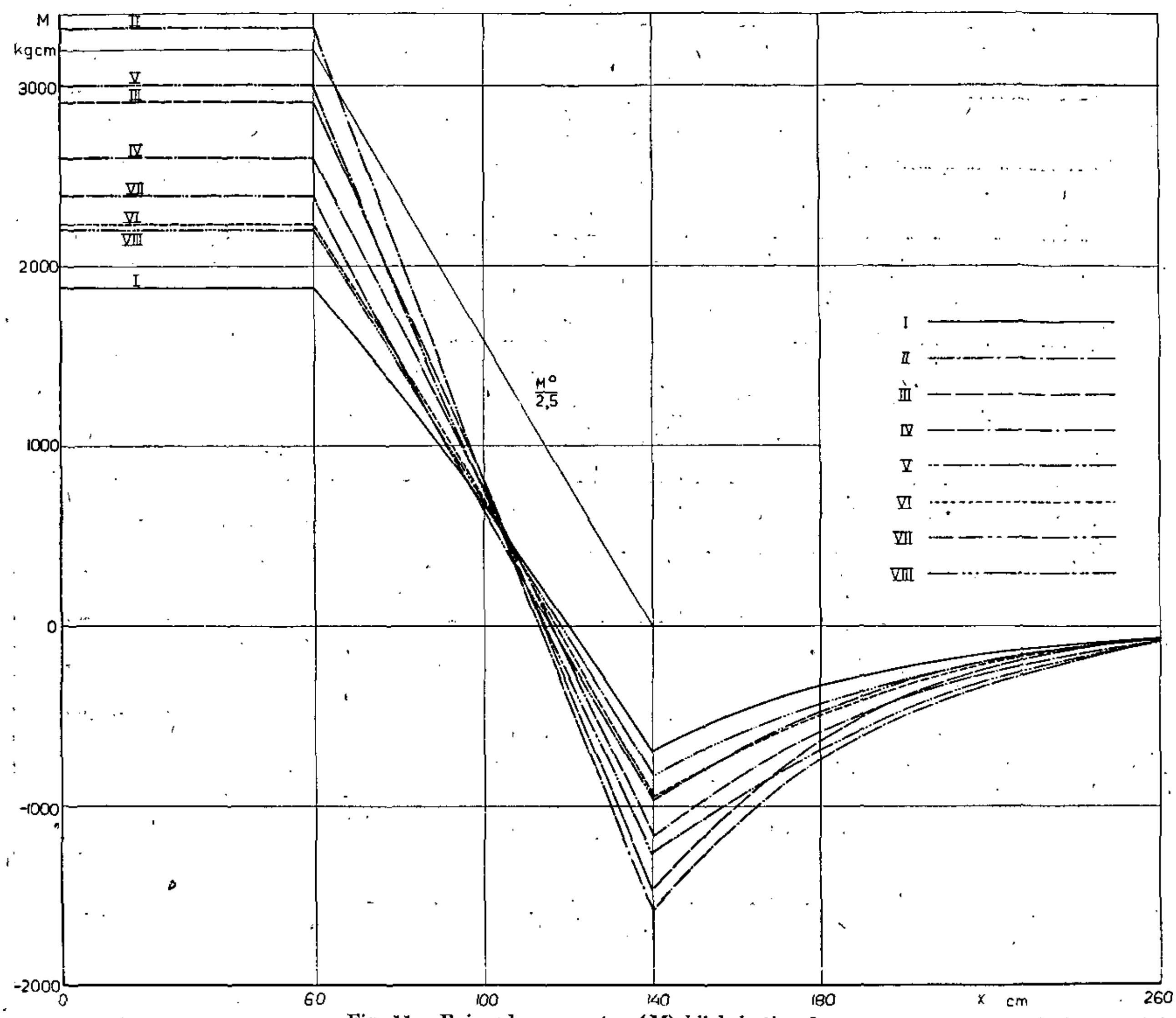


Fig. 11. Buigende momenten (M) bij belasting b. *Teekening N.L.L.*

zijn geworden, is de invloed van de stijfheid van rib 3 eveneens van geringe beteekenis.

624. *Invloed van stijfheidsverandering van de continu verdeelde ribben.*

Omdat in de vergelijking tusschen VI en VIII M en D_s vrijwel niets en t zeer weinig verschillen, mag om dezelfde redenen als onder punt 614 uiteengezet zijn, geconcludeerd worden, dat de stijfheid van de continue ribben niet belangrijk is, mits de ribben 1 en 2 een groote stijfheid bezitten. Over den invloed van een verandering van de stijfheid der continue ribben bij minder stijve ribben 1 en 2 zijn geen berekeningen uitgevoerd. Echter moet op grond van de vergelijking met I, waar de continue ribben oneindig stijf zijn en de geconcentreerde ribben elke willekeurige stijfheid kunnen hebben, verwacht worden, dat de beteekenis van de stijfheid der continue ribben voor M, D_s en t toeneemt naarmate de ribben 1 en 2 slapper zijn.

625. *Samenvattende conclusies.*

Op eenigen afstand buiten het aangrijpingspunt van de belasting ($x > 180$) zijn M, D_s en t klein, zoodat zij in den regel verwaarloosbaar zijn.

De verschillen tusschen M, D_s en t bij I en bij vleugels met vervormbare ribben zijn kleiner naarmate rib 1 en 2 en de continu verdeelde ribben stijver zijn. Indien de ribben 1 en 2 ongeveer dubbel zoo stijf zijn als de bekleeding blijven deze verschillen in M ($x = 0$), D_s en t resp. kleiner dan 20, 5 en 10 %. Veelal zal men dus, mits de ribben 1 en 2 zeer stijf zijn, in de berekening oneindig stijve ribben mogen veronderstellen. Voor het geval, dat de ribben 1 en 2 minder stijf zijn, is een berekening, waarbij de ribvervorming wordt verwaarloosd, of een berekening volgens de elementaire torsietheorie voldoende betrouwbaar, wanneer de torsiebelasting in vergelijking tot andere belastingen gering is of indien de minder nauwkeurige berekening een veilige benadering geeft.

7. Stijfheidseischen voor de ribben.

Indien men de vleugelconstructie zoodanig wil uitvoeren, dat de verwaarloozing van de ribvervormingen geen belangrijke onnauwkeurigheid in de berekende krachtsverdeeling tengevolge heeft, moet men sommige ribben groote afschuifstijfheid geven.

71. In het bijzonder zijn uit dit oogpunt de ribben van belang, die zich bevinden op plaatsen, waar groote torsiemomenten worden ingeleid, zooals bij de rompbeslagen van den vleugel en bij bevestigingspunten van onderstellen en motorbokken of ter plaatse van knikken in de xz-projectie van de liggers. Naarmate deze ribben stijver worden gemaakt, zijn de afwijkingen tusschen de berekende krachtsverdeelingen bij verwaarloozing van de ribvervormingen en bij in rekening brengen van deze vervormingen kleiner. In den regel is de graad van nauwkeurigheid der berekening, waarbij oneindig stijve ribben worden verondersteld, voldoende (zie punt 615 en 625), indien de gezamenlijke stijfheid $\Sigma\,(Gd)_i$ der ribben in de naaste omgeving van een

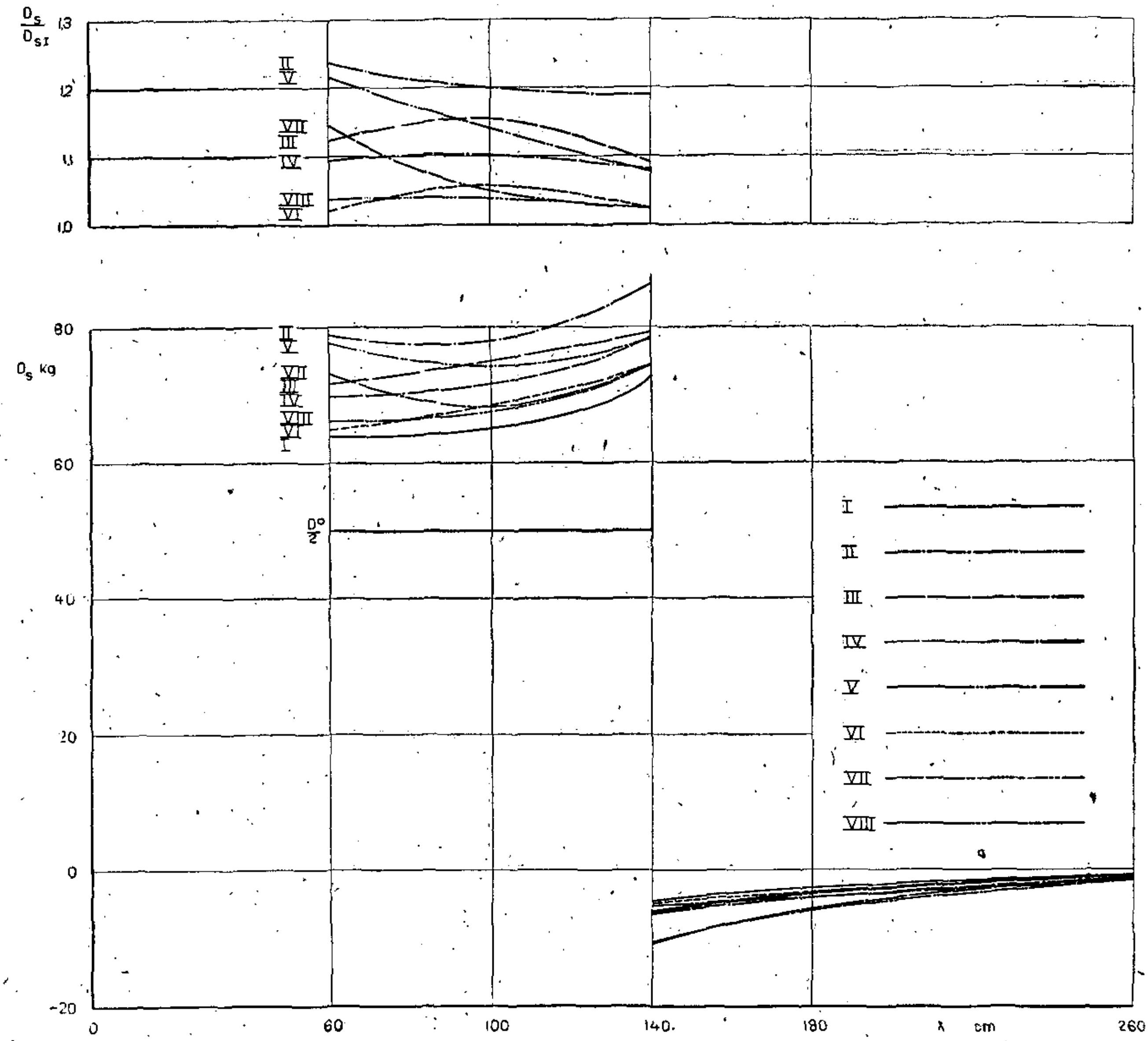


Fig. 12. Dwarskrachten in de liggerwanden (D_s) bij belasting b. *Teekening N.L.L.*

discontinuïteit in torsiemoment in het punt i voldoet aan de voorwaarde

$$\Sigma(Gd)_i > \left[\frac{4}{\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_o d_o}} \left| \frac{\Delta D^0}{D^0} \right| \right]_i \qquad (15)$$

Hierbij wordt D_i^0 gelijk genomen aan die waarde van D^0 in de punten x_{i-} en x_{i+}, welke in absoluten zin de grootste is.

72. In punten, waar de stijfheid der bekleeding discontinu verloopt *en waar geen torsiemoment* aangrijpt, schijnt het niet steeds noodig te zijn voor groote ribstijfheid zorg te dragen. Het verdient evenwel aanbeveling de ribben op dergelijke plaatsen zoo stijf te maken, dat voldaan wordt aan de voorwaarde:

$$\Sigma(Gd)_i > \left| \frac{4}{\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_o d_o}\right)_{i+}} - \frac{4}{\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_o d_o}\right)_{i-}} \right|. \qquad (16)$$

73. Bij vleugels met diagonaaltriplex-bekleeding kunnen, indien bovengenoemde voorwaarden in acht genomen zijn, de overige ribben bij de gebruikelijke constructiewijze in normaaltriplex worden uitgevoerd.

8. Samenvatting.

Over een houten vleugel van de in fig. 4 aangegeven constructie zijn berekeningen uitgevoerd met het doel om na te gaan van welken invloed de ribvervormingen zijn op de *krachtsverdeeling bij torsiebelasting.* Daartoe zijn naast elkaar eenige ribuitvoeringen onderzocht, namelijk een vleugel (I) met oneindig stijve ribben en voorts zeven vleugels (II tot VIII) met uiteenloopende stijfheid der continu verdeelde ribben en der geconcentreerde ribben, die op plaatsen voorkomen, waar er discontinuïteiten zijn in bekleedingsdikte of in torsiemoment. Een overzicht van de stijfheid dezer ribben en van hun constructie geven de tabellen 1 en 2.

De berekeningswijze wordt in dit rapport niet uitvoerig toegelicht, omdat zij inmiddels vervangen is door een andere van meer algemeene strekking, waarbij de vleugel zonder continu verdeelde en uitsluitend met geconcentreerde ribben gedacht is (*lit.* 5). De resultaten der berekeningen zijn gegeven:

a) voor een continu verdeelde torsiebelasting volgens fig. 6a in fig. 8 en 10 en tabel 4;

b) voor een geconcentreerd aangrijpend torsiemoment volgens fig. 6b in fig. 11 tot 13 en tabel 5.

Het blijkt, dat de stijfheid der ribben bij de in houtconstructie gebruikelijke uitvoeringen van geen belang is voor de spanningen in die constructiedeelen, die op meer dan 2 à 3b afstand liggen van een plaats, waar een aanzienlijke discontinuïteit in het belastende torsiemoment optreedt (geval a bij rib 1, geval b bij rib 1 en 2). De ribvervormingen zullen doorgaans verwaarloosd kunnen worden

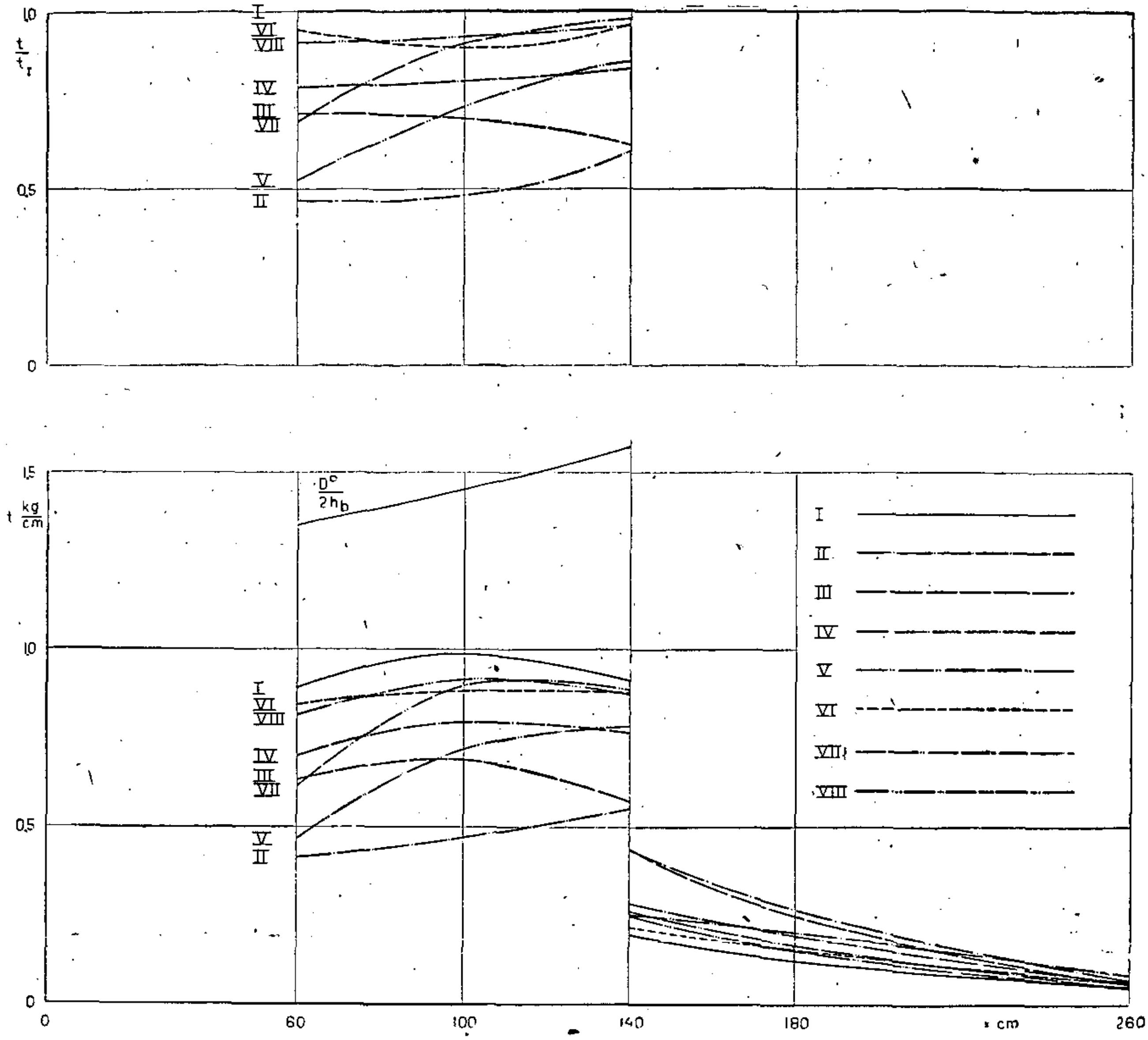


Fig. 13. Dwarskracht per lengte-eenheid der bekleeding (t) bij belasting b. *Teekening N.L.L.*

(fouten omtreeks 10 %), indien de stijfheid van de rib ter plaatse van of nabij een discontinuïteit in het torsiemoment voldoet aan het door (15) geformuleerde criterium. In dat geval kan de berekening worden uitgevoerd met de veronderstelling, dat de ribben volkomen stijf zijn. In punten, waar de stijfheid der bekleeding discontinu verloopt en waar geen torsiemoment aangrijpt, schijnt het niet steeds noodig te zijn voor groote ribstijfheid zorg te dragen om te bereiken, dat de ribvervormingen in de berekening verwaarloosd mogen worden. Het verdient echter aanbeveling de ribben op dergelijke plaatsen *zoo stijf te maken*, dat voldaan wordt aan het door (16) geformuleerde criterium.

9. Notaties.

$_0$ als index $(\ )_0$, duidt op *de doorsnede* $x = 0$;

^{0} als index $(\ )^0$, duidt op de krachtsverdeeling bij afwezigheid van de bekleeding (fig. 1);

1 als index, duidt op den voorligger;

2 als index, duidt op den achterligger;

$b, d_b, d_0, d, h, h_b, h_z; x, z$ *zijn gedefinieerd in fig. 1;*

d_i = wanddikte van rib i;

d_r = wanddikte van de continu verdeelde ribben per lengte-eenheid van den vleugel;

i = volgnummer van de geconcentreerde ribben;

t_b, t_o, t_i = dwarskracht per lengte-eenheid resp. in de bovenbekleeding, de onderbekleeding en in de lijfplaat van rib i;

t_r = schuifspanning in de continu verdeelde ribben;

$B_1 \quad = \dfrac{1}{S_{b1}} + \dfrac{1}{S_{s1}}\left(\dfrac{h_1'}{h_1}\right)^2 + C_1'$;

$C_1 \quad = \dfrac{1}{S_{s1}}\,\dfrac{h_1'}{h_1}\left(1 - \dfrac{h_1}{h_{b1} + h_{b2}}\right)$;

$S_{b1} \quad = \dfrac{E\,I_{1'}}{(1 + \frac{1}{4}\,h_1'^2)^2}$;

$S_{s1} \quad = G_1 d_1 h_1$;

B_2, C_2, S_{b2}, S_{s2} als vorige, doch 1 en 2 cyclisch verwisseld;

D = dwarskracht in de liggers (fig. 1);

D_s, D_{si} = dwarskracht in den wand van de liggers, resp. van rib i (fig. 2);

D_{sr} = dwarskracht in den wand van de continu verdeelde ribben per lengte-eenheid van den vleugel;

E = elasticiteitsmodulus van het liggermateriaal;

G, G_i, G_r = glijdingsmodulus van het wandmateriaal resp. van liggers, geconcentreerde en continu verdeelde ribben;

TABEL 4.

Dwarskrachten in de ribben, belasting a: continue ribben per oppervlakte-eenheid t_r(10^{-2} kg/cm²); geconcentreerde ribben per lengte-eenheid t_i (kg/cm).

x cm	Vleugel I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
60 (t_1)	4,08	2,25	3,57	3,56	2,28	4,13	2,94	3,91
60+	1,68	4,39	1,79	1,79	4,23	0,69	5,43	1,96
100	1,26	2,56	1,09	1,08	2,14	0,60	1,77	1,09
140—	0,96	0,26	0,04	0,02	0,09	—0,03	—0,18	—0,20
140 (t_2)	—1,14	0,06	0,01	0,04	0,54	—0,17	—0,35	—0,40
140+	0,66	0,26	0,05	0,02	0,09	—0,03	—0,18	—0,20
180	0,25	0,01	0,00	—0,01	—0,12	0,02	0,14	—0,11
260—	0,05	—0,65	—0,56	—0,56	—0,67	—0,51	—0,65	—0,25
260 (t_3)	—0,38	—0,15	—0,13	—0,12	—0,15	—0,11	—0,15	—0,06
260+	—0,56	—0,65	—0,56	—0,56	—0,67	—0,51	—0,65	—0,25
340	—0,90	—0,95	—0,97	—0,97	—0,95	—0,99	—0,89	—1,28
420	—1,50	—1,60	—1,62	—1,59	—1,60	—1,57	—1,56	—1,29

TABEL 5.

Dwarskrachten in de ribben, belasting b: continue ribben per oppervlakte-eenheid t_r(10^{-2} kg/cm²) geconcentreerde ribben per lengte-eenheid t_i (kg/cm).

x cm	Vleugel I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
60 (t_1)	0,890	0,413	0,630	0,699	0,466	0,844	0,613	0,812
60+	0,418	0,765	0,315	0,350	0,862	0,141	1,14	0,406
100	—0,064	0,055	0,308	0,094	0,374	0,566	0,230	0,086
140—	—0,418	—0,486	—0,567	—0,238	—0,087	—0,111	—0,308	—0,310
140 (t_2)	—0,713	—0,110	—0,126	—0,477	—0,528	—0,653	—0,618	—0,622
140+	—0,229	—0,486	—0,567	—0,238	—0,087	—0,108	—0,309	—0,310
180	—0,141	—0,369	—0,383	—0,228	—0,183	—0,155	—0,220	—0,206
260—	—0,054	—0,097	—0,073	—0,087	—0,116	—0,082	—0,048	—0,044

H $= \dfrac{b}{2\,G_r d_r (h_{b1} + h_{b2})}$;

I = traagheidsmoment van de liggerdoorsnede;

K_i $= \left[\dfrac{b}{2\,Gd(h_{b1} + h_{b2})}\right]_i$;

L = halve vleugelbreedte;

M = buigend moment in de liggers (fig. 1);

P_i $= \left[\dfrac{h_{b1} + h_{b2}}{bh_{b1}h_{b2}}(-W_1 h_{b2} + W_2 h_{b1})\right]_i$;

$$T = \frac{1}{(h_{b1}+h_{b2})^2}\left[b\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_o d_o}\right) - H(h_{b1}' + h_{b2}')^2\right] + \frac{1}{S_{s1}}\left(1 - \frac{h_1}{h_{b1}+h_{b2}}\right)^2 + \frac{1}{S_{s2}}\left(1 - \frac{h_2}{h_{b1}+h_{b2}}\right)^2;$$

W_i = uitwendig belastend wringend moment, aangrijpend op rib i (fig. 2);

X = statisch onbepaalde grootheid;

$(\,)'$ $= \dfrac{d(\,)}{dx}$;

$i-$ als index, duidt op het punt juist binnen x_i;

$i+$ als index, duidt op het punt juist buiten x_i;

$\Delta_i(\,)$ $= (\,)_{i+} - (\,)_{i-}$.

10. Literatuuropgave.

1. Koning, C. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. I. R.S.L.-rapport V. 358, Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VI, blz. 139—152. (1931).

2. v. d. Neut, A. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. II. R.S.L.-rapport S. 67, Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VII, blz. 55—65. (1934).

3. Koning, C. en v. d. Neut, A. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. III. R.S.L.-rapport S. 68, Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VII, blz. 67—97. (1934).

4. v. d. Neut, A. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels. IV. R.S.L.-rapport S. 70. Verslagen en Verhandelingen R.S.L., Deel VII, blz. 99—120. (1934).

5. v. d. Neut, A. De spanningsverdeeling in vleugels met twee niet-evenwijdige liggers verbonden door elastisch vervormbare ribben en bekleeding. N.L.L.-rapport S. 251, Verslagen en Verhandelingen N.L.L., deel XII, blz. S 15—32 (1943).

Afgesloten April 1940.

Report S. 278.

The effect of elastic rib shear on stresses in two-spar-wings with stressed skin.

Summary.

The stress analysis has been carried out for a wooden wing of the structure indicated in fig. 4 in order to study the effect of rib distortions on stresses induced by torque. Several types of ribs are investigated: the ribs of wing I are completely rigid; the ribs of wing II to VIII have different rigidities, the continuous ribs as well as the „local" ribs, that are located at discontinuities in thickness of skin or in torsional moment. A survey of the assumed stiffness and thickness of the ribs is given in tables 1 and 2.

The method how to deal with this wing system has not been explained in detail in this report, this method being replaced meanwhile by another of more general application for wings without continuous ribs but merely with local ribs (*ref.* 5). The numerical results are given for:

a) a continuous torque load by fig. 6a in the figs. 8 to 10 and table 4;

b) a concentrated torque load by fig. 6b in the figs. 11 to 13 and table 5.

The stiffness of ribs of the design usual for wooden structures proves to be of no importance for the stresses in those parts of the structures situated at 2 to 3*b* or more distance from places where considerable discontinuities of torsional moment occur (case *a* at rib 1, case *b* at rib 1 and 2). As a rule the rib shear will be negligible (errors about 10 %), if the stiffness of the rib at or near the discontinuity of torsional moment satisfies the criterion (15). In that case the wing may be analysed on the assumption of completely rigid ribs. In those points, where the skin stiffness changes discontinu and no change in torsional moment occurs, it appears to be not always necessary to have a large rib stiffness in order to allow for the neglect of rib shear. However it is advisable to design ribs at those places so, that the criterion (16) is satisfied.

As far as the meaning of the notations used is not apparent from the figures, the formulas, convention or the list of notations in nr. 9 they are explained here:

$(\ )_0$ refers to the point $x = 0$;
$(\ )^0$ refers to the stress distribution for the wing without skin;
d_i = web thickness of rib i;
d_r = web thickness of the continuous ribs per unit of length of x;
t_i = shear load per unit of length in the web of rib i;
t_r = shear stress in the continuous ribs;
X = statically indeterminate quantity.

Bericht S. 278.

Der Einfluss von Schubverformung der Rippen auf die Spannungsverteilung in beplankten Zweiholmenflügeln.

Zusammenfassung.

Für einen hölzernen Flügel der in Abb. 4 dargestellten Zusammensetzung sind Berechnungen durchgeführt worden zur Feststellung des Einflusses der Rippenverformungen auf die Spannungsverteilung unter Verdrehbelastung. Einige Rippenausführungen sind untersucht worden: die Rippen von Flügel I sind starr; die Rippen der Flügel II bis VIII sind verschieden steif, sowohl die stetig verteilten Rippen als auch die diskreten Rippen, die in Unstetigkeitsstellen der Beplankungsstärke und des Verdrehmomentes vorkommen. Die Tafeln 1 und 2 geben eine Uebersicht der angenommenen Steifigkeiten und Wandstärken.

Die Berechnungsweise ist in diesem Bericht nicht erläutert worden, weil sie inzwischen durch eine andere mit allgemeinerer Anwendbarkeit ersetzt worden ist; dabei hat der Flügel keine stetig verteilten Rippen sondern nur diskrete Rippen [5]. Die Berechnungsergebnisse sind gegeben worden für:

a) eine stetig verteilte Verdrehbelastung nach Abb. 6a in Abb. 8 bis 10 und Tafel 4;

b) ein konzentriertes Verdrehmoment nach Abb. 6b in Abb. 11 bis 13 und Tafel 5.

Es stellt sich heraus, dass die Rippensteifigkeit bei den im Holzbau üblichen Rippenkonstruktionen keinen merklichen Einflusz hat auf die *Spannungen in Konstruktionsteilen* auf 2 bis 3*b* oder mehr Abstand von der Stelle, wo eine beträchtliche Unstetigkeit des Verdrehmoments auftritt (Fall *a* bei Rippe 1, Fall *b* bei Rippen 1 und 2). Die Rippenverformungen sind gewöhnlich vernachlässigbar (Fehler etwa 10 v. H.) wenn die Steifigkeit der Rippe in oder in der Nähe von einer Unstetigkeitsstelle des Verdrehmoments der Bedingung (15) genügt. In diesem Falle darf die Berechnung die Rippen als vollkommen starr voraussetzen. An den Stellen, wo die Steifigkeit der Beplankung unstetig ist, wo aber das Verdrehmoment stetig ist, braucht man offenbar nicht immer eine steife Rippe zu haben damit die Vernachlässigung der Rippenverformungen zulässig ist. Es ist aber empfehlenswert die Rippen in solchen Stellen derart steif zu bemessen, dass die Bedingung (16) befriedigt wird.

Insoweit die Bedeutung der Formelzeichen nicht hervorgeht aus den Abbildungen, den Formeln, dem Formelverzeichnis (Nr. 9) oder der Konvention entspricht, ist sie im folgenden gegeben worden:

$(\ )_0$ bezieht sich auf den Punkt $x = 0$;
$(\ )^0$ bezieht sich auf die Spanningsverteilung im Flügel ohne Beplankung;
d_i = Wandstärke der Rippe i;
d_r = *Wandstärke der stetig verteilten Rippen pro Längeneinheit von* x;
t_i = Querkraft im Rippensteg i pro Längeneinheit;
t_r = Schubspannung in den stetig verteilten Rippen;
X = statisch unbestimmte Grösse.

RAPPORT S. 251.

De spanningsverdeeling in vleugels met twee niet-evenwijdige liggers verbonden door elastisch vervormbare ribben en bekleeding

door

dr. ir. A. VAN DER NEUT

Overzicht.

Dit rapport geeft voor vleugels van de in fig. 3 aangeduide samenstelling een methode van berekening.

Indeeling.

01. Inleiding.

In *lit.* 1 t/m. 4[1]) is een berekeningsmethode en een experimenteele verificatie daarvan gegeven voor het probleem van de spanningsverdeeling in houten vleugels met 2 evenwijdige liggers, verbonden door continu verdeelde, in hun eigen vlak volkomen stijve ribben en vervormbare bekleeding.

Bij meer moderne vleugelconstructies, zoowel van hout als van metaal, kan zich het geval voordoen, dat de afschuifstijfheid van de bekleeding in verhouding tot die van de ribben zoo groot is, dat de vervormingen der ribben van beteekenis worden voor de spanningsverdeeling in den vleugel. Deze uitbreiding van het vraagstuk, waarbij de vervormbaarheid der ribben in aanmerking is genomen, is behandeld in *lit.* 5. Het ribsysteem is daar gedacht als een continu ribverband tezamen met geconcentreerde ribben op plaatsen, waar discontinuïteiten optreden in de torsiebelasting, in de bekleedingsdikte of de ribstijfheid. Tevens werden enkele schematiseeringen van ondergeschikt belang ingevoerd, die het mogelijk maakten alle onbekenden in één enkele functie $X(x)$ uit te drukken, de differentiaalvergelijking met de randvoorwaarde dezer functie af te leiden en een directe oplossingsmethode aan te geven.

In dit rapport wordt het onderzoek uitgebreid tot vleugels met niet-evenwijdige liggers, waarbij bovendien de torsiecentra der liggers buiten de liggervlakken liggen. Daarbij worden dezelfde veronderstellingen ingevoerd en wordt in wezen dezelfde afleidingsmethode gevolgd als in *lit.* 5 hebben gediend. Er wordt echter een belangrijke verandering in de wijze van schematiseering van de vleugelconstructie gebracht, die niet moet worden opgevat als een gevolg van de omstandigheid, dat de liggers niet meer evenwijdig aan elkaar zijn, doch die voortvloeit uit de in *lit.* 5 gevonden resultaten.

In *lit.* 5 worden namelijk de resultaten medegedeeld over berekeningen betreffende een aantal constructies, waarbij de ribstijfheden onderling verschilden. Hieruit blijkt, dat het voornamelijk de ribben in het middengedeelte van den vleugel zijn, die groote krachten doorleiden en welker aanwezigheid mitsdien van beteekenis is. Daar zich hier bovendien gewoonlijk stijvere ribben bevinden, zooals de rompwand, de afscheidingen van tankruimen en de motorbok- of onderstelribben, concentreert zich de krachtsdoorleiding voornamelijk in deze stijvere ribben. Ook hebben in dit deel van den vleugel de regelmatig verdeelde ribben veelal een sterk verminderde stijfheid in verband met de ruimte, welke voor brandstoftanks of intrekbaar onderstel beschikbaar moet zijn.

Deze overwegingen doen de gedachte opkomen, dat wellicht een bruikbare schematiseering verkregen wordt, indien inplaats van het systeem van continu verdeelde en geconcentreerde ribben een ander systeem wordt gesteld dat slechts uit geconcentreerde ribben bestaat. In principe benadert dit systeem de werkelijkheid meer dan het vorige, daar het ribsysteem immers in werkelijkheid geen conti-

[1]) Verwijzingen naar punt 13, Literatuuropgave, worden met „*lit.*" aangeduid.

nuum is. Een berekeningsmethode echter, die met zooveel geconcentreerde ribben rekening zou houden als er in werkelijkheid voorkomen, schiet wegens het groote aantal ribben haar doel voorbij. Indien zij practisch bruikbaar wil zijn, moet zij het werkelijke ribsysteem schematiseeren tot een systeem met een beperkt aantal ribben. Een dergelijk stelsel van ribben is in het volgende verondersteld.

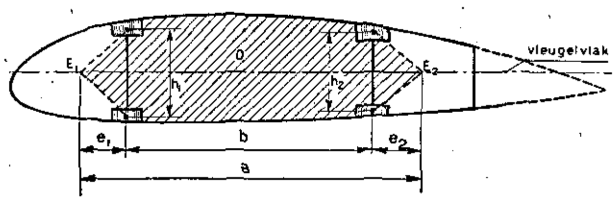
Punt 02 bespreekt de eigenschappen van het veronderstelde systeem van liggers, ribben en bekleeding; punt 03 tot 07 geven vervolgens de afleiding van de recursievergelijkingen, waaruit de statisch onbepaalde grootheden numeriek kunnen worden opgelost; de wijze van oplossing geeft punt 10. In punt 08 worden zooveel mogelijk vereenvoudigingen van voldoende nauwkeurigheid gegeven voor de over het algemeen gecompliceerde uitdrukkingen voor de coëfficiënten der recursievergelijkingen. Voor enkele veel voorkomende bijzondere gevallen van vleugelsamenstelling worden de vergelijkingen in punt 09 gegeven, die uiteraard van eenvoudiger gedaante zijn dan de meer algemeene vergelijkingen volgens punt 07; daarbij worden besproken:

1°. de vleugel, waarvan de ribben zoo stijf zijn, dat hun vervormingen verwaarloosbaar zijn;

2°. de vleugel, waarvan de liggerwanden zoodanig gevormd zijn, dat de torsiecentra der liggers in de liggervlakken vallen;

3°. de vleugel met evenwijdige liggers.

Ten behoeve van de numerieke toepassing zijn in de bijlage benaderingsformules gegeven voor de integralen, die in de diverse coëfficiënten der vergelijkingen voorkomen.



Teekening N.L.L.

Fig. 1. Vleugeldoorsnede.

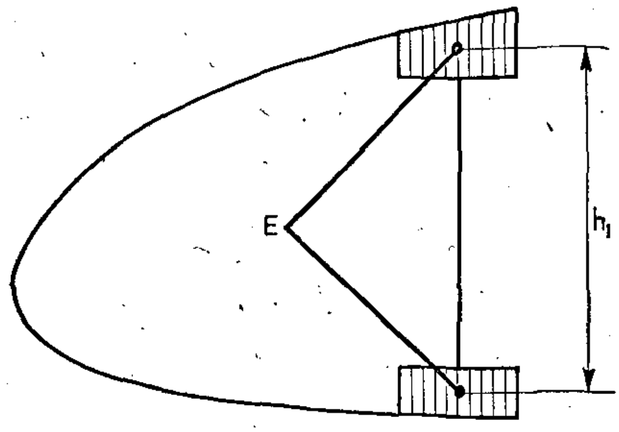
02. Het schema van den vleugel.

De beschouwde vleugelconstructie heeft 2 liggers, per vleugelhelft n ribben, terwijl zich tusschen de liggers een plaatbekleeding bevindt, die met deze liggers en de ribben is verbonden.

02.1. *De liggers.*

De plaats van de liggers in het systeem wordt uiteraard bepaald door de werklijnen der krachten, die zij opnemen. Deze krachten bestaan uit dwarskrachten in de liggerwanden en buigende momenten, die door de liggergordingen als normaalkrachten op de gordingdoorsnede worden opgenomen.

De normaalkrachten grijpen aan in het zwaartepunt van de liggergording; het vlak door de zwaartepunten van boven- en ondergording wordt in het vervolg „liggervlak" genoemd en de afstand van de zwaartepunten onderling „liggerhoogte" (h_1, h_2). Ieder liggervlak is tusschen 2 opeenvolgende ribben een plat vlak. Ter plaatse van een rib kan het liggervlak geknikt zijn om de snijlijn met het ribvlak. De zwaartepunten van de liggerdoorsneden liggen natuurlijk in het liggervlak; het vlak door deze zwaartepunten loodrecht op het liggervlak is een plat vlak dat in het volgende het „vleugelvlak" wordt genoemd. De snijlijn van het vleugelvlak met het symmetrievlak van het vliegtuig is z-as; de asrichting in het vleugelvlak, loodrecht op de z-as, is x-as; de asrichting loodrecht op het vleugelvlak is y-as. Van beide liggers zijn de vleugelvlakken evenwijdig aan elkaar, zoodat de doorsnijdingen van de liggervlakken met elk yz-vlak evenwijdige lijnen zijn. Zonder dat daarmee eenige beperking wordt ingevoerd,



Teekening N.L.L.

Fig. 2. Constructie van den geschematiseerden liggerwand.

kan verondersteld worden, dat de vleugelvlakken van beide liggers samenvallen [2]).

Tusschen 2 opeenvolgende ribben zijn de zwaartelijnen der gordingdoorsneden recht; daar zij in het algemeen niet evenwijdig aan het vleugelvlak verloopen, hebben de normaalkrachten in beide gordingen van een ligger samen een componente D_g in y-richting, die een deel vertegenwoordigt van de door den ligger op te nemen dwarskracht. Het resteerende deel D_s van de dwarskracht belast de liggerwanden op afschuiving; het grijpt aan in het torsiecentrum.

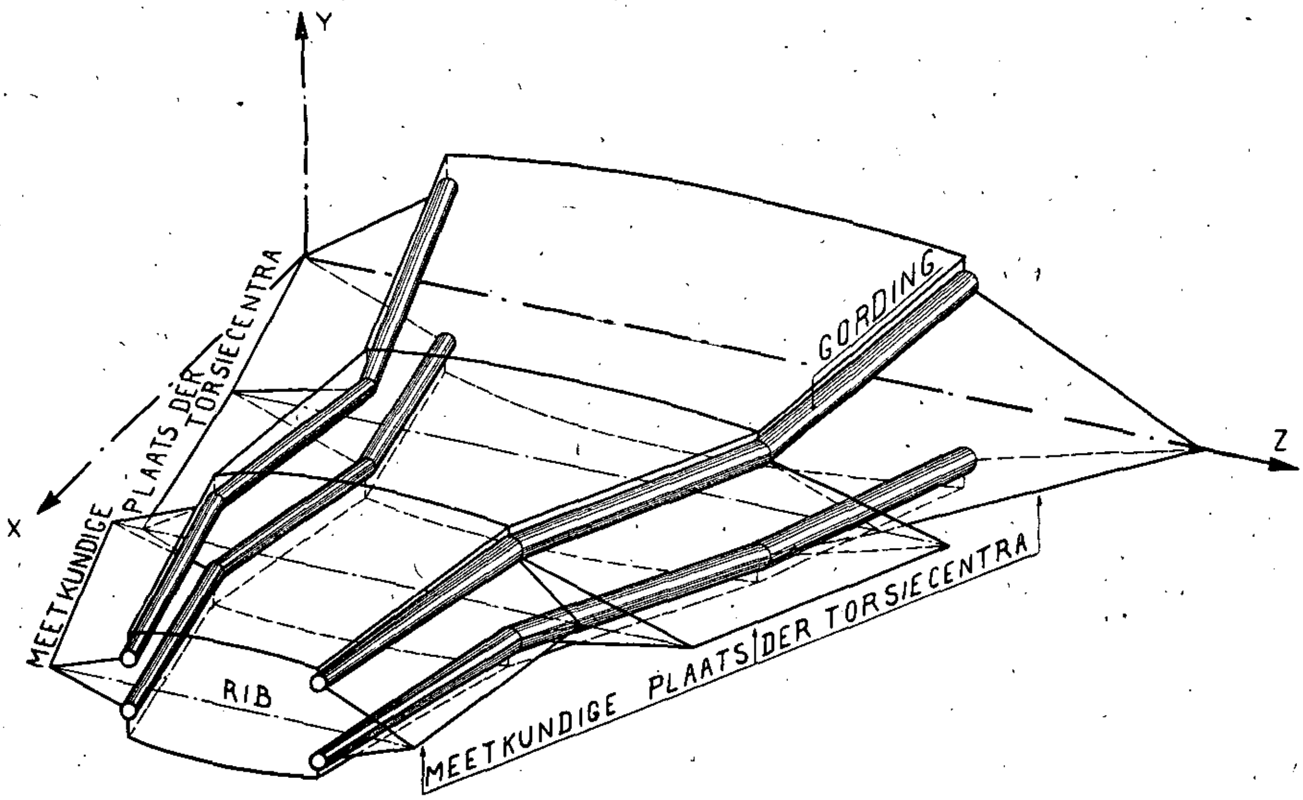
Als de liggerwand met het liggervlak samenvalt, ligt het torsiecentrum in het liggervlak. Echter wordt veelal de dwarskracht ten deele door den liggerwand en ten deele door een hulpligger in samenwerking met de vleugelbekleeding opgenomen; het torsiecentrum valt dan buiten het liggervlak; zijn ligging kan volgens de in *lit.* 6 ontwikkelde methode worden berekend. In fig. 1 is zulk een geval weergegeven, waarbij de dwarskracht van den voorligger wordt opgenomen door het samenstel van liggerwand en neusbekleeding en waarbij de achterliggerwand samenwerkt met een hulpligger en de bekleeding achter den achterligger. Inplaats van de onderdeelen, die bij den werkelijken samengestelden ligger de dwarskracht opnemen, kan nu een enkele wand worden ingevoerd (fig. 2), die het torsiecentrum verbindt met de zwaartepunten der gordingen; deze moet een bepaalde dikte hebben om de gezamenlijke stijfheid van de wanden te representeeren. Deze dikte zal echter in het vervolg niet als wanddikte worden ingevoerd; als zoodanig wordt de dikte (d_1 of d_2) ingevoerd, die een in het liggervlak gelegen wand zou moeten bezitten om gelijke afschuifstijfheid te bieden als de gezamenlijke wanden van den ligger.

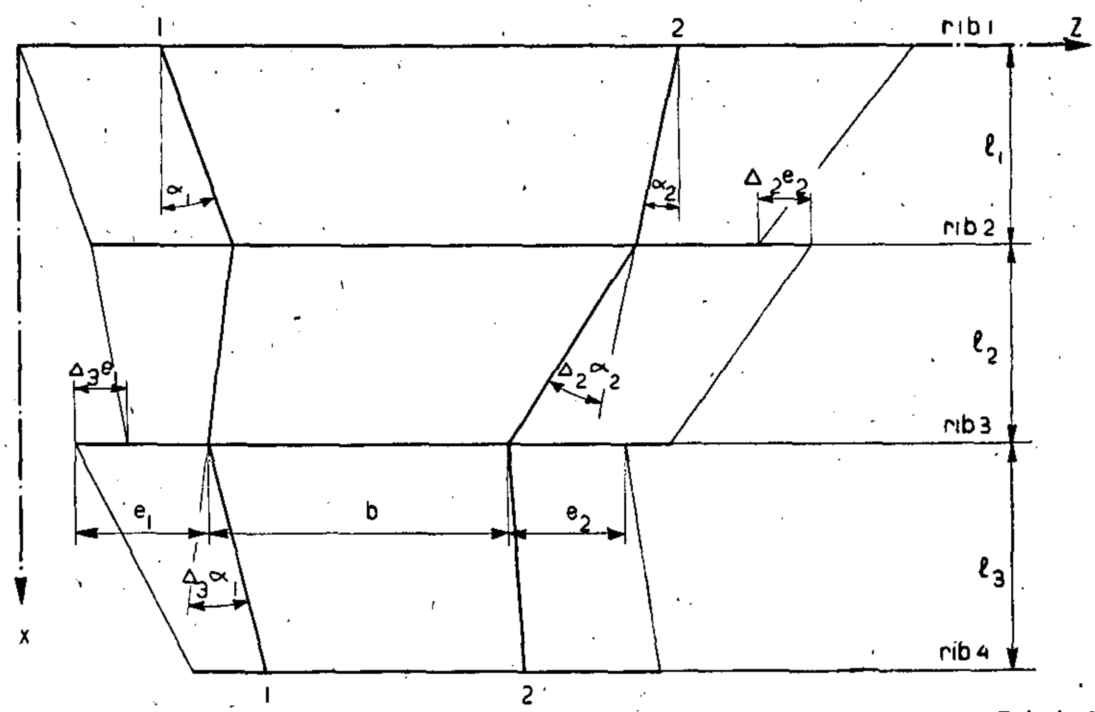
Het torsiecentrum kan discontinu van plaats veranderen door verandering van de onderlinge verhouding der wanddikten of door plotselinge beëindiging van de hulpliggerconstructie, zoals in de nabijheid van motorgondels. In het veronderstelde vleugelschema is deze mogelijkheid opengelaten; in dergelijke punten is een rib gedacht (fig. 3).

Zooals uit het voorgaande reeds blijkt, hebben de liggers een eindige stijfheid tegenover afschuiving en tegenover buiging in hun vlak; voorts zijn zij volkomen slap gedacht tegenover momenten, welker vector in het liggervlak ligt. In werkelijkheid hebben samengestelde liggers van het in fig. 1 bedoelde type een niet geheel verwaarloosbare torsiestijfheid. De invoering van deze stijfheid als afzonderlijke

---

[2]) Als, hetgeen doorgaans het geval is bij een werkelijken vleugel, het vlak door de zwaartepunten van beide liggers (vleugelvlak) knikken vertoont, kan de werkelijke vleugel vervangen gedacht worden door een vleugel, die aan het schema beantwoordt en die mechanisch gelijkwaardig is met den werkelijken vleugel. Daartoe is slechts noodig, dat aan de werkelijke uitwendige vleugelbelasting in de knikpunten bepaalde belastingen worden toegevoegd. Op de berekening van deze in te voeren uitwendige belastingen wordt hier niet nader ingegaan.





Teekening N.L.L.

Fig. 3. Geschematiseerde vleugel.

grootheid beteekent echter een dusdanige complicatie van de berekening, dat zij hier wordt vermeden. Zoolang de torsiestijfheid van de liggers klein is in vergelijking met die van de buis gevormd door liggerwanden en bekleeding, brengt men haar invloed voldoende nauwkeurig in rekening door de torsiestijfheid van de buis te verhoogen met die van de liggers. Wanneer de torsiestijfheid der liggers groot is in verhouding tot die van de buis tusschen de liggers, kan men te werk gaan volgens de in *lit.* 7 ontwikkelde methode.

02.2. *De ribben.*

De ribben liggen in vlakken evenwijdig aan het *yz*-vlak; zij zijn volwandig tusschen de bekleeding van boven- en onderzijde van den vleugel. In het gedeelte tusschen de liggervlakken hebben zij een eindige afschuifstijfheid, uitgedrukt door de dikte *d*. Deze afschuifstijfheid representeert — en moet dus gelijk zijn aan — de gezamenlijke stijfheid van de groep werkelijke ribben, die de rib van het schema vervangt. De plaats van de ribben is blijkens het voorgaande gefixeerd door het optreden van knikken in de

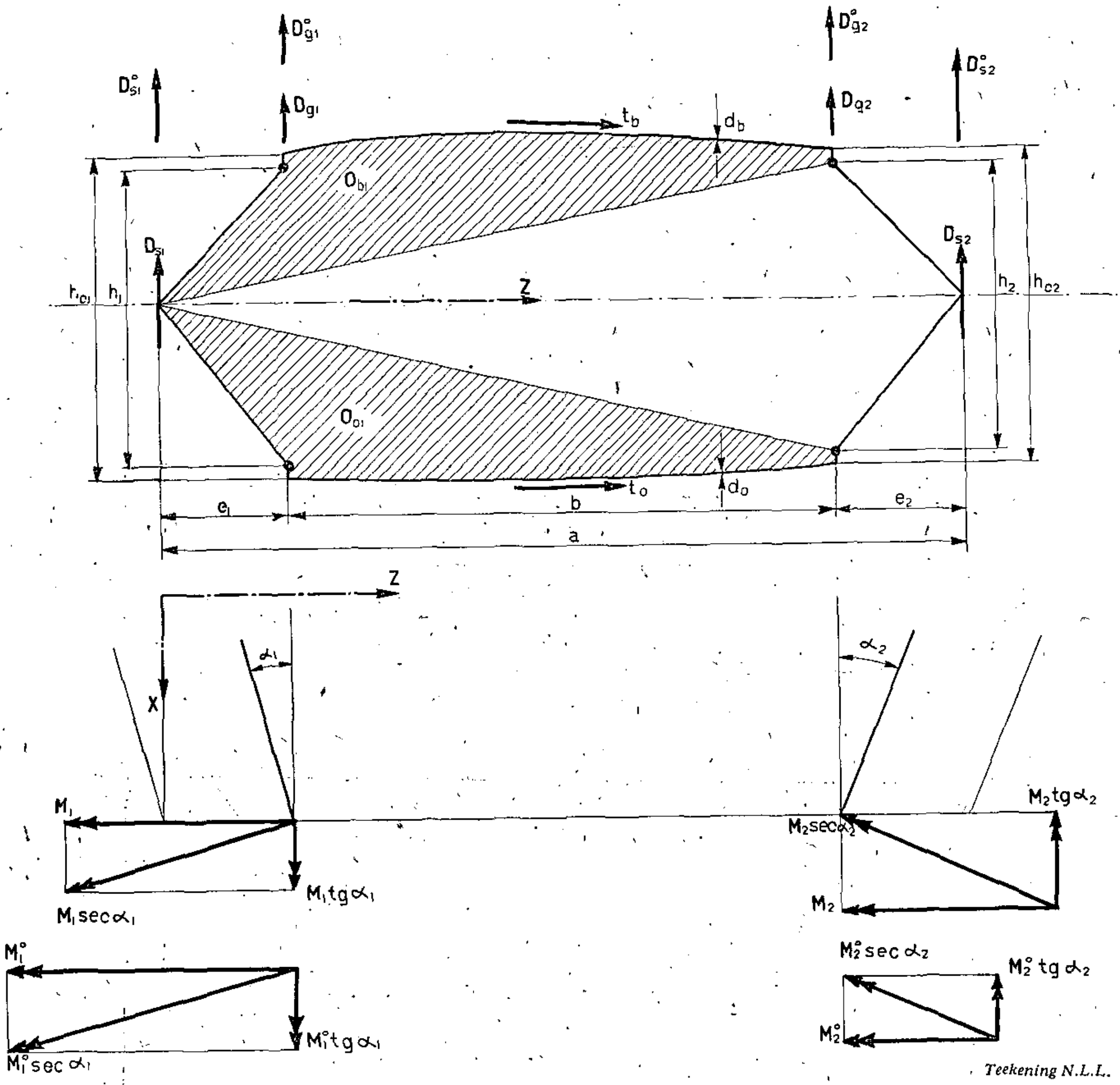


Fig. 4. Schema der vleugeldoorsnede met er op aangrijpende uitwendige krachten (D_s^0, D_g^0, M^0) en daarmee gelijkwaardige elastische krachten (D_s, D_g, t, M).

liggervlakken of van discontinuïteiten in de ligging van het torsiecentrum van de liggers. Voorts zijn de onder punt 1 gegeven beschouwingen over de plaatsen der voornaamste krachtsdoorleiding hiervoor van belang. Men zal in dit opzicht goed doen ribben te veronderstellen op die plaatsen, waar de werkelijke vleugel stijve ribben heeft (rompwand, wanden van tankruimen, motorbok- of onderstelribben, draagribben van roersteunen), op plaatsen waar de dikte der bekleeding discontinu verandert en ter plaatse van geconcentreerde belastingen.

In het gedeelte tusschen het liggervlak en den bijbehoorenden geschematiseerden liggerwand loopt de rib door; zij is echter in dit deel volkomen afschuifstijf gedacht. De verbinding van ligger en rib heeft plaats op de doorsnijding van het ribvlak en den geschematiseerden liggerwand. De afmetingen van rib i worden betrokken op de doorsnijding van het ribvlak i met de liggerwanden juist buiten het punt x_i (fig. 3 en 7).

De ribben zijn volkomen stijf tegenover momenten, waarvan de vector loodrecht op het ribvlak staat; zij zijn volkomen slap tegenover momenten, welker vector in het ribvlak ligt.

02.3. *De bekleeding.*

De bekleeding is aan de liggers en de ribben bevestigd in de snijlijn van het vlak der bekleeding met de ligger- en ribvlakken; zij wordt behalve door de ribben ook nog ondersteund door een in fig. 3 niet weergegeven continu systeem van „lijsten". *Deze lijsten zijn gelegen in vlakken* evenwijdig aan de ribvlakken; zij zijn scharnierend met de liggers verbonden. Bij den werkelijken vleugel treden de lijsten op in den vorm van de ribben en spanten, die in het algemeen in grooten getale aanwezig zijn ter verzekering van den juisten profielvorm.

De bekleeding mist eigen buigings- of torsiestijfheid; zij heeft een eindige afschuifstijfheid en is volkomen slap tegenover normaalspanningen op het yz-vlak. De lijsten zijn volkomen stijf tegenover in hun vlak werkende krachten.

In het veronderstelde vleugelschema zijn de ingevoerde lijsten noodig om krachten uit de bekleeding op te nemen, die het gevolg zijn van het verschil in vorm tusschen de doorsneden der bekleeding ter plaatse x en $x + dx$, en die de bekleeding zelf niet kan verwerken in verband met het *gelijk aan nul zijn van bepaalde stijfheden.*

03. De evenwichtsvoorwaarden [3]).

03.1. *De uitwendige en inwendige belastingen.*

De uitwendige belasting bestaat uit continu verdeelde krachten p en geconcentreerde krachten P loodrecht op het vleugelvlak, die door de ribben en de lijsten naar de torsiecentra der liggers worden overgebracht, en uit geconcentreerde momenten in het yz-vlak W_{1i}, W_{2i} t.o.v. de torsiecentra van de liggers, die als paren van evenwijdig aan de z-as gerichte krachten op rib i aangrijpen (fig. 8). De genoemde krachten loodrecht op het vleugelvlak vertegenwoordigen lucht- en massakrachten. De momenten W_i zijn afkomstig van massakrachten van motorgondels, onderstelbelastingen, scharnierreacties van rolroeren, enz.

Over de belastende krachten, die in het vleugelvlak werken, wordt hier niet gesproken, omdat de spanningsberekening bij het beschouwde vleugelschema voor deze belastingen volgens een bekende methode plaats heeft (*lit. 6*).

De genoemde uitwendige belastingen kunnen worden gegeven als dwarskrachten $D_{s1}{}^0$ en $D_{s2}{}^0$ in de torsiecentra der liggers, als momenten $M_1{}^0 \sec \alpha_1$ en $M_2{}^0 \sec \alpha_2$ in de liggervlakken en als met deze momenten samenhangende dwarskrachten $D_{g1}{}^0$ en $D_{g2}{}^0$ in de liggervlakken. Deze krachten en momenten worden gedefinieerd als inwendige belastingen van het hoofdsysteem van liggers en ribben, dat statisch bepaald is gemaakt door weglating van de bekleeding. Zij kunnen dus direct uit evenwichtsvoorwaarden worden gevonden.

De werkelijk optredende inwendige belastingen zijn: in de torsiecentra de dwarskrachten D_{s1}, D_{s2}; in de liggervlakken de momenten $M_1 \sec \alpha_1$, $M_2 \sec \alpha_2$ en de daarmee samenhangende dwarskrachten D_{g1}, D_{g2}; in de bekleeding van boven- en onderzijde de dwarskrachten per lengteeenheid t_b, t_o (zie fig. 4).

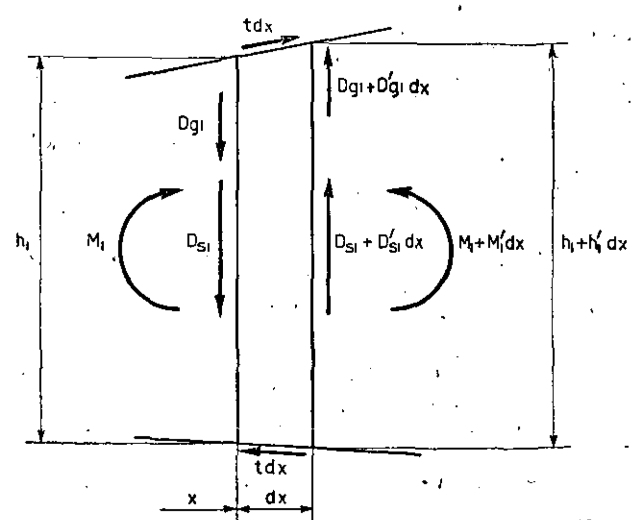


Fig. 5. Liggerelement van den voorligger met er op werkende krachten.

03.2. *De belastingen van liggers en bekleeding.*

In figuur 4 zijn de krachten en momenten aangegeven, die in een willekeurige vleugeldoorsnede x werken op het binnen x gelegen gedeelte.

Uit het evenwicht der krachten in z-richting volgt

$$t_b = -t_o = t. \tag{1}$$

Het evenwicht der momenten om de z-as levert

$$M = M_1 + M_2. \tag{2}$$

Uit het evenwicht der momenten om de x-as door het torsiecentrum van den voorligger volgt met behulp van (1)

$$Dz_D = D_{s2}\, a + D_{g2}(a-e_2) + D_{g1}\, e_1 - 2\,t\,(O_{b1} + O_{o1}) + M_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - M_2 \operatorname{tg} \alpha_2 \tag{3a}$$

en evenzoo voor het evenwicht der momenten om de x-as door het torsie-centrum van den achterligger

$$D\,(a - z_D) = D_{s1}\, a + D_{g1}(a-e_1) + D_{g2}\, e_2 + 2t\,(O_{b2} + O_{o2}) - M_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + M_2 \operatorname{tg} \alpha_2. \tag{3b}$$

Het evenwicht van de momenten om de z-as voor een element van den voorligger (fig. 5) levert

$$D_{s1} + D_{g1} - th_1 + M_1' = 0 \tag{4a}$$

en evenzoo volgt voor het evenwicht van een element van den achterligger

$$D_{s2} + D_{g2} + th_2 + M_2' = 0. \tag{4b}$$

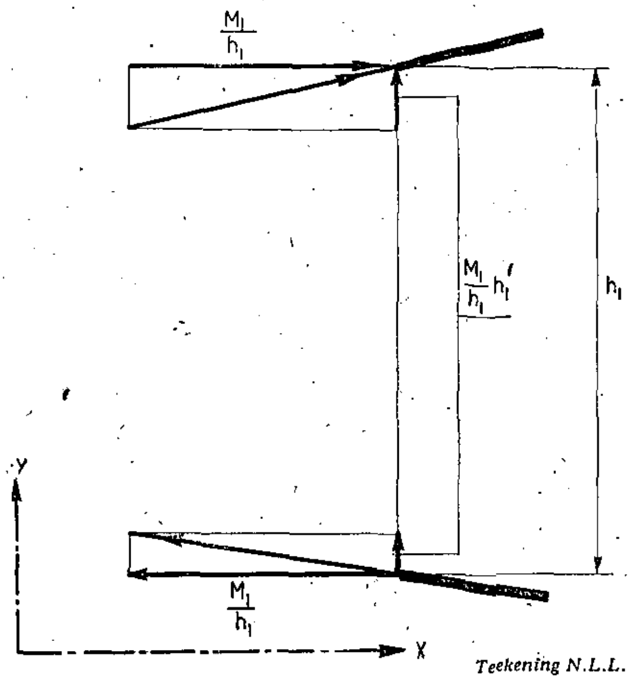


Fig. 6. Het verband tusschen M_1 en D_{g1}.

Uit fig. 6 blijkt, dat de normaalkrachten in de voorliggergordingen, die uit het moment M_1 volgen, als x-componente hebben $\frac{M_1}{h_1}$ en als gezamenlijke y-componente $\frac{M_1}{h_1} h_1'$, zoodat (vergelijk fig. 5)

$$D_{g1} = -M_1 \frac{h_1'}{h_1} \tag{5a}$$

en evenzoo voor den achterligger

$$D_{g2} = -M_2 \frac{h_2'}{h_2}. \tag{5b}$$

De vergelijkingen (2), (3) en (4) zijn onderling afhankelijk; immers geeft de optelling $\frac{1}{a}$ [(3a) + (3b) — (4a) + (4b)] als nog gebruik wordt gemaakt van de omstandigheid, dat

$$2\,(O_{b1} + O_{o1}) + ah_2 = 2\,(O_{b2} + O_{o2}) + ah_1 = 2\,O,$$

de vergelijking

$$D = -(M_1 + M_2)',$$

welke betrekking ook uit (2) volgt.

De overblijvende 6 onafhankelijke vergelijkingen zijn niet voldoende om de 7 onbekenden D_{s1}, D_{s2}, M_1, M_2, D_{g1}, D_{g2} en t te bepalen. Een dezer grootheden, of een anders gedefinieerde hulpgrootheid X, fungeert als statisch onbepaalde grootheid.

Als de vleugelbekleeding zou ontbreken, zou t gelijk aan nul zijn en zouden de evenwichtsvergelijkingen (2) tot (5) de onbekenden ondubbelzinnig bepalen, d.w.z. de dan op-

[3]) Voor de beteekenis der gebruikte notaties wordt hier en vervolgens verwezen naar punt 12 „Notaties".

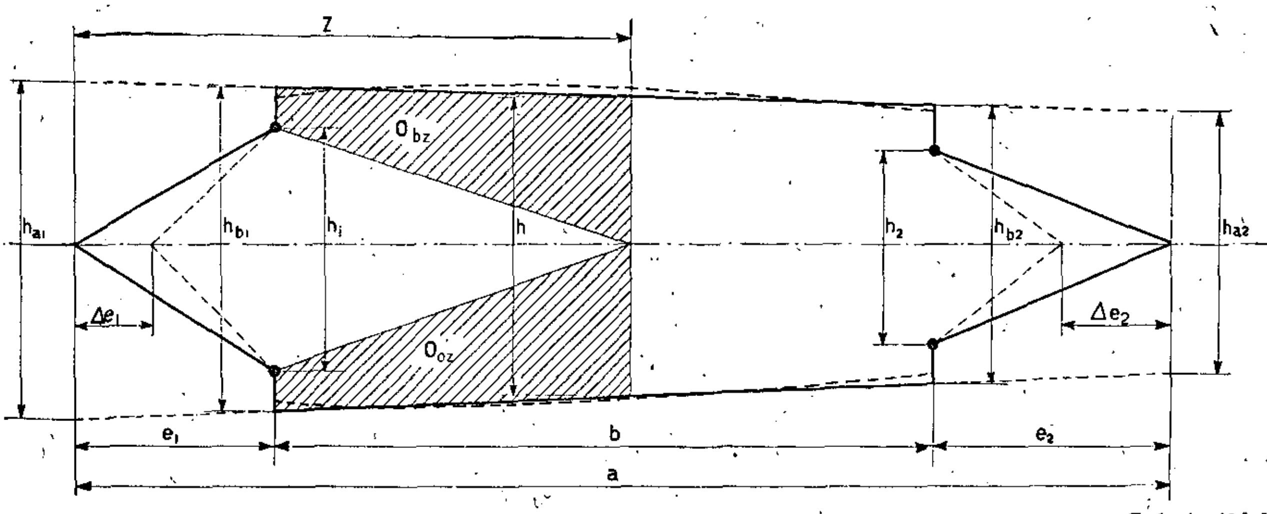
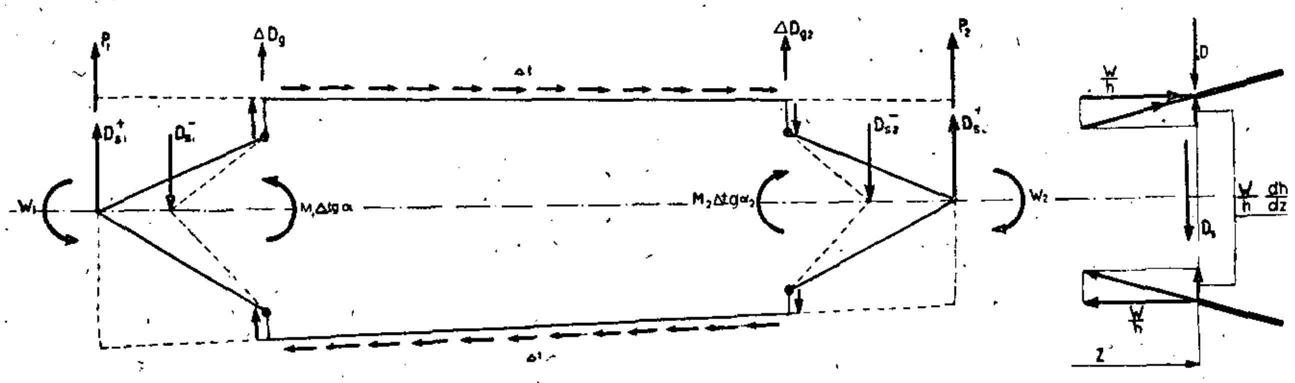


Fig. 7. Geschematiseerde rib. *Teekening N.L.L.*



Teekening N.L.L.

Fig. 8. Krachten werkende op een rib; de uitwendige belastingen P_1, P_2, W_1, W_2; de overige krachten worden door de vleugelconstructie binnen en buiten de rib op deze laatste uitgeoefend.

tredende krachten $D_{s1}{}^0$, $D_{s2}{}^0$, $M_1{}^0$, $M_2{}^0$, $D_{g1}{}^0$, $D_{g2}{}^0$ zijn statisch bepaald. De werkelijk optredende inwendige belastingen kunnen nu in de vorige grootheden worden uitgedrukt door invoering van de statisch onbepaalde grootheid X volgens de definitie

$$bX = M_1 - M_1{}^0. \tag{6}$$

Daarna volgt uit (2) tot (5)

$$t = \frac{1}{2O}\Big\{D(a - z_D) + M\left(e_2\frac{h_2'}{h_2} - \operatorname{tg}\alpha_2\right) +$$

$$+ M_1{}^{0\prime}a - M_1{}^0\left[e_1\frac{h_1'}{h_1} + e_2\frac{h_2'}{h_2} + b'\right]\Big\} + \frac{ab}{2O}X' + \lambda bX;$$

$$D_{s1} = -M_1{}^{0\prime} + M_1{}^0\frac{h_1'}{h_1} - a_1 bX' - bX\left[\frac{b'}{b} - \frac{h_1'}{h_1} - h_1\lambda\right],$$

$$D_{s2} = -M_2{}^{0\prime} + M_2{}^0\frac{h_2'}{h_2} + a_2 bX' + bX\left[\frac{b'}{b} - \frac{h_2'}{h_2} - h_2\lambda\right],$$

$$M_1 = M_1{}^0 + bX,$$

$$M_2 = M_2{}^0 - bX.$$

Met $X = 0$ volgen hieruit de belastingen van het statisch bepaalde hoofdsysteem,

$$D_{s1}{}^0 = -M_1{}^{0\prime} + M_1{}^0\frac{h_1'}{h_1}, \tag{7a}$$

$$D_{s2}{}^0 = -M_2{}^{0\prime} + M_2{}^0\frac{h_2'}{h_2}; \tag{7b}$$

$M_1{}^0$ volgt uit de omstandigheid, dat in het statisch bepaalde hoofdsysteem $t^0 = 0$,

$$M_1{}^{0\prime}a - M_1{}^0\left(e_1\frac{h_1'}{h_1} + e_2\frac{h_2'}{h_2} + b'\right) = -D(a - z_D) -$$

$$- M\left(e_2\frac{h_2'}{h_2} - \operatorname{tg}\alpha_2\right) \tag{7c}$$

en $M_2{}^0$ is bepaald door (2)

$$M_2{}^0 = M - M_1{}^0. \tag{7d}$$

Hierna kunnen de werkelijke inwendige krachten gegeven worden in den vorm

$$t = \frac{ab}{2O}X' + \lambda bX, \tag{8a}$$

$$D_{s1} = D_{s1}{}^0 - a_1 bX' - bX\left[\frac{b'}{b} - \frac{h_1'}{h_1} - h_1\lambda\right], \tag{8b}$$

$$D_{s2} = D_{s2}{}^0 + a_2 bX' + bX\left[\frac{b'}{b} - \frac{h_2'}{h_2} - h_2\lambda\right], \tag{8c}$$

$$M_1 = M_1{}^0 + bX, \tag{8d}$$

$$M_2 = M_2{}^0 - bX. \tag{8e}$$

03.3. *De dwarskrachten in de ribben.*

De boven- en onderzijde van de ribben zijn in het algemeen slechts flauw gekromd. Ter vermijding van overmatige complicaties voor de berekening worden zij, voor zoover het de berekening van den vormveranderingsarbeid der ribben betreft, benaderd door 2 rechte lijnen op zoodanige wijze, dat het oppervlak O gelijk blijft aan het werkelijk omsloten oppervlak van de vleugeldoorsnede (fig. 7). De invloed, die deze benadering op den vervormingsarbeid van de ribben heeft, is zeker verwaarloosbaar, temeer omdat een kleine verandering van de ribstijfheid slechts een zeer kleine verandering in de spanningsverdeeling van den vleugel ten gevolge heeft.

De ribgordingen vallen samen met de genoemde 2 rechte lijnen.

In fig. 8 zijn de krachten aangegeven, die op een rib aangrijpen. Daarbij is de rib opgevat als een constructie-element dat de liggers onderbreekt, zoodat de dwarskrachten uit de liggers ter weerszijden van de rib er op worden afgezet. Krachten afkomstig van het deel van den vleugel buiten rib i zijn van den index $+$ voorzien, de krachten van het deel binnen rib i hebben den index $-$; het verschil dezer krachten wordt met het symbool Δ aangeduid.

Omdat de schuifspanningen in den ribwand tot vervormingen aanleiding geven, moet de dwarskracht berekend worden, die door den ribwand wordt opgenomen. Indien ter plaatse z de dwarskracht en het moment D en W bedragen, is onder de veronderstelling, dat alleen de ribgordingen aan de opneming van het buigend moment deelnemen, blijkens fig. 8 de dwarskracht, waarmee de ribwand belast is,

$$D_s = D + \frac{W}{h}\frac{dh}{dz}. \tag{9}$$

De dwarskracht D en het moment W worden, zooals uit fig. 7 en 8 blijkt, gegeven door

$$D = -(P_1 + D_{s1}^{+} - D_{s1}^{-} + \Delta D_{g1}) - \Delta t\,(h - h_1),$$

$$W = (P_1 + D_{s1}^{+} - D_{s1}^{-} + \Delta D_{g1})\,z -$$

$$- \left[W_1 + M_1\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_1 - e_1 \frac{\Delta h_1'}{h_1}\right) - D_{s1}^{-}\Delta e_1\right] +$$

$$+ 2\Delta t\,(O_{bz} + O_{oz}).$$

Uit het momentenevenwicht van de rib om het torsiecentrum van den achterligger volgt

$$P_1 + D_{s1}^{+} - D_{s1}^{-} + \Delta D_{g1} =$$

$$= \frac{1}{a}\left[W_1 + M_1\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_1 - e_1\frac{\Delta h_1'}{h_1}\right) - D_{s1}^{-}\Delta e_1\right] -$$

$$- \frac{1}{a}\left[W_2 + M_2\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_2 - e_2\frac{\Delta h_2'}{h_2}\right) - D_{s2}^{-}\Delta e_2\right] -$$

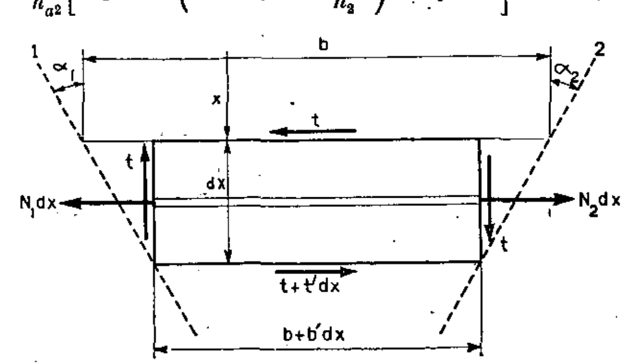
$$- \frac{2\Delta t}{a}(O_{b2} + O_{o2}).$$

Deze betrekking substitueerend in D en W volgt uit (9) na eenige herleiding

$$D_s = \frac{h_{a1}h_{a2}}{ah}D^*,$$

$$D^* = -\frac{1}{h_{a1}}\left[W_1 + M_1\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_1 - e_1\frac{\Delta h_1'}{h_1}\right) - D_{s1}^{-}\Delta e_1\right] +$$

$$+ \frac{1}{h_{a2}}\left[W_2 + M_2\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_2 - e_2\frac{\Delta h_2'}{h_2}\right) - D_{s2}^{-}\Delta e_2\right] + b^*\Delta t. \tag{10}$$



Teekening N.L.L

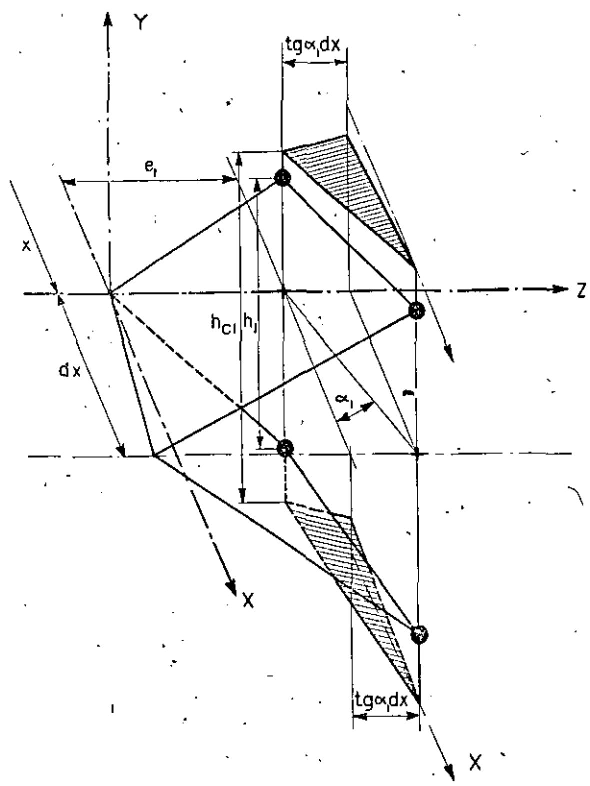
Fig. 9. Krachten werkende op een strook van de bekleeding met lijst uit de bovenzijde van den vleugel.

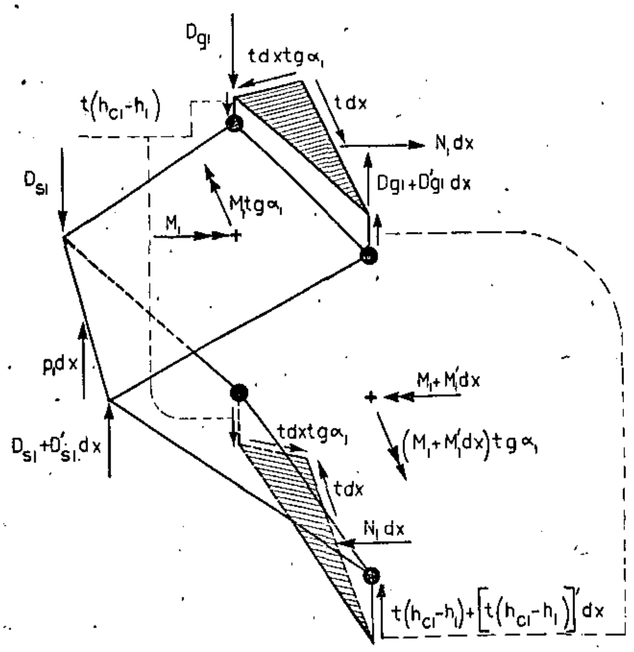
03.4. *Het evenwicht van de bekleeding.*

Op een strook van de bekleeding, welker xz-projectie in fig. 9 is weergegeven, werken de schuifkrachten t per lengteeenheid en de normaalkrachten N_1 en N_2 per lengte-eenheid, die door de bij de bekleedingsstrook behoorende lijst worden opgenomen.

De voorwaarde voor het evenwicht van deze strook in z-richting luidt

$$t'b - N_1 + N_2 = 0. \tag{11}$$





Teekening N.L.L.

Fig. 10. Krachten werkende op een liggerelement.

De krachten N_1 en N_2 zijn krachten, die in z-richting op de liggers worden uitgeoefend. Zij beïnvloeden dus het krachtenevenwicht van de liggers in z-richting en eveneens hun momentenevenwicht om de x-as.

Fig. 10 geeft een voorligger-element weer met de (door harceering aangeduide) deelen van de bekleeding, die in fig. 9 buiten de daar beschouwde bekleedingsstrook gehouden zijn, alsmede de op het liggerelement en de bijbehoorende deelen van de bekleeding aangrijpende inwendige krachten en momenten en de uitwendige belasting p_1dx.

Uit de voorwaarde voor het evenwicht der krachten in z-richting volgt onmiddellijk, dat de normaalkrachten N aan boven- en onderzijde gelijk moeten zijn en tegengesteld van teeken. Behalve de krachten N oefenen de lijsten ook nog krachten in y-richting uit op de liggers; zij grijpen aan in de doorsnede over de bekleeding volgens het xy-vlak; zij zijn in figuur 10 niet weergegeven, omdat zij voor het te beschouwen momentenevenwicht om de x-as door het zwaartepunt van den ligger niet essentieel zijn.

De momentenvergelijking wordt voluit gegeven; iedere term is verantwoord in fig. 10.

$$\begin{gathered}-D_{s1}e_1+(D_{s1}+D_{s1}'\,dx)(e_1+e_1'\,dx-\operatorname{tg}\alpha_1\,dx)-\\ -(D_{g1}+D_{g1}'\,dx)\operatorname{tg}\alpha_1\,dx+M_1\operatorname{tg}\alpha_1-\\ -(M_1+M_1'\,dx)\operatorname{tg}\alpha_1+N_1h_{c1}\,dx-t\operatorname{tg}\alpha_1h_{c1}dx-\\ -[t(h_{c1}-h_1)+\{t(h_{c1}-h_1)\}'\,dx]\operatorname{tg}\alpha_1\,dx-\\ -t\,h_{c1}'\,dx\operatorname{tg}\alpha_1\,dx+e_1p_1\,dx=0.\end{gathered}$$

Hieruit volgt

$$\begin{gathered}N_1=2t\operatorname{tg}\alpha_1-\\ -\frac{1}{h_{c1}}\left\{(D_{s1}e_1)'-\operatorname{tg}\alpha_1(D_{s1}+D_{g1}-th_1+M_1')\right\}-p_1\frac{e_1}{h_{c1}},\end{gathered}$$

welke uitdrukking in verband met (4a) overgaat in

$$N_1=2t\operatorname{tg}\alpha_1-\frac{1}{h_{c1}}(D_{s1}e_1)'-\frac{e_1}{h_{c1}}p_1. \qquad (12a)$$

Indien de bekleeding met de lijsten ontbreekt, is de spanningsverdeeling die van het statisch bepaalde hoofdsysteem, waarbij $t^0=N^0=0$.

Vergelijking (12a) levert dan

$$-(D_{s1}^0e_1)'-e_1p_1=0. \qquad (12b)$$

Hierna gaat (12a) over in

$$N_1=2t\operatorname{tg}\alpha_1-\frac{1}{h_{c1}}[(D_{s1}-D_{s1}^0)e_1]'. \qquad (13a)$$

Met behulp van symmetrie-overwegingen volgt uit (13a) als voorwaarde voor het momentenevenwicht van den achterligger ten opzichte van de x-as door zijn zwaartepunt

$$N_2=-2t\operatorname{tg}\alpha_2-\frac{1}{h_{c2}}[(D_{s2}-D_{s2}^0)e_2]'. \qquad (13b)$$

De vergelijkingen (13) substitueerend in (11) volgt

$$\begin{gathered}\frac{1}{b}(tb^2)'+\frac{1}{h_{c1}}[(D_{s1}-D_{s1}^0)e_1]'-\\ -\frac{1}{h_{c2}}[(D_{s2}-D_{s2}^0)e_2]'=0. \qquad (14)\end{gathered}$$

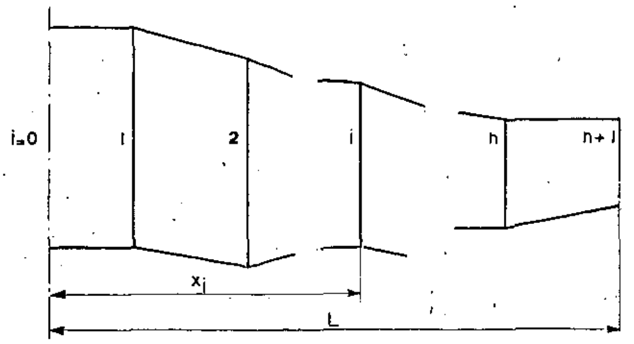
04. De differentiaalvergelijking der statisch onbepaalde grootheid.

Met (8a, b, c) gaat de evenwichtsvergelijking (14) over in

$$\begin{gathered}\frac{1}{b}\left(\frac{ab^3}{2\,O}X'\right)'+\frac{1}{b}(\lambda b^3X)'-\frac{1}{h_{c1}}(a_1e_1bX')'-\\ -\frac{1}{h_{c2}}(a_2e_2bX')'-\frac{1}{h_{c1}}\left[e_1bX\left(\frac{b'}{b}-\frac{h_1'}{h_1}-h_1\lambda\right)\right]'-\\ -\frac{1}{h_{c2}}\left[e_2bX\left(\frac{b'}{b}-\frac{h_2'}{h_2}-h_2\lambda\right)\right]'=0. \qquad (14)\end{gathered}$$

Deze homogene lineaire differentiaalvergelijking van de 2de orde in X geldt voor het deel van den vleugel tusschen 2 opeenvolgende ribben i en $i+1$. Indien X bekend is ter plaatse van deze ribben, is met (14) X in ieder punt tusschen x_i en x_{i+1} ondubbelzinnig bepaald. Daarmee is de aard van de statisch onbepaalde grootheid X nader omschreven; zij is namelijk niet als functie van x statisch onbepaald, zooals dat bij continu verdeelde ribben het geval is, doch daar (14) in wezen een evenwichtsvergelijking is beperkt zich de statische-onbepaaldheid tot de functiewaarden van X in de punten x_i.

Per vleugelhelft zijn er n ribben. Bij de buitenste ribben is het buigend moment in den ligger gelijk aan het uitwendig daarop uitgeoefende moment ($M_1=M_1^0$), zoodat $X_n=0$. Bij een willekeurige niet bij voorbaat symmetrische of antimetrische belasting zijn er dus 2 (n—1) waarden van X_i, die niet door evenwichtsvergelijkingen bepaald



Teekening N.L.L.

Fig. 11. Notatie voor de ribben $i=1,2,\ldots\ldots n$.

zijn. De constructie is in het algemeen 2 (n—1)-voudig statisch onbepaald.

Bij symmetrische en antimetrische belastingen zijn de statisch onbepaalden in een punt en zijn spiegelbeeld afhankelijk, zoodat het aantal statisch onbepaalden tot n—1 afneemt.

De oplossing van (14) heeft, omdat de vergelijking in X lineair is, den vorm

$$x_i<x<x_{i+1}:\quad X=\varphi_i(x)\,X_i+\psi_i(x)\,X_{i+1}, \qquad (15)$$

waarin φ en ψ functies van x zijn, die in x_i resp. de waarden 1 en 0 en in x_{i+1} de waarden 0 en 1 hebben. De bepaling van φ en ψ vereischt de oplossing van (14). De coëfficiënten van X en haar afgeleiden, die deze vergelijking bevat, zijn doorgaans veranderlijk met x, zoodat de oplossing van (14) in het algemeen bijzondere moeilijkheden baart.

In het bijzondere geval, waarin de vleugeldoorsnede bij toenemende x gelijkvormig verandert, heeft de oplossing een eenvoudige gedaante. In dat geval geldt namelijk $\frac{b'}{b}=\frac{h_1'}{h_1}=\frac{h_2'}{h_2}=\frac{h_{c1}'}{h_{c1}}=\frac{h_{c2}'}{h_{c2}}$, zoodat $\lambda=0$ en $\frac{b}{h_{c1}}$ evenals $\frac{b}{h_{c2}}$ een constante is; (14) gaat nu over in

$$\left[X'b^2\left(\frac{ab}{2\,O}-a_1\frac{e_1}{h_{c1}}-a_2\frac{e_2}{h_{c2}}\right)\right]'=\left(\frac{X'}{H}\right)'=0, \qquad (16)$$

met als oplossing

$$X\int_{x_i}^{x_{i+1}}Hdx=X_i\int_{x}^{x_{i+1}}Hdx+X_{i+1}\int_{x_i}^{x}Hdx,$$

zoodat

$$\left.\begin{aligned}&x_i<x<x_{i+1}:\quad X=\varphi_iX_i+\psi_iX_{i+1},\\ &\varphi_i=\frac{1}{K_i}\int_x^{x_{i+1}}Hdx=1-\psi_i,\\ &\psi_i=\frac{1}{K_i}\int_{x_i}^{x}Hdx.\end{aligned}\right\} \qquad (16a)$$

Deze oplossing kan als benaderingsoplossing voor het meer algemeene geval, waarin de vleugeldoorsnede niet gelijkvormig verandert, worden aangenomen. Daarbij wordt een verloop van X verondersteld, dat in tegenspraak is met (14), dus eveneens met de evenwichtsvergelijking (11). Om het evenwicht der bekleeding te herstellen zijn er nu continu verdeelde krachten Z in z-richting per lengte-eenheid van x noodig, zoodanig dat (11) wordt vervangen door

$$t'b-N_1+N_2+Z=0.$$

Hieruit volgt

$$Z=Z_1+Z_2+Z_3,$$

waarin (zie 14)

$$Z_1 = \frac{1}{h_{c1}}\left[a_1\, e_1 bX' + e_1 bX\left(\frac{b'}{b} - \frac{h_1'}{h_1} - h_1\lambda\right)\right]',$$

$$Z_2 = \frac{1}{h_{c2}}\left[a_2\, e_2 bX' + e_2 bX\left(\frac{b'}{b} - \frac{h_2'}{h_2} - h_2\lambda\right)\right]',$$

$$Z_3 = -\frac{1}{b}\left[\frac{ab^3}{2\,O}\, X' + \lambda b^3 X\right]'.$$

Een gelijke en tegengesteld gerichte kracht is noodig op de bekleeding van de vleugelonderzijde. De krachten van boven- en onderzijde tezamen geven een moment $\frac{dW_z}{dx}$ om de x-as per lengte-eenheid van x. Op de geheele vleugeldoorsnede werkt dit moment niet, omdat de in punt 03.2 besproken evenwichtsvoorwaarden ongerept blijven; dit is alleen mogelijk, doordat op de liggers 2 gelijke en tegengesteld gerichte krachten Y in y-richting aangrijpen, die per lengte-eenheid het moment $-\frac{dW_z}{dx}$ opleveren. De over een ribafstand continu verdeelde krachten Y en Z worden met elkaar in evenwicht gebracht door de ribben i *en* $i+1$, *die daarbij op afschuiving belast worden.*

De vraag in hoeverre de belastingen Y en Z verwaarloosbaar zijn kan worden onderzocht door het moment W_z, dat in de bekleeding ten gevolge van Z optreedt, te vergelijken met het moment W_t, dat in de bekleeding door de schuifkracht t wordt opgenomen.

De kracht Z geeft in de bekleeding een over z constante schuifspanning. Het moment van Z om het torsiecentrum van den voorligger is dus $\frac{Z}{b}\; 2\,O\, a_2$; het kan eveneens gelijk gesteld worden aan

$$\frac{dW_z}{dx} = Z_1 h_{c1} + Z_2 h_{c2} + Z_3 h,$$

waarin h een gemiddelde hoogte van den vleugel tusschen de liggers is.

Daar $\frac{O}{b}$, h_{c1} en h_{c2} over een ribafstand evenredig aan elkaar kunnen worden gesteld is h eveneens evenredig met $\frac{O}{b}$, enz.

De orde van grootte van W_z is, omdat Z door de aangrenzende ribben wordt opgeheven,

$$W_z \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dW_z}{dx}\, dx = \Big[(a_1 e_1 + a_2 e_2)\, bX' + (2\,O - e_1 h_1 - e_2 h_2)\, \lambda bX \Big]_i^{i+1} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{h}{b}\left(\frac{ab^3}{2\,O}\, X' + \lambda b^3 X\right)' dx.$$

Substitutie van (16) in de integrant van het 2de lid en daarop volgende partieele integratie geeft

$$W_z \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dW_z}{dx}\, dx = \left[\left(a_1 e_1 \frac{h_{c1}-h}{h_{c1}} + a_2 e_2 \frac{h_{c2}-h}{h_{c2}}\right) bX' + (2\,O - hb - e_1 h_1 - e_2 h_2)\, \lambda bX\right]_i^{i+1} -$$

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(a_1 \frac{e_1}{h_{c1}} + a_2 \frac{e_2}{h_{c2}}\right) b^2 X' + \lambda b^3 X\right]\left(\frac{h}{b}\right)' dx.$$

Voorts is het moment van t ten opzichte van het torsiecentrum van den voorligger

$$W_t = 2\, a_2\, O\, t = a_2 (abX' + 2\, O \lambda bX).$$

In het geval van gelijkvormig veranderende vleugeldoorsnede is $W_z = 0$; W_z zal dan zoo groot mogelijk zijn als de verandering van de vleugeldoorsnede met x zoo intensief mogelijk is, d.w.z. als λ zoo groot mogelijk is. De hoogte-afmetingen naderen in het algemeen sneller tot nul dan de liggerafstand. Daarom is λ zoo groot mogelijk als $b' = 0$.

Bedenkt men nu verder dat a_1, a_2, $\frac{h}{h_{c1}}$, $\frac{h}{h_{c2}}$ en $1 - \frac{hb + e_1 h_1 + e_2 h_2}{2\,O}$ over een ribafstand nagenoeg constant zullen zijn, dan kan men uit de vorige formules de orde van grootte van $\frac{W_z}{W_t}$ voor het geval $b' = 0$ berekenen. Het resultaat van de hier ter bekorting niet weergegeven berekening is

$$\frac{W_z}{W_t} \approx h'\, \frac{e_1 + e_2}{h}\, \frac{l}{a}.$$

Naarmate de ribafstand l kleiner is, nadert $\frac{W_z}{W_t}$ meer tot nul. Bij een ribafstand gelijk aan den liggerafstand — hetgeen als normaal kan worden beschouwd — is, omdat $e_1 + e_2$ wel niet grooter dan h is, $\frac{W_z}{W_t}$ van de orde van grootte h', dat is ongeveer 5 %. Dit wil nog niet zeggen, dat *de verwaarloozing van de krachten Z ook een fout in de* statisch onbepaalde berekening teweeg brengt van dezelfde orde van grootte.

De vervorming van de bekleeding, die het gevolg is van de krachten Z, is gemiddeld namelijk ongeveer gelijk aan nul. De krachten Z worden immers door de aan het veld grenzende ribben uit de bekleeding afgevoerd. De resulteerende dwarskrachten in de bekleeding uit Z en de ribreacties zullen dus binnen een veld van teeken wisselen en de gemiddelde waarde van deze dwarskracht zal een orde van grootte kleiner zijn dan de uit W_z volgende maximale waarde. Ditzelfde geldt voor den invloed der krachten Y op de liggervervorming. De krachten Y en Z zullen voornamelijk van belang zijn voor de ribvervorming. Bij volkomen stijve ribben is derhalve te verwachten, dat de veronderstelling (16) tot een uiterst kleine fout voert. Doch ook bij minder stijve ribben mag worden verwacht, dat de veronderstelling (16) een verwaarloosbaren invloed heeft op de bepaling der statisch onbepaalden X_i. De *vervormingsarbeid van de ribben is immers slechts van ondergeschikt belang* in vergelijking met de vervormingsarbeid der andere constructiedeelen.

05. De vormveranderingsarbeid.

Daar het de bedoeling is symmetrische en antimetrische belastingen afzonderlijk te behandelen, wordt in het volgende het arbeidsvermogen per vleugelhelft beschouwd.

Het arbeidsvermogen in de liggers kan worden samengesteld uit het deel A_g, dat met de normaalspanningen in de gordingen verbonden is, en het deel A_s, dat met de schuifspanningen in den liggerwand samenhangt. De normaalspanningen worden opgewekt door het moment $M \sec \alpha$ tezamen met de dwarskracht D_g; de schuifspanningen worden opgewekt door de dwarskracht D_s.

$$A_g = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_1^2}{S_{b1} \cos^2 \alpha_1}\, \frac{dx}{\cos \alpha_1} + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_2^2}{S_{b2} \cos^2 \alpha_2}\, \frac{dx}{\cos \alpha_2}, \quad \text{(17a)}$$

$$A_s = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{D_{s1}^2}{S_{s1}}\, \frac{dx}{\cos \alpha_1} + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{D_{s2}^2}{S_{s2}}\, \frac{dx}{\cos \alpha_2}. \quad \text{(17b)}$$

Het arbeidsvermogen in de bekleeding is

$$A_t = \frac{1}{2}\int_0^L t^2 b\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_o d_o}\right) dx. \quad \text{(17c)}$$

Het *arbeidsvermogen in de ribwanden* bedraagt

$$A_R = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^b \frac{D_s^2}{2\, Gdh}\, dz\right)_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i D_i^{*2}. \quad \text{(17d)}$$

Het gezamenlijke arbeidsvermogen per vleugelhelft is

$$A = A_g + A_s + A_t + A_R.$$

Blijkens (17a) en (8d, e) bevat de integrant van A_g de functie X; blijkens (17b) en (8b, c) bevat de integrant van A_s de functies X en X'; dezelfde functies bepalen blijkens (17c) en (8a) de integrant van A_t. A_R is blijkens (17d) (10) en (8a, b, c) bepaald door X_i, $\Delta_i X'$ en $X_i'^-$.

De functies X en X' zijn blijkens punt 04 continue en differentieerbare functies in het gebied tusschen 2 opeenvolgende ribben; X is wegens de evenwichtsvoorwaarde $(M_1)_i^- = (M_1)_i^+$ continu ter plaatse x_i, doch X' kan ter plaatse x_i discontinu zijn. In verband hiermee is het noodig onderscheid te maken tusschen X'^- en X'^+.

De arbeid kan nu worden geschreven als

$$A = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} J\,(x,\,X,\,X')\,dx + \sum_{i=1}^{n} A_i\,(X,\,X'^-,\,\Delta X'). \tag{18}$$

Hierin zijn $x_0 = 0$ en $x_{n+1} = L$. Bij deze notatie zijn er in de punten $x = 0$ en $x = L$ geen ribben verondersteld (fig. 11). Als er in het midden en aan de vleugeltippen wel ribben voorkomen, beteekent dit, dat $x_1 = 0$ en $x_n = L$ zoodat de intervallen $x_0 - x_1$ en $x_n - x_{n+1}$ de lengte nul hebben.

06. De voorwaarde voor minimale vormveranderingsarbeid.

Volgens de stelling van Castigliano moet het arbeidsvermogen minimaal zijn, waaruit volgt, dat de eerste variatie van A bij iedere variatie van X, en de daarmee samenhangende variatie van X', die aan de evenwichtsvoorwaarde (15) voldoet, nul moet zijn.

De eerste variatie van A is blijkens (18)

$$\delta A = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\delta X + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\delta X' \right) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A_i}{\partial X_i}\,\delta X_i + \frac{\partial A_i}{\partial X_i'^-}\,\delta X_i'^- + \frac{\partial A_i}{\partial \Delta_i X'}\,\delta \Delta_i X' \right). \tag{19}$$

De in verband met het evenwicht mogelijke variaties zijn volgens (15) voor $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$

$$\delta X = \varphi_i\,\delta X_i + \psi_i\,\delta X_{i+1} \tag{20a}$$

$$\delta X' = \varphi_i'\,\delta X_i + \psi_i'\,\delta X_{i+1} \tag{20b}$$

en

$$\delta \Delta_i X' = -(\varphi_{i-1}')_i\,\delta X_{i-1} + [-(\psi_{i-1}')_i + (\varphi_i')_i]\,\delta X_i +$$

$$+ (\psi_i')_i\,\delta X_{i+1}. \tag{20c}$$

Na substitutie van (20) in (19) volgt

$$\delta A = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{\partial J}{\partial X}(\varphi_i\,\delta X_i + \psi_i\,\delta X_{i+1}) + \frac{\partial J}{\partial X'}(\varphi_i'\delta X_i + \right.$$

$$\left. + \psi_i'\delta X_{i+1}) \right] dx + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial X} \right)_i [(\varphi_i)_i\,\delta X_i + (\psi_i)_i\,\delta X_{i+1}] + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-} \right)_i [(\varphi_{i-1}')_i\,\delta X_{i-1} + (\psi_{i-1}')_i \delta X_i] +$$

$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'} \right)_i [-(\varphi_{i-1}')_i\,\delta X_{i-1} + (-(\psi_{i-1}')_i + (\varphi_i')_i)\,\delta X_i +$$

$$\left. + (\psi_i')_i\,\delta X_{i+1}] \right\}.$$

Ordenend naar δX_i en in aanmerking nemend, dat $(\varphi_i)_i = 1$ en $(\psi_i)_i = 0$, volgt als voorwaarde voor het minimaal zijn der vormveranderingsarbeid

$$\delta A = \delta X_0 \left\{ \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\varphi' \right) dx + \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-}\,\varphi_0' \right)_1 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\,\varphi_0' \right)_1 \right\} + \delta X_1 \left\{ \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\psi' \right) dx + \right.$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\varphi' \right) dx + \left(\frac{\partial A}{\partial X} \right)_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-}\,\psi_0' \right)_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\,(-\psi_0' + \varphi_1') \right)_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-}\,\varphi_1' \right)_2 -$$

$$\left. - \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\,\varphi_1' \right)_2 \right\} + \sum_{i=2}^{n-1} \delta X_i \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\psi' \right) dx + \right.$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\varphi' \right) dx + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\;\psi_{i-1}' \right)_{i-1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial X} \right)_i + \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-}\;\psi_{i-1}' \right)_i + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}(-\psi_{i-1}' + \varphi_i') \right)_i +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-}\,\varphi_i' \right)_{i+1} - \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\,\varphi_i' \right)_{i+1} \right\} +$$

$$+ \delta X_n \left\{ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\psi' \right) dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\varphi + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\varphi' \right) dx + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\;\psi_{n-1}' \right)_{n-1} + \left(\frac{\partial A}{\partial X} \right)_n +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-}\;\psi_{n-1}' \right)_n + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\,(-\psi_{n-1}' + \varphi_n') \right)_n \right\} +$$

$$+ \delta X_{n+1} \left\{ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\psi' \right) dx + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\;\psi_n' \right)_n \right\} \equiv 0. \tag{21}$$

Omdat de variaties δX_i $(i = 2,\,3 \ldots\ldots n-1)$ onafhankelijk van elkaar iedere willekeurige waarde kunnen aannemen, moeten alle coëfficiënten dezer δX_i op zichzelf nul zijn, opdat aan (21) voldaan zal zijn. Voor iedere $i = 2,\,3 \ldots\ldots n-1$ gelden dus de vergelijkingen

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\,\psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\psi' \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\,\varphi' \right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\;\psi_{i-1}' \right)_{i-1} +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial X'^-}\,\psi_{i-1}' + \frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\,(-\psi_{i-1}' + \varphi_i') \right\}_i +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial A}{\partial X'^-}\,\varphi_i' - \frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\,\varphi_i' \right\}_{i+1} = 0. \tag{22}$$

In het punt $x = L$ zijn de buigmomenten in de liggers gelijk aan die van de uitwendige belasting, waaruit volgt

$$X_{n+1} = 0. \tag{23}$$

Dan is echter $\delta X_{n+1} \neq 0$ onmogelijk en stelt (21) geen naderen eisch ten opzichte van den coëfficiënt van δX_{n+1}. Ditzelfde is het geval met den coëfficiënt van δX_n. Immers is de schuifspanning in de bekleeding ter plaatse $x = x_{n+1}$ wegens het ontbreken van een rib $n + 1$ (fig. 11) gelijk aan nul, zoodat volgens (8a) ook $(X')_{n+1} = 0$, hetgeen in verband met (15) en (23) beteekent

$$X_n = 0. \tag{24}$$

Voor de coëfficiënten van δX_0 en δX_1 moet onderscheid gemaakt worden tusschen symmetrische en antimetrische belastingen.

Daar er bij $x=0$ geen rib aanwezig is (fig. 11) en de spanningstoestand bij *symmetrische* belasting eveneens symmetrisch is, is de schuifspanning in de bekleeding ter plaatse $x=0$ in dat geval gelijk aan nul. Het ontbreken van een rib beteekent ook, dat $b' = h_1' = h_2' = h_{c1}' = h_{c2}' = 0$, zoodat (16) en (16a) exact gelden binnen rib 1 en blijkens (8a)

$$X_0' = 0.$$

Substitutie van (15) in $X_0' = 0$ geeft

$$(\varphi_0')_0\, X_0 + (\psi_0')_0\, X_1 = 0,$$

of in verband met (16a)

$$X_0 = X_1. \tag{25a}$$

De variaties δX_0 en δX_1 moeten dan ook aan elkaar gelijk zijn, zoodat (21) oplevert, dat de som van de coëfficiënten van δX_0 en δX_1 nul moet zijn:

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial J}{\partial X}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \varphi' \right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\, \varphi_1' \right)_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial X'} \varphi_1' - \frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\, \varphi_1' \right)_2 = 0. \tag{26a}$$

In het algemeen is in het punt $x = 0$ ook bij *antimetrische belasting het buigende moment* $M_1{}^0 = - M_2{}^0 \neq 0$. Het in punt 03.1 gedefinieerde hoofdsysteem is dan niet vormvast. Men kan dit systeem gecompleteerd denken door een torsieveer, die de voor- en achterliggerdoorsneden $x = 0$ met elkaar verbindt en zorgt, dat de momenten $(M_1{}^0)_0$ *en* $(M_2{}^0)_0$ *elkaar opheffen*. Na aanbrenging van het stelsel statisch onbepaalden X_i wordt deze veer belast door een wringmoment $2[(M_1{}^0)_0 + bX_0] = c\,\omega$, waarin c *de veerstijfheid is en* ω *de specifieke hoekverdraaiing van* de veer. Uit de limietvoorwaarde $c \rightarrow 0$ volgt dan

$$X_0 = -\left(\frac{M_1{}^0}{b} \right)_0. \tag{25b}$$

Uit deze evenwichtsvoorwaarde volgt $\delta X_0 = 0$, zoodat (21) ten opzichte van den coëfficiënt van δX_0 geen eisch stelt.

Uit (21) volgt nu, dat de coëfficiënt van δX_1 nul is:

$$\int_0^{x_1} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \psi' \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \varphi' \right) dx +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\partial A}{\partial X'} \psi_0' + \frac{\partial A}{\partial \Delta X'} (-\psi_0' + \varphi_1') \right\}_1 +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial A}{\partial X'} \varphi_1' - \frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\, \varphi_1' \right\}_2 = 0. \tag{26b}$$

De $n-2$ vergelijkingen (22) en de vergelijkingen (23), (24), (25a of b) en (26a of b) vormen een systeem van $n+2$ vergelijkingen ter bepaling van de $n+2$ grootheden $X_0, X_1, \ldots. X_{n+1}$. Van deze vergelijkingen hebben alleen (22) en (26) het karakter van vormveranderingsvoorwaarden; zij vormen een systeem van $n-1$ vergelijkingen, die de $n-1$ statisch onbepaalden $X_1, X_2 \ldots\ldots X_{n-1}$ bepalen. De grootheden X_0, X_n en X_{n+1} worden door de randvoorwaarden (23), (24) en (25), die het karakter hebben van evenwichtsvoorwaarden, bepaald.

07. De momentenvergelijkingen.

07.1. De integralen van de vormveranderingsvergelijkingen.

De vormveranderingsvergelijkingen (22) en (26) bevatten integralen over J. Het arbeidsvermogen per lengte-eenheid van x, J, is door de vergelijkingen (17 a, b, c) en (8) bekend als functie van X en X'. De in (22) en (26) optredende differentiaalquotiënten $\dfrac{\partial J}{\partial X}$ en $\dfrac{\partial J}{\partial X'}$ blijken gelijk te zijn aan

$$\frac{\partial J}{\partial X} = \eta_1 + \eta_2 X + \eta_3 X',$$

$$\frac{\partial J}{\partial X'} = \eta_4 + \eta_3 X + \eta_5 X',$$

waarin de coëfficiënten η uitgedrukt kunnen worden in de symbolen B, C_1, C_2, V, Δ, K_i, m en q, die de in de notatielijst (punt 12) vermelde beteekenis hebben:

$$\eta_1 = m,$$
$$\eta_2 = B - [b^2(C_1 + C_2)]',$$
$$\eta_3 = -b^2(C_1 + C_2) + \Delta,$$
$$\eta_4 = -\frac{K_i}{H}\, q,$$
$$\eta_5 = \frac{K_i{}^2}{H^2}\, V.$$

Hiermee volgt na substitutie van (15)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \psi' \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \varphi' \right) dx =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\eta_1 \psi + \eta_4 \psi')\, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\eta_1 \varphi + \eta_4 \varphi')\, dx +$$

$$+ X_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left((\eta_2 - \eta_3')\, \varphi\psi + \eta_5\, \varphi'\psi' \right) dx +$$

$$+ X_i \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left((\eta_2 - \eta_3')\, \psi^2 + \eta_5\, \psi'^2 \right) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((\eta_2 - \eta_3')\, \varphi^2 + \eta_5\, \varphi'^2 \right) dx - \Delta_i \eta_3 \right\} +$$

$$+ X_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((\eta_2 - \eta_3')\, \varphi\psi + \eta_5\, \varphi'\psi' \right) dx. \tag{27}$$

Vervolgens de benadering van φ en ψ overeenkomstig (16a) invoerend volgt (zie notatielijst en bijlage)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \psi' \right) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \varphi' \right) dx =$$

$$= m_{i-1}[\psi] + m_i[\varphi] - q_{i-1}[1] + q_i[1] +$$
$$+ X_{i-1}\left(B_{i-1}[\varphi\psi] - V_{i-1}[1] + \Delta_{i-1}[\varphi\psi]'\right) +$$
$$+ X_i \left(B_{i-1}[\psi^2] + B_i[\varphi^2] + V_{i-1}[1] + V_i[1] + \right.$$
$$\left. + \Delta_{i-1}[\psi^2]' + \Delta_i[\varphi^2]' + b_i{}^2 \Delta_i (C_1 + C_2)\right) +$$
$$+ X_{i+1}\left(B_i[\varphi\psi] - V_i[1] + \Delta_i(\varphi\psi)'\right). \tag{28}$$

Evenzoo volgt voor het geval van *symmetrische* belasting

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial J}{\partial X}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \varphi' \right) dx =$$

$$= m_0[1] + m_1[\varphi] + q_1[1] +$$
$$+ X_1\left(B_0[1] + B_1[\varphi^2] + V_1[1] + \Delta_1[\varphi^2]' + \right.$$
$$\left. + b_1{}^2(C_1 + C_2)_1\right) + X_2\left(B_1[\varphi\psi] - V_1[1] + \Delta_1[\varphi\psi]'\right) \tag{29a}$$

en voor het geval van *antimetrische* belasting

$$\int_0^{x_1} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \psi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \psi' \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial J}{\partial X}\, \varphi + \frac{\partial J}{\partial X'}\, \varphi' \right) dx =$$

$$= m_0[\psi] + m_1[\varphi] - q_0[1] + q_1[1] +$$
$$+ X_0\left(B_0[\varphi\psi] - V_0[1]\right) +$$
$$+ X_1\left(B_0[\psi^2] + B_1[\varphi^2] + V_0[1] + V_1[1] + \right.$$
$$\left. + \Delta_1[\varphi^2]' + b_1{}^2(C_1 + C_2)_1\right) +$$
$$+ X_2\left(B_1[\varphi\psi] - V_1[1] + \Delta_1[\varphi\psi]'\right). \tag{29b}$$

07.2 De ribtermen van de vormveranderingsvergelijkingen.

De definitie (10) voor D_i^* gaat na substitutie van (8) over in

$$D_i^* = (R + \beta_1 X + \beta_2 X'^{-} + \beta_3 \Delta X')_i \quad (30)$$

en vervolgens (15) invoerend is

$$\begin{aligned} D_i^* &= R_i + (\beta_2 - \beta_3)_i \varphi_{i-1}'{}_i X_{i-1} + \\ &+ \left(\beta_{1i} + (\beta_2 - \beta_3)_i \psi_{i-1}'{}_i + \beta_{3i} \varphi_i'{}_i\right) X_i + \beta_{3i} \psi_i'{}_i X_{i+1} = \\ &= R_i + c_{3i} X_{i-1} + c_{2i} X_i + c_{1i} X_{i+1}, \end{aligned} \quad (30a)$$

waarin c_{1i}, c_{2i}, c_{3i} en R_i de in de notatielijst (punt 12) gegeven beteekenis hebben.

Blijkens (17d) en (30) geldt

$$\left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)_i = \left(kD^* \frac{\partial D^*}{\partial X}\right)_i = (kD^* \beta_1)_i,$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial X'^{-}}\right)_i = \left(kD^* \frac{\partial D^*}{\partial X'^{-}}\right)_i = (kD^* \beta_2)_i,$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\right)_i = \left(kD^* \frac{\partial D^*}{\partial \Delta X'}\right)_i = (kD^* \beta_3)_i,$$

zoodat de termen van (22), die op de ribvervorming betrekking hebben, uitgedrukt worden door

$$(kD^* c_1)_{i-1} + (kD^* c_2)_i + (kD^* c_3)_{i+1}.$$

Na substitutie van (30a) gaat dit over in

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'} \psi_{i-1}'\right)_{i-1} + \left\{\frac{\partial A}{\partial X} + \left(\frac{\partial A}{\partial X'^{-}} - \frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\right) \psi_{i-1}' + \right. \\ &\left. + \frac{\partial A}{\partial \Delta X'} \varphi_i'\right\}_i + \left[\left(\frac{\partial A}{\partial X'^{-}} - \frac{\partial A}{\partial \Delta X'}\right) \varphi_i'\right]_{i+1} = (kc_1R)_{i-1} + \\ &+ (kc_2R)_i + (kc_3R)_{i+1} + (kc_1c_3)_{i-1} X_{i-2} + \left((kc_1c_2)_{i-1} + \right. \\ &\left. + (kc_2c_3)_i\right) X_{i-1} + \left((kc_1^2)_{i-1} + (kc_2^2)_i + (kc_3^2)_{i+1}\right) X_i + \\ &+ \left((kc_1c_2)_i + (kc_2c_3)_{i+1}\right) X_{i+1} + (kc_1c_3)_{i+1} X_{i+2}. \end{aligned} \quad (31a)$$

Op dezelfde wijze volgt voor de ribtermen van (26a en b) resp.

$$\begin{aligned} &(k\gamma_2R)_1 + (kc_3R)_2 + \left((k\gamma_2^2)_1 + (kc_3^2)_2\right) X_1 + \\ &+ \left((kc_1\gamma_2)_1 + (kc_2c_3)_2\right) X_2 + (kc_1c_3)_2 X_3 \end{aligned} \quad (32a)$$

en

$$\begin{aligned} &(kc_2R)_1 + (kc_3R)_2 + (kc_2c_3)_1 X_0 + \left((kc_2^2)_1 + (kc_3^2)_2\right) X_1 + \\ &+ \left((kc_1c_2)_1 + (kc_2c_3)_2\right) X_2 + (kc_1c_3)_2 X_3, \end{aligned} \quad (32b)$$

waarin c_{11} en c_{21} de beteekenis hebben, die hun volgens de algemeene notatie toekomt, terwijl de coëfficiënt γ_{21}, die in het geval van symmetrische belasting (26a) in de plaats van c_{21} optreedt, gegeven wordt door

$$\begin{aligned} \gamma_{21} = &\left\{-\frac{b}{h_{a1}}\left[\Delta \operatorname{tg} \alpha_1 - e_1 \frac{\Delta h_1'}{h_1} + \Delta e_1 \left(\frac{b'}{b} - \frac{h_1'}{h_1} - h_1 \lambda\right)^{-}\right] - \right. \\ &- \frac{b}{h_{a2}} \left[\Delta \operatorname{tg} \alpha_2 - e_2 \frac{\Delta h_2'}{h_2} + \Delta e_2 \left(\frac{b'}{b} - \frac{h_2'}{h_2} - h_2 \lambda\right)^{-}\right] + \\ &\left. + b^* b \, \Delta\lambda\right\}_1 + c_{11} \left(\frac{\varphi'}{\psi'}\right)_{11}. \end{aligned} \quad (32a)$$

07.3. De momentenvergelijkingen.

Door samenvoeging van de in punt 07.1 en 07.2 verkregen resultaten gaan de vormveranderingsvergelijkingen (22) en (26a of b) over in de volgende vergelijkingen, die telkens 5 opeenvolgende statisch onbepaalde grootheden bevatten: X_{i-2}, X_{i-1}, X_i, X_{i+1} en X_{i+2}.

Omdat deze grootheden blijkens (8d, e) zeer nauw verband houden met de overgangsmomenten in de liggers ter plaatse van de ribben en omdat uit de theorie der doorgaande balken op veerende steunpunten het begrip „5-momenten-vergelijking" bekend is, zal hier ook gesproken worden van de momenten-vergelijkingen, die het probleem beheerschen. Zij hebben den vorm

$$\begin{aligned} &u_{i,i-2} X_{i-2} + u_{i,i-1} X_{i-1} + u_{ii} X_i + u_{i,i+1} X_{i+1} + \\ &+ u_{i,i+2} X_{i+2} = U_i \quad \text{voor } i = 2, 3 \ldots\ldots n-1 \end{aligned} \quad (33)$$

en

$$u_{11} X_1 + u_{12} X_2 + u_{13} X_3 = U_1. \quad (34a, b)$$

Hierin is voor iedere i

$$\left.\begin{aligned} u_{ii} &= B_{i-1} [\psi^2] + B_i [\varphi^2] + V_{i-1} [1] + V_i [1] + \\ &+ \Lambda_{i-1} [\psi^2]' + \Lambda_i [\varphi^2]' + b_i^2 \Delta_i (C_1 + C_2) + \\ &\quad + (kc_1^2)_{i-1} + (kc_2^2)_i + (kc_3^2)_{i+1}, \\ u_{i,i+1} &= u_{i+1,i} = B_i [\varphi\psi] - V_i [1] + \Lambda_i [\varphi\psi]' + \\ &\quad (kc_1 c_2)_i + (kc_2 c_3)_{i+1}, \\ u_{i,i+2} &= u_{i+2,i} = (kc_1 c_3)_{i+1}, \\ U_i &= -m_{i-1}[\psi] - m_i[\varphi] + q_{i-1}[1] - q_i[1] - (kc_1R)_{i-1} - \\ &\quad - (kc_2R)_i - (kc_3R)_{i+1}, \end{aligned}\right\} (33)$$

behalve voor u_{11}, u_{12} en U_1, die in het geval van *symmetrische* belasting gegeven worden door

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= B_0 [1] + B_1 [\varphi^2] + V_1 [1] + \Lambda_1 [\varphi^2]' + \\ &\quad + b_1^2 (C_1 + C_2)_1 + (k\gamma_2^2)_1 + (kc_3^2)_2, \\ u_{12} &= B_1 [\varphi\psi] - V_1 [1] + \Lambda_1 [\varphi\psi]' + (kc_1 \gamma_2)_1 + \\ &\quad + (kc_2c_3)_2, \\ U_1 &= -m_0 [1] - m_1 [\varphi] - q_1 [1] - (k\gamma_2R)_1 - (kc_3R)_2 \end{aligned}\right\} (34a)$$

en voor u_{11} en U_1, die in het geval van *antimetrische* belasting gegeven worden door

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= B_0 [\psi^2] + B_1 [\varphi^2] + V_0 [1] + V_1 [1] + \\ &+ \Lambda_1 [\varphi^2]' + b_1^2 (C_1 + C_2)_1 + (kc_2^2)_1 + (kc_3^2)_2, \\ U_1 &= -m_0 [\psi] - m_1 [\varphi] + q_0 [1] - q_1 [1] - (kc_2R)_1 - \\ &- (kc_3R)_2 + \left(\frac{M_1^0}{b}\right)_0 \left(B_0 [\varphi\psi] - V_0 [1] + (kc_2c_3)_1\right). \end{aligned}\right\} (34b)$$

De coëfficiënten u en de belastingstermen U zijn alle bekend bij een gegeven vleugel met gegeven belasting. De vergelijkingen (33) en (34) vormen dus een systeem van lineaire recursievergelijkingen in de onbekenden X_i; indien X bekend is tot het punt x_{i+1}, kan X_{i+2} berekend worden uit de 5-momentenvergelijking voor i.

De coëfficiënten van de momentenvergelijkingen vormen een matrix, die symmetrisch is ten opzichte van de hoofddiagonaal:

$$\begin{array}{ccccccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} & 0 & 0 \\ 0 & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_{45} & u_{46} & 0 \\ 0 & 0 & u_{53} & u_{54} & u_{55} & u_{56} & u_{57} \end{array}$$

Een uitzondering schijnt te worden gevormd door den coëfficiënt u_{12} voor het geval van symmetrische belasting, die door de vervanging van c_{21} door γ_{21} ongelijk is aan u_{21}. Indien men echter in de vergelijking voor $i = 2$

$$u_{20} X_0 + u_{21} X_1 + u_{22} X_2 + u_{23} X_3 + u_{24} X_4 = U_2$$

invoert $X_0 = X_1$, verkrijgt men als coëfficiënt van X_1 de grootheid $u_{20} + u_{21}$, die, omdat binnen rib 1 $\varphi_0' = -\psi_0'$ (zie punt 06), gelijk is aan u_{12}[4]). De coëfficiënten van de vergelijkingen in X_1 $X_2 \ldots\ldots X_{n-1}$ vormen dus inderdaad een symmetrische matrix.

08. Vereenvoudiging van de coëfficiënten der momentenvergelijkingen.

De in punt 12 gegeven formules voor b^*, H en c kunnen worden benaderd door de volgende uitdrukkingen, die eenvoudiger numeriek berekend kunnen worden:

[4]) Bij antimetrische belasting kan de term $u_{20}X_0$ worden gevoegd bij het tweede lid, omdat X_0 geen onbekende is.

$$\left.\begin{aligned}
b^* &= b\left[1-\frac{e_1}{b}\left(1-\frac{h_1}{h_{b1}}\right)-\frac{e_2}{b}\left(1-\frac{h_2}{h_{b2}}\right)\right],\\
H &= \frac{2\,O}{ab^3\left(1-\frac{e_1+e_2}{b}\right)},\\
c_{1i} &= \left\{\frac{1}{Kb}\,\frac{b^*/b}{1-\frac{e_1+e_2}{b}}\right\}_i,\\
c_{3i} &= \frac{1}{K_{i-1}}\left\{\frac{b^*/b+\frac{\Delta e_1}{b}\left(1-\frac{e_2}{b}\right)+\frac{\Delta e_2}{b}\left(1-\frac{e_1}{b}\right)}{b\left(1-\frac{e_1+e_2}{b}\right)}\right\}_i,\\
c_{2i} &= -c_{1i}-c_{3i}-\\
&-\left\{\frac{b}{h_{a1}}\left[\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_1-e_1\frac{\Delta h_1'}{h_1}+\Delta e_1\left(\frac{b'}{b}-\frac{h_1'}{h_1}\right)\right]+\right.\\
&\left.+\frac{b}{h_{a2}}\left[\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_2-e_2\frac{\Delta h_2'}{h_2}+\Delta e_2\left(\frac{b'}{b}-\frac{h_2'}{h_2}\right)\right]-b^2\Delta\lambda\right\}_i.
\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de benadering van φ en ψ volgens (16a). Voorts zijn de maximale fouten, die met (35) worden toegelaten voor b^* ½ %; voor H 5 %, voor c_{1i} 1 % en voor c_{2i} en c_{3i} 5 %.

Een fout in H van 5 % is niet belangrijk, omdat dezelfde fout in K optreedt en de hoofdvergelijkingen H slechts bevatten in de combinatie $\frac{H}{K}$. Indien de fout in H constant is over een ribafstand is $\frac{H}{K}$ ongevoelig voor een fout in H.

Een constante fout in H verkrijgt men, indien $\frac{e_1}{b}$ en $\frac{e_2}{b}$ constant zijn. In den regel zal dit inderdaad het geval zijn of, indien dit niet het geval is, is de afwijking zoo gering dat de fout in H slechts weinig van een constant percentage zal afwijken.

De grootste fouten in c_{2i} en c_{3i} treden op bij de groote waarden van $\frac{e_1}{b}$ en $\frac{e_2}{b}$. De berekening is dan echter in principe reeds minder nauwkeurig, omdat bij deze groote waarden van $\frac{e_1}{b}$ en $\frac{e_2}{b}$ de verwaarloosde ribvervormingen in het deel buiten de liggervlakken belangrijker worden. In verband hiermee verliest een grootere nauwkeurigheid haar zin. Bovendien is een kleine verandering van de ribstijfheid, als hoedanig een fout in c kan worden opgevat, van verwaarloosbaren invloed op de spanningsverdeeling in den vleugel.

Een andere vereenvoudiging, die echter niet de nauwkeurigheid vermindert, wordt bereikt door u_{ii} volgens (33) te vervangen door

$$\begin{aligned}
i=2,3\ldots n-1:\ u_{ii} &= -(u_{i,i-2}+u_{i,i-1}+u_{i,i+1}+u_{i,i+2})+\\
&+B_{i-1}[\psi]+B_i[\varphi]+\Lambda_{i-1}[\psi']+\Lambda_i[\varphi']+\\
&+b_i^2\Delta_i(C_1+C_2)+(kc_1c_4)_{i-1}+(kc_2c_4)_i+(kc_3c_4)_{i+1}
\end{aligned}\quad(36)$$

en u_{11} volgens (34a, b) te vervangen voor *symmetrische* belasting door

$$\begin{aligned}
u_{11} &= -(u_{12}+u_{13})+B_0[1]+B_1[\varphi]+\Lambda_1[\varphi']+\\
&+b_1^2(C_1+C_2)_1+(k\gamma_2c_4)_1+(kc_3c_4)_2
\end{aligned}\quad(37a)$$

en voor *antimetrische* belasting door

$$\begin{aligned}
u_{11} &= -(u_{12}+u_{13})+B_0[\psi^2]+B_1[\varphi]+V_0[1]+\Lambda_1[\varphi']+\\
&+b_1^2(C_1+C_2)_1+[kc_2(c_4-c_3)]_1+(kc_3c_4)_2.
\end{aligned}\quad(37b)$$

Hierin is $c_4 = c_1+c_2+c_3$.

Deze uitdrukkingen zijn voor numerieke berekening eenvoudiger dan die, welke onder (33) en (34) zijn gegeven,

1e. omdat c_4 bij veel ribben nul is door het ontbreken van discontinuïteiten in tg α_1, tg α_2, h_1', h_2', e_1 en e_2,

2e. omdat voor de integralen $B[\psi]$, $B[\varphi]$, $\Lambda[\psi']$ en $\Lambda[\varphi']$ eenvoudiger uitdrukkingen kunnen worden gegeven dan voor de integralen $B[\psi^2]$, $B[\varphi^2]$, $\Lambda[\psi^2]'$ en $\Lambda[\varphi^2]'$ (zie bijlage).

09. Toepassing op bijzondere gevallen.

09.1. *De vleugel met volkomen stijve ribben.*

Bij den vleugel met volkomen stijve ribben worden de coëfficiënten k en daarmee $u_{i,i-2}$ en $u_{i,i+2}$ gelijk aan nul, zoodat de 5-momentenvergelijking (33) overgaat in een 3-momentenvergelijking van den vorm

$$u_{i,i-1}X_{i-1}+u_{ii}X_i+u_{i,i+1}X_{i+1}=U_i$$
$$\text{voor } i=2,3\ldots\ldots n-1,\quad(38)$$

waarin

$$\left.\begin{aligned}
u_{i,i+1} &= u_{i+1,i} = B_i[\varphi\psi]-V_i[1]+\Lambda_i[\varphi\psi]',\\
u_{ii} &= -(u_{i,i-1}+u_{i,i+1})+B_{i-1}[\psi]+B_i[\varphi]+\\
&\quad+\Lambda_{i-1}[\psi']+\Lambda_i[\varphi']+b_i^2\Delta_i(C_1+C_2),\\
U_i &= -m_{i-1}[\psi]-m_i[\varphi]+q_{i-1}[1]-q_i[1].
\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

Vergelijking (34) gaat over in een 2-momentenvergelijking

$$u_{11}X_1+u_{12}X_2=U_1,\quad(39)$$

waarvan de coëfficiënten gegeven worden door (34a,b) en (37a, b), als daarin $k=0$ alsmede $u_{13}=0$ wordt gesteld.

09.2. *De vleugel, waarbij de torsiecentra der liggers in de liggervlakken vallen.*

Indien de torsiecentra der liggers in de liggervlakken vallen, is $e_1 = e_2 = 0$.

Hieruit volgt

$$\left.\begin{aligned}
H &= \frac{2\,O}{ab^3},\\
c_{1i} &= \frac{1}{K_ib_i},\\
c_{3i} &= \frac{1}{K_{i-1}b_i},\\
c_{2i} &= -\left(c_1+c_3+\frac{b}{h_{b1}}\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_1+\frac{b}{h_{b2}}\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_2\right)_i,\\
\gamma_{21} &= -\left(c_1+\frac{b}{h_{b1}}\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_1+\frac{b}{h_{b2}}\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_2\right)_1,\\
k_i &= \left(\frac{O}{Gd}\right)_i,\\
R_i &= \left\{-\frac{1}{h_{b1}}(W_1+M_1^0\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_1)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{h_{b2}}(W_2+M_2^0\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_2)\right\}_i,
\end{aligned}\right\}\quad(40)$$

terwijl de λ-termen in C_1, C_2, B_1, B_2 en B vervallen.

De momentenvergelijkingen behouden de in (33) en (34) gegeven algemeene gedaante; hun coëfficiënten (zie ook (36) en (37)) worden in zooverre vereenvoudigd, dat de Λ-termen komen te vervallen.

09.3. *De vleugel met evenwijdige liggers.*

Bij vleugels met evenwijdige liggervlakken is tg α_1 = tg $\alpha_2 = b' = 0$.

Dit moet worden ingevoerd bij de berekening der coëfficiënten, die tg α_1, tg α_2 of b' bevatten; hun gedaante verandert echter zoo weinig, dat het overbodig mag worden geacht ze explicite weer te geven.

10. De oplossingsmethode der momentenvergelijkingen.

10.1. *De vleugel zonder eindrib.*

De oplossing van het systeem van lineaire vergelijkingen (33), (34) wordt als volgt samengesteld:

$$X = X_{nh}+r_1X_{h1}+r_2X_{h2},\quad(41)$$

waarin X_{nh} de oplossing is van de niet-homogene vergelijkingen met zekere willekeurige beginwaarden in x_1 en x_2, X_{nh1} en X_{nh2}; X_{h1} en X_{h2} zijn onderling onafhankelijke oplossingen van de homogene vergelijkingen ($U_i = 0$) met zekere onderling onafhankelijke willekeurige beginwaarden X_1 en X_2, b.v. $(X_{h1})_1 = 1, (X_{h1})_2 = 0$ en $(X_{h2})_1 = 0, (X_{h2})_2 = 1$.

r_1 en r_2 zijn constanten, die zoodanig worden bepaald, dat de resulteerende oplossing X voldoet aan de evenwichtsvoorwaarden (23) en (24).

Bij vleugels met volkomen stijve ribben (punt 09.1) volgt uit (39), dat in de oplossingen X_{nh} en X_h slechts één waarde van X, namelijk X_1, willekeurig kan worden gekozen. Er is dus slechts een oplossing van de homogene vergelijking mogelijk en de resulteerende oplossing X volgt uit (24)

$$X_n = (X_{nh})_n + r(X_h)_n = 0. \qquad (42)$$

Bij antimetrische belasting geldt voor de oplossing der niet-homogene vergelijkingen de randvoorwaarde (25b). Voor de oplossing der homogene vergelijkingen moet bedacht worden, dat deze overeenkomen met een „eigenspanningstoestand", dus zonder uitwendige belastingen. In (25b) moet daarom worden gesteld $(M_1{}^0)_0 = 0$, zoodat de randvoorwaarde wordt $X_0 = 0$.

10.2. *De vleugel met eindrib.*

Indien de vleugel bij de n-de rib eindigt, is X_{n+1} steeds gelijk aan X_n en de twee evenwichtsvoorwaarden (23) en (24) zijn niet meer onafhankelijk van elkaar. Bij den vleugel met vervormbare ribben is de oplossingsmethode volgens punt 10.1 dan niet meer direct bruikbaar. Om deze moeilijkheid tot oplossing te brengen wordt het volgende opgemerkt.

De n—1-ste vergelijking luidt

$$u_{n-1,n-3}\,X_{n-3} + u_{n-1,n-2}\,X_{n-2} + u_{n-1,n-1}\,X_{n-1} + \\ + u_{n-1,n}\,X_n + u_{n-1,n+1}\,X_{n+1} = U_{n-1}.$$

Substitueert men hierin volgens (36)

$$u_{n-1,n-1} = -(u_{n-1,n-3} + u_{n-1,n-2} + u_{n-1,n} + u_{n-1,n+1}) + \\ + B_{n-2}\,[\psi] + B_{n-1}\,[\varphi] + \Lambda_{n-2}\,[\psi'] + \Lambda_{n-1}\,[\varphi'] + \\ + b_{n-1}{}^2\,\Delta_{n-1}\,(C_1+C_2) + (kc_1c_4)_{n-2} + (kc_2c_4)_{n-1} + \\ + (kc_3c_4)_n,$$

dan vindt men

$$u_{n-1,n-3}(X_{n-3}-X_{n-1}) + u_{n-1,n-2}(X_{n-2}-X_{n-1}) + \\ + (u_{n-1,n} + u_{n-1,n+1})\,(X_n - X_{n-1}) + u_{n-1,n+1}\,(X_{n+1}-X_n) + \\ + \Big\{B_{n-2}\,[\psi] + B_{n-1}\,[\varphi] + \Lambda_{n-2}\,[\psi'] + \Lambda_{n-1}\,[\varphi'] + \\ + b_{n-1}{}^2\,\Delta_{n-1}\,(C_1+C_2) + (kc_1c_4)_{n-2} + (kc_2c_4)_{n-1} + \\ + (kc_3c_4)_n\Big\}\,X_{n-1} = U_{n-1}.$$

De coëfficiënten van $X_n - X_{n-1}$, $X_{n+1} - X_n$ en X_{n-1} moeten nader onderzocht worden, omdat zij mede betrekking hebben op de constructie buiten rib n.

Volgens (33) geldt

$$u_{n-1,n} + u_{n-1,n+1} = B_{n-1}\,[\varphi\psi] - V_{n-1}\,[1] + \Lambda_{n-1}\,[\varphi\psi]' + \\ + (kc_1c_2)_{n-1} + [k\,(c_4-c_3)c_3]_n,$$

$$u_{n-1,n+1} = (kc_1c_3)_n.$$

De onbepaaldheid van de genoemde coëfficiënten bevindt zich resp. in

$$[k\,(c_4-c_3)c_3]_n,\ (kc_1c_3)_n \text{ en } (kc_3c_4)_n.$$

De vleugelconstructie, die bij rib n eindigt, wordt nu buiten rib n over een willekeurigen afstand ϵ voortgezet gedacht, zoodanig, dat Δ_n tg $\alpha_1 = \Delta_n$ tg $\alpha_2 = \Delta h'_1 = \Delta h_2' = \Delta e_1 = \Delta e_2 = 0$. Onder deze omstandigheden is $c_{4n} = 0$ en neemt c_{3n} een bepaalde eindige waarde aan; daarentegen is c_{1n} afhankelijk van ϵ, omdat K_n van ϵ afhangt.

$$c_{1n} = \left(b^* \frac{ab}{2\,O}\frac{H}{K}\right)_n.$$

Nadat X_{n-3}, X_{n-2}, X_{n-1} en X_n berekend zijn uit de momentenvergelijkingen tot $i = n$—2, levert de n—1-ste momentenvergelijking dus een bepaalde eindige waarde op voor $\dfrac{X_{n+1}-X_n}{K_n}$, die onafhankelijk is van de constructie buiten rib n. Indien rib n eindrib is, is $K_n = \epsilon = 0$ en volgt het triviale resultaat $X_{n+1} = X_n$. De beteekenis van de n—1-ste vergelijking ligt dan ook niet hierin, dat zij de waarde van X_{n+1} levert, maar in de omstandigheid, dat zij de waarde van $\dfrac{X_{n+1}-X_n}{K_n}$ geeft. Deze waarde moet aan een bepaalde voorwaarde voldoen; hoe zij luidt wordt duidelijk als de lengte van het n-de veld ϵ tot nul nadert. In dat geval is $K_n = H_n\epsilon$ en de n—1-ste vergelijking geeft een eindige waarde voor $b_n \dfrac{X_{n+1}-X_n}{\epsilon}$. Deze grootheid nu is de statisch onbepaalde dwarskracht, die juist buiten rib n in de liggers werkt. Aangezien de krachtsverdeeling buiten de eindrib statisch bepaald is, moet deze statisch onbepaalde dwarskracht nul zijn en moet dus voor iedere ϵ de voorwaarde gelden

$$\frac{X_{n+1}-X_n}{K_n} = 0. \qquad (43)$$

De voorwaarde (43), die in de plaats komt van de evenwichtsvoorwaarde (23) is gelijkelijk van toepassing op den vleugel die buiten de n-de rib doorloopt en op den vleugel die bij de n-de rib eindigt. Daar de n—1-ste momentenvergelijking de waarde van $\dfrac{X_{n+1}-X_n}{K_n}$ levert, zonder dat daarop de constructie van den vleugel buiten rib n invloed heeft, kan men bij de berekening veronderstellen, dat de vleugel buiten rib n met een willekeurig stuk is verlengd. Voor de practische uitvoering is het dan van eenig voordeel te stellen $K_n = K_{n-1}$. De n—1-ste vergelijking levert dan een waarde voor X_{n+1}, die in het algemeen ongelijk is aan X_n en de evenwichtsvoorwaarden (23) en (24) kunnen weer worden gebruikt voor de bepaling der constanten r_1 en r_2.

10.3. *Benadering der optredende integralen.*

De in de momentenvergelijkingen optredende integralen kunnen met voldoende nauwkeurigheid worden berekend in de veronderstelling, dat de integrant in het beschouwde interval op een bepaalde eenvoudige wijze verloopt tusschen de waarden, die hij aan beide einden van het interval bezit.

Voor de functies B, V, m en q wordt een parabolisch verloop verondersteld, zoodat zij geheel bepaald zijn door de 3 waarden aan de randen x_i en x_{i+1} en in het midden van het interval. De functie Λ geeft onder U_i bijdragen, die een orde van grootte kleiner zijn dan de bijdragen van de functie B. Bovendien verloopt Λ over een interval slechts weinig in waarde. Het is daarom voldoende nauwkeurig, indien Λ als lineaire functie gedacht wordt door de waarden aan de randen.

Ook van de functie H geldt, dat zij over een intervallengte slechts weinig in waarde verandert; H wordt daarom ook door een lineaire functie tusschen haar randwaarden benaderd. De fout in de waarden van K_i, die op deze wijze worden berekend, is in extreme gevallen niet grooter dan enkele procenten.

Onder de genoemde veronderstellingen kunnen de optredende integralen worden berekend, waarbij in de uitkomst alleen de functiewaarden in de punten x_i en x_{i+1} en eventueel die in het midden van het interval voorkomen. De formules zijn gegeven in de bijlage.

11. Samenvatting.

De vleugel is gedacht te bestaan uit twee liggers, verbonden door n onderling evenwijdige ribben per vleugelhelft. Tusschen de ribben zijn de gordingen en de verbindingslijnen van de torsiecentra van iederen ligger recht; bij de ribben kunnen de gordingen geknikt zijn en kunnen de torsiecentra verspringen (fig. 3). Tusschen de liggers en met deze en de ribben verbonden bevindt zich de bekleeding, die behalve door de ribben gesteund wordt door een systeem van continu verdeelde lijsten in vlakken evenwijdig aan de ribvlakken.

De liggers hebben een eindige stijfheid tegenover buiging en afschuiving; de ribben en de bekleeding hebben eindige afschuifstijfheid; de lijsten zijn in hun vlak volkomen stijf. Tegenover momenten, waarvan de vector resp. in het vlak van liggers, ribben (lijsten) en bekleeding ligt, zijn deze constructie-elementen volkomen slap; ook tegenover normaalspanningen in de richting loodrecht op de ribvlakken *is de bekleeding volkomen slap.*

Voor dit systeem, belast door krachten loodrecht op het vleugelvlak, worden de n—1 vormveranderingsvoorwaarden voor de n—1 statisch onbepaalde grootheden $X_1, X_2 \ldots\ldots, X_{n-1}$ opgesteld (vergelijkingen (33) en (34)). Dit zijn in het algemeen 5-momentenvergelijkingen; iedere vergelijking bevat de onbekende overgangsmomenten bX bij vijf opeenvolgende ribben, zoodat het geheele systeem van vergelijkingen recursief is. De coëfficiënten van de vergelijking (34) zijn voor symmetrische en antimetrische belastingen verschillend: in het eerste geval worden zij gegeven door (34a), *in het tweede geval door* (34b).

Indien de afschuifstijfheid van de ribben verondersteld wordt oneindig groot te zijn, gaan de 5-momentenvergelijkingen (33) over in de 3-momentenvergelijkingen (38) en (34) gaat over in (39).

De oplossingsmethode der vergelijkingen wordt besproken. In de bijlage zijn benaderingsformules gegeven voor de in de momentenvergelijkingen optredende integralen van stijfheids- en belastingsfuncties.

12. Notaties.

0 — als index $(\ )^0$, duidt *op de krachtsverdeeling* in het statisch bepaalde hoofdsysteem volgens (7);

1 — als index, duidt op den voorligger van den vleugel;

2 — als index, duidt op den achterligger van den vleugel;

a — = afstand der torsiecentra van beide liggers in z-richting (fig. 1);

a_1 — $= 1 - \dfrac{h_1 a}{2\,O}$;

b — = afstand der liggervlakken (liggergordingen) in z-richting (fig. 1);

b — als index, duidt op de bovenzijde van de bekleeding;

b^* — $= \dfrac{a}{h_{a1}h_{a2}}\left[h_{a1}\dfrac{2\,O}{a} - h_{b1}{}^2 - h_1\,(h_{a1} - h_{b1})\right]$, wordt benaderd volgens (35);

c_{1i} — $= \left(b^*\dfrac{ab}{2\,O}\,\psi_i{}'\right)_i$, wordt benaderd volgens (35);

c_{2i} — $= \Big\{-\dfrac{b}{h_{a1}}\Big[\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 - e_1\dfrac{\Delta h_1{}'}{h_1} + \Delta e_1\left(\dfrac{b'}{b} - \dfrac{h_1{}'}{h_1} - h_1\,\lambda\right)^-\Big] - \dfrac{b}{h_{a2}}\Big[\Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 - e_2\dfrac{\Delta h_2{}'}{h_2} + \Delta e_2\left(\dfrac{b'}{b} - \dfrac{h_2{}'}{h_2} - h_2\lambda\right)^-\Big] + b^*\,b\Delta\lambda\Big\}_i + c_{1i}\left(\dfrac{\varphi'}{\psi'}\right)_{ii} + c_{3i}\left(\dfrac{\psi'}{\varphi'}\right)_{i-1,i}$, wordt benaderd volgens (35);

c_{3i} — $= -\Big\{b^*\left(\dfrac{ab}{2\,O}\right)^- + \Delta e_1\dfrac{b}{h_{a1}}a_1{}^- + \Delta e_2\dfrac{b}{h_{a2}}a_2{}^-\Big\}_i\ \varphi_{i-1}{}'{}_i$, wordt benaderd volgens (35);

c_{4i} — $= (c_1 + c_2 + c_3)_i$;

d — = wanddikte van liggers, ribben of bekleeding;

e — = afstand van het torsiecentrum van een ligger buiten het liggervlak, in de richting evenwijdig aan de z-as (fig. 1);

h — zonder index = hoogte van de geschematiseerde rib ter plaatse z;

h — met index 1 of 2 = afstand van de zwaartepunten der gordingen van een ligger in y-richting (fig. 1);

h_a — = hoogte van de geschematiseerde rib ter plaatse van het torsiecentrum van den ligger (fig. 7);

h_b — = hoogte van de geschematiseerde rib ter plaatse van het liggervlak (fig. 7);

h_c — = afstand tusschen de bekleeding van boven- en onderzijde ter plaatse van het liggervlak (fig. 4);

h — als index, duidt op de oplossing der homogene vergelijkingen;

i — als index, duidt op een rib of op het punt juist buiten rib i;

k_i — $= \left[\left(\dfrac{h_{a1}}{h_{b1}}\,\dfrac{h_{a2}}{h_{b2}}\right)^2\dfrac{b(h_{b1} + h_{b2})}{2\,a^2Gd}\right]_i$;

l_i — = afstand van rib i tot $i+1$ in x-richting (fig. 3);

m — $= b\left[\dfrac{M_1{}^0}{S_{b1}\cos^3\alpha_1} - \dfrac{M_2{}^0}{S_{b2}\cos^3\alpha_2} + D_{s1}{}^0\,C_1 - D_{s2}{}^0\,\dfrac{C_2}{a_2}\right]$;

n — = aantal ribben per vleugelhelft; tevens aanduiding van de buitenste rib (fig. 11);

nh — als index, duidt op de oplossing der niet-homogene vergelijking;

o — *als index, duidt op de onderzijde* van de bekleeding;

p — = continue belasting in y-richting per eenheid van lengte van x;

q — $= \dfrac{H}{K_i}\,b\left(D_{s1}{}^0\dfrac{a_1}{S_{s1}\cos\alpha_1} - D_{s2}{}^0\dfrac{a_2}{S_{s2}\cos\alpha_2}\right)$;

r — = constante volgens (41);

t — = schuifkracht per lengte-eenheid in de bekleeding (fig. 4);

u — = coëfficiënt der momentenvergelijkingen (punt 07.3);

x — = coördinaat in de richting, loodrecht op het symmetrievlak van den vleugel (fig. 3);

y — = *coördinaat loodrecht op het vleugelvlak* (fig. 3);

z — = coördinaat in het vleugelvlak, evenwijdig aan het symmetrievlak (fig. 3);

z_D — = afstand van het *torsiecentrum van den* voorligger tot het aangrijpingspunt van D;

A — = vervormingsarbeid;

B — $= b^2\,(B_1 + B_2) + \lambda^2 b^3\left(\dfrac{1}{G_b d_b} + \dfrac{1}{G_0 d_0}\right)$;

B_1 — $= \dfrac{1}{S_{b1}\cos^3\alpha_1} - \dfrac{C_1}{a_1}\left(\dfrac{b'}{b} - \dfrac{h_1{}''}{h_1} - h_1\lambda\right) + 2\dfrac{b'}{b}C_1 + C_1{}'$;

C_1 — $= -\dfrac{a_1}{S_{s1}\cos\alpha_1}\left(\dfrac{b'}{b} - \dfrac{h_1{}'}{h_1} - h_1\lambda\right)$;

D — zonder index = resulteerende uitwendige dwarskracht op de geheele vleugeldoorsnede;

D_g — = dwarskracht opgenomen door de gordingen van een ligger (fig. 4);

D_s — = dwarskracht opgenomen door den liggerwand (fig. 4) of ribwand (fig. 8);

E — = elasticiteitsmodulus van het gordingmateriaal;

G — = glijdingsmodulus van het wandmateriaal;

H — $= 1 : b^2\left(\dfrac{ab}{2\,O} - a_1\dfrac{e_1}{h_{c1}} - a_2\dfrac{e_2}{h_{c2}}\right)$, wordt benaderd volgens (35);

I — = *traagheidsmoment van de liggerdoorsnede loodrecht op het liggervlak*;

J — = vervormingsarbeid per lengte-eenheid van x;

$K_i \quad = \int_{x_i}^{x_{i+1}} H\, dx;$

L $= x_{n+1}$, halve vleugelbreedte (fig. 11);

M = buigend moment in de geheele vleugeldoorsnede;

M_1, M_2 = component langs de z-as van het buigend moment in een ligger (fig. 4);

O omsloten oppervlak van de vleugeldoorsnede tusschen de liggerwanden en de bekleeding (fig. 1);

P_i = geconcentreerde belasting in y-richting op rib i;

$$R_i = \left\{-\frac{1}{h_{a1}}\left[W_1 + M_1{}^0\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_1 - e_1\frac{\Delta h_1'}{h_1}\right) - D_{s1}{}^{0-}\Delta e_1\right] + \frac{1}{h_{a2}}\left[W_2 + M_2{}^0\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_2 - e_2\frac{\Delta h_2'}{h_2}\right) - D_{s2}{}^{0-}\Delta e_2\right]\right\}_i;$$

S_b = buigingsstijfheid van een ligger

$$S_{b1} = \frac{EI_1}{1 + \frac{1}{2}h_1'^2};$$

S_s = afschuifstijfheid van een ligger

$$S_{s1} = G_1 h_1 d_1;$$

U_i = belastingsterm van de i-de momentenvergelijking (punt 07.3);

$$V = \frac{(bH)^2}{K_i^2}\left[\frac{a^2 b}{4\,O^2}\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_0 d_0}\right) + \frac{a_1^2}{S_{s1}\cos\alpha_1} + \frac{a_2^2}{S_{s2}\cos\alpha_2}\right];$$

W_i = uitwendig belastend moment in het vlak van rib i ten opzichte van het torsiecentrum van een ligger (fig. 8);

X = statisch onbepaalde grootheid, gedefinieerd door (6);

α = hoek tusschen een liggervlak en het xy-vlak (fig. 3);

γ_{21} = gedefinieerd door (32a);

φ_i, ψ_i = oplossingen van de differentiaalvergelijking (14) tusschen x_i en x_{i+1} volgens (15), wordt benaderd volgens (16a);

φ_{ii}, ψ_{ii} = waarde van φ_i en ψ_i in het punt x_i;

$$\lambda = \frac{1}{2\,O}\left[e_1\left(\frac{b'}{b} - \frac{h_1'}{h_1}\right) + e_2\left(\frac{b'}{b} - \frac{h_2'}{h_2}\right)\right];$$

$$\Lambda = \lambda\frac{ab^3}{2\,O}\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_0 d_0}\right);$$

$$f' = \frac{df}{dx};$$

f_i^- = waarde van f ter plaatse $x_i - \epsilon$ ($\lim \epsilon = 0$);

$f_i^+ = f_i$ = waarde van f ter plaatse $x_i + \epsilon$ ($\lim \epsilon = 0$);

$\Delta_i f \quad = f_i^+ - f_i^-;$

$$f_i\,[g] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} fg\, dx;$$

$$f_i\,[g]' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} fg'\, dx.$$

13. Literatuuropgave.

1. KONING, C. De invloed van het ribverband en de bekleeding op de sterkte van vliegtuigvleugels I. R.S.L.-rapport V. 358. Versl. en Verh. R.S.L., deel VI, blz. 139—152 (1931).
2. VAN DER NEUT, A. Idem II. R.S.L.-rapport S. 67. Versl. en Verh. R.S.L. deel VII, blz. 55—65 (1934).
3. KONING, C. en VAN DER NEUT, A. Idem III. R.S.L.-rapport S. 68. Versl. en Verh. R.S.L. deel VII, blz. 67—97 (1934).
4. VAN DER NEUT, A. Idem IV. R.S.L.-rapport S. 70. Versl. en Verh. R.S.L. deel VII, blz. 99—120 (1934).
5. KOITER, W. T. en VAN DER NEUT, A. De invloed van elastische ribvervormingen op de spanningsverdeeling in vleugels met 2 liggers en elastisch vervormbare bekleeding. N.L.L.-rapport S.278. Versl. en Verh. N.L.L. Deel XII blz. S. 1—13 (1943).
6. VAN DER NEUT, A. Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers. R.S.L.-rapport S. 48. Versl. en Verh. R.S.L. deel VI, blz. 67—83 (1931).
7. PLANTEMA, F. J. en VAN DER NEUT, A. De spanningsverdeeling in vleugels met twee niet-evenwijdige torsiestijve liggers verbonden door elastisch vervormbare ribben en bekleeding. N.L.L.-rapport S. 279. Versl. en Verh. N.L.L., deel XII, blz. S. 33—41 (1943).

Bijlage.

Enkele formules ten behoeve van het rekenwerk.

De functiewaarden bij begin, midden en eind van een interval worden resp. aangeduid door de indices I, II en III. Voorts worden de symbolen $\triangle$ en $\triangle^2$ ingevoerd, gedefinieerd door

$$\triangle f = \frac{f_{III} - f_I}{f_{II}},$$

$$\triangle^2 f = \frac{f_I - 2f_{II} + f_{III}}{f_{II}}.$$

De functies B, V, m en q worden benaderd door parabolen, gaande door de functiewaarden aan beide einden en in het midden van het interval; de functies Λ en H worden benaderd door een rechte lijn, gaande door de functiewaarden aan beide einden van het interval.

Dan gelden de volgende formules:

$$K_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} H\, dx = (H_{II} l)_i,$$

$$B_i\,[\psi] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B\psi dx = \frac{1}{12}\left(B_{II} l\,(6 - \triangle H + \triangle B + \triangle^2 B)\right)_i,$$

$$B_i\,[\varphi] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B\varphi dx = \frac{1}{12}\left(B_{II} l\,(6 + \triangle H - \triangle B + \triangle^2 B)\right)_i,$$

$$B_i\,[\varphi\psi] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B\varphi\psi dx = \frac{1}{12}\left[B_{II} l\left\{2 + \frac{1}{10}\left(\triangle H(\triangle H + \triangle B) + 2\triangle^2 B\right)\right\}\right]_i,$$

$$B_i\,[\psi^2] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B\psi^2 dx = B_i\,[\psi] - B_i[\varphi\psi],$$

$$B_i\,[1] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B dx = B_i\,[\psi] + B_i\,[\varphi].$$

$$V_i\,[1] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} V dx = \frac{1}{6}\left(V_{\mathrm{II}} l\,(6+\Delta^2 V)\right)_i,$$

$$m_i\,[\psi] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} m\psi dx = \frac{1}{12}\left(m_{\mathrm{II}}\; l\,(6-\Delta H+\Delta m+\Delta^2 m)\right)_i,$$

$$m_i\,[\varphi] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} m\varphi dx = \frac{1}{12}\left(m_{\mathrm{II}} l\,(6+\Delta H-\Delta m+\Delta^2 m)\right)_i,$$

$$m_i\,[1] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} m dx = m_i\,[\psi] + m_i\,[\varphi],$$

$$q_i\,[1] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q dx = \frac{1}{6}\left(q_{\mathrm{II}}\, l\,(6+\Delta^2 q)\right)_i,$$

$$\Lambda_i\,[\psi'] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Lambda\,\psi' dx = \left(\Lambda_{\mathrm{II}}\,(1+\frac{1}{12}\Delta\Lambda\,\Delta H)\right)_i \approx \Lambda_{\mathrm{II}i},$$

$$\Lambda_i\,[\varphi'] = -\Lambda_i(\psi') = -\left(\Lambda_{\mathrm{II}}\,(1+\frac{1}{12}\,\Delta\Lambda\,\Delta H)\right)_i \approx -\Lambda_{\mathrm{II}i},$$

$$\Lambda_i[\varphi\psi]' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Lambda\,(\varphi\psi)'\,dx = -\frac{1}{6}\left(\Lambda_{\mathrm{II}}\Delta\Lambda\left[1-\frac{1}{20}(\Delta H)^2\right]\right)_i \approx$$

$$= -\frac{1}{6}(\Lambda_{\mathrm{II}}\Delta\Lambda)_i = -\frac{1}{6}(\Lambda_{\mathrm{III}}-\Lambda_{\mathrm{I}})_i.$$

(Afgesloten September 1941).

Report S. 251.

The stress distribution in cantilever wings with two non-parallel spars interconnected by elastically deformable ribs and skin.

Summary.

In earlier N.L.L.-publications on wing stresses the ribs were assumed to be continuously distributed over the span. Thus the behaviour of the wing could be expressed by differential equations, holding for the complete span. Further research made it clear that for certain structures the deformation of the ribs in shear cannot be neglected. Introduction of this deformability showed that discontinuities in torsional rigidity or moment necessitates the assumption of „local" ribs apart from the system of continuous ribs. This means, that the differential equations, complicated already by the fact that their order increases by two, determine the stress distribution *only between consecutive local ribs* and that at each of these ribs special boundary conditions have to be satisfied (*ref.* 5). This mixed system of local and continuous ribs is hardly *suitable to practical analysis. With non-parallel spars* the difficulties increase still more.

In order to eliminate these difficulties the assumption of continuous ribs is abandoned *in the present publication.* The rib system consists merely of local ribs. It is again a schematized rib system since the number of ribs (5 to 10 per half wing) usually will be smaller than the actual number. Each rib replaces a group of ribs and its shear rigidity equals the total shear rigidity of the group. If there are no discontinuities of loads and stiffnesses their location is more or less arbitrary. However, it is necessary to assume ribs at those points, where the wing spars change their direction, where the torsional centres of the spars shift, where the shear stiffnesses of the spars and particularly of the skin change discontinuously, where concentrated torque loads are applied and where the actual structure has reinforced ribs. The latter circumstance usually coincides with one or more of the former ones.

The wing scheme is such that it may represent wings with built-up spars, in which the shear loads are taken not only by the spar web but for some part also by an auxiliary spar or by the wing nose (fig. 1). In order to account for this the torsional centres of the spars are shifted from the spar planes *over the distance e.* The torsional *rigidity* of these built-up spars may be accounted for by increasing the shear rigidity of the skin between the spars, provided that the additional *rigidity is small compared to the basic one. The exact* consideration of the torsional rigidity of the spars has been omitted here for reasons of simplicity. It has been dealt with in another publication (*ref.* 7).

The complete description of the scheme and of the elastic properties of its components is the following:

There are two spars, connected by n parallel ribs per half wing. Between the ribs the spar flanges and the lines through the torsional centres of the spars are straight. At the ribs the flanges may change their directions and the torsional centres may shift (fig. 3). There is a skin between the flanges of both spars; it is connected with these flanges and with the ribs. Besides, the skin is supported by a continuous system of

Bericht S. 251.

Die Spannungsverteilung in Flügeln mit zwei nicht-parallelen Holmen verbunden durch elastisch verformbare Rippen und Beplankung.

Zusammenfassung.

In vorherigen Veröffentlichungen des N.L.L.'s über die Spannungsberechnung von Flügeln wurden die Rippen als stetig über die Spannweite verteilt angesetzt. In dieser Weise konnte das Verhalten des Flügels durch Differentialgleichungen, die für die ganze Spannweite zutrafen, ausgedrückt werden. Aus weiteren Untersuchungen ging hervor, dasz unter gewiszen Umständen die Schubverformung der Rippen nicht zu vernachlässigen ist. Berücksichtigung dieser Schubverformung zeigte, dasz Unstetigkeitsstellen in Verdrehsteifigkeit und -moment die Einführung diskreter Rippen neben dem System der stetig verteilten Rippen notwendig machen. Dieses bedeutet, dasz die Differentialgleichungen, deren Ordnung schon um zwei höher ist, nur gelten zwischen zwei aufeinanderfolgenden diskreten Rippen und dasz an diesen Stellen *besondere Randbedingungen zu befriedigen sind* [5]. Für praktische Anwendung kommt das Mischsystem von stetig verteilten und diskreten Rippen deshalb kaum in Frage. Bei *Flügeln mit nicht-parallelen Holmen wachsen die Schwierigkeiten* noch weiter an.

Zur Beseitigung dieser Schwierigkeiten ist in der vorliegenden Veröffentlichung die Annahme der *stetigen Rippenverteilung* nicht mehr benutzt worden; es gibt nur diskrete Rippen. Es handelt sich dabei wieder um ein schematisiertes Rippensystem, indem die Rippenzahl (5 bis 10 pro halben Flügel) im allgemeinen kleiner sein wird als die tatsächliche Rippenzahl. Jede Rippe ersetzt eine Rippengruppe und ihre Schubsteifigkeit ist der Gesamtschubsteifigkeit der Gruppe gleich. Wenn es keine Diskontinuitäten in Belastung und Steifigkeit gibt ist ihre Stelle beliebig zu wählen. Rippen sind aber anzunehmen an Stellen, wo die Holme Richtungsänderungen aufzeigen; wo die Schubmittelpunkte der Holme verspringen; wo die Schubsteifigkeiten von Holmstegen und Beplankung sich unstetig ändern; wo konzentrierte Verdrehbelastungen angreifen und wo versteifte Rippen vorhanden sind. Gewöhnlich fällt letzter Umstand mit einem oder mehr der anderen zusammen.

Die vorausgesetzte Flügelkonstruktion umfaszt auch den Fall zusammengesetzter Holme, in denen die Querkräfte nicht nur durch die Holmstege sondern auch durch Hilfsholme oder durch die Nasenbeplankung aufgenommen werden (*Abb.* 1). *Zur Berücksichtigung dieser Möglichkeit sind die* Schubmittelpunkte der Holme den Abstand e aus der Holmebene angenommen worden. Die Verdrehsteifigkeit dieser *Kastenholme kann in Rechnung getragen werden durch einen* Zusatz auf die Schubsteifigkeit der Beplankung, vorausgesetzt, dasz die zusätzliche Steifigkeit klein ist im Vergleich zu der tatsächlichen Steifigkeit. Zur Vereinfachung der Betrachtungen ist die genaue Berücksichtigung der Holmverdrehsteifigkeit hier fortgelassen worden, sie wurde in einer weiteren Veröffentlichung vorgenommen [7].

Eine vollständige Beschreibung des angesetzten Flügelschemas und der elastischen Eigenschaften seiner Teile ist die folgende:

stiffeners running parallel to the ribs; these stiffeners are required for logical reasons if the skin is not exactly cylindrical.

Finite stiffness is assumed for the spars in bending and shear, for ribs and skin in shear only. The stiffeners are absolutely rigid in their own plane. With respect to moments, the vectors of which lie in the planes of the spars, the ribs, the stiffeners and the skin, these structural components have no rigidity. Besides, the skin has no rigidity against extension in the direction normal to the ribs.

For this system, loaded normally to the plane of the wing (*xz-plane in fig. 3*), the $n-1$ conditions of compatibility of strain for the $n-1$ statically indeterminate quantities $X_1, X_2 \ldots X_{n-1}$ are deduced from CASTIGLIANO's theorem of least work (eqs. (33) and (34)). In general they are equations of five moments; each of them contains the unknown moments (bX) at five consecutive ribs. Therefore the system of equations is recurrent. The coefficients of eq. (34) differ for symmetrical and antimetrical loads; in the first case they are given by (34a), in the second case by (34b).

With completely rigid ribs the equation of five moments (33) simplifies to the equation of three moments (38) and (34) changes into (39).

The method of solution of the recurrent equations is discussed in nr. 10. The appendix gives approximative formulas for the integrals of stiffness and load functions occurring in the moment equations. The stress distribution follows from the equations (8). The stress distribution in the statically determinate basic system, i.e. the actual system without *skin, is denoted by the upper suffix* $(\ )^0$. *It can be* calculated from the equations of equilibrium (7).

As far as the meaning of the notations used is not apparent from the figures, the formulas, convention or the list of notations in nr. 12 they are explained here:

d_1, d_2 = thickness of a web in the plane of the spar flanges, having the same shear stiffness S_s as the actual web(s);

h as a suffix refers to the solution of the homogeneous equations;

nh as a suffix refers to the solution of the non-homogeneous equations;

z_D = distance of the torsional centre of the front spar to the point of application of D;

D = the shear load in the complete cross section of the wing;

D_g = shear load taken by the spar flanges;

M = bending moment in the complete cross section of the wing;

P_i = concentrated external load at rib i (fig. 8);

W_i = concentrated external moment at rib i (fig. 8);

φ_{ij}, ψ_{ij} = value of φ and ψ in the point x_j between the ribs i and $i+1$.

Es gibt zwei Holme, verbunden durch n parallele Rippen pro halben Flügel. Die Holmgurte und die Linien durch die Schubmittelpunkte der Holme sind zwischen den Rippen gerade. Bei den Rippen können die Holmgurte geknickt sein und können die Schubmittelpunkte verspringen (Abb. 3). Es gibt zwischen den Gurten beider Holme eine Beplankung, die met den Gurten und den Rippen verbunden ist. Auszerdem ist die Beplankung gestützt durch ein stetiges System von Versteifungen parallel zu den Rippen; die Anwesenheit der Versteifungen ist bedingt von der logischen Geschlossenheit des Systems wenn die Beplankung nicht genau zylindrisch ist.

Die Biegungs- und Schubsteifigkeit der Holme und die Schubsteifigkeit von Rippen und Beplankung sind endlicher Grösze. Die Versteifungen sind starr in ihrer Ebene. Die Holme, Rippen, Versteifungen und die Beplankung haben keine Steifigkeit Momenten gegenüber, deren Vektor in der Ebene dieser Konstruktionsteile liegt. Auszerdem hat die Beplankung keine Steifigkeit gegenüber Dehnungen in der Richtung lotrecht auf die Rippen.

Für dieses System, belastet lotrecht auf der Flügelebene (*xz*-Ebene in Abb. 3) werden die $n-1$ Formänderungsbedingungen für die $n-1$ statisch unbestimmten Gröszen $X_1, X_2 \ldots \ldots X_{n-1}$ aus dem CASTIGLIANO'schen Prinzip abgeleitet (Gl. 33, 34). Diese Gleichungen sind im allgemeinen Fünfmomentengleichungen; jede Gleichung enthält die unbekannten Übergangsmomente (bX) bei fünf aufeinanderfolgenden Rippen. Deshalb ist das Gleichungssystem rekursiv. Die Koeffizienten von Gl. (34) sind für symmetrische und antimetrische Belastung verschieden; im ersten Falle werden sie durch (34a), im zweiten Falle durch (34b) *gegeben.*

Wenn die Rippen starr sind vereinfacht sich die Fünfmomentengleichung (33) zu der Dreimomentengleichung (38) und (34) geht über in (39).

Nr. 10 diskutiert das Lösungsverfahren der rekursierenden Gleichungen. Die Anlage gibt Näherungsformeln für die in den Gleichungen auftretenden Integrale über Steifigkeits- und Belastungsfunktionen.

Die Spannungsverteilung folgt aus den Gl. (8). Die *Spannungsverteilung im statisch bestimmten Hauptsystem*, das aus dem vorhandenen System hervorgeht durch Fortlassung der Beplankung, ist mit $(\ )^0$ bezeichnet; sie wird aus den Gleichgewichtsbedingungen (7) errechnet.

Insoweit die Bedeutung der Formelzeichen nicht hervorgeht aus den Abbildungen, den Formeln, dem Formelverzeichnis (Nr. 12) oder der Konvention entspricht, ist sie im folgenden gegeben worden:

d_1, d_2 = Stärke eines Steges in der Holmebene mit gleicher Schubsteifigkeit (S_s) als der (die) tatsächliche(n) Steg(e);

h Index, bezeichnet die Lösung der homogenen Gleichungen;

nh Index, bezeichnet die Lösung der nicht-homogenen Gleichungen;

z_D = Abstand der Querkraft D hinter dem Schubmittelpunkt des Vorderholmes;

D = Querkraft im ganzen Flügelquerschnitt;

D_g = durch die Gurte aufgenommene Querkraft;

M = biegendes Moment im ganzen Flügelquerschnitt;

P_i = konzentrierte äuszere Belastung in der Rippe i (Abb. 8);

W_i = konzentriertes äuszeres Moment in der Rippe i (Abb. 8);

$\varphi_{ij}, \varphi_{ij}$ = φ- und ψ-Werte im Punkt x_j zwischen den Rippen i und $i+1$.

Aanvulling op het N.L.L.-rapport S. 251.

Het gekozen statisch bepaalde hoofdsysteem moet nog in een enkel opzicht nader omschreven worden, namelijk in dezen zin, dat de liggers tusschen twee opeenvolgende ribben conisch zijn: e_1/h_1 en e_2/h_2 zijn constant. Als aan deze voorwaarde niet is voldaan is het hoofdsysteem mechanisch onmogelijk, zooals uit de volgende overwegingen blijkt.

De vergelijkingen (7) geven het verband aan tusschen de uitwendige belasting (D, M) en de inwendige belasting van het hoofdsysteem. Daarnaast treedt echter de relatie (12b) op tusschen deze grootheden. Deze vergelijking schijnt zonder meer de bepaling van de bij $D_{s1}{}^0$ behoorende *continu verdeelde belasting* p_1 *toe te laten. Zij kan echter* een voorwaarde te veel stellen, omdat p_1 reeds bepaald wordt door de niet afzonderlijk beschouwde voorwaarde van het evenwicht van het liggerelement in *y*-richting.

$$(D_{s1}{}^0 + D_{g1}{}^0) + p_1 = 0,$$

of in verband met (5a, 7a)

$$-M_1{}^{0''} + p_1 = 0.$$

Hiermee gaat (12b) *over in*

$$M_1{}^{0'}\left(e_1' - e_1\frac{h_1'}{h_1}\right) - M_1{}^0\left(e_1\frac{h_1'}{h_1}\right)' = 0 .$$

Deze vergelijking vormt alleen dan naast (7c) geen nieuwe en dus onvervulbare voorwaarde voor $M_1{}^0$ als zij een identiteit is. Het veronderstelde hoofdsysteem is dus mechanisch alleen mogelijk als

$$e_1' - e_1\frac{h_1'}{h_1} = 0 , \qquad (a)$$

$$\left(e_1\frac{h_1'}{h_1}\right)' = 0 . \qquad (b)$$

In verband met de voorwaarde (*a*) kan (*b*) vervangen worden door

$$e_1'' = 0 , \qquad (c)$$

een voorwaarde die in het vleugelschema reeds vervuld is.

De voorwaarde (*a*) spreekt uit, dat $\frac{e_1}{h_1}$ constant moet zijn tusschen 2 opeenvolgende ribben. Op gelijke wijze volgt dit voor $\frac{e_2}{h_2}$.

Indien men deze voorwaarde niet stelt — hetgeen inderdaad mogelijk blijft — moet het statisch bepaalde hoofdsysteem gewijzigd worden. De spanning in de bekleeding is dan niet uitdrukbaar in de statisch onbepaalde grootheden alleen, doch er is een spanning t^0. In de plaats van de vergelijking (7c) waaruit $M_1{}^0$ betrekkelijk eenvoudig kan worden opgelost, komt er dan een gecompliceerde differentiaalvergelijking van de 2e orde in $M_1{}^0$. (Deze vergelijking wordt verkregen onder toepasssing van de vergelijkingen (11) (12a) op de statisch bepaalde spanningsverdeeling, waarbij ter bepaling van p_1 ook het evenwicht in *y*-richting van het liggerelement en van de bekleedingslijst in aanmerking moet worden genomen). De berekening van de coëfficiënten dezer differentiaalvergelijking en de bepaling van haar oplossing vormen in hoofdzaak de aan dit systeem verbonden complicatie. Van minder belang is de omstandigheid, dat in dit geval de belastingstermen van de momentenvergelijkingen een geringe wijziging ondergaan in verband met het ongelijk aan nul zijn van t^0. Het zal evenwel doorgaans niet noodig zijn deze complicaties te aanvaarden, omdat e/h over een kort deel van de liggers weinig van een constante waarde zal afwijken, terwijl men waar dit niet het geval is door verkleining van den ribafstand de onnauwkeurigheid van het vleugelschema beneden elke gewenschte grens kan houden.

Het constant zijn van e/h biedt de mogelijkheid tot vereenvoudiging van enkele formules:

(7c) gaat nu over in

$$a^2\left(\frac{M_1{}^0}{a}\right)' = -D(a - z_D) + M(\operatorname{tg}\alpha_2 - e_2'); \qquad (d)$$

(8) gaat over in

$$t = \frac{a^2}{2O}Z', \qquad (e)$$

$$D_{s1} = D_{s1}{}^0 - a\left[a_1Z' + \left(\frac{a'}{a} - \frac{h_1'}{h_1}\right)Z\right], \qquad (f)$$

$$D_{s2} = D_{s2}{}^0 + a\left[a_2Z' + \left(\frac{a'}{a} - \frac{h_2'}{h_2}\right)Z\right], \qquad (g)$$

$$M_1 = M_1{}^0 + a\,Z , \qquad (h)$$

$$M_2 = M_2{}^0 - a\,Z . \qquad (i)$$

Deze laatste groep van vergelijkingen bevat de statisch onbepaalde grootheid $Z = b/a\ X$. De vervanging van X door Z gaat echter gepaard met het bezwaar, dat Z in het algemeen in het punt x_i wegens $a_i^- \neq a_i$ twee waarden bezit, namelijk Z_i^- en Z_i.

Dit bezwaar doet zich in de vijfmomentenvergelijking in Z gevoelen, doordat de structuur van de coëfficiënten en van den belastingsterm dezer vergelijking eenigszins meer gecompliceerd is. Met het oog hierop lijkt de overgang op de statisch onbepaalde grootheid Z niet aanbevelenswaardig. In principe zou Z echter de voorkeur moeten verdienen, omdat zij een nauwkeuriger oplossing van (14) mogelijk maakt. Voor (14) kan namelijk geschreven worden

$$(Z'/\overline{H})' = Z'\frac{a^4}{2O}\left[\frac{h_{c1}-h_1}{h_{c1}}\left(\frac{e_1}{a}\right)' + \frac{h_{c2}-h_2}{h_{c2}}\left(\frac{e_2}{a}\right)'\right] \qquad (j)$$

met

$$\overline{H} = \frac{b^2}{a^2}H.$$

Omdat $\frac{h_{c1}-h_1}{hc_1}$ in het algemeen een klein getal is, komt het 2e lid van (*j*) eerder voor verwaarloozing in aanmerking dan de verwaarloosde termen van (14). Zooals in punt 04 is uiteengezet is echter de met (16) ingevoerde fout zoo gering, dat de grootere nauwkeurigheid die de oplossing door middel van Z biedt geen practische beteekenis heeft. Er is daarom geen voldoende aanleiding om X te vervangen door Z.

Supplement to N.L.L.-report S. 251.

The description of the wing scheme has to be completed by the condition that the spars between successive ribs are conical in order that e_1/h_1 and e_2/h_2 will be constant numbers. If this condition is not satisfied the equations (7c) and (12b) are incompatible.

Ergänzung zu dem N.L.L.-Bericht S. 251.

Die Beschreibung der Flügelkonstruktion ist zu ergänzen mit der Bedingung, dass die Holme zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rippen konisch sein sollen damit e_1/h_1 und e_2/h_2 konstante Zahlen sind. Sonst sind die Gleichungen (7c) und (12b) inkompatibel.

Errata.

blz. S 19, kolom 2, regel 14 v.o., lees:

$$\frac{1}{a}\left[(3a) + (3b)\right] - \left[(4a) + (4b)\right] .$$

blz. S 20 fig. 7, lees:

h_i, in plaats van h_i .

blz. S 27, formule (40), lees:

$$k_i = \left(\frac{8\,O}{Gdb^2}\right)_i .$$

blz. S 29, lees onder *m*:

$$D_{s1}{}^0\frac{C_1}{a_1} .$$

3276-8-'44 — K 2350

RAPPORT S. 279[1]).

De spanningsverdeeling in vleugels met twee niet-evenwijdige torsiestijve liggers verbonden door elastisch vervormbare ribben en bekleeding

door

ir. F. J. PLANTEMA en dr. ir. A. VAN DER NEUT.

Overzicht.

De in een vroegere publicatie gegeven berekeningsmethode voor vleugels met twee niet-evenwijdige liggers, waarbij de torsiestijfheid van de liggers in het vleugelschema werd verwaarloosd, wordt uitgebreid tot vleugels met torsiestijve liggers.

Indeeling.

01. Inleiding.

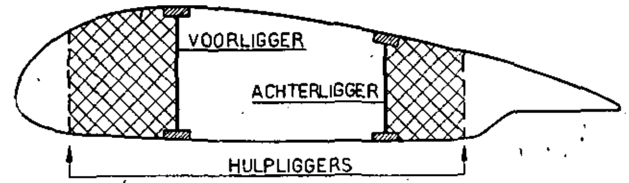
In *lit.* 1[2]) is een berekeningsmethode gegeven voor het bepalen van de spanningsverdeeling in vleugels met 2 niet-evenwijdige liggers verbonden door elastisch vervormbare ribben en elastisch vervormbare bekleeding. Het in *lit.* 1 beschouwde vleugelschema, waarbij de vleugelliggers geheel torsieslap gedacht zijn, geeft een bruikbare benadering van den werkelijken toestand, ook voor vleugels met torsiestijve liggers waarbij de torsiestijfheden klein zijn t.o.v. de torsiestijfheid van de buis, gevormd door liggerwanden en bekleeding. In dat geval kan de torsiestijfheid van de buis worden verhoogd met die van de liggers, terwijl vervolgens de liggers volkomen torsieslap worden verondersteld (*lit.* 2). Ook indien de torsiestijfheid van de liggers van gelijke orde van grootte is als (of grooter dan) de torsiestijfheid van de buis, is de bovenbedoelde benadering nog voldoende nauwkeurig mits de torsiehoeken van liggers en buis vrijwel gelijk zijn. Deze voorwaarde beteekent meer in het bijzonder dat zoowel de ribvervorming in het vlak van de rib als de vervorming van de liggers door afschuiving verwaarloosbaar moeten zijn. Waar deze twee voorwaarden niet vervuld zijn, is in zulke gevallen de in *lit.* 1 ontwikkelde berekeningswijze niet meer direct betrouwbaar. De invloed van de torsiestijfheid van de liggers wordt daarom in dit rapport nader onderzocht. Daarbij wordt, teneinde overbodige herhalingen te voorkomen, zooveel mogelijk verwezen naar *lit.* 1.

Punt 02 bespreekt de wijze waarop de torsiestijfheid van de liggers aan het vleugelschema volgens *lit.* 1 wordt toegevoegd. Punt 03 t/m 06 geven vervolgens de afleiding van de recursievergelijkingen waaruit de statisch onbepaalde grootheden numeriek kunnen worden opgelost. Voor het geval dat de ribben zoo stijf zijn dat hun vervormingen verwaarloosbaar zijn, nemen deze vergelijkingen een eenvoudiger gedaante aan; zij zijn in punt 07.1 gegeven. Naar analogie van de exacte oplossing bij volkomen stijve ribben wordt in punt 07.2 een benaderingsoplossing voor het geval van eindige ribstijfheid besproken. De wijze van oplossing der vergelijkingen wordt tenslotte besproken in punt 08. Bij de numerieke berekening van enkele integralen, die in de coëfficiënten der vergelijkingen voorkomen, kunnen de in de bijlage gegeven benaderingsformules worden gebruikt.

02. Het schema van den vleugel.

De vleugel wordt op geheel dezelfde wijze geschematiseerd als besproken is in punt 02 van *lit.* 1, behalve dat bovendien de torsiestijfheid van de liggers in het schema wordt gerepresenteerd.

De torsiestijfheid van de liggers ontstaat doordat de voorligger samen met de neusbekleeding, ook wel tevens met een hulpligger, een buis vormt en doordat de achterligger samen met de bekleeding achter dezen ligger en dikwijls ook samen met een hulpligger een één- of tweecellige buis vormt (fig. 1).

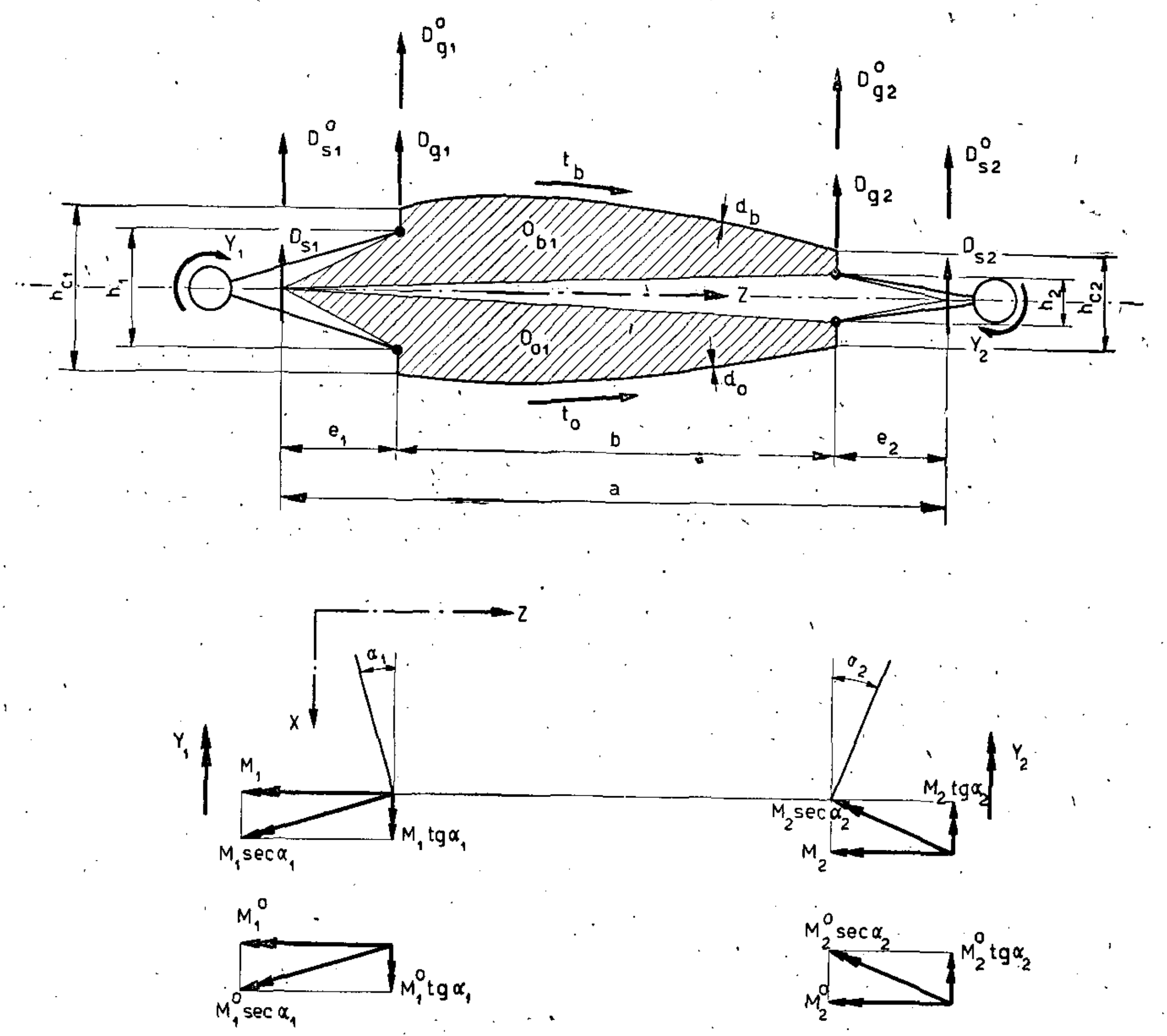


Teekening N.L.L.

Fig. 1. De wijze waarop de torsiestijfheid der liggers tot stand komt.

[1]) Verkorte inhoud van het interne N.L.L.-rapport S. 271.

[2]) Verwijzingen naar punt 11, literatuuropgave, worden met „*lit*" aangeduid.



Teekening N.L.L.

Fig. 2. Schema van de vleugeldoorsnede met er op aangrijpende uitwendige belastingen (D_s^0, D_g^0, M^0) en daarmee gelijkwaardige inwendige belastingen (D_s, D_g, M, Y, t).

Het ligt voor de hand te veronderstellen dat de momentenvector bij zuivere torsie van zulk een buis valt langs haar lengte-as, die tusschen 2 opeenvolgende ribben wordt gevormd door de rechte lijn die de torsiecentra der verschillende liggerdoorsneden verbindt; de momentenvector maakt dan in het algemeen een hoek met de x-as. Deze voorstelling doet echter geen recht aan de omstandigheid dat de inleiding van de torsiemomenten tot stand komt door ribben, die loodrecht op hun eigen vlak (yz vlak) nagenoeg volkomen slap zijn. De vector der momenten die in de buis worden ingeleid is dus evenwijdig aan de x-as gericht. Verondersteld wordt nu dat de buis door deze momenten wordt vervormd alsof zij zuiver wordt getordeerd. In het vleugelschema komen beide torsiebuizen dan voor als torsiestijve lichamen waarvan de lengte-as evenwijdig aan de x-as ligt en die aan de ribben zijn verbonden vóór den voorligger en achter den achterligger.

De ribben die de krachten overbrengen naar de bekleeding buiten de liggers en naar de hulpliggers zullen bij deze krachtsoverdracht in hun vlak vervormen. De dwarsdoorsnede van de buis blijft daarbij niet intact, zoodat de belastingsverdeeling in de buis van die bij zuivere torsie verschilt. Deze omstandigheid wordt in het volgende niet in aanmerking genomen. In het vleugelschema zijn de ribben in de deelen buiten de liggers dus onvervormbaar gedacht. De waarden van de torsiestijfheden in een doorsnede x kunnen dan volgens de b.v. in *lit.* 3 besproken methode worden berekend.

03. De evenwichtsvoorwaarden.

De uitwendige belastingen, die in punt 03.1 van *lit.* 1 zijn besproken, worden gegeven als dwarskrachten $D_{s1}{}^0$ en $D_{s2}{}^0$ in de torsiecentra der liggers, als momenten $M_1{}^0 \sec \alpha_1$ en $M_2{}^0 \sec \alpha_2$ en met deze momenten samenhangende dwarskrachten $D_{g1}{}^0$ en $D_{g2}{}^0$ in de liggervlakken en als geconcentreerde momenten W_{1i}, W_{2i} t.o.v. de torsiecentra der liggers, die als paren van evenwijdig aan de z-as gerichte krachten op rib i aangrijpen. Dit systeem van uitwendige belastingen wordt ook nu aangehouden. De krachten en momenten $D_{s1}{}^0$, $D_{s2}{}^0$, $D_{g1}{}^0$, $D_{g2}{}^0$, $M_1{}^0$ en $M_2{}^0$ zijn dan de inwendige belastingen van het hoofdsysteem van liggers en ribben, dat statisch bepaald is gemaakt door weglating van de bekleeding en door de aansluitingen van de ribben aan de torsiebuizen scharnierend te denken; zij kunnen dus direct uit de evenwichtsvoorwaarden worden gevonden.

De werkelijk optredende inwendige belastingen zijn in de torsiecentra de dwarskrachten D_{s1}, D_{s2}; in de liggervlakken de momenten $M_1 \sec \alpha_1$, $M_2 \sec \alpha_2$ en de daarmee samenhangende dwarskrachten D_{g1}, D_{g2}; in de torsiebuizen de torsiemomenten Y_1, Y_2; in de bekleeding van boven- resp. onderzijde de dwarskrachten per lengte-eenheid t_b, t_o (fig. 2).

Voor de belastingen van de liggers en de bekleeding gelden de 7 evenwichtsvoorwaarden (1), (2), (3a) — waaraan in het tweede lid de termen $-Y_1-Y_2$ worden toegevoegd — (4a, b) en (5a, b) volgens punt 03.2 van *lit.* 1 [3]. Van de 10 onbekenden D_{s1}, D_{s2}, M_1, M_2, D_{g1}, D_{g2}, Y_1, Y_2, t_b en t_o zijn er dus 3 statisch onbepaald. Als statisch onbepaalden worden Y_1 en Y_2 gekozen, terwijl als derde de hulpgrootheid X wordt ingevoerd die dezelfde beteekenis heeft als in *lit.* 1. De belastingen D_{s1}^0, D_{s2}^0, M_1^0 en M_2^0 van het statisch bepaalde hoofdsysteem ($X \equiv Y_1 \equiv Y_2 \equiv 0$, dus $t^0 = 0$) volgen daarna (vergelijk punt 03.2 van *lit.* 1) uit de vergelijkingen (7a—d). De inwendige belastingen van liggers en bekleeding kunnen nu worden geschreven in den vorm

$$t = \frac{ab}{2O}X' + \lambda b X - \frac{Y_1 + Y_2}{2O}, \tag{3.1}$$

$$D_{s1} = D_{s1}^0 - a_1 b X' - bX\left(\frac{b'}{b} - \frac{h_1'}{h_1} - h_1\lambda\right) - \frac{h_1}{2O}(Y_1 + Y_2), \tag{3.2}$$

$$D_{s2} = D_{s2}^0 + a_2 b X' + bX\left(\frac{b'}{b} - \frac{h_2'}{h_2} - h_2\lambda\right) + \frac{h_2}{2O}(Y_1 + Y_2), \tag{3.3}$$

$$M_1 = M_1^0 + bX, \tag{3.4}$$

$$M_2 = M_2^0 - bX. \tag{3.5}$$

De belastingen die op een rib aangrijpen onderscheiden zich slechts van die welke bij den vleugel met torsieslappe liggers optreden door de aanwezigheid van de momenten $\Delta_i Y_1$ en $\Delta_i Y_2$. Deze kunnen, omdat zij eveneens op het stijve deel van de rib aangrijpen, worden samengenomen met de momenten $-M_1\Delta_i \operatorname{tg} \alpha_1$ resp. $M_2\Delta_i \operatorname{tg} \alpha_2$.

De dwarskracht in den ribwand is dan op grond van de in *lit.* 1 gegeven afleiding

$$D_s = \frac{h_{a1} h_{a2}}{ah} D^*,$$

waarin

$$D^* = -\frac{1}{h_{a1}}\left[W_1 + M_1\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_1 - e_1 \frac{\Delta h_1'}{h_1}\right) - D_{s1}^- \Delta e_1\right] + \frac{1}{h_{a2}}\left[W_2 + M_2\left(\Delta \operatorname{tg}\alpha_2 - e_2 \frac{\Delta h_2'}{h_2}\right) - D_{s2}^- \Delta e_2\right] + b^* \Delta t + \frac{\Delta Y_1}{h_{a1}} + \frac{\Delta Y_2}{h_{a2}}. \tag{3.6}$$

Voor het evenwicht van de bekleeding behouden de in punt 03.4 van *lit.* 1 gegeven beschouwingen, in het bijzonder vergelijking (14), onveranderd hun geldigheid. Tenslotte volgt uit het evenwicht van de torsiebuizen tusschen de ribben i en $i+1$ dat de torsiemomenten Y_1 en Y_2 tusschen twee opeenvolgende ribben constant zijn. De statische onbepaaldheid van Y_1 en Y_2 beperkt zich dus tot de functiewaarden Y_{1i} en Y_{2i} in de intervallen $x_i < x < x_{i+1}$. Bij een vleugel met n ribben per vleugelhelft zijn er in het algemeen $(2n-1)$ statisch onbepaalde waarden van Y_{1i} en Y_{2i} elk.

04. De differentiaalvergelijking voor de statisch onbepaalde X.

Onder invoering van (3.1 t/m 5) gaat de evenwichtsvergelijking (11) van *lit.* 1, punt 03.4, over in een lineaire differentiaalvergelijking van de 2de orde in X, die overeenkomt met vergelijking (14) van *lit.* 1, punt 04, waaraan in het linker lid zijn toegevoegd de termen

$$-(Y_1 + Y_2)\left[\frac{1}{b}\left(\frac{b^2}{2O}\right)' + \frac{1}{h_{c1}}\left(\frac{h_1 e_1}{2O}\right)' + \frac{1}{h_{c2}}\left(\frac{h_2 e_2}{2O}\right)'\right].$$

[3] Aangezien de nummering der vergelijkingen in dit rapport verschilt van die in *lit.* 1, wordt in het volgende de vermelding dat een vergelijking in *lit.* 1 voorkomt in den regel weggelaten.

Zij geldt voor het deel van den vleugel tusschen twee opeenvolgende ribben i en $i+1$. Haar oplossing is

$$x_i < x < x_{i+1} : X = \varphi_i(x)X_i + \psi_i(x)X_{i+1} + \omega_i(x), \tag{4.1}$$

waarin φ en ψ functies van x zijn die in x_i de waarden 1 resp. 0 en in x_{i+1} de waarden 0 resp. 1 hebben, terwijl $\omega_i(x)$ een functie van x is die den factor $Y_1 + Y_2$ bevat en die in x_i en x_{i+1} de waarde nul heeft. Daarmee is de aard van de statisch onbepaalde grootheid X nader omschreven; zij is niet als functie van x statisch onbepaald, doch de statische onbepaaldheid beperkt zich tot de functiewaarden van X in de punten x_i.

Per vleugelhelft zijn er n ribben. Bij de buitenste ribben is, omdat buiten rib n Y_1, Y_2 en t nul zijn, het buigende moment in den ligger $M = M^0$, zoodat $X_n = 0$. Bij een willekeurige belasting zijn er dus $2(n-1)$ waarden van X_i, $2n-1$ waarden van Y_{1i} en $2n-1$ waarden van Y_{2i} die niet door evenwichtsvergelijkingen zijn bepaald. De constructie is dus in het algemeen $2(3n-2)$-voudig *statisch onbepaald. Bij symmetrische of antimetrische belastingen* zijn de statisch onbepaalden X_i in een punt en zijn spiegelbeeld afhankelijk en zijn de statisch onbepaalden Y_{1i} en Y_{2i} in een interval en zijn spiegelbeeld afhankelijk; het aantal statisch onbepaalden neemt dan tot $3n-1$ af.

De bepaling van φ, ψ en ω baart in het algemeen bijzondere moeilijkheden, omdat de coëfficiënten van X en haar afgeleiden en van $Y_1 + Y_2$ in de differentiaalvergelijking doorgaans veranderlijk zijn met x. In het bijzondere geval dat de vleugeldoorsnede bij toenemende x gelijkvormig verandert, heeft de oplossing een eenvoudige gedaante. In dat geval geldt namelijk $\frac{b'}{b} = \frac{h_1'}{h_1} = \frac{h_2'}{h_2} = \frac{h_{c1}'}{h_{c1}} = \frac{h_{c2}'}{h_{c2}}$, zoodat $\lambda = 0$; voorts zijn $\frac{b^2}{O}$, $\frac{h_1 e_1}{O}$ en $\frac{h_2 e_2}{O}$ onafhankelijk van x.

Daarmee gaat de differentiaalvergelijking over in (16). De waarden van φ_i en ψ_i worden dan gegeven door (16a), terwijl $\omega_i = 0$ is.

Deze oplossing kan, zooals in *lit.* 1 voor den vleugel zonder torsiebuizen uitvoerig is geargumenteerd, als *benaderingsoplossing* voor het meer algemeene geval, waarin de vleugeldoorsnede niet gelijkvormig verandert, worden aangenomen.

05. De voorwaarde voor minimalen vormveranderingsarbeid.

Van den vormveranderingsarbeid per vleugelhelft,

$$A = A_g + A_s + A_t + A_y + A_R,$$

worden A_g, A_s, A_t en A_R gegeven in punt 05 van *lit.* 1, terwijl de arbeid in de torsiebuizen

$$A_y = \tfrac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{Y_1^2}{S_{w1}} + \frac{Y_2^2}{S_{w2}}\right) dx. \tag{5.1}$$

Naar analogie van vergelijking (18) kan de arbeid worden geschreven in den vorm

$$A = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} J(x, X, X', Y_1, Y_2)\, dx + \sum_{i=1}^{n} A_i [X, X'^-, \Delta X', (Y_1 + Y_2)^-, \Delta Y_1, \Delta Y_2]. \tag{5.2}$$

Hierin zijn $x_0 = 0$ en $x_{n+1} = L$. Bij deze notatie zijn in de punten $x = 0$ resp. L geen ribben verondersteld. Als er in het midden en aan de tippen wel ribben voorkomen, beteekent dit dat $x_1 = 0$ en $x_n = L$, zoodat de intervallen $x_0 - x_1$ en $x_n - x_{n+1}$ de lengte nul hebben.

Uit de stelling van Castigliano volgt nu dat de eerste variatie van A,

$$\delta A \equiv \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial J}{\partial X} \delta X + \frac{\partial J}{\partial X'} \delta X' + \frac{\partial J}{\partial Y_1} \delta Y_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial J}{\partial Y_2} \delta Y_2 \right) dx + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial X} \right)_i \delta X_i + \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial X'^-} \right)_i \delta X_i'^- + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta X'} \right)_i \delta \Delta_i X' +$$
$$+ \left(\frac{\partial A}{\partial (Y_1 + Y_2)^-} \right)_i \delta (Y_1 + Y_2)_i^- + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta Y_1} \right)_i \delta \Delta_i Y_1 +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta Y_2} \right)_i \delta \Delta_i Y_2 \right], \tag{5.3'}$$

nul is bij iedere variatie van X en de daarmee samenhangende variatie van X', van Y_1 en van Y_2 die aan de evenwichtsvoorwaarden voldoen. De in verband met het evenwicht mogelijke variaties van X, X' en $\Delta_i X'$ worden gegeven door (20a, b, c); terwijl blijkens de laatste alinea van punt 03 van dit rapport

$$\left. \begin{aligned} \delta Y_1 &= \delta Y_{1i}; \quad & \delta \Delta_i Y_1 &= \delta Y_{1i} - \delta Y_{1,\, i-1}, \\ \delta Y_2 &= \delta Y_{2i}; \quad & \delta \Delta_i Y_2 &= \delta Y_{2i} - \delta Y_{2,\, i-1}. \end{aligned} \right\} \tag{5.4}$$

Al deze uitdrukkingen substitueerend in (5.3) en ordenend naar δX_i, δY_{1i} en δY_{2i} volgt een uitdrukking voor δA waarvan het eerste deel gelijk is aan het tweede lid van vergelijking (21), terwijl toegevoegd is een aantal soortgelijke termen die een der variaties δY_{1i} of δY_{2i} ($i = 0, 1, 2, \ldots n$) bevatten.

Omdat de variaties δX_i ($i = 2, 3, \ldots n - 1$), δY_{1i}, δY_{2i} ($i = 1, 2 \ldots n - 1$) onafhankelijk van elkaar iedere willekeurige waarde kunnen aannemen zonder met de evenwichtsvoorwaarden in conflict te komen, moeten alle coëfficiënten dezer δX_i, δY_{1i}, δY_{2i} op zichzelf nul zijn opdat aan $\delta A = 0$ voldaan zal zijn. Daaruit volgen voor iedere $i = 2, 3, \ldots n - 1$ de vergelijkingen (22) en voor iedere $i = 1, 2, \ldots n - 1$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial J}{\partial Y_1} dx + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta Y_1} \right)_i + \left[\frac{\partial A}{\partial (Y_1 + Y_2)^-} - \frac{\partial A}{\partial \Delta Y_1} \right]_{i+1} = 0, \tag{5.5}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial J}{\partial Y_2} dx + \left(\frac{\partial A}{\partial \Delta Y_2} \right)_i + \left[\frac{\partial A}{\partial (Y_1 + Y_2)^-} - \frac{\partial A}{\partial \Delta Y_2} \right]_{i+1} = 0. \tag{5.6}$$

Omdat de belastingen buiten rib n wegens het ontbreken van een rib $n + 1$ statisch bepaald zijn, gelden de evenwichtsvoorwaarden (23) en (24) en voorts

$$Y_{1n} = 0; \quad Y_{2n} = 0. \tag{5.7, 8}$$

Dan zijn $\delta X_{n+1} = \delta X_n = \delta Y_{1n} = \delta Y_{2n} = 0$ en wordt geen nadere eisch gesteld ten aanzien van de coëfficiënten van deze grootheden.

Voor de waarden der coëfficiënten van δX_0, δX_1, δY_{10} en δY_{20} moet onderscheid worden gemaakt tusschen symmetrische en antimetrische belastingen.

Bij *symmetrische* belasting geldt

$$Y_{10}' = 0, \tag{5.9a}$$
$$Y_{20} = 0, \tag{5.10a}$$

zoodat $\delta Y_{10} = \delta Y_{20} = 0$ en geen eisch wordt gesteld ten opzichte van de coëfficiënten van δY_{10} en δY_{20}.

Wegens (5.9a) en (5.10a) kunnen vervolgens de randvoorwaarden (25a) en (26a) uit *lit.* 1 worden overgenomen.

Bij *antimetrische* belasting gelden de randvoorwaarden (25b) en (26b) en voorts vindt men door de coëfficiënten van δY_{10} en δY_{20} gelijk aan nul te stellen

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial J}{\partial Y_1} dx + \left[\frac{\partial A}{\partial (Y_1 + Y_2)^-} - \frac{\partial A}{\partial \Delta Y_1} \right]_1 = 0, \tag{5.9b}$$

$$\int_0^{x_1} \frac{\partial J}{\partial Y_2} dx + \left[\frac{\partial A}{\partial (Y_1 + Y_2)^-} - \frac{\partial A}{\partial \Delta Y_2} \right]_1 = 0. \tag{5.10b}$$

De (n—2) vergelijkingen (22), de (n—1) vergelijkingen (5.5), de (n—1) vergelijkingen (5.6), de 4 vergelijkingen (23), (24) en (5.7, 8) en de 4 vergelijkingen (25a), (26a), (5.9a), (5.10a) of (25b), (26b), (5.9b), (5.10b) vormen een systeem van ($3\,n+4$) vergelijkingen dat voldoende is voor de bepaling van de ($3\,n+4$) grootheden X_0, X_1, ... X_{n+1}, Y_{10}, Y_{11}, ... Y_{1n}, Y_{20}, Y_{21}, ... Y_{2n}.

06. De momentenvergelijkingen.

De in de vormveranderingsvergelijkingen (22), (5.5), (5.6), (26a), (26b), (5.9b) en (5.10b) voorkomende integralen over J en de termen welke op de ribvervormingen betrekking hebben, kunnen op geheel overeenkomstige wijze als in de punten (07.1, 2) van *lit.* 1 worden uitgedrukt in de grootheden X_i, Y_{1i}, Y_{2i} en de functies φ_i, ψ_i, ω_i. Gebruik makende van de benadering van φ, ψ en ω volgens punt 04 gaan de genoemde vergelijkingen achtereenvolgens over in

$$u_{i,\, i-2} X_{i-2} + u_{i,\, i-1} X_{i-1} + u_{ii} X_i + u_{i,\, i+1} X_{i+1} +$$
$$+ u_{i,\, i+2} X_{i+2} + v_{i,\, i-2} Y_{1,\, i-2} + v_{i,\, i-1} Y_{1,\, i-1} + v_{ii} Y_{1i} +$$
$$+ v_{i,\, i+1} Y_{1,\, i+1} + w_{i,\, i-2} Y_{2,\, i-2} + w_{i,\, i-1} Y_{2,\, i-1} + w_{ii} Y_{2i} +$$
$$+ w_{i,\, i+1} Y_{2,\, i+1} = U_i \text{ voor } i = 2, 3, \ldots n-1, \tag{6.1}$$

$$\bar{u}_{i,\, i-1} X_{i-1} + \bar{u}_{ii} X_i + \bar{u}_{i,\, i+1} X_{i+1} + \bar{u}_{i,\, i+2} X_{i+2} +$$
$$+ \bar{v}_{i,\, i-1} Y_{1,\, i-1} + \bar{v}_{ii} Y_{1i} + \bar{v}_{i,\, i+1} Y_{1,\, i+1} + \bar{w}_{i,\, i-1} Y_{2,\, i-1} +$$
$$+ \bar{w}_{ii} Y_{2i} + \bar{w}_{i,\, i+1} Y_{2,\, i+1} = \bar{U}_i \text{ voor } i = 1, 2, \ldots n-1, \tag{6.2}$$

$$\bar{\bar{u}}_{i,\, i-1} X_{i-1} + \bar{\bar{u}}_{ii} X_i + \bar{\bar{u}}_{i,\, i+1} X_{i+1} + \bar{\bar{u}}_{i,\, i+2} X_{i+2} +$$
$$+ \bar{\bar{v}}_{i,\, i-1} Y_{1,\, i-1} + \bar{\bar{v}}_{ii} Y_{1i} + \bar{\bar{v}}_{i,\, i+1} Y_{1,\, i+1} + \bar{\bar{w}}_{i,\, i-1} Y_{2,\, i-1} +$$
$$+ \bar{\bar{w}}_{ii} Y_{2i} + \bar{\bar{w}}_{i,\, i+1} Y_{2,\, i+1} = \bar{\bar{U}}_i \text{ voor } i = 1, 2, \ldots n-1, \tag{6.3}$$

$$u_{11} X_1 + u_{12} X_2 + u_{13} X_3 + v_{10} Y_{10} + v_{11} Y_{11} + v_{12} Y_{12} +$$
$$+ w_{10} Y_{20} + w_{11} Y_{21} + w_{12} Y_{22} = U_1. \tag{6.4}$$

Voor antimetrische belasting gelden bovendien de vergelijkingen

$$\bar{u}_{01} X_1 + \bar{u}_{02} X_2 + \bar{v}_{00} Y_{10} + \bar{v}_{01} Y_{11} + \bar{w}_{00} Y_{20} + \bar{w}_{01} Y_{21} = \bar{U}_0, \tag{6.5}$$
$$\bar{\bar{u}}_{01} X_1 + \bar{\bar{u}}_{02} X_2 + \bar{\bar{v}}_{00} Y_{10} + \bar{\bar{v}}_{01} Y_{11} + \bar{\bar{w}}_{00} Y_{20} + \bar{\bar{w}}_{01} Y_{21} = \bar{\bar{U}}_0. \tag{6.6}$$

Deze vergelijkingen bevatten telkens een aantal opeenvolgende statisch onbepaalde grootheden X_i, Y_{1i} en Y_{2i} en worden de „momentenvergelijkingen" genoemd die het probleem beheerschen. De coëfficiënten u en de belastingstermen U zijn gelijk aan de gelijknamige grootheden die in *lit.* 1 (punt 07.3) voorkomen. *Zij kunnen dus ook op de in* punt 08 van *lit.* 1 beschreven wijze worden vereenvoudigd. De overige coëfficiënten en belastingstermen worden voor iedere i gegeven door

$$v_{i,\, i-2} = \bar{u}_{i-2,\, i} = (kc_1c_6)_{i-1},$$
$$v_{i,\, i-1} = \bar{u}_{i-1,\, i} = \Gamma_{i-1}[\psi] + \Theta_{i-1}[\psi'] + (kc_1c_5)_{i-1} + + (kc_2c_6)_i,$$
$$v_{ii} = \bar{u}_{ii} = \Gamma_i[\varphi] + \Theta_i[\varphi'] + (kc_2c_5)_i + (kc_3c_6)_{i+1},$$
$$v_{i,\, i+1} = \bar{u}_{i+1,\, i} = (kc_3c_5)_{i+1},$$
$$w_{i,\, i-2} = \bar{\bar{u}}_{i-2,\, i} = (kc_1c_8)_{i-1},$$
$$w_{i,\, i-1} = \bar{\bar{u}}_{i-1,\, i} = \Gamma_{i-1}[\psi] + \Theta_{i-1}[\psi'] + (kc_1c_7)_{i-1} + + (kc_2c_8)_i,$$
$$w_{ii} = \bar{\bar{u}}_{ii} = \Gamma_i[\varphi] + \Theta_i[\varphi'] + (kc_2c_7)_i + (kc_3c_8)_{i+1},$$
$$w_{i,\, i+1} = \bar{\bar{u}}_{i+1,\, i} = (kc_3c_7)_{i+1},$$

$$\bar{v}_{ii} = \left(\Omega + \frac{1}{S_{w1}}\right)_i [1] + (kc_5{}^2)_i + (kc_6{}^2)_{i+1},$$
$$\bar{v}_{i,\,i+1} = \bar{v}_{i+1,\,i} = (kc_5c_6)_{i+1},$$
$$\bar{w}_{i,\,i-1} = \bar{\bar{v}}_{i-1,\,i} = (kc_5c_8)_i,$$
$$\bar{w}_{ii} = \bar{\bar{v}}_{ii} = \Omega_i\,[1] + (kc_5c_7)_i + (kc_6c_8)_{i+1},$$
$$\bar{w}_{i,\,i+1} = \bar{\bar{v}}_{i+1,\,i} = (kc_6c_7)_{i+1},$$
$$\bar{\bar{w}}_{ii} = \left(\Omega + \frac{1}{S_{w2}}\right)_i [1] + (kc_7{}^2)_i + (kc_8{}^2)_{i+1},$$
$$\bar{\bar{w}}_{i,\,i+1} = \bar{\bar{w}}_{i+1,\,i} = (kc_7c_8)_{i+1},$$
$$\bar{U}_i = -\,Q_i\,[1] - (kc_5R)_i - (kc_6R)_{i+1},$$
$$\bar{\bar{U}}_i = -\,Q_i\,[1] - (kc_7R)_i - (kc_8R)_{i+1},$$

behalve dat voor *symmetrische* belasting

$$v_{11} = \Gamma_1\,[\varphi] + \Theta_1\,[\varphi'] + (k\gamma_2c_5)_1 + (kc_3c_6)_2,$$
$$w_{11} = \Gamma_1\,[\varphi] + \Theta_1\,[\varphi'] + (k\gamma_2c_7)_1 + (kc_3c_8)_2$$

en voor *antimetrische* belasting

$$v_{10} = \bar{u}_{01} = \Theta_0\,[\psi'] + (kc_2c_6)_1,$$
$$w_{10} = \bar{\bar{u}}_{01} = \Theta_0\,[\psi'] + (kc_2c_8)_1,$$
$$\bar{v}_{00} = \left(\Omega + \frac{1}{S_{w1}}\right)_0 [1] + (kc_6{}^2)_1,$$
$$\bar{w}_{00} = \Omega_0[1] + (kc_6c_8)_1,$$
$$\bar{\bar{v}}_{00} = \Omega_0\,[1] + (kc_6c_8)_1,$$
$$\bar{\bar{w}}_{00} = \left(\Omega + \frac{1}{S_{w2}}\right)_0 [1] + (kc_8{}^2)_1,$$
$$\bar{U}_0 = -Q_0\,[1] - (kc_6R)_1 + \left(\frac{1}{b}M_1{}^0\right)_0 \left\{\Theta_0\,[\varphi'] + (kc_3c_6)_1\right\},$$
$$\bar{\bar{U}}_0 = -Q_0\,[1] - (kc_8R)_1 + \left(\frac{1}{b}M_1{}^0\right)_0 \left\{\Theta_0\,[\varphi'] + (kc_3c_8)_1\right\}.$$

Bij symmetrische belasting bedenke men voorts dat in (6.1) voor $i = 2$ en in (6.2), (6.3) en (6.4) voor $i = 1$ moet worden gesteld $X_0 = X_1$, $Y_{10} = Y_{20} = 0$. Bij antimetrische belasting moet in (6.1) voor $i = 2$ en in (6.2) en (6.3) voor $i = 1$ worden gesteld $X_0 = -(M_1{}^0/b)_0$.

De coëfficiënten $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}}, \bar{\bar{w}}$ en de belastingstermen U, $\bar{U}$, $\bar{\bar{U}}$ zijn alle bekend bij een gegeven vleugel met gegeven uitwendige belastingen. Een schema van de coëfficiënten der momentenvergelijkingen is in fig. 3 gegeven. Het blijkt dat dit schema symmetrisch is ten opzichte van de hoofddiagonaal. Immers geldt algemeen blijkens het voorafgaande

$$\left.\begin{aligned} u_{ij} = u_{ji}, \quad v_{ij} = \bar{u}_{ji}, \quad w_{ij} = \bar{\bar{u}}_{ji}, \\ \bar{v}_{ij} = \bar{v}_{ji}, \quad \bar{w}_{ij} = \bar{\bar{v}}_{ji}, \\ \bar{\bar{w}}_{ij} = \bar{\bar{w}}_{ji}. \end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

Een uitzondering hierop vormen slechts de ongelijkheden $u_{12} \neq u_{21}$, $v_{11} \neq \bar{u}_{11}$ en $w_{11} \neq \bar{\bar{u}}_{11}$ voor het geval van symmetrische belasting. Indien men echter met behulp van $X_0 = X_1$ uit (6.1) voor $i = 2$ en uit (6.2, 3) voor $i = 1$ X_0 elimineert, verkrijgt men in deze vergelijkingen als coëfficiënten van X_1 resp. $u_{20} + u_{21}$, $\bar{u}_{10} + \bar{u}_{11}$ en $\bar{\bar{u}}_{10} + \bar{\bar{u}}_{11}$, waarvoor geldt

$$u_{20} + u_{21} = u_{12},$$
$$\bar{u}_{10} + \bar{u}_{11} = v_{11},$$
$$\bar{\bar{u}}_{10} + \bar{\bar{u}}_{11} = w_{11}.$$

Deze reciprociteitsbetrekkingen maken dat de matrix der coëfficiënten van $X_1 \ldots\ldots X_{n-1}$, $Y_{10} \ldots\ldots Y_{1,\,n-1}$, $Y_{20} \ldots\ldots Y_{2,\,n-1}$ weder symmetrisch is [4]).

[4]) Bij antimetrische belasting kunnen de termen $u_{20}X_0$, $\bar{u}_{10}X_0$ en $\bar{\bar{u}}_{10}X_0$ (zie fig. 3) worden gevoegd bij de tweede leden U_2 resp. $\bar{U}_1$ resp. $\bar{\bar{U}}_1$, omdat X_0 geen onbekende is.

De symmetrie van de matrix der coëfficiënten kan op meer directe wijze worden bewezen, namelijk door middel van de stelling van MAXWELL over de reciprociteit van invloedsgetallen. Dit bewijs, waarbij moet worden ingegaan op de physische beteekenis van de 3 groepen van vergelijkingen (6.1, 4), (6.2, 5) en (6.3, 6), wordt hier echter achterwege gelaten.

07. Vereenvoudigingen.

07.1 *De vleugel met volkomen stijve ribben.*

Bij den vleugel met volkomen stijve ribben worden de coëfficiënten $k = 0$, waardoor het aantal termen van (6.1, 2, 3) met 6 en van (6.4, 5, 6) met 3 vermindert. Tevens geldt nu

$$v_{i,\,i-1} = w_{i,\,i-1} \text{ en dus ook } \bar{u}_{i,\,i+1} = \bar{\bar{u}}_{i,\,i+1},$$
$$v_{ii} = \bar{u}_{ii} = w_{ii} = \bar{\bar{u}}_{ii},$$
$$\bar{U}_i = \bar{\bar{U}}_i.$$

Met behulp van deze gelijkheden blijkt dat (6.1) — en evenzoo (6.4) — zoodanig kan worden geschreven dat Y_1 en Y_2 uitsluitend in de combinatie $Y = Y_1 + Y_2$ voorkomen. Voorts blijken (6.2) en (6.3) — en evenzoo (6.5) en (6.6) — te kunnen worden gecombineerd tot een enkele vergelijking die in plaats van Y_1 en Y_2 hun som $Y_1 + Y_2$ bevat. Daarmede verkrijgt men vergelijkingen die op volkomen dezelfde wijze zijn gebouwd als de vergelijkingen voor een vleugel met slechts één torsiebuis, b.v. bij den voorligger. Deze torsiebuis neemt dan het moment $Y = Y_1 + Y_2$ op. Uit de identiteit van de coëfficiënten $\bar{v}_{ii}$ volgt dat de torsiestijfheid S_w van deze vervangingsbuis wordt gegeven door

$$\frac{1}{S_{wi}}\,[1] = \left\{\frac{\frac{1}{S_{w1}}\,[1]\cdot\frac{1}{S_{w2}}\,[1]}{\frac{1}{S_{w1}}\,[1] + \frac{1}{S_{w2}}\,[1]}\right\}_i. \qquad (7.1)$$

Voorts blijken de torsiemomenten Y_1 en Y_2 tot Y te staan in het verband

$$Y_{1i} = \left\{\frac{\frac{1}{S_{w2}}\,[1]}{\frac{1}{S_{w1}}[1] + \frac{1}{S_{w2}}\,[1]}\,Y\right\}_i, \qquad (7.2a)$$

$$Y_{2i} = \left\{\frac{\frac{1}{S_{w1}}\,[1]}{\frac{1}{S_{w1}}[1] + \frac{1}{S_{w2}}\,[1]}\,Y\right\}_i. \qquad (7.2b)$$

Deze formules kan men ook afleiden door gebruik te maken van de overweging dat beide torsiebuizen bij volkomen stijve ribben tusschen 2 opeenvolgende ribben gelijke hoeken moeten tordeeren en dat zij in hun mechanisch effect kunnen worden vervangen door een enkele torsiebuis die bij het moment $Y = Y_1 + Y_2$ denzelfden torsiehoek krijgt. Deze voorwaarden van gelijke torsiehoeken luiden

$$Y_{1i}\left(\frac{1}{S_{w1}}\right)_i [1] = Y_{2i}\left(\frac{1}{S_{w2}}\right)_i [1] = Y_i\left(\frac{1}{S_w}\right)_i [1].$$

Zij leveren eveneens (7.1, 2) op.

Voor het geval dat in het interval i de verhouding van S_{w1} en S_{w2} constant is, kunnen (7.1, 2) worden vereenvoudigd tot

$$S_w = S_{w1} + S_{w2}\,, \qquad (7.3)$$

$$Y_{1i} = \left(\frac{S_{w1}}{S_w}\right)_i Y_i\,, \qquad (7.4a)$$

$$Y_{2i} = \left(\frac{S_{w2}}{S_w}\right)_i Y_i\,. \qquad (7.4b)$$

Schrijft men, na invoering van de vervangingsbuis met torsiestijfheid S_w en met $k = 0$, de vergelijkingen (6.1, 2, 4 en 5) uit — waarbij dus Y_{1i} door Y_i en S_{w1i} door S_{wi} wor-

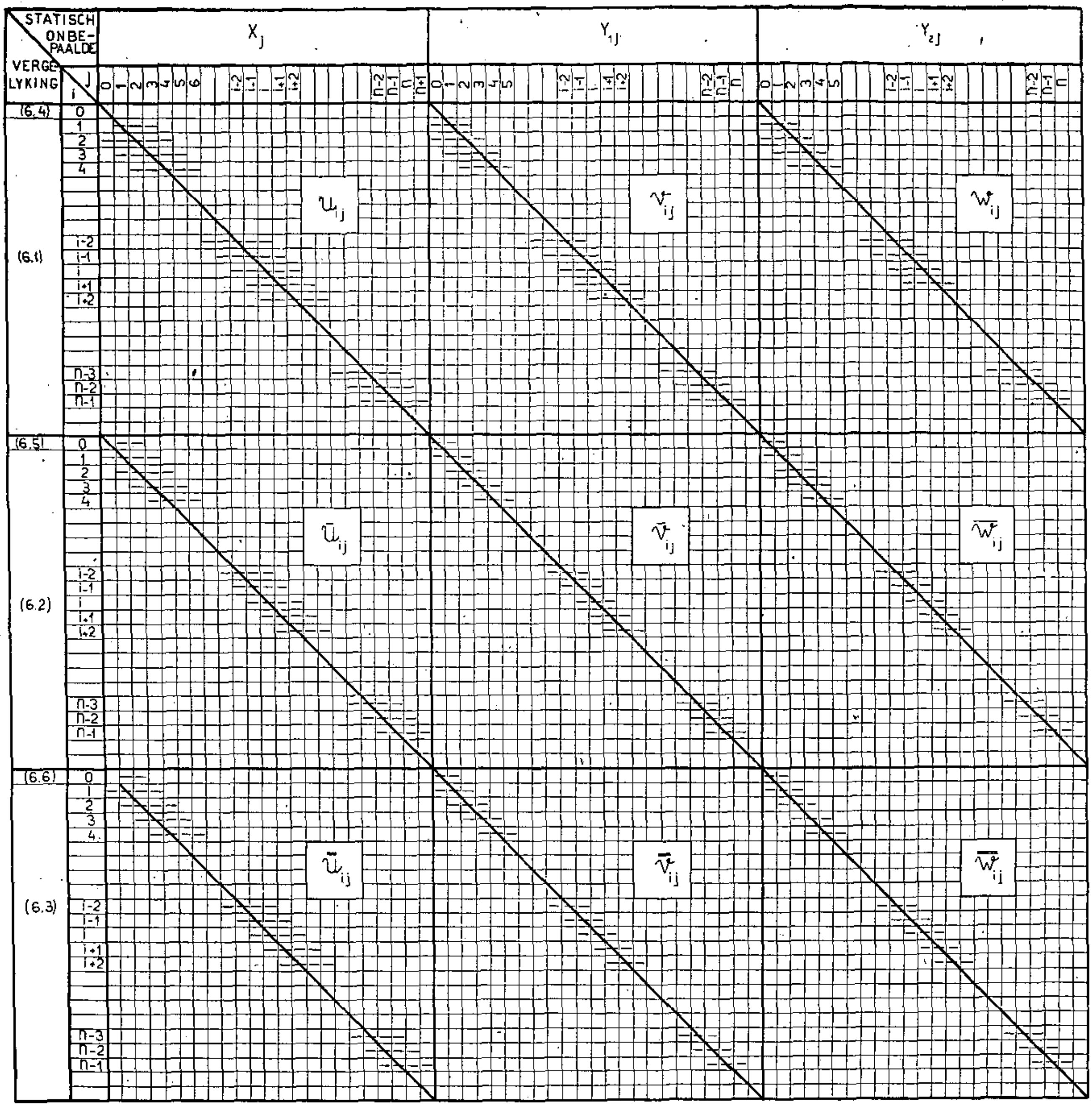


Fig. 3. Schema van de coëfficiënten der momentenvergelijkingen. *Teekening N.L.L.*

Symmetrische belasting.

$X_0 = X_1$; $Y_{10} = Y_{20} = 0$.

(6.5) en (6.6) vervallen.

Bijzondere waarden van u_{11}, u_{12}, v_{11}, w_{11}, U_1.

Antimetrische belasting.

$X_0 = -(M_1^0/b)_0$.

(6.5) en (6.6) gelden.

Bijzondere waarden van u_{11}, $v_{10} = \bar u_{01}$, $w_{10} = \bar{\bar u}_{01}$, $\bar v_{00}$, $\bar w_{00}$, $\bar{\bar v}_{00}$, $\bar{\bar w}_{00}$, U_1, $\bar U_0$ en $\bar{\bar U}_0$.

den vervangen, terwijl $Y_{2i} = 0$ wordt gesteld [5] — dan blijkt dat vervolgens de onbekenden Y_i kunnen worden geëlimineerd. Daarmede verkrijgt men het volgende systeem van recursievergelijkingen

$$\left(u_{i,\,i-1} - \frac{v_{i,\,i-1}\,v_{i-1,\,i-1}}{\bar{\bar v}_{i-1,\,i-1}}\right) X_{i-1} + \left(u_{ii} - \frac{v^2_{i,\,i-1}}{\bar{\bar v}_{i-1,\,i-1}} - \frac{v^2_{ii}}{\bar{\bar v}_{ii}}\right) X_i + \left(u_{i,\,i+1} - \frac{v_{ii}\,v_{i+1,\,i}}{\bar{\bar v}_{ii}}\right) X_{i+1} =$$

$$= U_i - \frac{v_{i,\,i-1}}{\bar{\bar v}_{i-1,\,i-1}} \bar U_{i-1} - \frac{v_{ii}}{\bar{\bar v}_{ii}} \bar U_i, \text{ voor } i = 2, 3 \ldots n-1; \quad (7.5)$$

voorts voor symmetrische belasting

$$\left(u_{11} - \frac{v^2_{11}}{\bar{\bar v}_{11}}\right) X_1 + \left(u_{12} - \frac{v_{11}\,v_{21}}{\bar{\bar v}_{11}}\right) X_2 = U_1 - \frac{v_{11}}{\bar{\bar v}_{11}} \bar U_1 \quad (7.6a)$$

en voor antimetrische belasting

$$\left(u_{11} - \frac{v^2_{10}}{\bar{\bar v}_{00}} - \frac{v^2_{11}}{\bar{\bar v}_{11}}\right) X_1 + \left(u_{12} - \frac{v_{11}\,v_{21}}{\bar{\bar v}_{11}}\right) X_2 =$$

$$= U_1 - \frac{v_{10}}{\bar{\bar v}_{00}} \bar U_0 - \frac{v_{11}}{\bar{\bar v}_{11}} \bar U_1. \quad (7.6b)$$

Deze vergelijkingen hebben dezelfde gedaante als die voor den vleugel met stijve ribben en volkomen torsieslappe liggers; haar oplossing wordt dus op de in *lit.* 1 onder punt 10.1 aangegeven wijze verkregen.

[5]) De vergelijkingen (6.3,6), die zijn afgeleid uit de voorwaarden dat de coëfficiënten van δY_{2i} resp. δY_{20} nul moeten zijn, komen te vervallen.

Nadat de grootheden X_i zijn gevonden, volgen de torsiemomenten Y_{1i}, Y_{2i} uit

$$Y_i = \frac{1}{v_{ii}}\left[- v_{ii} X_i - v_{i+1,\,i} X_{i+1} + \overline{U}_i \right],$$

$$\text{voor } i = 1,2 \ldots\ldots n\text{-}1 \; ; \qquad (7.7)$$

voorts voor symmetrische belasting

$$Y_0 = 0 \qquad (7.8a)$$

en voor antimetrische belasting

$$Y_0 = \frac{1}{v_{00}} \left(- v_{10}\, X_1 + \overline{U}_0\right), \qquad (7.8b)$$

en uit de vergelijkingen (7.2a, b) of (7.4a, b).

07.2 *Benaderingsoplossing bij eindige stijfheid der ribben.*

Voor dit geval kan een benaderingsoplossing worden gevonden door eveneens beide torsiebuizen te vervangen door 1 buis met de door (7.1) of (7.3) gedefinieerde torsiestijfheid. Deze oplossing zou exact zijn wanneer de hoekverdraaiingen van voorste en achterste torsiebuis aan elkaar gelijk zouden zijn, d.w.z. wanneer $h_{b1} = h_{b2}$ zou zijn; zij levert dus een betere benadering naarmate h_{b1}/h_{b2} minder afwijkt van 1,0. Het is waarschijnlijk dat in alle practisch voorkomende gevallen deze benaderingsoplossing voldoende nauwkeurig is. Bij deze benaderingsoplossing vervallen de vergelijkingen (6.3) en (6.6) en de randvoorwaarde (5.8); in de vergelijkingen (6.1), (6.2), (6.4) en (6.5) en de randvoorwaarde (5.7) wordt Y_{1i} door Y_i en S_{w1i} door S_{wi} vervangen, terwijl de termen met Y_{2i} vervallen.

08. De oplossingsmethode der momentenvergelijkingen.

08.1 *De vleugel zonder eindrib.*

De oplossing van het systeem van lineaire vergelijkingen (6.1 t/m 6) wordt als volgt samengesteld

$$\left.\begin{aligned} X &= X_{nh} + r_1 X_{h1} + r_2 X_{h2} + r_3 X_{h3} + r_4 X_{h4}\,, \\ Y_1 &= Y_{1nh} + r_1 Y_{1h1} + r_2 Y_{1h2} + r_3 Y_{1h3} + r_4 Y_{1h4}, \\ Y_2 &= Y_{2nh} + r_1 Y_{2h1} + r_2 Y_{2h2} + r_3 Y_{2h3} + r_4 Y_{2h4}, \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

waarin X_{nh}, Y_{1nh}, Y_{2nh} oplossingen zijn van de niet-homogene vergelijkingen met zekere willekeurige beginwaarden in x_1 en x_2, $(X_{nh})_1$, $(X_{nh})_2$, $(Y_{1nh})_1$, $(Y_{2nh})_1$, terwijl X_{hj}, Y_{1hj}, Y_{2hj} $(j = 1, 2, 3, 4)$ onderling onafhankelijke oplossingen zijn van de homogene vergelijkingen $(U_i = \overline{U}_i = \overline{\overline{U}}_i = 0)$ met zekere onderling onafhankelijke willekeurige beginwaarden in x_1 en x_2, $(X_{hj})_1$, $(X_{hj})_2$, $(Y_{1hj})_1$, $(Y_{2hj})_1$, b.v.

$$\begin{aligned} (X_{h1})_1 &= 1,\ (X_{h1})_2 = 0,\ (Y_{1h1})_1 = 0,\ (Y_{2h1})_1 = 0; \\ (X_{h2})_1 &= 0,\ (X_{h2})_2 = 1,\ (Y_{1h2})_1 = 0,\ (Y_{2h2})_1 = 0; \\ (X_{h3})_1 &= 0,\ (X_{h3})_2 = 0,\ (Y_{1h3})_1 = 1,\ (Y_{2h3})_1 = 0; \\ (X_{h4})_1 &= 0,\ (X_{h4})_2 = 0,\ (Y_{1h4})_1 = 0,\ (Y_{2h4})_1 = 1. \end{aligned}$$

r_1 t/m r_4 zijn constanten, die volgen uit de voorwaarde dat de resulteerende oplossing moet voldoen aan de randvoorwaarden (23), (24) en (5. 7,8).

De oplossingen van de homogene en niet-homogene vergelijkingen worden als volgt bepaald. Bij antimetrische belasting vindt men Y_{10} en Y_{20} uit (6.5) en (6.6); bij symmetrische belasting geldt $Y_{10} = Y_{20} = 0$. Uit het drietal vergelijkingen (6.2) voor $i = 1$, (6.3) voor $i = 1$ en (6.4) volgen daarna X_3, Y_{12} en Y_{22}; uit het drietal vergelijkingen (6.1, 2, 3) voor $i = 2$ volgen X_4, Y_{13} en Y_{23} enz. [6]).

De wijze van oplossing van de vergelijkingen (7.5, 6) voor den vleugel met volkomen stijve ribben is reeds besproken in punt 07.1.

[6]) Bij antimetrische belasting moet voor oplossing van de homogene vergelijkingen in (25b) worden gesteld $(M_1{}^0)_0 = 0$, dus $X_0 = 0$. Zie *lit.* 1, punt 10.1.

08.2. *De vleugel met eindrib.*

Bij vleugels met vervormbare ribben worden de coëfficiënten in de $(n-1)$-ste momentenvergelijking die c_n bevatten onbepaald, omdat zij afhangen van de vleugelconstructie buiten rib n. Dezelfde moeilijkheid is in *lit.* 1 besproken. Zij kan worden vermeden met behulp van de in punt 10.2 van *lit.* 1 besproken kunstgreep, die daarin bestaat dat de vleugel buiten de eindrib n met een willekeurig stuk verlengd wordt gedacht. Op den zoo ontstanen vleugel is de normale oplossingsmethode van toepassing.

08.3 *Benadering van de optredende integralen.*

Benaderingsformules voor de in de coëfficiënten u en de tweede leden U optredende integralen zijn gegeven in de bijlage van *lit.* 1 (zie ook punt 10.3 van *lit.* 1). Benaderingsformules voor de overige integralen worden gegeven in de bijlage bij dit rapport. Omdat in het gewoonlijk aanwezige geval, dat namelijk $d_1 \approx d_2 > d_b \approx d_0$, de termen $\Gamma\,[\psi]$ resp. $\Gamma\,[\varphi]$ zich verhouden tot $\Theta\,[\psi']$ resp. $\Theta\,[\varphi']$ als $h' : 1$ en omdat Γ slechts optreedt in de combinaties $\Gamma\,[\varphi] + \Theta\,[\varphi']$ en $\Gamma\,[\psi] + \Theta\,[\psi']$ wordt Γ voldoende nauwkeurig benaderd door een constante die gelijk is aan de waarde van Γ in het midden van het veld. De overige functies Θ, Ω en Q zijn benaderd door parabolische functies door de randwaarden en de waarde in het midden van het interval.

09. Samenvatting.

De in *lit.* 1 gegeven berekeningsmethode voor het bepalen van de spanningsverdeeling in vleugels met 2 niet-evenwijdige liggers die volkomen torsieslap gedacht zijn, verbonden door elastisch vervormbare ribben en bekleeding, wordt uitgebreid tot het geval dat de liggers een eindige torsiestijfheid bezitten. Het vleugelschema onderscheidt zich alleen van het in *lit.* 1 beschouwde (zie punt 11 van *lit.* 1) doordat de torsiestijfheden van de liggers hierin worden gerepresenteerd door torsiebuizen waarvan de lengteassen evenwijdig aan de x-as zijn en die aan de in hun vlak volkomen stijf gedachte deelen van de ribben voor het voorligger- resp. achter het achterliggervlak zijn verbonden.

Voor dit systeem, belast door krachten loodrecht op het vleugelvlak, worden uit de voorwaarde van het minimaal zijn der vervormingsarbeid de $3n-1$ vormveranderingsvoorwaarden (6.1/6) voor de $3n-1$ statisch onbepaalde grootheden $X_1, X_2, \ldots . X_{n-1}$, $Y_{10}, Y_{11}, \ldots . Y_{1,n-1}$, $Y_{20}, Y_{21}, \ldots . Y_{2,n-1}$ opgesteld; de grootheden X_i betreffen de buigende momenten in de liggers bij rib i, de grootheden Y_{1i} en Y_{2i} betreffen de torsiemomenten resp. in de voorste en de achterste torsiebuis tusschen de ribben i en $i + 1$. De vergelijkingen (6.5, 6) zijn alleen geldig voor antimetrische belasting. Voor symmetrische belasting vervallen zij; zij worden dan vervangen door de vergelijkingen $Y_{10} = Y_{20} = 0$.

Het systeem van vergelijkingen is recursief; iedere vergelijking bevat namelijk een aantal opeenvolgende grootheden X, Y_1 en Y_2. De coëfficiënten van deze grootheden hebben het karakter van invloedsgetallen. Het in fig. 3 gegeven schema van deze coëfficiënten is symmetrisch ten opzichte van de hoofddiagonaal.

Indien de ribben volkomen afschuifstijf worden ondersteld kan de constructie aldus worden opgevat dat zij slechts een enkele torsiebuis b.v. bij den voorligger bevat, waarvan de stijfheid gegeven is door (7.1) en die de som van beide torsiemomenten $Y = Y_1 + Y_2$ opneemt. De statisch onbepaalden X volgen uit de vergelijkingen (7.5, 6); de torsiemomenten Y_1 en Y_2 uit (7.2, 7 en 8).

Als de ribben een eindige afschuifstijfheid hebben wordt een goede benadering van de exacte spanningsverdeeling gevonden indien men eveneens beide torsiebuizen door een enkele met de door (7.1) gedefinieerde stijfheid vervangt. Men heeft dan het voordeel dat het n-tal statisch onbepaalden Y_{2i} komt te vervallen.

Deze benadering is beter naarmate h_{b1}/h_{b2} minder van één afwijkt; zij is exact voor $h_{b1} = h_{b2}$.

De oplossingsmethode der recursievergelijkingen wordt in punt 08 besproken. In de bijlage zijn, ter aanvulling van de in de bijlage van *lit.* 1 vermelde, benaderingsformules gegeven voor de in de coëfficiënten der vergelijkingen optredende integralen van stijfheids- en belastingsfuncties.

10. Notaties.

De notaties zijn gelijk aan de in *lit.* 1 gebruikte. Voorts zijn de volgende notaties toegevoegd:

$$c_{5i} = \left(\frac{1}{h_{a1}} - \frac{b^*}{2\,O}\right)_i ;$$

$$c_{6i} = \left[-\frac{1}{h_{a1}}\left(1 + \frac{h_1 \Delta e_1}{2\,O^-}\right) - \frac{1}{h_{a2}}\,\frac{h_2 \Delta e_2}{2\,O^-} + \frac{b^*}{2\,O^-}\right]_i ;$$

$$c_{7i} = \left(\frac{1}{h_{a2}} - \frac{b^*}{2\,O}\right)_i ;$$

$$c_{8i} = \left[-\frac{1}{h_{a1}}\,\frac{h_1 \Delta e_1}{2\,O^-} - \frac{1}{h_{a2}}\left(1 + \frac{h_2 \Delta e_2}{2\,O^-}\right) + \frac{b^*}{2\,O^-}\right]_i ;$$

u, v, w; $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$; $\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}}, \bar{\bar{w}}$ — coëfficiënten der momentenvergelijkingen (punt 07.3);

S_w — torsiestijfheid van een ligger;

$$T = \frac{a^2 b}{4\,O^2}\left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_0 d_0}\right) + \frac{a_1^{\,2}}{S_{s1}\cos\alpha_1} + \frac{a_2^{\,2}}{S_{s2}\cos\alpha_2} ;$$

$$V = \left(\frac{bH}{K_i}\right)^2 T;$$

Y — torsiemoment in een ligger;

$U, \bar{U}, \bar{\bar{U}}$ — belastingstermen der momentenvergelijkingen (punt 07.3);

ω_i — particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking voor X; wordt benaderd volgens punt 04;

$$\Gamma = -\frac{b}{2O}\left[\frac{h_1 C_1}{a_1} + \frac{h_2 C_2}{a_2} + \lambda b \left(\frac{1}{G_b d_b} + \frac{1}{G_0 d_0}\right)\right];$$

$$\Theta = -\frac{b}{a}\left(T - \frac{a_1}{S_{s1}\cos\alpha_1} - \frac{a_2}{S_{s2}\cos\alpha_2}\right);$$

$$Q = -\frac{1}{2\,O}\left(\frac{h_1\;D_{s1}^{\,0}}{S_{s1}\cos\alpha_1} - \frac{h_2\;D_{s2}^{\,0}}{S_{s2}\cos\alpha_2}\right);$$

$$\Omega = \frac{1}{a^2}\left[T + \frac{1-2a_1}{S_{s1}\cos\alpha_1} + \frac{1-2a_2}{S_{s2}\cos\alpha_2}\right].$$

11. Literatuuropgave.

1. VAN DER NEUT, A. De spanningsverdeeling in vleugels met twee niet-evenwijdige liggers verbonden door elastisch vervormbare ribben en bekleeding.
   N.L.L.-Rapport S. 251. Verslagen en Verhandelingen N.L.L. Deel XII, blz. S. 15—32 (1943).
2. VAN DER NEUT, A. Handleiding voor de uitvoering der sterkteberekening van vrijdragende vleugels van het tweeliggertype.
   Technische Mededeeling. N.L.L.-Rapport S. 250 (1941).
3. VAN DER NEUT, A. Torsie en afschuiving van meervoudig samenhangende doosliggers.
   R.S.L.-Rapport S. 48. Verslagen en Verhandelingen R.S.L., deel VI, blz. 67—83 (1931).

Bijlage.

Enkele formules ten behoeve van het rekenwerk.

Voor de notaties zie bijlage van *lit.* 1.

$$\Gamma_i\,[\psi] = \Gamma_i\,[\varphi] = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{II}\, l)_i,$$

$$\Theta_i\,[\psi'] = \left[\Theta_{II}\left(1 + \frac{1}{12}\,\triangle H \triangle \Theta + \frac{1}{6}\,\triangle^2 \Theta\right)\right]_i,$$

$$\Theta_i\,[\varphi'] = -\Theta_i\,[\psi'].$$

Voor de integralen $\Omega_i\,[1]$, $\left(\Omega + \frac{1}{S_{w1}}\right)_i [1]$, $\left(\Omega + \frac{1}{S_{w2}}\right)_i [1]$ en $Q_i\,[1]$ geldt $f_i\,[1] = \left[f_{II}\, l \left(1 + \frac{1}{6}\,\triangle^2 f\right)\right]_i$.

Afgesloten Maart 1943.

Report S. 279.

The stress distribution in wings with two non-parallel torsionally rigid spars, interconnected by elastically deformable ribs and skin.

Summary.

The method for calculating the stress distribution in wings with 2 non-parallel spars, which are assumed to have no torsional rigidity, as given in *ref.* 1 [7]) is extended for the case that the spars have a finite torsional rigidity. The wing scheme differs only from that considered in *ref.* 1 by the addition of torsion tubes which represent the torsional rigidities of the spars. They are assumed parallel to the axis of x and are connected to the parts of the ribs in front of the front spar and behind the rear spar. Only the parts of the ribs between the spars are assumed deformable in their plane (in shear only).

The loads are applied normally to the plane of the wing and are assumed to be symmetrical or antimetrical.

In the same way as in *ref.* 1 a system of $3n$—1 linear algebraic equations (6.1) to (6.6) incl. is derived from CASTIGLIANO's theorem of least work, which suffice to determine the $3n$—1 statically indeterminate quantities $X_1, X_2, \ldots\ldots X_{n-1}, Y_{10}, Y_{11}, \ldots\ldots Y_{1,\,n-1}, Y_{20}, Y_{21}, \ldots\ldots Y_{2,\,n-1}$; X_i refers to the bending moments in the spars at rib i, Y_{1i} and Y_{2i} are the torsional moments in front and rear spar tube resp. between the ribs i and $i+1$. From these (6.5) and (6.6) are only valid for antimetrical loading; for symmetrical loading they are replaced with $Y_{10} = Y_{20} = 0$. The boundary conditions at the wing tip are given by equations (23) and (24) of *ref.* 1 and (5.7, 8) of this report. In the plane of symmetry $X_0 = X_1$ with symmetrical and $X_0 = -\left(\frac{1}{b}M_1^{\,0}\right)_0$ with antimetrical loading.

The solution of the recurrent system of equations is com-

7) See list of references, no. 11.

Bericht S. 279.

Die Spannungsverteilung in Flügeln mit zwei nichtparallelen torsionssteifen Holmen, verbunden durch elastisch verformbare Rippen und Beplankung.

Zusammenfassung.

Die in [1] [7]) entwickelte Methode zur Bestimmung der Spannungsverteilung in Flügeln mit zwei nicht-parallelen Holmen, deren Torsionssteifigkeit im Flügelschema vernachlässigt wird, wird erweitert für den Fall, dass die Holme eine endliche Torsionssteifigkeit besitzen. Das Flügelschema unterscheidet sich von dem in [1] betrachteten nur dadurch, dass zwei Torsionsrohre hinzugefügt sind, die die Torsionssteifigkeiten der Holme representieren. Ihre Achsen werden parallel zur x-Achse angenommen und sie sind an den in ihrer Fläche vollkommen steif gedachten Teilen der Rippen vor dem Vorderholm und hinter dem Hinterholm verbunden. Die Belastung wird senkrecht zur Flügelfläche angenommen und ist *symmetrisch oder antimetrisch* verteilt.

In gleicher Weise wie in [1] wird, ausgehend vom CASTIGLIANO'schen Satze, ein System von $3n$—1 linearen Gleichungen (6.1) bis (6.6) hergeleitet, das genügt zur Bestimmung der $3n$—1 statisch unbestimmten Grössen $X_1, X_2, \ldots\ldots X_{n-1}, Y_{10}, Y_{11}, \ldots\ldots Y_{1,\,n-1}, Y_{20}, Y_{21}, \ldots\ldots Y_{2,\,n-1}$. X_i bezieht sich auf die biegenden Momente in den Holmen bei Rippe i, Y_{1i} und Y_{2i} sind die Verdrehmomente in Vorder- und Hinterholm zwischen den Rippen i und $i+1$. Die Gleichungen (6.5) und (6.6) sind nur gültig für antimetrische Belastung; an ihrer Stelle kommt für symmetrische Belastung $Y_{10} = Y_{20} = 0$. Die Randbedingungen am Flügelende sind (23) und (24) aus [1] und (5.7, 8) aus diesem Bericht. In der Symmetrie-Ebene gilt $X_0 = X_1$ bei symmetrischer und $X_0 = -\left(\frac{1}{b}M_1^{\,0}\right)_0$ bei antimetrischer Belastung.

7) Siehe Literaturverzeichnis, Nr. 11.

posed by superposition of the solution of the non-homogeneous equations, starting from certain arbitrary values of X for $x = x_1$ and $x = x_2$ (see *ref.* 1, fig. 11) and of Y_1 and Y_2 for $x = x_1$, and of four mutually independent solutions of the homogeneous equations ($U = \overline{U} = \overline{\overline{U}} = (M_1^0)_0 = 0$) found in an analogous way. The constants r_1 to r_4 incl. in the resulting solution (8.1) are determined such that the boundary conditions at the wing tip are satisfied. When there is a rib at the wing tip the solution is found by the artificial measure of lengthening the wing with an arbitrary part outside of the actual tip.

For cases in which the ribs can be considered to be infinitely rigid in their own plane the 2 torsion tubes can be replaced with one tube, whose torsional rigidity is defined by (7.1) and which takes up a torsional moment $Y = Y_1 + Y_2$. The system of equations reduces to (7.5, 6). This system is formally identical with the system of equations derived in *ref.* 1; both systems can therefore be solved in the same way. After having solved for the X_i, the Y_{1i} and Y_{2i} follow from the equations (7.2, 7 and 8).

For the general case an approximate solution can be found by introducing the same single torsion tube, e.g. at the front spar, thereby eliminating the n unknowns Y_{2i}. The approximation is the better, the less the ratio h_{b1}/h_{b2} (see *ref.* 1, fig. 7) differs from one; for $h_{b1}/h_{b2} = 1$ this solution is exact.

Having computed the quantities X_i, Y_{1i}, Y_{2i} the bending moments in the spars follow from equations (3.4, 5), the shear forces in the spar webs from (3.2, 3) and the shear forces per unit of length in the skin from (3.1). In these equations X is computed from (4.1) with $\omega_i(x) = 0$ and equation (16a) of *ref.* 1, whereas $Y_1 = Y_{1i}$ and $Y_2 = Y_{2i}$.

The appendix gives — in addition to the formulas given in the appendix to *ref.* 1 — some formulas for the numerical evaluation of the integrals appearing in the coefficients of the equations (6.1/6).

The notations used are the same as those in *ref.* 1. Additional notations are

S_w torsional rigidity of a spar;
Y torsional moment in a spar;

the notations given in no. 11 of this report and the notations v, w, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{\overline{u}}$, $\overline{\overline{v}}$, $\overline{\overline{w}}$, $\overline{U}$, $\overline{\overline{U}}$, which are defined in no. 06 of this report.

Die Lösung des rekursierenden Gleichungssystems wird aufgebaut aus einer Lösung der nicht-homogenen Gleichungen, ausgehend von bestimmten beliebigen Werten von X für $x = x_1$ und $x = x_2$ (siehe [1], Abb. 11) und von Y_1 und Y_2 für $x = x_1$, und aus 4 von einander unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichungen ($U = \overline{U} = \overline{\overline{U}} = (M_1^0)_0 = 0$), die in analoger Weise bestimmt werden. Die Konstanten r_1 bis r_4 der resultierenden Lösung (8.1) werden bestimmt aus der Bedingung, dass die Randbedingungen am Flügelende befriedigt werden müssen. Bei Flügeln mit einer Rippe am Flügelende werden die Lösungen gefunden mit Hilfe des Kunstgriffs den Flügel mit einem beliebig angenommenen Teil verlängert zu denken.

Wenn die Rippen vollkommen steif in ihrer Fläche angenommen werden können, kann man die zwei Torsionsrohre ersetzen durch ein einziges Rohr, dessen Torsionssteifigkeit von (7.1) dargestellt wird und das ein Torsionsmoment $Y = Y_1 + Y_2$ aufnimmt. Das Gleichungssystem vereinfacht sich zu (7.5, 6). Dieses System ist formal identisch mit dem in [1] hergeleiteten Gleichungssystem und kann also in gleicher Weise gelöst werden. Nach Auflösung der X_i folgen die Grössen Y_{1i} und Y_{2i} aus (7.2, 7 und 8).

Für den allgemeinen Fall kann eine Näherungslösung bestimmt werden, indem man auch dasselbe einzige Torsionsrohr einführt, z.B. am Vorderholm; dadurch werden die n Unbekannten Y_{2i} eliminiert. Diese Näherung ist umso besser, desto weniger das Verhältnis h_{b1}/h_{b2} (siehe [1], Abb. 7) von eins abweicht; für $h_{b1}/h_{b2} = 1$ ist die so bestimmte Lösung exakt.

Sind die X_i, Y_{1i}, Y_{2i} bestimmt worden, dann folgen die Biegemomente in den Holmen aus (3.4, 5); die Querkräfte in den Holmstegen aus (3.2, 3) und die Schubkräfte pro Längeneinheit in der Beplankung aus (3.1). In diesen Gleichungen wird X berechnet aus (4.1) mit $\omega_i(x) = 0$ und den Gleichungen (16a) aus [1], während $Y_1 = Y_{1i}$ und $Y_2 = Y_{2i}$.

Im Anhang sind — in Erweiterung der im Anhang zu [1] gegebenen Formeln — einige weitere Formeln zur numerischen Berechnung der in den Koeffizienten der Gleichungen (6.1/6) auftretenden Integralen gegeben worden.

Die in [1] benutzten Formelzeichen sind auch hier verwendet worden. Weitere Formelzeichen sind

S_w Torsionssteifigkeit eines Holmes;
Y Torsionsmoment in einem Holme;

die in Nr. 11 gegebenen Formelzeichen und die in Nr. 06 definierten Formelzeichen v, w, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{\overline{u}}$, $\overline{\overline{v}}$, $\overline{\overline{w}}$, $\overline{U}$, und $\overline{\overline{U}}$.

RAPPORT S. 276 [1]).

De luchtkrachten die op vastgehouden vleugels of staartvlakken ontstaan door roer- of klepuitslag

door

ir. F. J. PLANTEMA.

Overzicht.

De theoretische en experimenteele gegevens over de grootte en de verdeeling van de luchtkrachten die ontstaan door roeruitslag worden uitgewerkt en met elkaar vergeleken.

Indeeling.

1. Inleiding.

Bij de voorbereiding van een onderzoek naar de sterkte van vliegtuigvleugels tegenover de belastingen die optreden in rolbewegingen bleek dat onvoldoende gegevens beschikbaar waren over de grootte en de verdeeling, zoowel in de richting van de spanwijdte als in koorderichting, van de luchtkrachten die op den vastgehouden vleugel en op het rolroer ontstaan door rolroeruitslag. De theoretische verhandelingen over dit onderwerp betreffen sterk geschematiseerde gevallen; zij gelden bovendien slechts voor kleine invalshoeken en roeruitslagen. Experimenteele gegevens over de belastingen op vleugels en staartvlakken met roeren (of kleppen) bij verschillende invalshoeken en roeruitslagen zijn in grooten getale in de literatuur verspreid. Aan de bovengenoemde vragen werd echter in den regel geen speciale aandacht geschonken.

Dit rapport geeft het resultaat van de uitwerking van alle beschikbare gegevens. Met het oog op de eveneens wenschelijke verbetering van de bestaande voorschriften voor klepuitslag en roeruitslag van staartvlakken is het onderzoek niet beperkt tot gegevens over proeven op vleugels met rolroeren, die overigens schaarsch zijn, maar zijn ook proeven op vleugels met verschillende soorten van kleppen en op staartvlakken in beschouwing genomen.

[1]) Verkorte inhoud van het interne N.L.L.-rapport S. 258.

Buiten het onderzoek vielen echter roeren of kleppen die in niet-uitgeslagen toestand niet meer als deel van het vleugelprofiel kunnen worden beschouwd, zooals de z.g. „external" of „auxiliary airfoil flaps" en de Junkers „Doppelflügel". Eveneens bleven buiten beschouwing kleppen die niet als volledig staartstuk van den vleugel zijn uitgevoerd en die al of niet bij den uitslag een vergrooting van het vleugeloppervlak veroorzaken („split flaps", Zap- en Fowlerkleppen).

In punt 2 worden de theoretische resultaten besproken. Punt 3 behandelt de experimenteele gegevens; tevens worden theorie en experiment met elkaar vergeleken en worden voorstellen gedaan voor een globale benadering der gezochte grootheden.

In punt 4 zijn tenslotte de conclusies vermeld die uit het onderzoek volgen.

2. Theoretische resultaten.

21. *Samenvatting der literatuurgegevens.*

De theoretische verhandelingen gaan uit van de gebruikelijke veronderstelling dat iedere strook dy van den vleugel [2]) zich gedraagt als element van een oneindig langen prismatischen vleugel met prismatisch roer waarvoor de meetkundige invalshoek gelijk is aan den effectieven invalshoek ter plaatse y. Voor de verandering van de draagkrachts- en momentencoëfficiënten tengevolge van een roeruitslag ϵ geldt dan

$$\Delta\, c_{ay} = \frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}\,\frac{d\alpha}{d\epsilon}\,\epsilon = \frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}\,\epsilon\,, \tag{21.1}$$

$$\Delta\, c_{my} = \left(\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right)_\epsilon \Delta c_{ay} + \left(\frac{\partial c_m}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \epsilon, \tag{21.2}$$

$$\Delta (c_{a\epsilon})_y = \left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon \Delta c_{ay} + \left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \epsilon, \tag{21.3}$$

$$\Delta (c_{m\epsilon})_y = \left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon \Delta c_{ay} + \left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \epsilon. \tag{21.4}$$

Hierin gelden alle differentiaalquotiënten, met uitzondering van $\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ en $\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}$, voor de tweedimensionale strooming [3]).

[2]) Indien hier en in het volgende van een „vleugel" wordt gesproken, mag daarvoor ook worden gelezen „staartvlak".

[3]) Feitelijk moeten alle differentiaalquotiënten van een index y worden voorzien. Ter vereenvoudiging is deze weggelaten waar geen verwarring mogelijk is.

$\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ is de plaatselijke draagkrachtsgradiënt voor het invalshoekverloop $\triangle \alpha_y = \dfrac{d\alpha}{d\epsilon}$, dat aequivalent is met een roeruitslag $\epsilon = 1$. Voor doorsneden buiten het roer is $\dfrac{d\alpha}{d\epsilon} = 0$, maar $\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha} = \infty$, zoodat $\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}$ daar eindig is en gedefinieerd blijft door (21.1).

Uit de formules (21.2 t/m 4) volgen de grootheden

$$\left(\frac{d}{t}\right)_y = \left(\frac{\triangle c_m}{\triangle c_a}\right)_y = \left(\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right)_\epsilon + \left(\frac{\partial c_m}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \Big/ \frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}, \quad (21.5)$$

$$\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y} = \left(\frac{\triangle c_{a\epsilon}}{\triangle c_a}\right)_y = \left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon + \left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \Big/ \frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}, \quad (21.6)$$

$$\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y} = \left(\frac{\triangle c_{m\epsilon}}{\triangle c_a}\right)_y = \left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon + \left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \Big/ \frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}, \quad (21.7)$$

$$\left(\frac{d_\epsilon}{t_\epsilon}\right)_y = \left(\frac{\triangle c_{m\epsilon}}{\triangle c_{a\epsilon}}\right)_y = \frac{\left(\dfrac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon + \left(\dfrac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \Big/ \dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}}{\left(\dfrac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon + \left(\dfrac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \Big/ \dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}}. \quad (21.8)$$

Uit vergelijking (21.5)[4]) blijkt dat bij de uiteinden van het roer een discontinuïteit in het drukpunt optreedt, zoodat de theorie in de buurt van deze plaatsen — en eveneens bij een einde van het roer dat samenvalt met den vleugeltip — den werkelijken toestand niet juist weergeeft. De afwijkingen worden veroorzaakt doordat de theorie de „tipverliezen" aan de uiteinden van het roer bij een roeruitslag ϵ en een gelijktijdige invalshoekverandering

$$\triangle \alpha_y = -\epsilon \frac{d\alpha}{d\epsilon} \text{(dus } \triangle c_a = 0)$$

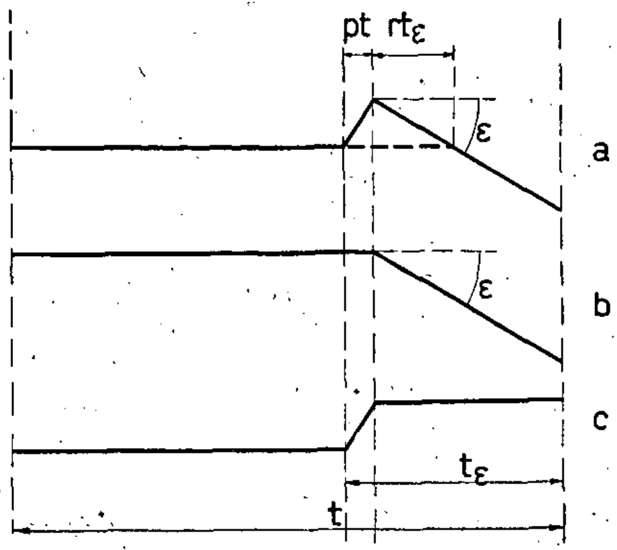
niet in aanmerking neemt. Deze „tipverliezen" veroorzaken dat de theoretische waarden van

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial \epsilon}\right)_{c_a}, \left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \text{ en } \left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a}$$

nabij de einden van het roer in werkelijkheid niet worden gerealiseerd. Daardoor zijn de plaatselijke waarden $(d/t)_y$, $\left(\dfrac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ en $\left(\dfrac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ kleiner dan de theoretische waarden en zijn eveneens de voor de resulteerende belasting geldende waarden d/t, $\left(\dfrac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ en $\left(\dfrac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$, vooral bij kleine b_ϵ/b, kleiner dan de theoretische waarden. Voor een vleugel met een roer over de volle spanwijdte zullen de afwijkingen in de laatstgenoemde waarden echter vermoedelijk van weinig beteekenis zijn.

Voor het in dit rapport beschouwde geval dat het roer een deel van het vleugelprofiel vormt en de breedte van de spleet tusschen roer en ervoor gelegen vleugeldeel zeer klein is in vergelijking met de vleugelkoorde, levert een publicatie van KÜSSNER en SCHWARZ (*lit.* 1) de meeste gegevens. Deze publicatie heeft betrekking op de tweedimensionale strooming om trillende vleugels met een roer en een hulproer. Omdat de roerneus wel steeds zoo gevormd is dat hij bij roeruitslag niet buiten het vleugeloppervlak uitsteekt, moet worden verwacht dat de strooming door de spleet minder sterk is dan bij den vleugel met roer die hetzelfde skelet heeft doch welks dikte gelijk 0 is. Daarom zijn in *lit.* 1 de twee grensgevallen van ongehinderde strooming door de spleet (open spleet) en volledig verhinderde strooming door de spleet (gesloten spleet) beschouwd. De resultaten van *lit.* 1 voor een vleugel met roer (zonder hulproer) zijn voor deze twee gevallen gegeven in *lit.* 2 in een voor den overgang op het stationnaire geval eenigszins eenvoudiger vorm, terwijl tevens wordt aangegeven hoe de bedoelde overgang moet geschieden. De uitvoering van deze aanwijzing levert voor het geval dat de spleet gesloten is, de formules

[4]) Zie ook fig. 5.



Teekening N.L.L.

Fig. 1. De in de theorie van *lit.* 1 beschouwde profielvorm.

$$\frac{d\alpha}{d\epsilon} = \frac{1}{\pi}\left(\Phi_1 - 2r\frac{t_\epsilon}{t}\Phi_{13}\right), \quad (21.9)$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right)_\epsilon = \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{\partial c_m}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} = \tfrac{1}{2}\left(\Phi_5 - 2r\frac{t_\epsilon}{t}\Phi_{16}\right), \quad (21.10)$$

$$\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t_\epsilon}\Phi_{31}, \quad (21.11a)$$

$$\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t_\epsilon}\left\{\Phi_{35} - 2r\frac{t_\epsilon}{t}(\Phi_{21} + 2\ln p)\right\}, \quad (21.11b)$$

$$\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{t}{t_\epsilon}\right)^2 \Phi_8, \quad (21.12a)$$

$$\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{t}{t_\epsilon}\right)^2 \left(\Phi_{10} - 2r\frac{t_\epsilon}{t}\Phi_{18}\right), \quad (21.12b)$$

terwijl voor het geval van open spleet in deze formules alle termen die r bevatten vervallen. p is de breedte van de spleet als fractie van t. De Φ's zijn functies van t_ϵ/t alleen, waarvan in *lit.* 1 de formules en de numerieke waarden voor $0 \leqslant t_\epsilon/t \leqslant 0{,}6$ zijn gegeven. De formules zijn overgenomen in de lijst van notaties (punt 5) en een deel der numerieke waarden in tabel 1.

Uit het bovenstaande blijkt dat voor open spleet de roerasligging géén invloed heeft op de grootte en de verdeeling der luchtkrachten en dat de luchtkrachten bij open spleet gelijk zijn aan die bij gesloten spleet en $r = 0$. Dit laatste geval is reeds eerder behandeld door GLAUERT (*lit.* 3), die dezelfde resultaten vindt.

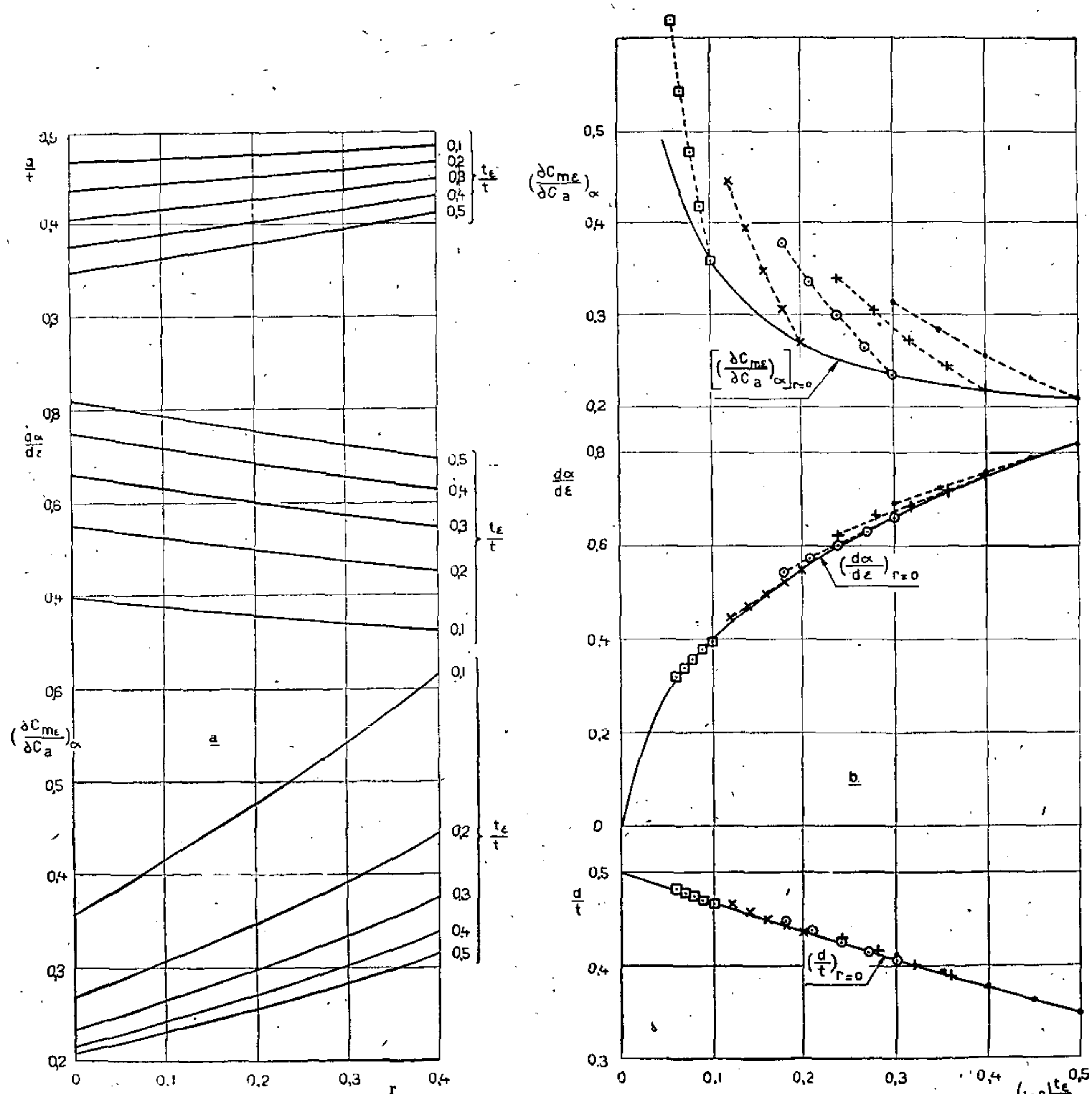
Bij gesloten spleet heeft de roerasligging invloed op de grootte en de verdeeling van de luchtkrachten. De vergelijkingen (21.9 t/m 12) zijn afgeleid met behulp van den limietovergang $p \to 0$, waarbij de grootheid p werd geëlimineerd met uitzondering van den term $\ln p$ in de uitdrukking voor $\left(\dfrac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a}$, die $-\infty$ wordt. Deze singulariteit wordt in *lit.* 1 verklaard met de opmerking dat de theorie is opgezet voor een oneindig dun profiel van den in fig. 1a gegeven vorm, waarbij de drukverdeeling is bepaald door superpositie van de drukverdeelingen die bij de in fig. 1b en 1c gegeven profielvormen behooren. Indien door een kleine wijziging in den profielvorm de oneindig groote drukken die bij den limietovergang $p \to 0$ aan den achterrand van het vaste vlak en aan den voorrand van het roer ontstaan, worden vermeden, zouden daarbij c_a en c_m vermoedelijk niet of zeer weinig veranderen. Daarom kunnen c_a en c_m ook van toe-

TABEL 1.

Theoretische waarden van de Φ-functies. (overgenomen uit lit. 1).

$\frac{t_\epsilon}{t}$	Φ_1	Φ_5	Φ_8	Φ_{10}	Φ_{13}	Φ_{15}	Φ_{18} [1]	Φ_{21}	Φ_{31}	Φ_{35}
0	0	0	0	0	∞	∞	0	∞	0	0
0,05	0,88692	0,82819	0,00121	0,01254	4,35890	3,48712	— 0,13722	5,12146	0,01514	0,38
0,1	1,24350	1,08	0,00690	0,04698	3	1,8	— 0,28170	3,64330	0,04350	0,72
0,2	1,72730	1,28	0,03995	0,16294	2	0,4	— 0,58908	2,09257	0,12730	1,28
0,3	2,07579	1,28312	0,11293	0,31150	1,52753	— 0,30551	— 0,91417	1,14871	0,24276	1,68
0,4	2,34923	1,17576	0,23834	0,45812	1,22474	— 0,73485	— 1,24633	0,48164	0,38964	1,92
0,5	2,57080	1	0,42920	0,57080	1	— 1	— 1,57080	0	0,57080	2
0,6	2,75195	0,78384	0,70034	0,62108	0,81650	— 1,14310	— 1,86574	— 0,31836	0,79236	1,92

[1]) In tabel 3 van *lit.* 1 is het teeken van Φ_{18} foutief.



Teekening N.L.L.

Fig. 2. Theoretische waarden van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$, $\frac{d}{t}$ en $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_\alpha}\right)_\alpha$ voor de tweedimensionale strooming bij gesloten spleet.

symbool	⊡	×	⊙	+	•
t_ϵ/t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

passing worden geacht op de werkelijke omstandigheden. Met behulp van (21.9, 10, 12) kunnen de waarden van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$, $\frac{d}{t}$ volgens (21.5) en $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ volgens (21.7) worden berekend. De resultaten zijn gegeven in fig. 2a voor gesloten spleet; bij open spleet gelden de in fig. 2a voor $r = 0$ aangegeven waarden voor iedere waarde van r. [5]).

Bij de toepassing van de bovengenoemde resultaten op een gegeven vleugel moet men een keuze maken tusschen die voor open en gesloten spleet. In *lit.* 1 en 2 wordt het vermoeden uitgesproken dat voor de in dit rapport beschouwde vleugel-roercombinaties, waarvoor de spleet lang en smal is, de resultaten voor gesloten spleet een goede benadering van den werkelijken toestand zullen opleveren. Hierover kan nog het volgende worden opgemerkt. Bij niet te groote roerhoeken zal de neus van het roer niet buiten den omtrek van het verlengde profiel van het voor het roer gelegen vleugeldeel uitsteken. Men zou dan geneigd zijn de in fig. 1a gegeven schematiseering, waarbij dit wel het geval is, niet als representatief voor den werkelijken toestand te beschouwen, maar men zou eerder voor de bepaling van c_a en c_m den neus van het roer als deel van het voor het roer gelegen vleugeldeel willen beschouwen en als roer alleen het achter de roeras gelegen deel van het roer in aanmerking willen nemen. Zooals in punt 22 zal worden aangetoond, krijgt men dan toevalligerwijs nagenoeg dezelfde resultaten als volgens *lit.* 1 voor gesloten spleet. Voor de bepaling van $c_{a\epsilon}$ en $c_{m\epsilon}$ is de hier bedoelde schematiseering te globaal omdat met een te kleine roerkoorde wordt gerekend en omdat voor deze grootheden de strooming door de spleet nog wel van beteekenis zal zijn; men kan dus verwachten dat in werkelijkheid $c_{a\epsilon}$ en $c_{m\epsilon}$ anders zullen zijn. De vraag in hoeverre de theorie van *lit.* 1 voor $\triangle c_{m\epsilon}$ betrouwbare resultaten oplevert moet door vergelijking met experimenteele gegevens worden beantwoord.

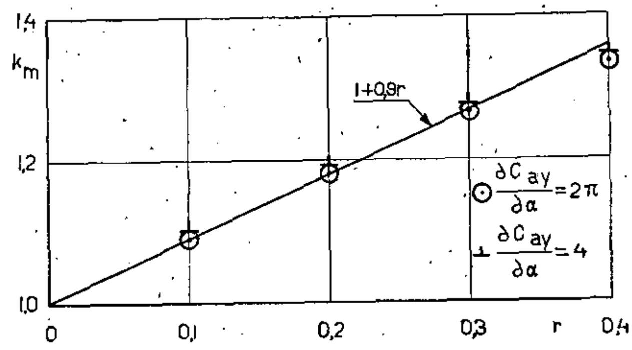
De theoretische resultaten voor het driedimensionale geval kunnen worden berekend met behulp van (21.1 en 5 t/m 12), indien slechts de waarden van $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ — m.a.w. de circulatieverdeeling over den vleugel in y-richting — bekend zijn. In het algemeen is hiervoor noodig dat een circulatieberekening wordt uitgevoerd voor een invalshoekverloop, waarbij de meetkundige invalshoek over het deel van de spanwijdte dat van roeren is voorzien

$$\triangle \alpha_y = \frac{d\alpha}{d\epsilon}$$

bedraagt en over de rest van de spanwijdte nul is.

22. *Vereenvoudigingen.*

De in fig. 2a voor de ***tweedimensionale strooming*** $\left(\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = 2\pi\right)$ bij gesloten spleet gegeven resultaten zijn in fig. 2b nog eens uitgezet als functie van $(1-r)\, t_\epsilon/t$. Daarbij stellen de getrokken lijnen de waarden van de beschouwde grootheid voor in het geval $r = 0$ (of in het geval van open spleet wanneer de abscis $(1-r)\, t_\epsilon/t$ wordt vervangen door t_ϵ/t). Fig. 2b geeft dus voor den vleugel met gesloten spleet een directe vergelijking van de grootheid voor den werkelijken vleugel met die voor een *vergelijkingsvleugel* waarbij het roer geen aerodynamische balanceering bezit en de roerkoorde gelijk is aan het achter de roeras gelegen deel van de werkelijke roerkoorde. Het blijkt nu dat in het practisch belangrijke gebied $r < 1/3$ de waarden van d/t en $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ voor deze twee gevallen nagenoeg aan elkaar gelijk zijn, terwijl de waarden van $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ voor het werkelijke roer uit die van een roer met koorde $(1-r)t_\epsilon$ en $r = 0$ in zeer goede benadering kunnen worden berekend met behulp van een correctiefactor $(1 + 0{,}9\, r)$; zie fig. 4. (De invloed van $\frac{t_\epsilon}{t}$ is verwaarloosbaar).



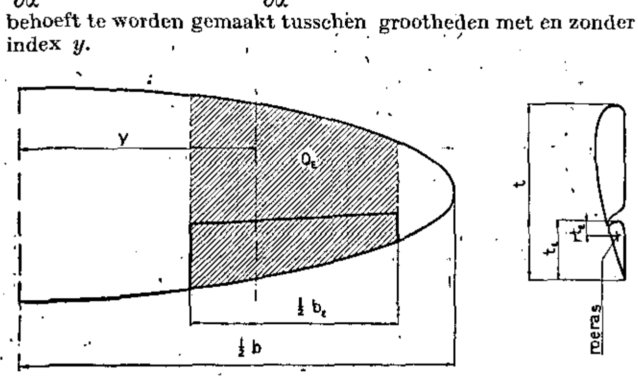
Teekening N.L.L.

Fig. 4. Theoretische waarden van k_m. Voor $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha} = 2\pi$ zie ook fig. 2b.

$$\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,\, y} = k_m \left[\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,\, y}\right]_{r=0}.$$

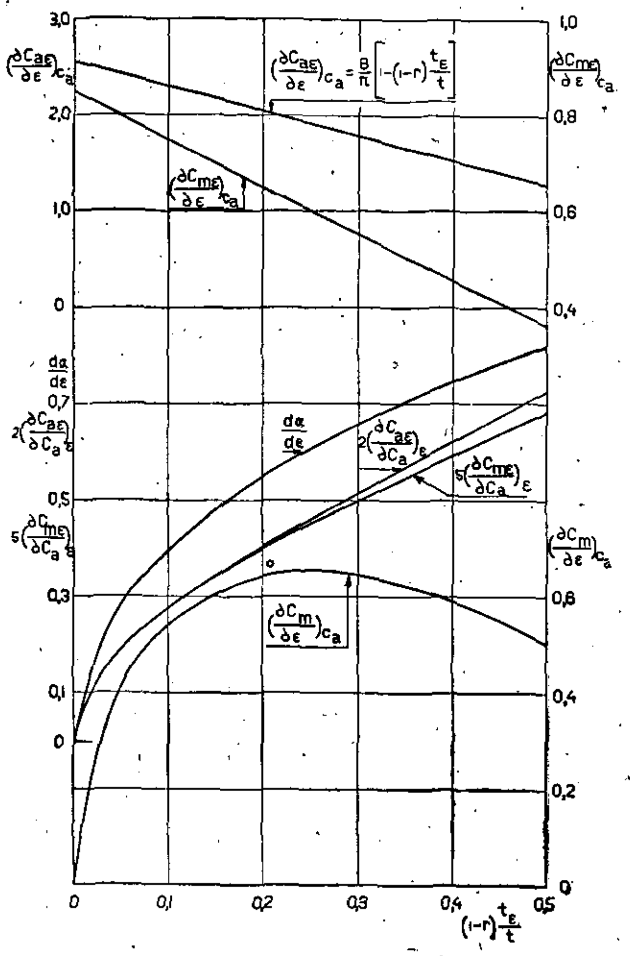
Voor de ***driedimensionale strooming*** — waarbij alleen door de veranderde waarde van $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ verschillen ontstaan — mag deze conclusie voor $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ en $\left(\frac{d}{t}\right)_y$ direct worden overgenomen, omdat $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ niet door $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ wordt beïnvloed en in de uitdrukking (21.5) voor $(d/t)_y$ de term $\left(\frac{\partial c_m}{\partial c_a}\right)_\epsilon$ een constante is, terwijl $\left(\frac{\partial c_m}{\partial \epsilon}\right)_{c_a}$ niet van $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ afhangt. Voor de grootheid $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ moet echter nog worden aangetoond dat zoowel $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon$ als $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a}$ — zie (21.7) — bij den werkelijken vleugel ongeveer $(1 + 0{,}9r)$ maal zoo groot zijn als bij den vergelijkingsvleugel, wil de bovengenoemde conclusie ook voor de driedimensionale strooming gelden. Omdat moeilijk kan worden beoordeeld welke afwijkingen hierbij mogen worden toegelaten, is de eenvoudigste wijze om dit te bewijzen de vergelijking voor $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ nog eens uit te voeren voor een belangrijk lagere dan de voor 2-dimensionale strooming geldende waarde $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha} = 2\pi$. De resultaten voor $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha} = 4$ zijn in fig. 4 opgenomen, waaruit blijkt dat de correctiefactor $(1 + 0{,}9r)$ ook hiervoor een goede benadering levert. Zij mag dan tevens voor een willekeurige waarde van $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ worden aangehouden.

[5]) Voor de 2-dimensionale strooming is in iedere doorsnede $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha} = 2\,\pi$, zoodat ook $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = 2\,\pi$ en er geen onderscheid behoeft te worden gemaakt tusschen grootheden met en zonder index y.



Teekening N.L.L.

Fig. 3. Toelichting bij de notaties.



Teekening N.L.L.

Fig. 5. Theoretische waarden van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ en $\left(\frac{\partial c_m}{\partial \epsilon}\right)_{c_a}$ en grootheden ter berekening van de theoretische waarden van $\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ en van $\frac{1}{k_m}\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ volgens de benadering van punt 22.

De waarden van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ volgens deze benadering zijn gegeven in fig. 5. De waarden van $\left(\frac{d}{t}\right)_y$ volgen uit (21.5), wanneer daarin voor $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ en $\left(\frac{\partial c_m}{\partial \epsilon}\right)_{c_a}$ de in fig. 5 gegeven waarden worden genomen. De waarden van $\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ en $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ volgen uit (21.6) resp. (21.7) met de in fig. 5 gegeven waarden der *differentiaalquotiënten voor 2-dimensionale* strooming en door vermenigvuldiging met een correctiefactor k_z, die niet door de theorie wordt opgeleverd, resp. $k_m = 1 + 0{,}9r$

$$\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y} = \left[\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon + \left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \Big/ \frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}\right]_{r=0},$$

$$\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y} = (1 + 0{,}9r)\left[\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\epsilon + \left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial \epsilon}\right)_{c_a} \Big/ \frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}\right]_{r=0}.$$

3. Experimenteele gegevens en hun vergelijking met de theoretische resultaten.

31. *Algemeene beschouwingen.*

Het aanzienlijke aantal experimenteele gegevens, dat voor uitwerking in aanmerking kwam, heeft grootendeels betrekking op prismatische modellen met een roer over de volle spanwijdte, dus $\tau = b_\epsilon/b = 1$ en symmetrischen roeruitslag. Behalve de in de theorie beschouwde variabelen α, ϵ, λ, t_ϵ/t en r komen nog de volgende variabelen voor:

1e. het vleugelprofiel,
2e. het profiel van den roerneus,
3e. de vorm van de spleet voor den roerneus en de verandering hiervan bij verandering van den roerhoek,
4e. de afstand van roeras tot vleugelkoorde en eventueel de verandering hiervan bij roeruitslag,
5e. het getal van Reynolds en de turbulentiegraad,
6e. *bovendien komen ook groote waarden van* α en ϵ voor, waarvoor de theorie niet is bedoeld.

Enkele proeven werden uitgevoerd op modellen met $\tau = 1$ en $b_\epsilon/b < 1$ bij symmetrischen roeruitslag [6]), terwijl in een geval $\tau < 1$ en $b_\epsilon/b < 1$ waren en de roeruitslag antimetrisch was. De bij deze proeven nieuw optredende variabelen λ_ϵ, b_ϵ/b en τ worden door de theorie in aanmerking genomen.

ad 1e. Volgens de stroomingsleer heeft het vleugelprofiel geen invloed op de grootheden Δc_{ay}, Δc_{my}, $\Delta(c_{a\epsilon})_y$ en $\Delta(c_{m\epsilon})_y$. De welving van het profielskelet veroorzaakt slechts een constante verandering van de draagkrachts- en momentencoëfficiënten; deze verandering van de coëfficiënten wordt echter door den roeruitslag niet beïnvloed [7]). Metingen over Δc_a hebben aangetoond dat deze grootheid *in overeenstemming met de theorie inderdaad als onafhankelijk* van het vleugelprofiel kan worden beschouwd. Verwacht mag worden dat ook de in dit rapport gezochte *grootheden niet merkbaar door de keuze van het vleugelprofiel* zullen worden beïnvloed. Enkele der publicaties leveren bovendien de mogelijkheid deze veronderstelling te toetsen. Daarbij bleek dat *de invloed van den profielvorm* blijft binnen de gewone metingsspreidingen.

ad 2e t/m 4e. De invloed van deze grootheden kan alleen op grond van de metingsresultaten worden beoordeeld.

ad 5e. Over het algemeen wordt het verloop van draagkracht en moment bij invalshoeken onder de kritieke, voorzoover zij niet in de onmiddellijke nabijheid van laatstgenoemden hoek gelegen zijn, weinig beïnvloed door schaaleffect. Hetzelfde kan worden verwacht t.a.v. den turbulentiegraad, die een analogen invloed heeft als het getal van Reynolds [8]). Deze veronderstellingen kunnen overigens op grond van enkele proeven worden getoetst. Daarbij bleek dat met een enkele uitzondering, die waarschijnlijk aan andere omstandigheden moet worden toegeschreven, slechts een verwaarloosbaar verschil tusschen de metingsresultaten bestond indien bij overigens gelijke omstandigheden het getal van Reynolds en de windtunnel verschillend waren.

ad 6e. De theoretische beschouwingen gelden voor kleine waarden van α en ϵ. De meeste metingen die werden uitgewerkt hadden betrekking op het gebied $-6^0 \leqslant \alpha \leqslant 6^0$; echter werd ook een aantal metingen uitgewerkt voor grootere waarden van α tot 16^0. Uit de resultaten mag worden geconcludeerd dat de invloed van α in dit gebied van ondergeschikte beteekenis is; de spreidingen zijn niet groot, terwijl er geen regelmaat in valt te constateeren. De voor verschillende waarden van α gevonden waarden werden daarom gemiddeld en deze gemiddelden worden in dit rapport vermeld. De invloed van de grootte van ϵ wordt nog nader besproken.

32. *De metingsresultaten en hun uitwerking.*

De beschikbare gegevens hebben ten deele betrekking op metingen van krachten en momenten op het complete model of roer en overigens op drukverdeelingsmetingen over een of meer doorsneden in koorderichting. Bij de laatst-

[6]) Gewoonlijk werd een half model gebruikt dat aan een vlakke plaat werd bevestigd, waardoor het geval van symmetrischen roeruitslag wordt nagebootst.

[7]) Ditzelfde geldt overigens voor den invloed van de vleugelwrong.

[8]) In Amerikaansche publicaties wordt zelfs veelal een z.g. effectief getal van Reynolds bepaald als product van *Re* en den turbulentiefactor.

TABEL

Vergelijking van experimenteele en theoretische (gesloten

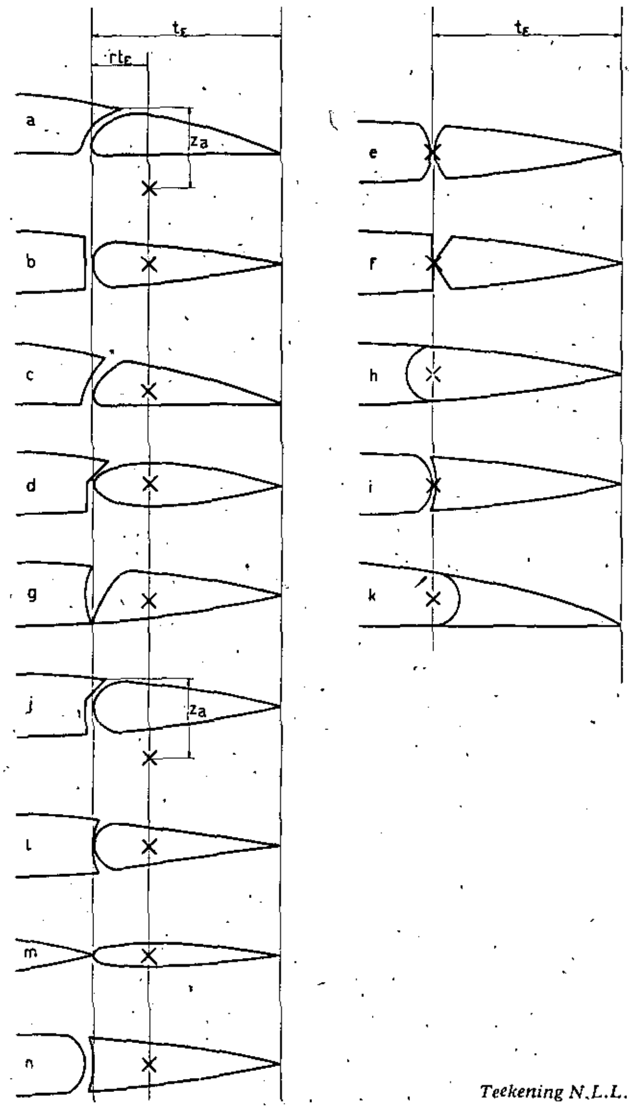
No.	Bron	λ 1)	t_ϵ/t	r	Meting 2)	Roer Fig. 6	$\frac{c_1}{\pi}$	$\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$ 3)	$\left(\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}\right)_{th}$ 3)	$\frac{d\alpha}{d\epsilon}$	$\left(\frac{d\alpha}{d\epsilon}\right)_{th}$	$\frac{d}{t}$ 3)	$\left(\frac{d}{t}\right)_{th}$ 3)	ϵ^0 van	ϵ^0 tot
1	NLL-rapp. A. 435	5	0,209	0,24	K	a	0,93	1,35	2,12	0,33	0,491	0,526	0,538	0	40
2	,, ,, A. 437	5,03	0,363	0,228	K	a	0,93	2,75	2,78	0,671	0,641	0,512	0,484	0	30
3	,, ,, A. 562	4,5	0,233	0,214	K	d	0,87	1,66	2,20	0,439	0,528	—	—	—	—
4	,, ,, A. 593	4,5	0,253	0,204	K	c	0,90	1,90	2,30	0,491	0,553	0,533	0,528	0	25
5	,, ,, A. 604	4,5	0,232	0,214	K	d	0,85	1,33	2,19	0,358	0,525	0,509	0,538	0	6
6	,, ,, A. 713	3,6	0,091	0	K	e	0,86	1,0	1,33	0,286	0,380	0,634	0,604	— 9	9
7a	,, ,, A. 693	4	0,4	0,0625	K	b	0,81	2,60	2,94	0,740	0,730	0,444	0,457	— 9	9
7b	,, ,, ,,	4	0,4	0,2125	K	b	0,87	2,55	2,73	0,697	0,678	0,466	0,484	— 9	9
7c	,, ,, ,,	4	0,4	0,3625	K	b	0,83	2,28	2,48	0,642	0,614	0,490	0,512	— 9	9
8	R. and M. 110	6	0,385	0	K	e	?	3,39	3,34	(0,830)	0,737	0,428	0,430	—30	30
9	,, 152	6	0,385	0	K	f	0,97	3,28	3,34	0,737	0,737	0,418	0,430	—15	45
10	,, 319	6	0,220	0	K	e	?	1,80	2,60	(0,441)	0,573	0,478	0,498	—30	30
11a	,, 1186	2	0,1	0	K	h	0,79	0,582	1,20	0,216	0,396	0,65	0,699	0	16
11b	,, ,,	2	0,2	0	K	h	0,79	1,51	1,67	0,560	0,550	0,64	0,633	0	5,4
12	,, 1443	8	0,28	0	K	f	—	1,50	2,03	—	0,641	0,54	0,570	—40	40
13a	,, 1625	7,75	0,253	0,282	D	g	0,84	1,03	1,76	—	0,525	—	—	—	—
13b	,, ,,	,,	0,253	0,282	D	g	—	1,04	1,74	—	0,525	0,628	0,612	—15	15
13c	,, ,,	,,	0,253	0,282	D	g	—	1,21	1,85	—	0,525	0,590	0,591	—15	15
13d	,, ,,	,,	0,253	0,282	D	g	—	1,06	1,85	—	0,525	0,597	0,591	—15	15
13e	,, ,,	,,	0,253	0,282	D	g	—	0,87	1,63	—	0,525	0,635	0,637	—15	15
14	,, 1681	(9,0)	0,05	0	K	f	?	0,78	$(1{,}39^5)$	0,18	0,282	0,598	(0,547)	0	25
15	NACA-rep. 161	6	0,337	0	D	?	—	—	—	—	—	0,478?	0,576	—10	10
16	,, ,, 260	6	0,2	0	K	i	$0{,}88^5$	2,03	2,50	0,491	0,550	0,473	0,506	—20	25
17a	,, ,, 360	?	0,1	0	D	h	—	1,00	$(1{,}89^5)$	0,233	0,396	0,574	(0,535)	—50	50
17b	,, ,, ,,	?	0,2	0	D	h	—	2,30	(2,63)	0,541	0,550	0,529	(0,493)	—50	50
17c	,, ,, ,,	?	0,2	0	D	h	—	1,43	(2,63)	0,331	0,550	0,540	(0,493)	—40	40
18a	,, ,, 554	6	0,1	0	K	h	0,93	$1{,}37^5$	1,80	0,320	0,396	0,551	0,550	0	45
18b	,, ,, ,,	6	0,2	0	K	h	0,89	1,95	2,50	0,471	0,550	0,493	0,506	0	45
18c	,, ,, ,,	6	0,3	0	K	h	0,90	2,87	3,00	0,684	0,661	0,458	0,464	0	45
19a	,, ,, 574	6	0,3	0	D	h	—	1,72	2,08	—	0,661	0,535	0,559	—30	30
19b	,, ,, ,,	6	0,06	0	D	f	—	0,47	$0{,}63^5$	—	0,309	0,73	0,846	—30	30
20	,, ,, 633	∞	0,2	0	D	h	0,99	2,6	3,46	0,418	0,550	0,439	0,435	—45	60
21	,, ,, 661	6	0,2	0	K	h	0,94	2,83	2,50	0,650	0,550	0,437	0,506	— 5	60
22a	,, ,, 664	∞	0,2	0	K	h	$1{,}03^5$	2,8	3,46	0,43	0,550	0,449	0,435	—38	45
22b	,, ,, ,,	∞	0,2563	0,22	K	a	0,99	2,58	3,46	0,415	0,550	0,455	0,435	0	40
23	,, ,, 679	∞	0,1	0	K	h	0,97	1,55	2,49	0,255	0,396	0,480	0,467	0	30
24	NACA T.N. 326	∞	0,2	0	D	h	0,91	2,86	3,45	0,50	0,550	0,446	0,435	—30	30
25	,, ,, 702	∞	0,2566	0,26	K	a	$0{,}95^5$	—	—	—	—	0,48	0,437	0	40
26a	,, ,, 734	∞	0,5	0	D	h	0,91	4,58	5,14	0,800	0,818	0,387	0,347	0	45
26b	,, ,, ,,	∞	0,05	0	D	h	0,91	0,92	1,77	0,160	0,282	0,544	0,483	—30	30
26c	,, ,, ,,	∞	0,1	0	D	h	0,91	1,83	2,49	0,32	0,396	0,499	0,467	—30	30
26d	,, ,, ,,	∞	0,15	0	D	h	0,91	2,18	3,02	0,38	0,480	0,490	0,450	—30	30
27	J. Aer. Sc. 3, 431	6	0,3	0,267	K	a	—	—	—	—	—	0,511	0,497	0	45
28a	Bull. Serv.	5	0,35	0	K	h	$0{,}87^5$	2,72	3,06	0,696	0,709	0,437	0,452	—15	15
28b	Techn. de l'Aer.	5	0,25	0	K	h	0,89	2,46	2,64	0,620	0,610	0,480	0,496	—15	15
28c	(Brux.) Août	5	0,15	0	K	h	0,84	—	—	—	—	0,534	0,540	—15	15
28d	1932, no. 12	5	0,19	0	K	h	0,89	—	—	—	—	0,474	0,524	—15	15
29a	Transactions	3	0,398	0,1755	K	l	0,78	2,12	2,50	0,683	0,689	—	—	—	—
29b	C.A.H.I.	3	0,403	0,1833	K	m	$0{,}73^5$	1,75	2,50	0,589	0,690	—	—	—	—
29c	(Moskow)	3	0,397	0,175	K	n	0,89	1,80	2,50	0,535	0,689	—	—	—	—
29d	no. 278	3	0,6	0,1534	K	l	$0{,}75^5$	2,98	2,98	0,981	0,821	—	—	—	—
29e	(1936)	3	0,6	0,1534	K	m	0,72	2,49	2,98	0,830	0,821	—	—	—	—
29f		3,5	0,6	0	K	l	—	2,41	3,38	0,825	0,876	—	—	—	—
29g		3,5	0,5	0	K	l	0,67	2,25	3,15	0,770	0,818	—	—	—	—
29h		3,5	0,4	0	K	l	—	1,95	2,88	0,668	0,748	—	—	—	—
30a	Luftfahrt-	∞	0,125	0	?	?		—	—	—	—	0,450	0,459	0	70
30b	forschung XV,	∞	0,15	0	?	?	0,875	2,48	3,02	0,45	0,480	0,451	0,450	—40	35
30c	S. 13	∞	0,20	0	?	?		—	—	—	—	0,434	0,435	0	70
31a	NACA-rep. 278	3	0,295	0	K	h	0,725	2,02	2,39	0,682	0,659	—	—	—	—
31b		3	0,387	0,258	K	l	0,64	1,76	2,36	0,652	0,650	—	—	—	—
31c		3	0,387	0,368	K	l	0,65	1,57	2,09	0,571	0,603	—	—	—	—
31d		3	0,387	0,467	K	l	0,72	$1{,}37^5$	2,02	0,468	0,557	—	—	—	—

1) Voor de proeven met tweedimensionale strooming is $\lambda = \infty$ vermeld.
2) K = krachten- en momentenmetingen op het complete model.
D = drukverdeelingsmeting in doorsnede over model.

(vervolg) resultaten voor de proeven met vaste roeras.

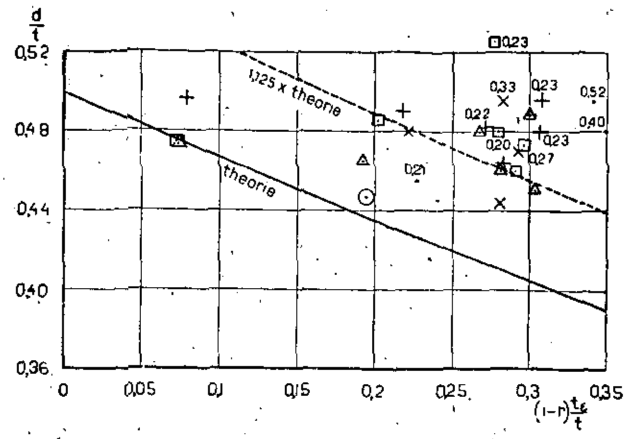
$\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ [3]	$\left[\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha\right]_{th}$ [3]	$\lvert\epsilon\rvert^0_{max}$	$\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ [3]	$\left[\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha\right]_{th}$ [3]	$\lvert\epsilon\rvert^0_{max}$	Opmerkingen [4]
—	—	—	—	—	20	$\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$ uit metingen bij $\alpha = 10^0$. $\left(\frac{\partial c_{mr}}{\partial c_a}\right)_\alpha = 0{,}19?$
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	Model met eindschijven. λ bepaald volgens Luftfahrtforschung XVI, S. 219, Abb. 11.
1,86	1,14	6	0,584	0,455	7,5	
—	—	—	—	—	—	
1,00	0,84	9	0,287	0,292	9	Symmetrisch staartvlakmodel.
1,13	0,91	9	0,341	0,355	9	
1,29	1,00	9	0,408	0,439	9	
—	—	—	0,29	0,257	15	$\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ uit berekende $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ ($c_1 = 0{,}87\ \pi$).
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	0,435?	0,326	20	Als no. 8. Alleen metingen bij $\alpha = 6^0$ bruikbaar.
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	
1,69	1,15	10	—	—	—	$b_\epsilon/b = 0{,}465$; roer loopt tot tip.
—	—	—	—	—	—	Oppervlak 0_ϵ } Theoretische waarden berekend voor trapeziumvormigen vleugel $\lambda = 7{,}47$; $b_\epsilon/b = 0{,}505$; roer van 0,416 $b/2$ tot 0,921 $b/2$; eindkoorde = 0,514 × middenkoorde.
2,16	1,385	15	—	—	—	doorsnede 3
1,88	1,314	15	—	—	—	doorsnede 5
1,90	1,314	15	—	—	—	doorsnede 7
2,02	1,466	15	—	—	—	doorsnede 8
—	—	—	—	—	—	λ berekend uit $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = 4{,}41$ met $c_1 = 0{,}87\ \pi$.
0,94	1,02	20	—	—	—	$b_\epsilon/b = 0{,}44$; roer loopt tot tip.
—	—	—	—	—	—	
1,60	1,35	50	0,450?	0,450	10	Gemeten in middendoorsnede $\frac{\partial c_{av}}{\partial \alpha} = 4{,}29$.
1,20	(0,98)	30	0,346	(0,327)	10	Daaruit berekend $\left(\frac{\partial c_{av}}{\partial \alpha}\right)_{th} = 4{,}79$ (met $c_1 = 0{,}87\ \pi$).
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	0,353	0,340	15	
—	—	—	0,275	0,283	15	
0,98	1,12	20	—	—	—	Roer van 0,6 $b/2$ tot 1,0 $b/2$ } Metingen in middendoorsnede.
2,4	3,88	30	0,612	1,283	20	Roer van 0,7 $b/2$ tot 0,9 $b/2$
0,7	0,79	15	0,21	0,268	15	
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	0,212	0,268	15	
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	0,31	0,268	15	
—	—	—	—	—	—	Metingen alleen bij $\epsilon = 0$ en $\epsilon = 40^0$.
0,675	0,61	10 à 20	0,213	0,208	10 à 20	
1,525	1,46	30	—	—		
1,11	1,06	30	0,416	0,355	20	
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	Metingen bij $\epsilon = 0$; 20^0 en 45^0.
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	spreiding groot.
—	—	—	—	—	—	spreiding vrij groot.
—	—	—	—	—	20	$\left(\frac{\partial c_{mr}}{\partial c_a}\right)_\alpha = 0{,}135$
—	—	—	—	—	16	,, = 0,154
—	—	—	—	—	16	,, = 0,163
—	—	—	—	—	10	,, = 0,132
—	—	—	—	—	12	,, = 0,123
—	—	—	0,229	0,236	—	$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ alleen gemeten voor no. 29g. Voor 29f en 29h zelfde waarde verondersteld wegens gelijk vleugelprofiel.
—	—	—	0,278	0,252	12	
—	—	—	0,312	0,278	—	
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	0,31?	0,299	10	
—	—	—	—	—	—	
—	—	—	0,348	0,332	20	
—	—	—	—	—	25	$\left(\frac{\partial c_{mr}}{\partial c_a}\right)_\alpha = 0{,}123$
—	—	—	—	—	10	,, = 0,07
—	—	—	—	—	—	

[3] Voor metingen D met eindige λ zijn de plaatselijke waarden voor de meetdoorsnede vermeld, behalve onder 13a.
[4] Voorzoover niet anders wordt vermeld, was het model prismatisch met een roer over de volle spanwijdte.
Een ? duidt aan dat een gegeven ontbreekt, dat uit de metingen geen betrouwbaar resultaat volgt of dat het gegeven metingsresultaat twijfelachtig is.



Teekening N.L.L.

Fig. 6. Vormen van de onderzochte roermodellen. × = roeras.



Teekening N.L.L.

Fig. 7. Waarden van d/t volgens proeven met veranderlijke roeras; $\lambda = \infty$. Waarden van $z_a/t \geqslant 0{,}20$ (zie fig. 6) bijgeschreven.

symbool	•	×	+	⊡	△	⊙
ϵ	10°	20°	30°	40°	50°	60°

genoemde metingen zijn de drukverdeelingsdiagrammen in den regel geïntegreerd; in enkele gevallen is de integratie door het N.L.L. uitgevoerd. De proeven hebben alle betrekking op vleugels waarbij t_ϵ/t langs de spanwijdte van het rolroer constant is. Een overzicht van de vormen der onderzochte roermodellen is gegeven in fig. 6. Bij enkele proeven was de ligging van de roeras afhankelijk van den roeruitslag (tabel 3 en fig. 7); daarbij is r voor $\epsilon = \epsilon_1$ bepaald uit de pool van de beweging van het roer tusschen de standen $\epsilon = 0$ (niet uitgeslagen) en $\epsilon = \epsilon_1$. Er wordt dan verondersteld dat de krachten bij $\epsilon = \epsilon_1$ niet worden beïnvloed door de wijze waarop de uitslag ϵ_1 is bereikt.

Bij de uitwerking der metingsresultaten zijn de veranderingen der coëfficiënten — behalve bij de bepaling van $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ — steeds betrokken op den toestand met niet-uitgeslagen roer ($\epsilon = 0$). De uit de metingen berekende grootheden $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$, $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$, $\frac{d}{t}$, $\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ en $\frac{d_\epsilon}{t_\epsilon}$ [9]) werden steeds vergeleken met de waarden die zij volgens de theorie van punt 2 zouden bezitten. Deze laatste grootheden — berekend met $c_1 = \pi$ — worden in dit punt consequent met den index th aangeduid. Een overzicht van de resultaten is gegeven in tabel 2 en 3 en fig. 7 [10]). De theoretische waarden zijn die volgens de theorie voor gesloten spleet, aangezien — in overeenstemming met het in de op een na laatste alinea van punt 21 genoemde — blijkt dat deze aanzienlijk beter met de experimenteele waarden overeenstemmen dan de resultaten die door de theorie voor open spleet worden geleverd.

33. *De waarden van* c_1.

Uit het verband tusschen den gemeten draagkrachtscoëfficiënt voor den geheelen vleugel en den invalshoek α

[9]) resp. $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}$ enz.

[10]) Voor nadere bijzonderheden kan worden verwezen naar het niet-gepubliceerde N.L.L.-rapport S. 258. In tabel 3 t/m 5 en punt 34 t/m 36 is de index y ter vereenvoudiging weggelaten indien geen verwarring mogelijk is.

TABEL 3.

Enkele resultaten voor de proeven met veranderlijke roeras; $\lambda = \infty$.

No.	Bron	$\frac{t_\epsilon}{t}$	r	$\frac{z_a}{t}$	Roer fig. 6	ϵ^0	$\frac{c_1}{\pi}$	$\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$	$\left(\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}\right)_{th}$	$\frac{d\alpha}{d\epsilon}$	$\left(\frac{d\alpha}{d\epsilon}\right)_{th}$
1a	NACA T.N. 715	0,4	0,126	0,40	a	10	0,95	3,50	4,45	0,585	0,709
1b	,, ,, 715	0,4	0,151	0,52	j	10	0,95	3,84	4,40	0,643	0,700
2a	,, ,, 728	0,4	—	—	j	0	0,875	—	—	—	—
2b	,, ,, 728	0,4	—	—	a	0	0,90	—	—	—	—
3	NACA Rep. 633[1])	0,2566	0,120	0,206	a	10	0,945	2,75	3,65	0,464	0,581
4a	,, ,, 664[2])	0,2566	0,139	0,185	a	20	0,92	3,24	3,61	0,562	0,575
4b	,, ,, 664[2])	0,2566	0,139	0,185	a	20	0,91	2,58	3,61	0,450	0,575
5a	,, ,, 679[1])	0,2566	0,120	0,206	a	10	0,95	2,80	3,65	0,472	0,581
5b	,, ,, 679	0,1	−0,548	0,174	a	10	0,97	1,55	3,06?	0,255	0,486?

[1]) No. 3 en no. 5a zijn metingen op hetzelfde model in dezelfde tunnel en bij dezelfde waarde van *Re*.
[2]) No. 4a en 4b zijn metingen op hetzelfde model als bij no. 3 in verschillende tunnels bij verschillende waarden van *Re*.

bij constante ϵ (in den regel $\epsilon = 0$) werd de draagkrachtsgradiënt voor het lineaire gebied bepaald. De waarde van c_1 volgt dan uit de bekende formules die het verband tusschen $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ en λ geven (zie o.a. *lit.* 4). De aldus berekende waarden van c_1 (tabel 2 en 3) spreiden tusschen $0{,}64\,\pi$ en $1{,}035\,\pi$; het gemiddelde van alle berekende waarden is $c_1 = 0{,}87\,\pi = 2{,}735$. Indien geen experimenteele gegevens ter beschikking staan, wordt het gebruik van deze waarde aanbevolen.

34. *De waarden van* $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$, $\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$ *en* f. [10])

Voor de modellen met een roer over de volle spanwijdte volgt $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ als het quotiënt van $\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$ en $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$. De waarden van $\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$ werden in den regel bepaald bij $\alpha = 0$. Een lineair verband tusschen c_a en ϵ bleek gewoonlijk te bestaan tot $\epsilon = \pm\,10$ à 15^0; bij grootere waarden neemt de draagkrachtsgradiënt af. Daarom zijn de metingen voor de no.'s 25 en 27 van tabel 2 niet uitgewerkt; de gegeven waarden voor de no.'s 4a, b van tabel 3 zijn waarschijnlijk te klein. Voorts is de theoretische waarde in tabel 3 voor no. 5b zeer dubieus, omdat het onwaarschijnlijk is dat de benadering volgens punt 22 voor een groote negatieve waarde van r nog juist zou zijn.

De waarden van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ volgens tabel 2 en 3 zijn in fig. 8 gegeven als functie van de grootheid $(1-r)\,t_\epsilon/t$, waardoor zij volgens de theorie voor gesloten spleet uitsluitend worden bepaald (zie punt 22). Het blijkt dat de spreidingen groot zijn, met name in de buurt van $(1-r)\,t_\epsilon/t = 0{,}2$. Aan de hand van de gegevens uit tabel 2 en 3 blijkt echter niet dat er een andere variabele is die een systematischen invloed op de grootte van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ uitoefent. De spreidingen moeten daarom voorshands als mogelijke toevallige spreidingen worden opgevat. De overeenstemming met de theorie is alleen voor $(1-r)\,t_\epsilon/t \geqslant 0{,}25$ bevredigend. Voorgesteld wordt in de practijk de waarden van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ te berekenen uit de empirische formules (zie fig. 8)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\epsilon} &= 0{,}1 + 2\,(1-r)\,t_\epsilon/t \text{ voor } 0 \leqslant (1-r)\,t_\epsilon/t \leqslant 0{,}3\,,\\ \frac{d\alpha}{d\epsilon} &= 0{,}55 + 0{,}5\,(1-r)\,t_\epsilon/t \text{ voor } 0{,}3 \leqslant (1-r)\,t_\epsilon/t \leqslant 0{,}6. \end{aligned}\right\} \quad (34.1)$$

Indien het roer slechts over een deel van de spanwijdte is aangebracht mag niet voetstoots worden verondersteld dat (34.1) nog juiste resultaten levert. In het algemeen zal het gevonden resultaat nog met een correctiefactor f moeten worden vermenigvuldigd, die afhangt van de grootte van b_ϵ/b en misschien ook van de ligging van het roer,

$$\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon} = f\,\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}\,\frac{d\alpha}{d\epsilon} \qquad (34.2)$$

Ter bepaling van f staat slechts een 3-tal experimenteele gegevens ter beschikking. De uit deze gegevens berekende waarden van f zijn in tabel 4 vermeld. De practische zoowel

TABEL 4.

Waarden van f.

Tab. 2 No.	$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$	$\frac{d\alpha}{d\epsilon}$	$\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$	f
12	2,90	0,660	1,50	0,78
13a	3,02	0,464	1,03	0,74
19a	2,80 [1])	0,700	1,72 [1])	0,88

[1]) Plaatselijke waarde in midden-doorsnede van roer.

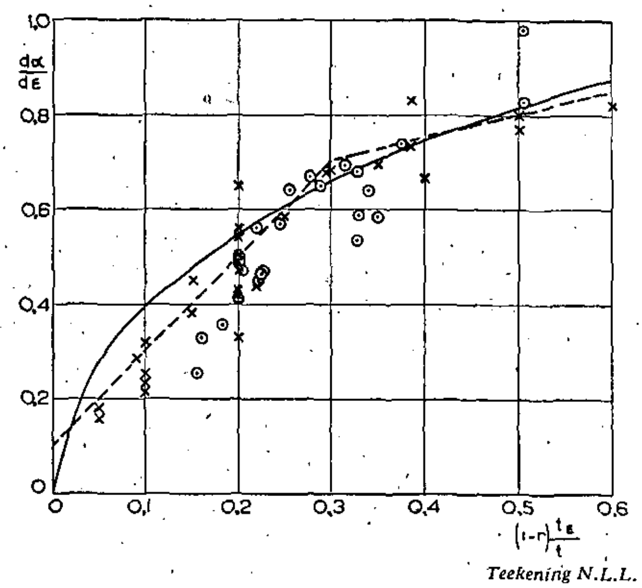


Fig. 8. Theoretische en experimenteele waarden van $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ (zie tabel 2 en 3).
——— theorie voor gesloten spleet
– – – – voorstel volgens (34.1)
⊙ proeven $r > 0$
× proeven $r = 0$.

als de theoretische waarden van $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ $\left(\text{en } \frac{\partial c_{av}}{\partial \alpha}\right)$ voor de no.'s 12, 13 en 19 uit tabel 2 zijn berekend volgens een — in dit rapport niet nader omschreven — benaderingsmethode die echter voor kleine waarden van b_ϵ/b (no. 19b) niet meer betrouwbaar is.

Op grond van de in tabel 4 vermelde resultaten kan voor roeren met $b_\epsilon/b = 0{,}4$ à $0{,}5$ die dicht bij den vleugeltip eindigen, gerekend worden met de gemiddelde waarde $f = 0{,}8$. Bekend is voorts alleen dat voor symmetrischen roeruitslag en $b_\epsilon/b = 1$ de factor $f = 1$ is. Uitbreiding van het experimenteele materiaal is daarom zeer gewenscht. Een serie proeven op modellen die alleen verschillen in b_ϵ/b en ligging van het roer zou van groote waarde zijn om over f meer zekerheid te verkrijgen.

35. *De waarden van* d/t. [10])

Vergelijkt men de in tabel 2 gegeven waarden van d/t en $(d/t)_{th}$ met elkaar, dan blijkt dat de overeenstemming over het algemeen zeer goed is. In 29 van de 48 gevallen is de afwijking kleiner dan 5 % van de theoretische waarde en slechts in 5 gevallen komen afwijkingen grooter dan 10 % voor (no.'s 15, 19b, 21, 26a en 26b; afwijking resp. —17; —14; —13,6; 11,5 en 12,5 %). De afwijking bij no. 15 kan berusten op onbetrouwbaarheid van de meting. Bij no. 19b kan worden opgemerkt,

1e. dat de theorie voor kleine b_ϵ/b te groote waarden voor d/t levert (punt 21) en

2e. dat de waarde van $(d/t)_{th}$ niet betrouwbaar is, omdat zij is gebaseerd op $\left(\frac{\partial c_{av}}{\partial \alpha}\right)'_{th}$ (punt 34).

In tabel 2, kolom 15 en 16, zijn de waarden van ϵ vermeld die het gebied begrenzen waarop de metingen betrekking hadden of waarin d/t onafhankelijk van ϵ kan worden gesteld. Het blijkt dat tot verrassend groote waarden van ϵ, in den regel 45^0 tot 60^0, d/t nagenoeg onafhankelijk van ϵ is. Voor zeer groote ϵ traden systematische afwijkingen op; in den regel nam d/t toe, maar in enkele gevallen ook af, bij toeneming van ϵ.

Terwijl bij de modellen met eindige slankheid zoowel positieve als negatieve afwijkingen voorkomen, zijn bij de proeven waarbij een tweedimensionale strooming werd nagebootst de experimenteele waarden systematisch grooter dan de theoretische: $d/t = (0{,}98 \text{ tot } 1{,}125)\,(d/t)_{th}$, gemiddeld

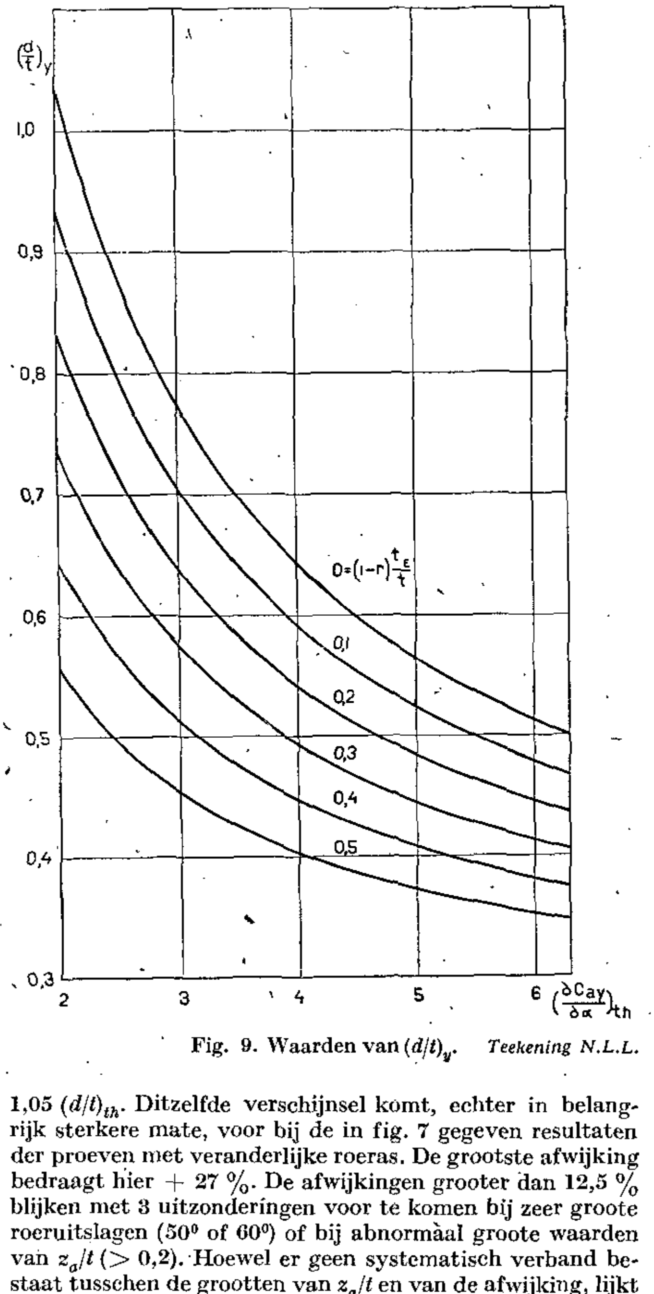


Fig. 9. Waarden van $(d/t)_y$. *Teekening N.L.L.*

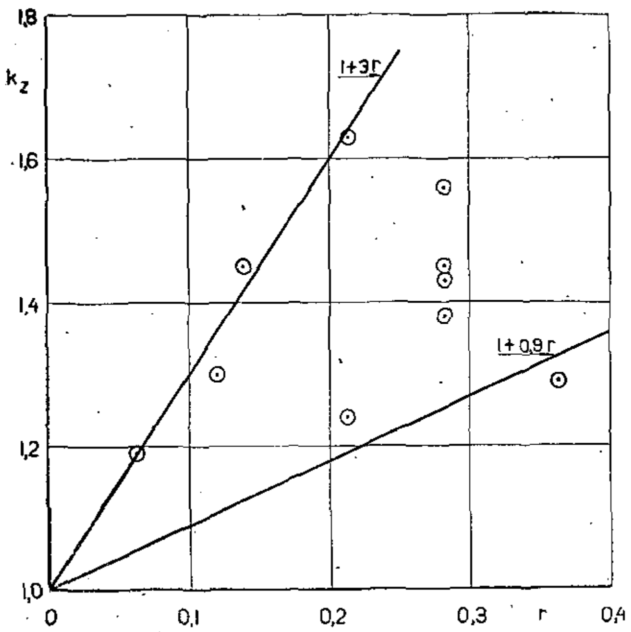


Fig. 10. Waarden van k_z. *Teekening N.L.L.*

$$\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,\,y} = k_z\left[\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,\,y}\right]_{th}.$$ Zie ook fig. 11.

1,05 $(d/t)_{th}$. Ditzelfde verschijnsel komt, echter in belangrijk sterkere mate, voor bij de in fig. 7 gegeven resultaten der proeven met veranderlijke roeras. De grootste afwijking bedraagt hier + 27 %. De afwijkingen grooter dan 12,5 % blijken met 3 uitzonderingen voor te komen bij zeer groote roeruitslagen (50° of 60°) of bij abnormaal groote waarden van z_a/t ($>$ 0,2). Hoewel er geen systematisch verband bestaat tusschen de grootten van z_a/t en van de afwijking, lijkt *het toch wel waarschijnlijk dat voor* $z_a/t >$ *circa* 0,2 *de* overeenstemming met de theorie niet meer goed is.

Voor de practijk, waar dergelijke groote waarden van z_a/t niet voorkomen, kan worden geconcludeerd dat de theoretische waarden van d/t op zeer bevredigende wijze door de uitgevoerde proeven, waarbij $b_\epsilon/b \geqslant 0{,}4$ was, worden bevestigd tot $\epsilon = 45$ à 60°. Uit de metingen blijkt niet dat de vormen van den roerneus en van de spleet een merkbaren invloed hebben op het resultaat. Voor practische toepassing is in fig. 9 $(d/t)_y$ grafisch voorgesteld als functie van $(1-r)\,t_\epsilon/t$ en $\left(\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}\right)_{th}$. Tusschen de gegeven krommen kan lineair worden geïnterpoleerd.

36. *De waarden van* $\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$, $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ en $\frac{d_\epsilon}{t_\epsilon}$.[10])

Metingen over roermomenten zijn veel talrijker dan over normaalkrachten op het roer. Omdat steeds het moment om de roeras werd gemeten kunnen de waarden van $c_{m\epsilon}$ uit een roermomentenmeting alleen voor $r = 0$ worden bepaald; voor $r \neq 0$ volgt uit een dergelijke meting slechts de waarde van c_{mr}, behoorende bij het moment om de roeras. Volledigheidshalve zijn ook de waarden van $\left(\frac{\partial c_{mr}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ in de laatste kolom van tabel 2 vermeld. Bij de meeste in tabel 2 vermelde resultaten zijn de spreidingen van de coëfficiënten, afgeleid uit verschillende metingen, ten hoogste ± 10 %; bij de no.'s 13 b—e, 15, 17a—c en 19a, b komen *ook grootere* spreidingen voor. In een aantal gevallen waren de spreidingen zoo groot dat in het geheel geen resultaat kon worden vermeld. In de kolommen 19 en 22 van tabel 2 zijn de grootste roerhoeken vermeld die bij de metingen voorkwamen òf tot welke $\Delta c_{z\epsilon}/\Delta c_a$ resp. $\Delta c_{m\epsilon}/\Delta c_a$ ($\Delta c_{mr}/\Delta c_a$) als constant kon worden beschouwd. In den regel bleef $\Delta c_{z\epsilon}/\Delta c_a$ tot $\epsilon = 15$ à 30° nagenoeg constant en nam bij grootere ϵ regelmatig toe of af; $\Delta c_{m\epsilon}/\Delta c_a$ bleef tot $\epsilon = 10$ à 20° constant en nam bij grootere ϵ sterk toe.

Voor $r = 0$ *is theoretisch* $k_z = 1$, *zoodat de waarden* gegeven in kolom 17 en 18 van tabel 2 voor dit geval direct vergelijkbaar zijn. De verschillen zijn niet grooter dan de eerder genoemde metingsspreidingen, zoodat van een goede overeenstemming kan worden gesproken, behalve voor no. 12 en 19b. In het laatste geval kan het verschil aan dezelfde omstandigheden worden toegeschreven als het verschil in d/t (punt 35). Voor $r \neq 0$ levert de theorie (voor gesloten spleet) geen bruikbaar resultaat. De experimenteele waarden van k_z — bepaald als het quotiënt van $\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ en $\left[\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha\right]_{th}$ (zie fig. 11) — zijn in fig. 10 gegeven[11]). Het blijkt dat zij spreiden tusschen $1 + 0{,}9\,r$ en $1 + 3r$.

De verschillen tusschen de theoretische en experimenteele waarden van $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_\alpha$ zijn vrij groot. De twijfelachtige waarde voor no. 10 en het eenvoudig verklaarbare resultaat voor 19b buiten beschouwing latende, varieeren de experimenteele waarden tusschen 0,78 en 1,28 maal de theoretische waarden.

De theorie voor $r = 0$ levert voor $(d_\epsilon/t_\epsilon)_{th}$ waarden die slechts zeer weinig afwijken van 1/3. Uit de beschikbare experimenteele resultaten, zoowel voor $r = 0$ als voor $r \neq 0$, blijkt in zooverre overeenstemming met de theorie dat *er geen invloed van* t_ϵ/t *of* $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ *valt te constateeren;* bovendien blijkt niet dat de grootte van r invloed uitoefent

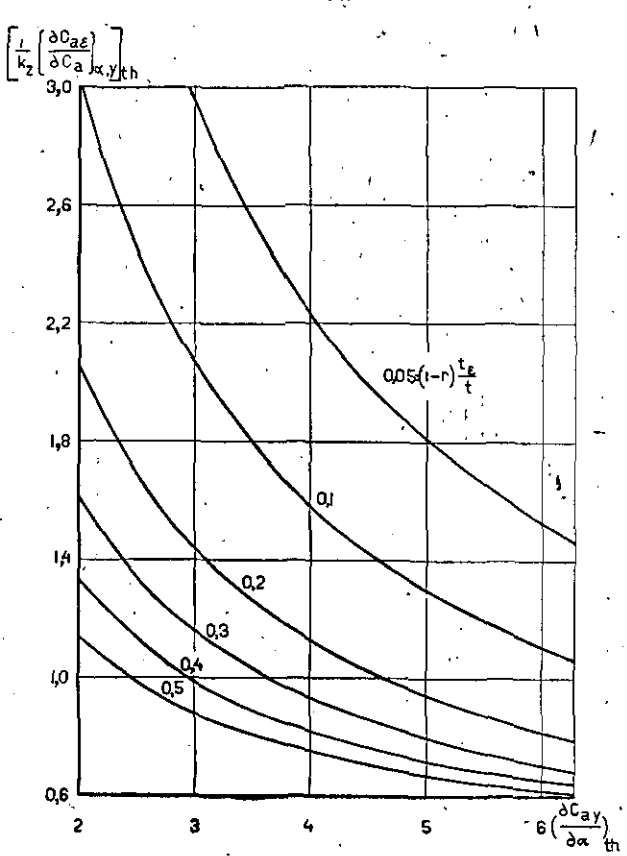
[11]) Hierbij zijn ook 2 uit proeven van N.A.C.A.-report 633 bij $\epsilon = 10°$ en $\epsilon = 20°$ volgende waarden (vgl. tabel 3, no. 3 en 4).

op d_ϵ/t_ϵ. Blijkens de proeven hangt de waarde van d_ϵ/t_ϵ in eerste instantie af van de grootte van ϵ. Voor $\epsilon \leqslant 10^0$ varieert d_ϵ/t_ϵ tusschen 0,24 en 0,35; voor $\epsilon = 30^0$ tot 45^0 werd ongeveer gevonden $d_\epsilon/t_\epsilon = 0{,}44$ en voor $\epsilon = 50^0$ tot 60^0 is $d_\epsilon/t_\epsilon =$ ca. 0,48. Voor de groote roerhoeken kan men verwachten dat door loslatingsverschijnselen belangrijk grootere dan de theoretische waarden van d_ϵ/t_ϵ zullen worden gemeten. Echter ook bij kleine roerhoeken en $r = 0$ blijken groote verschillen met de theorie te bestaan en wel zijn hier de gemeten waarden soms belangrijk kleiner dan de theoretische.

Voor practische toepassing is in fig. 11

$$\left[\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}\right]_{th}$$

als functie van $(1-r)\ t_\epsilon/t$ en $\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$ gegeven [12]).



Teekening N.L.L.

Fig. 11. Theoretische waarden van $\dfrac{1}{k_z}\left(\dfrac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$.
(Voor k_z zie fig. 10).

4. Samenvatting.

Het in dit rapport besproken onderzoek beoogt de vaststelling van de grootte en de verdeeling van de luchtkrachten die op vastgehouden vleugels of staartvlakken ontstaan door roer- of klepuitslag. Het onderzoek bestaat uit een theoretisch deel (punt 2) en een vergelijking van de theoretische met de uit experimenten afgeleide resultaten (punt 3).

De gezochte aerodynamische grootheden kunnen in bepaalde differentiaalquotiënten worden uitgedrukt (21.5/8). De bepaling van deze differentiaalquotiënten vormt het eigenlijke doel van dit onderzoek. Het theoretische deel maakt gebruik van de door Küssner en Schwarz (*lit.* 1) voor de 2-dimensionale strooming om trillende vleugels gevonden resultaten en wel die voor het geval dat de spleet tusschen vast vlak en roer niet wordt doorstroomd (gesloten spleet). De hieruit voor de stationnaire strooming afgeleide resultaten (punt 21) blijken op zeer eenvoudige wijze te kunnen worden benaderd, wanneer de voor den werkelijken vleugel geldende grootheden worden vergeleken met die voor een vergelijkingsvleugel waarbij het roer geen aerodynamische balanceering bezit ($r = 0$) en de roerkoorde gelijk is aan het achter de roeras gelegen deel van de werkelijke roerkoorde (punt 22, fig. 4 en 5 [13])).

De verdeeling van de belasting wordt bij een driedimensionale strooming blijkens (21.5/8) mede bepaald door $\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}$.
Het verloop van deze grootheid langs de spanwijdte volgt uit een berekening van de circulatieverdeeling voor de geometrische invalshoeken

$$\Delta\alpha_y = \frac{d\alpha}{d\epsilon}$$

met als verband tusschen den effectieven invalshoek α_a en c_a

$$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha_a} = 2c_1 \text{ (theoretisch is } c_1 = \pi).$$

De in punt 3 besproken vergelijking van de theoretische met de uit experimenten afgeleide resultaten leidt tot de volgende conclusies:

1e. De uit de metingen afgeleide waarden van c_1 varieeren tusschen $0{,}64\ \pi$ en $1{,}035\ \pi$. Indien geen nauwkeuriger gegevens bekend zijn, wordt het gebruik van de gemiddelde waarde $c_1 = 0{,}87\ \pi$ aanbevolen (punt 33).

2e. De uit de metingen volgende waarden van $\dfrac{d\alpha}{d\epsilon}$ worden globaal weergegeven door (34.1). De overeenstemming met de theorie is alleen goed in het gebied $0{,}25 \leqslant (1-r)t_\epsilon/t \leqslant 0{,}6$ terwijl de spreidingen vrij groot zijn (fig. 8).

3e. De uit de metingen volgende waarden van $\dfrac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$ en $\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}$ worden voor $\epsilon <$ circa 15^0 gegeven door (34.2) en de overeenkomstige formule

$$\frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon} = f\,\frac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}\,\frac{d\alpha}{d\epsilon}.$$

Hierin worden $\dfrac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ $\left(\text{of } \dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}\right)$ berekend op de bovenomschreven wijze met de werkelijke waarde van c_1 of, bij onbekendheid daarvan, $c_1 = 0{,}87\ \pi$. $\dfrac{d\alpha}{d\epsilon}$ wordt berekend volgens (34.1). f is een correctiefactor die samenhangt met de grootte van b_ϵ/b; hij bedraagt $f = 1$ voor een vleugel met roer over de volle spanwijdte ($b_\epsilon/b = 1$, symmetrische roeruitslag) en $f = 0{,}8$ voor vleugels met rolroeren waarvoor $b_\epsilon = (0{,}4$ à $0{,}5)b$ is. De kennis over f is nog zeer onvolledig (punt 34).

4e. De uit de proeven volgende waarden van $(d/t)_y$ zijn tot $\epsilon = 45$ à 60^0 in goede overeenstemming met de theoretische waarden, behalve voor een aantal proeven met abnormale roerasligging ($z_a/t \geqslant 0{,}2$) en een proef met kleine b_ϵ/b ($= 0{,}2$), waarvoor de theorie niet betrouwbaar is. Indien geen experimenteele gegevens bekend zijn, kan $(d/t)_y$ voor $b_\epsilon/b >$ circa 0,4 en $z_a/t < 0{,}2$ worden gelijkgesteld aan de theoretische waarde voor den vergelijkingsvleugel (zie fig. 9). Voor kleine b_ϵ/b levert de theorie te groote waarden (punt 21 en 35).

5e. Voor vleugels met aerodynamisch niet-gebalanceerde roeren ($r=0$) bestaat een bevredigende overeenstemming tusschen de theoretische en experimenteele waarden van

$$\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$$

---

12) Voor $\left(\dfrac{\partial c_{ay}}{\partial \alpha}\right)_{th} \rightarrow 0$ en voor $(1-r)\ t_\epsilon/t \rightarrow 0$ geldt $\left[\dfrac{1}{k_z}\left(\dfrac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}\right]_{th} \rightarrow \infty$.

13) De theoretische waarde van k_z is onbekend, behalve $k_z = 1$ voor $r = 0$.

wanneer $\epsilon \leqslant 15$ à 30^0 en $b_\epsilon/b \geqslant 0{,}4$ is. Voor kleine b_ϵ/b levert de theorie belangrijk te hooge waarden. Voor vleugels met aerodynamisch gebalanceerde roeren blijken de experimenteele waarden te worden gegeven door ($\epsilon \leqslant 15$ à 30^0)

$$\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,\,y} = k_z \left[\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}\right]_{th}. \quad ^{13)}$$

De grootheid tusschen [ ], die betrekking heeft op den vergelijkingsvleugel, is gegeven in fig. 11. De uit proeven bepaalde correctiefactoren k_z varieeren tusschen $1 + 0{,}9r$ en $1 + 3r$ (*fig. 10*); de kennis over k_z is echter nog zeer onvolledig (punt 36).

6e. De uit proeven bepaalde waarden van $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,\,y}$ varieeren voor $\epsilon < 10$ à 20^0 tusschen 0,78 en 1,28 maal de theoretische waarden, welke laatste gelijk zijn aan k_m ($= 1 + 0{,}9\ r$) maal de theoretische waarden voor den vergelijkingsvleugel. Voor grootere waarden van ϵ nemen zij sterk toe (punt 36).

7e. De experimenteele waarden van d_ϵ/t_ϵ zijn practisch uitsluitend afhankelijk van de grootte van ϵ. De spreidingen zijn vrij aanzienlijk; enkele globale cijfers zijn gegeven in punt 36.

5. Notaties.

b	spanwijdte (fig. 3);
b_ϵ	dubbele roerbreedte aan een zijde van het symmetrievlak (fig. 3);
c_1	helft van den draagkrachtsgradiënt bij tweedimensionale strooming;
c_a, c_z	gemiddelde draagkrachts- resp. normaalkrachtscoëfficiënt over het oppervlak O_ϵ;
$c_{a\epsilon}$, $c_{z\epsilon}$	gemiddelde draagkrachts- resp. normaalkrachtscoëfficiënt van het roer, betrokken op de roerkoorde;
c_m	momentencoëfficiënt over het oppervlak O_ϵ voor het moment om den vleugelneus bij een rechthoekigen vleugel;
$c_{m\epsilon}$	momentencoëfficiënt van het roer, betrokken op de roerkoorde, voor het moment om den neus van een rechthoekig roer;
c_{mr}	idem voor het moment om de roeras;
d	afstand van het drukpunt der belasting door roeruitslag ϵ over het oppervlak O_ϵ achter den vleugelneus bij een rechthoekigen vleugel;
d_ϵ	afstand van drukpunt der roerbelasting door roeruitslag ϵ achter den neus van het roer;
f	correctiefactor ter berekening van $\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$ en $\frac{\partial c_{ay}}{\partial \epsilon}$ (punt 34);
k_m, k_z	correctiefactor ter berekening van $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ resp. $\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ (fig. 4, 10);
r	ligging van de roeras achter den roerneus als fractie van de roerkoorde (fig. 3,6);
t	vleugelkoorde (fig. 3);
t_ϵ	roerkoorde (fig. 3,6);
y	coördinaat in de richting van de spanwijdte (fig. 3);
y	als index: duidt aan dat de geïndiceerde grootheid betrekking heeft op de doorsnede y;
z_a	coördinaat van de roeras loodrecht op het vleugelvlak (fig. 6);
O_ϵ	oppervlak van het deel van de vleugelhelft voorzien van een roer (fig. 3);
α	invalshoek;
ϵ	roeruitslag (fig. 1);
λ	*vleugelslankheid;*
τ	verhouding van eindkoorde tot middenkoorde bij trapeziumvormigen vleugel;
φ	arc cos $(2t_\epsilon/t - 1)$;
$\Delta(\ldots)$	verandering van de grootheid (. . .) door roeruitslag ϵ bij constante α;
Φ_1	$= \pi - \varphi + \sin\varphi$;
Φ_5	$= \sin\varphi\,(1 - \cos\varphi)$;
Φ_8	$= (\pi - \varphi)\,(2\cos\varphi - 1) + \sin\varphi\,(2 - \cos\varphi)$;
Φ_{10}	$= \Phi_5 \,.\, \Phi_{31}$;
Φ_{13}	$= \mathrm{tg}\,\varphi/2$;
Φ_{15}	$= \mathrm{tg}\,\varphi/2 - 2\sin\varphi$;
Φ_{18}	$= -\Phi_{13}\,[(\pi - \varphi)(1 + 2\cos\varphi) - \sin\varphi\cos\varphi]$;
Φ_{21}	$= -2\,(\cos\varphi + \ln\sin^2\varphi)$;
Φ_{31}	$= \pi - \varphi - \sin\varphi$;
Φ_{35}	$= 2\sin^2\varphi = 8\,\frac{t_\epsilon}{t}\left(1 - \frac{t_\epsilon}{t}\right)$;
$\frac{d\alpha}{d\epsilon}$	quotiënt van de invalshoekveranderingen $\Delta\alpha_y$ en de roeruitslagen ϵ die gelijke waarden Δc_{ay} opleveren;
$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial c_a}{\partial \epsilon}$	draagkrachtsgradiënten, betrokken op het oppervlak O_ϵ;
$\left(\frac{\partial i}{\partial j}\right)_n$	partieel differentiaalquotiënt $\frac{\partial i}{\partial j}$ bij constante n.

6. Literatuuropgave.

1. Küssner, H.G. und Schwarz, L. Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder. Luftfahrtforschung Bd. 17 (1940), S. 337.
2. Greidanus, J. H. De berekening van de kritische snelheid voor onstabiele trillingen van vliegtuigvleugels. Verslagen en Verhandelingen N.L.L. deel X (1941), blz. 40—43.
3. Glauert, H. Theoretical relationships for an aerofoil with hinged flap. R. and M. 1095 (1927).
4. Glauert, H. The elements of aerofoil and airscrew theory. Cambridge University Press, 1926 (Chapter XI).

Afgesloten Mei 1943.

Report S. 276.

The air loads on stationary wings or tail surfaces due to displacements of the rudders or flaps.

Summary.

The magnitude and distribution of the air loads on wings *or tail surfaces due to displacements of rudders or flaps* are investigated. The investigation consists of a theoretical part (no. 2) and a comparison of the theoretical results with those derived from experiments (no. 3).

The theoretical part is based on the results published by Küssner *and* Schwarz *(ref. 1)* [14] *for the two dimensional flow* around oscillating wings; the results found for the case that

[14]) See list of references, no. 6.

Bericht S. 276.

Die Luftkräfte auf festgehaltenen Flügeln oder Leitwerken bei Ruder- oder Klappenausschlag.

Zusammenfassung.

Es werden die Grösze und Verteilung der Luftkräfte auf festgehaltenen Flügeln oder Leitwerken bei Ruder- oder Klappenausschlag untersucht. Die Untersuchung besteht aus einem theoretischen Teil (Nr. 2) und einer Vergleichung der theoretischen Werte mit den aus Versuchen folgenden Ergebnissen (Nr. 3).

Der theoretische Teil geht aus von den von Küssner und Schwarz [1] [15]) veröffentlichten Ergebnissen für die zwei-

[15]) Siehe Literaturverzeichnis Nr. 6.

there is no flow through the slot between the wing and the rudder, are used. *It appears that the results which apply to the* stationary case, can be approximated in a very simple way by comparing the quantities valid for the actual wing with those obtained for a wing having an aerodynamically unbalanced rudder of a reduced chord, equal to the part $(1-r)t_\epsilon$ of the actual rudder chord t_ϵ that is situated behind the rudder axis (no. 22, fig. 2b and 4). This approximation may also be applied to the three dimensional flow (no. 22, fig. 4). In the latter case the load distribution is also determined by $\frac{\partial c_{ay}}{\partial\alpha}$; see equations (21.1 and 5/8). This quantity can be determined from a calculation of the distribution of the circulation around the wing for the geometrical angles of attack $\triangle\alpha_y = \frac{d\alpha}{d\epsilon}$, which are equivalent with a rudder displacement $\epsilon = 1$. The relation between the effective angle of attack α_a and the lift coëfficiënt c_a is $\partial c_a/\partial\alpha_a = 2c_1$.

If the desired quantities are derived from the curves given in fig. 5, which are valid for the wing with substituting unbalanced rudder with reduced chord $(1-r)t_\epsilon$, — from which $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ and $\left(\frac{\partial c_m}{\partial\epsilon}\right)_{c_a}$ are also a good approximation of the actual values— $\frac{\partial c_{ay}}{\partial\epsilon}$ and $(d/t)_y$ follow from (21.1) and (21.5), whereas $\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ and $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ follow from (21.6) and (21.7), multiplied by correction factors k_z, which is not furnished by theory, resp. $k_m = 1 + 0{,}9\,r$ (fig. 4). See also fig. 9 and 11.

From the comparison of the theoretical results with those derived from experiments (table 2 and 3), the following conclusions can be drawn:

1st. The practical value of c_1 varies between $0{,}64\pi$ and $1{,}035\pi$. In the absence of more definite data the average value $c_1 = 0{,}87\pi$ may be used.

2nd. The practical values of $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ are roughly given by equation (34.1). *The agreement with theory is only good for* $0{,}25 \leqslant (1-r)t_\epsilon/t \leqslant 0{,}6$ whereas the experimental scatter is fairly large (fig. 8).

3rd. The practical values of $\frac{\partial c_a}{\partial\epsilon}$ and $\frac{\partial c_{ay}}{\partial\epsilon}$ are given by (34.2) and the analogous formula

$$\frac{\partial c_{ay}}{\partial\epsilon} = f\,\frac{\partial c_{ay}}{\partial\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\epsilon}.$$

In these formulas $\frac{\partial c_a}{\partial\alpha}\left(\text{or } \frac{\partial c_{ay}}{\partial\alpha}\right)$ are computed as described above with the actual value of c_1; $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ is computed from (34.1) and f is a correction factor depending upon the ratio $b_\epsilon/b : f = 1$ if the rudder and wing have equal spans ($b_\epsilon/b = 1$, symmetrical rudder displacement), $f = 0{,}8$ for wings with ailerons having $b_\epsilon = (0{,}4$ tot $0{,}5)b$. The experimental evidence concerning f is, however, very incomplete (see table 4).

4th. The practical values of d/t agree well with the theoretical values (fig. 9) up to rudder displacements ϵ of 45^0 to 60^0, except for abnormally large values of $z_a/t\,(\geqslant 0{,}2$; see fig. 6a, j) and for small values of $b_\epsilon/b\,(= 0{,}2)$. For the cases mentioned as exceptions the theoretical results, however, are unreliable.

5th. For wings with aerodynamically unbalanced rudders a good agreement between the theoretical (fig. 11, $r = 0$) and experimental values of $\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ is found when $b_\epsilon/b \geqslant 0{,}4$, up to $\epsilon = 15^0$ to 30^0. For wings with aerodynamically balanced rudders the experimental values are given by

$$\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y} = k_z\left[\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}\right]_{th},$$

see fig. 10 and 11. The expression between [ ] represents the theoretical value of $\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ for the wing with substituting rudder discussed above. The experimental evidence concerning k_z is rather unsatisfactory (fig. 10).

6th. The experimental values of $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ vary for $\epsilon = 10^0$

dimensionale Strömung um schwingende Flügel mit aerodynamisch *ausgeglichenem Ruder; die Ergebnisse* für den Fall des nicht-durchströmten Spaltes zwischen Flügel und Ruder werden benutzt. Die für stationäre Strömung hieraus errechneten Ergebnisse (Nr. 22) können in sehr einfacher Weise approximiert werden, wenn man die für den wirklichen Flügel gültigen Gröszen vergleicht mit denen für Flügel mit aerodynamisch nicht ausgeglichenem Ruder von reduzierter Tiefe $(1-r)t_\epsilon$, gleich der Tiefe des hinter der Ruderachse liegenden Teiles des wirklichen Ruders (Nr. 22, Abb. 2b und 4). Die Belastungsverteilung in dreidimensionaler Strömung wird mitbestimmt durch $\frac{\partial c_{ay}}{\partial\alpha}$; siehe Gl. (21.1 und 5/8). Diese Grösze kann durch Berechnung der Zirkulationsverteilung für die geometrischen Anblasewinkel $\triangle\,\alpha_y = \frac{d\alpha}{d\epsilon}$ bestimmt werden; dabei ist $\partial c_a/\partial\alpha_a = 2c_1$ (α_a = effektiver Anblasewinkel).

Errechnet man die gesuchten Gröszen mit Hilfe der in Abb. 5 gegebenen Kurven, die für den Flügel mit nicht ausgeglichenem Vergleichsruder — Rudertiefe $(1-r)t_\epsilon$ — gültig sind — und wovon $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ und $\left(\frac{\partial c_m}{\partial\epsilon}\right)_{c_a}$ auch eine gute Annäherung an die wirklichen Gröszen darstellen — dann folgen $\frac{\partial c_{ay}}{\partial\epsilon}$ und $(d/t)_y$ aus (21.1) bzw. (21.5), während $\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ und $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}$ aus (21.6) bzw. (21.7) *folgen, wenn man diese* Ausdrücke multipliziert mit dem Verbesserungsfaktor k_z — der von der Theorie nicht geliefert wird — bzw. $k_m = 1 + 0{,}9r$. Siehe auch Abb. 9 und 11.

Die in Nr. 3 besprochene Vergleichung der theoretischen Werte mit den aus Versuchen gewonnenen Ergebnissen führt zu *folgenden Schlüssen (Siehe Tafel 2 und 3):*

1. Der praktische Wert von c_1 schwankt zwischen $0{,}64\,\pi$ und $1{,}035\,\pi$. Die Benutzung des Mittelwertes $0{,}87\pi$ wird empfohlen falls keine genaueren Angaben vorliegen.

2. Der praktische Wert von $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ wird überschläglich gegeben durch (34.1). Die Übereinstimmung mit der Theorie is nur gut für $0{,}25 \leqslant (1-r)t_\epsilon/t \leqslant 0{,}6$ während ziemlich grosze Streuungen vorliegen (Abb. 8).

3. Die praktischen Werte von $\frac{\partial c_a}{\partial\epsilon}$ und $\frac{\partial c_{ay}}{\partial\epsilon}$ folgen aus (34.2) und der ähnlich gebauten Formel

$$\frac{\partial c_{ay}}{\partial\epsilon} = f\,\frac{\partial c_{ay}}{\partial\alpha}\,\frac{d\alpha}{d\epsilon}.$$

Dabei werden $\frac{\partial c_a}{\partial\alpha}$ oder $\frac{\partial c_{ay}}{\partial\alpha}$ in der oben beschriebenen Weise errechnet mit dem wirklichen Wert für c_1, $\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ wird gemäsz (34.1) genommen und f ist ein Verbesserungsfaktor, abhängig vom Verhältnis b_ϵ/b : $f = 1$ für $b_\epsilon/b = 1$ und symmetrischen Ruderausschlag; $f = 0{,}8$ für Flügel mit Querruder, wofür $b_\epsilon/b = 0{,}4$ bis $0{,}5$. Die experimentellen Unterlagen für f sind aber sehr dürftig (Siehe Tafel 4).

4. Die Übereinstimmung zwischen den praktischen und theoretischen (Abb. 9) Werten von d/t bis Ruderausschläge $\epsilon = 45^0$ bis 60^0 ist gut, ausgenommen bei einigen Versuchen mit ausserordentlich groszen z_a/t-Werten ($\geqslant 0{,}2$; Siehe Abb. 6a, j) und einem Versuch mit kleinem b_ϵ/b ($= 0{,}2$), wofür die Theorie unzuverlässige Ergebnisse liefert.

5. Für Flügel mit aerodynamisch nicht ausgeglichenem Ruder besteht eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den praktischen und theoretischen (Abb. 11, $r = 0$) Werten von

$$\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y},$$

wenn $b_\epsilon/b \geqslant 0{,}4$ ist, bis $\epsilon = 15^0$ bis 30^0. Für Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder folgen die praktischen Werte aus

$$\left(\frac{\partial c_{z\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y} = k_z\left[\frac{1}{k_z}\left(\frac{\partial c_{a\epsilon}}{\partial c_a}\right)_{\alpha,y}\right]_{th},$$

wobei der Ausdruck zwischen [ ] den theoretischen Wert für den obenerwähnten Flügel mit Vergleichsruder darstellt (Abb. 11) und k_z ein aus den Versuchen bestimmter Verbesserungsto 20° between 0,78 and 1,28 times the theoretical values. For larger values of ϵ they increase rapidly.

7th. The experimental values of d_ϵ/t_ϵ are practically only dependent upon ϵ. The scatter is fairly large; average values are given in the last but one paragraph of no. 36.

Notations:

c_1 one half of lift gradient for 2-dimensional flow;

$c_a^\cdot, c_z^\cdot, c_m^\cdot$ average lift, normal force and moment coefficients over the area O_ϵ (fig. 3); $c_m^\cdot$ refers to moment about leading edge;

$c_{a\epsilon}, c_{z\epsilon}, c_{m\epsilon}, c_{mr}$ same coefficients over rudder area; $c_{m\epsilon}^\cdot$ refers to moment about rudder nose, c_{mr} to moment about rudder axis;

$d(d_\epsilon)$ distance of center of pressure of air load, due to rudder displacement ϵ, on area O_ϵ (rudder area), aft of leading edge of wing (rudder);

y as suffix: refers to wing section y;

λ aspect ratio of wing;

$\triangle(\ldots)$ change of quantity $(\ldots)$ by rudder displacement ϵ;

$\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ ratio of changes of angle of attack $\triangle\alpha_y^\cdot$ and rudder displacements ϵ, causing equal changes $\triangle c_{ay}$;

$\frac{\partial c_a^\cdot}{\partial\alpha}, \frac{\partial c_a^\cdot}{\partial\epsilon}$ average lift gradients over area O_ϵ;

$\left(\frac{\partial i}{\partial j}\right)_n$ partial differential quotient $\frac{\partial i}{\partial j}$ when n remains constant.

For further notations see no. 5 and fig. 1, 3 and 6.

faktor ist (Abb. 10), dessen Wert allerdings wegen Streuungen nicht genau angegeben werden kann. Weitere Versuche sind daher erwünscht.

6. Der praktische Wert von $\left(\frac{\partial c_{m\epsilon}^\cdot}{\partial c_a^\cdot}\right)_{\alpha,y}$ liegt zwischen 0,78 und 1,28 des theoretischen Wertes bis ϵ = 10° bis 20°. Für grössere Ruderausschläge steigt er stark an.

7. Der praktische Wert von d_ϵ/t_ϵ ist nur von ϵ abhängig. Die Streuungen sind allerdings ziemlich bedeutend. Einige mittlere Werte sind in Nr. 36 gegeben worden.

Formelzeichen.

c_1 Hälfte des Auftriebsgradienten für zweidimensionale Strömung;

$c_a^\cdot, c_z^\cdot, c_m^\cdot$ mittlere Auftriebs-, Normalkrafts- und Momentenbeiwerte der Fläche O_ϵ (Abb. 3); $c_m^\cdot$ gilt für das Moment um die Flügelnase;

$c_{a\epsilon}^\cdot, c_{z\epsilon}^\cdot, c_{m\epsilon}^\cdot, c_{mr}^\cdot$ desgleichen für das Ruder; $c_{m\epsilon}$ gilt für das Moment um die Rudernase, c_{mr} für das Moment um die Ruderachse;

$d(d_\epsilon)$ Abstand des Druckpunktes der Luftkräfte durch Ruderausschlag auf der Fläche O_ϵ (Ruderfläche) hinter dem Flügel(Ruder)nase;

y als Zeiger deutet auf den Flügelschnitt y;

λ Seitenverhältnis des Flügels;

$\triangle(\ldots)$ Änderung der Grösze $(\ldots)$ durch Ruderausschlag;

$\frac{d\alpha}{d\epsilon}$ Verhältnis der Anblasewinkeländerungen $\triangle\alpha_y^\cdot$ und Ruderausschläge, die gleiche Werte $\triangle c_{ay}^\cdot$ liefern;

$\frac{\partial c_a^\cdot}{\partial\alpha}, \frac{\partial c_a^\cdot}{\partial\epsilon}$ mittlere Auftriebsgradienten für die Fläche O_ϵ;

$\left(\frac{\partial i}{\partial j}\right)_n$ partielles Differentialquotient $\frac{\partial i}{\partial j}$ bei gleichbleibendem n.

Siehe für weitere Formelzeichen Nr. 5 und Abb. 1, 3 und 6.

RAPPORT M. 1015.

De waterstofperoxyde-concentratie bij de D.V.L.-corrosiebeproevingsmethode (DIN 4853). Deel I.

door

Dr. TH. A. H. M. DOBBELMANN.

Overzicht.

Bij de D.V.L.-corrosiebeproevingsmethode voor lichte metalen bij zeewater- en zeeklimaat-condities, wordt gebruik gemaakt van een badsamenstelling, z.g. kunstmatig zeewater, waarin keukenzout (NaCl) voor 3% en waterstofperoxyde (H_2O_2) voor 0,1% aanwezig zijn.
Door proefnemingen is nagegaan hoe de concentratie van de H_2O_2, die zooals bekend is, een weinig stabiele verbinding is, verloopt.
Dit verloop werd onderzocht zoowel bij tegenwoordigheid als bij afwezigheid van de proefmonsters. Tevens werd het verband tusschen de H_2O_2-concentratie, die gedurende de proef sterk kan dalen, en de metaalaantasting (corrosie) onderzocht, om na te gaan in hoeverre de concentratie door bijvullingen constant moet worden gehouden.

Indeeling.

1. Inleiding.

In October 1930 publiceerde E.K.O. Schmidt een door hem en eenige medewerkers bij de D.V.L. (Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt) ontworpen en uitgewerkte nieuwe corrosiebeproevingsmethode voor lichte metalen (lit. 1).

De bepoevingsmethoden volgens Mylius (lit. 2), die tot dusverre de belangrijkste waren om de corrosiebestendigheid van aluminiumlegeeringen op korten termijn te onderzoeken, werden na 1930 meer en meer verlaten ten gunste van de nieuwe D.V.L.-methoden.

Bij de D.V.L.-methoden (lit. 3) worden meerdere proefstaafjes in een aantastend milieu gebracht en gedurende de aantasting wordt de achteruitgang der mechanische eigenschappen gecontroleerd. Deze achteruitgang is het criterium voor de corrosiebestendigheid. Op het belang van de contrôle der mechanische eigenschappen had Czochralski reeds in 1927 uitdrukkelijk gewezen (lit. 4).

De belangrijkste en meest toegepaste van de drie D.V.L.-methoden, genormaliseerd in DIN-blad, 4853, is de roerproef in 3% NaCl waaraan 0,1% H_2O_2 is toegevoegd.

Aluminium en aluminiumlegeeringen zijn in het algemeen tegen atmospherische omstandigheden goed bestendig, zelfs bestendiger dan staal. Het in aanraking brengen met zeewater is voor sommige van deze legeeringen evenwel veel gevaarlijker dan voor staal, omdat zich dan zeer ernstige corrosieverschijnselen kunnen voordoen, die het metaal in korten tijd verteren. Bovendien kunnen nog inter- en intra-kristallijne aantastingen voorkomen, die er *aan het oppervlak oogenschijnlijk weinig alarmeerend* uitzien, maar in werkelijkheid de sterkte van het materiaal vernietigen. De D.V.L.-methoden (DIN 4853) trachten dan ook in de eerste plaats de corrosiebestendigheid te bepalen van aluminium en aluminiumlegeeringen tegen zeewater.

Het is bekend, dat H_2O_2, die een der bestanddeelen van het D.V.L.-bad is, een weinig stabiele verbinding is en daarom moet volgens DIN 4853 de H_2O_2-concentratie van het bad iedere 24 uur *worden gecontroleerd en zoonoodig op uitgangssterkte* worden teruggebracht. Deze bezwaren waren aanleiding om de badsamenstelling, speciaal het gedrag van de H_2O_2-concentratie, nader te bestudeeren.

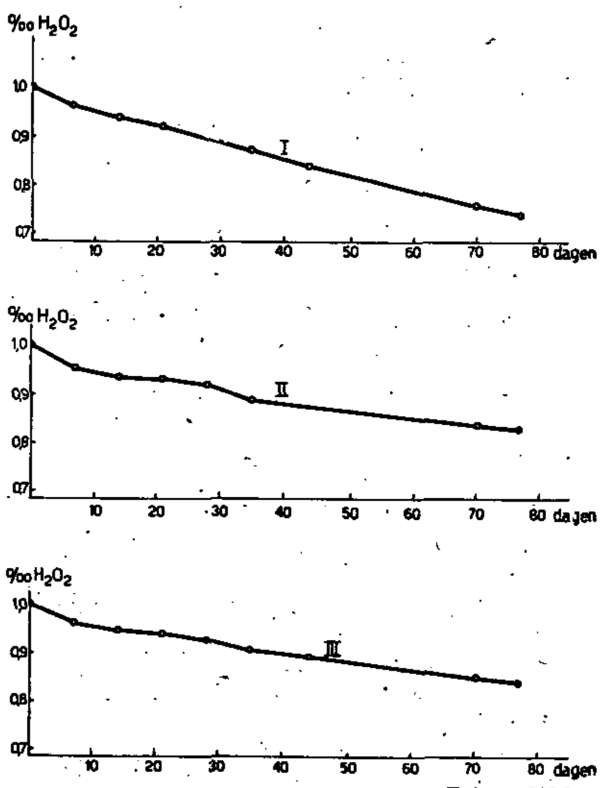
Het aantastende milieu, het z.g. „D.V.L.-bad", was bij den aanvang van de proeven steeds, overeenkomstig DIN 4853, als volgt samengesteld:

NaCl	180 gr.	(= 3 %).
H_2O_2 15%	40 cc.	(= 1‰).
aq. dist.	ad. 6000 cc.	

2. De H_2O_2-concentratie van het D.V.L.-bad, waarin geen proefmonsters zijn geplaatst.

Ten eerste moest worden nagegaan in hoeverre de H_2O_2-concentratie van het versche D.V.L.-bad, bij afwezigheid van proefmonsters, constant blijft. Om dit vast te stellen werd dagelijks de H_2O_2-concentratie van het normale D.V.L.-bad getitreerd met natrium-thiosulfaat 0,1 n. Ten tweede werd de invloed van het roeren, dat geschiedt met ca. 100 omw/min, onderzocht. Ten derde werd, om een eventueelen invloed van de mechanische botsingen van de H_2O_2 tegen de proefplaten niet te veronachtzamen, een proef ingezet waarbij, inplaats van metalen proefplaten, nu glazen proefplaten van dezelfde afmetingen in het bad waren geplaatst.

Het resultaat was; zooals in fig. 1 grafisch is



Teekening N.L.L.

Fig. 1. Achteruitgang van de H_2O_2-concentratie van het D.V.L.-bad, bij afwezigheid van proefmonsters, gedurende 80 dagen.
I. Stilstaand vloeistofmilieu.
II. Geroerd vloeistofmilieu.
III. Geroerd vloeistofmilieu en mechanische botsing tegen glasplaten.

voorgesteld, dat de samenstelling van het D.V.L.-bad, al of niet geroerd met of zonder proefplaten van glas, nagenoeg constant is. Immers werd geconstateerd, dat de H_2O_2-concentratie na 80 dagen ca. 0,8‰ bedroeg (in plaats van 1‰). Daar nu bij de normale corrosiebeproeving, nog afgezien van eventueele tusschentijdsche ververschingen, het bad 1 tot 4 weken in gebruik is, kan deze concentratiedaling als onbeteekenend worden beschouwd. De geringe afwijkingen tusschen de uitkomsten van de drie verschillende proeven zijn van ondergeschikt belang en kunnen aan toevallige omstandigheden te wijten zijn.

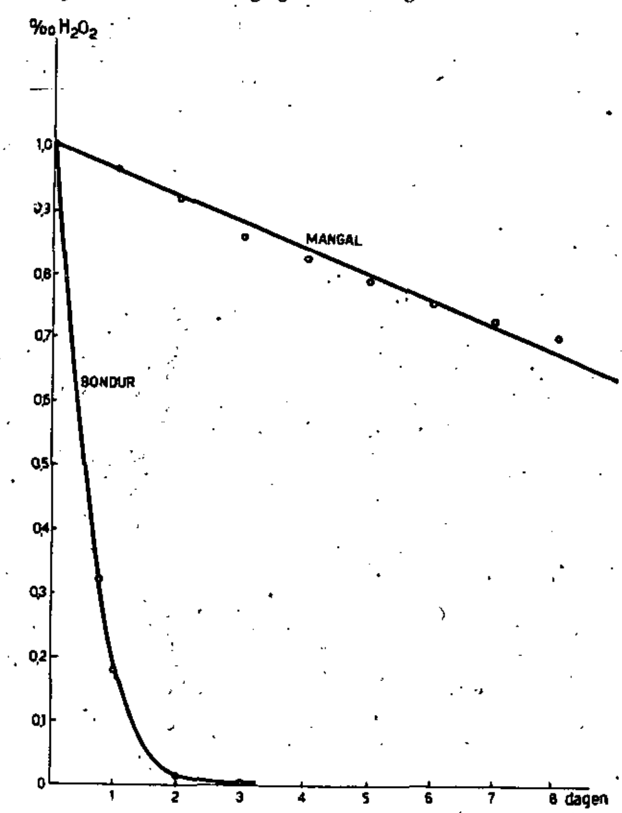
3. De H_2O_2-concentratie van het D.V.L.-bad gedurende de beproeving van twee verschillende lichte legeeringen.

Het is bekend, en ook niet anders te verwachten, dat de H_2O_2-concentratie van het D.V.L.-bad terugloopt bij aanwezigheid van de proefmonsters. Naar aangenomen wordt, ontleedt zich de H_2O_2 hierbij in zuurstof en water volgens de reactie:

$$H_2O_2 \longrightarrow H_2O + O$$

De vrijkomende zuurstof versnelt de aantasting van het metaal aanzienlijk. Dit verbruik moet volgens DIN 4853 dagelijks worden aangevuld.

Om nu te onderzoeken hoeveel H_2O_2 door twee verschillende lichte legeeringen wordt verbruikt, zijn twee proeven ingezet, waarbij in het eene bad Bondur (Al-Cu-Mg type) en in het andere bad het veel bestendiger Mangal (Al-Mn type) beproefd werden. Teneinde het H_2O_2-concentratie-verloop over een langeren tijd dan 24 uur te volgen, werden de dagelijksche bijvullingen van het bad achterwege gelaten. Het resultaat van deze twee proeven is weergegeven in fig. 2.



Teekening N.L.L.

Fig. 2. Achteruitgang van de H_2O_2-concentratie van het D.V.L.-bad bij aanwezigheid van twee verschillende legeeringstypen, nl. Mangal (Al-Mn) en Bondur (Al-Cu-Mg) gedurende 8 dagen.

Het relatief snelle H_2O_2-verbruik bij Bondur is van dien aard, dat de beproevingscondities in beide gevallen onderling zeer sterk afwijken. Het Mangaal blijft nl. gedurende 24 uur in een bad van ca. 1‰, terwijl dit bij Bondur volstrekt niet het geval is.

Aangezien dus de beproevingscondities onderling niet overeenkomen, mogen ook de beproevingsresultaten niet onderling vergeleken worden.

Men moet bovendien bedenken, dat het H_2O_2-verbruik direct afhangt van de grootte van het metaaloppervlak, dat wordt beproefd. Volgens DIN 4853 mag men gaan tot 1 cm² metaaloppervlak op 6 cc D.V.L.-bad. Voorzichtigheidshalve werden de proeven genomen met 1 cm² metaal op 15 cc bad, hetgeen een veel gunstiger conditie is. De door DIN 4853 aangegeven verhouding van 1 cm² metaaloppervlak op 6 cc bad is dus voor Bondur en analoge legeeringen te klein.

Het groote verschil in verbuik van H_2O_2 tusschen de proef met Bondur en de proef met Mangal werd aanvankelijk toegeschreven aan de grootere corrodeerbaarheid van het Bondur. Onbeschermd Bondur is nl., zooals bekend is, in zeewater zeer onbestendig en in korten tijd geheel verteerd. Evenwel werd gevonden, dat het sterke H_2O_2-verbruik niet uitsluitend door de corrosiereactie zelf, maar ook door nevenreacties van een geheel anderen aard veroorzaakt werd. Op deze nevenreacties wordt in een afzonderlijk rapport, nl. deel II, ingegaan.

4. Het verband tusschen de aantastingssnelheid en de H_2O_2-concentratie.

Bij de aantasting van aluminiumlegeeringen in het D.V.L.-bad heeft men te maken met een reactiesnelheid in een heterogeen systeem. Hierbij kunnen zich evenwel complicaties voordoen, zoowel doordat de corrosieproducten zich gedeeltelijk op de proefplaatjes vasthechten en de verdere inwerking kunnen beïnvloeden, als ook doordat het metaal niet regelmatig wordt aangetast, zooals bij interkristallijne corrosieverschijnselen zeer duidelijk naar voren komt.

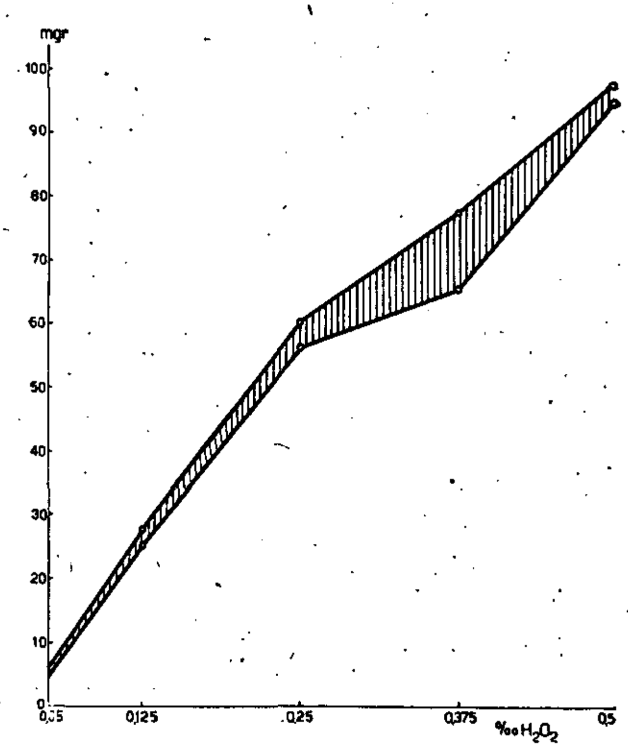


Fig. 3. Aantasting van Bondur-proefmonsters gedurende 6 uur, uitgedrukt in gewichtsverlies, bij verschillende H_2O_2-concentraties. De spreidingen worden door het gearceerde gebied aangegeven.

Om nu in groote lijnen het verband na te gaan tusschen de aantastingssnelheid en de H_2O_2-concentratie, werd de volgende proef genomen.

Vijf baden zijn bereid met verschillende H_2O_2-concentraties, nl. 0,05‰; 0,125‰; 0,25‰; 0,375‰; en 0,5‰. In ieder van deze vijf baden zijn drie Bondur-proefstaafjes gedurende 6 uur aan de inwerkig blootgesteld. Teneinde den invloed van den achteruitgang van de H_2O_2-concentratie gedurende de proef zoo gering mogelijk te houden, is weinig metaal t.o.v. de badhoeveelheid genomen, nl. 1 cm² metaal op 35 cc bad.

Geconstateerd werd, dat de gewichtsafname van het Bondur-proefmonster practisch proportioneel verloopt met de H_2O_2-concentratie (zie fig. 3).

De zich vormende laag van corrosieproducten blijkt dus, in tegenstelling met de oxydlaag, die ontstaat bij blootstelling aan de buitenlucht, geen corrosiebeschermende werking uit te oefenen. Aangezien de aantasting afhankelijk is van de H_2O_2-concentratie, moet deze gedurende den geheelen beproevingstijd constant worden gehouden, wil men de resultaten van verschillende metalen onderling kunnen vergelijken. Zelfs de aantastingen van één bepaalde legeering zullen uiteenloopen, indien niet voor eenzelfde verhouding tusschen metaaloppervlak en hoeveelheid bad wordt gezorgd en op dezelfde tijden het aanvullen van de H_2O_2-concentratie plaats vindt. Met deze punten is in de bepalingen van DIN 4853 onvoldoende rekening gehouden.

5. Samenvatting.

De in dit rapport besproken proeven hebben tot de volgende resultaten geleid:

1. Het D.V.L.-bad zonder lichtmetaal is onder normale laboratorium-omstandigheden zeer constant.
2. Het roeren van het D.V.L.-bad heeft geen ongunstigen invloed op de constantheid van de H_2O_2-concentratie.
3. De snelheid van het teruglooppen van de H_2O_2-concentratie gedurende de corrosiebeproeving van lichtmetaal is afhankelijk van het betreffende metaal.
4. De aantastingssnelheid gedurende de proef is afhankelijk van de H_2O_2-concentratie.
5. De zich in het D.V.L.-bad op het metaal vormende laag van corrosieproducten heeft geen corrosiebeschermende eigenschappen.
6. De in DIN 4853 genormaliseerde verhouding van metaaloppervlak tot badhoeveelheid (minstens 1 : 6) en de periodieke bijvulling met H_2O_2 iedere 24 uur, waarborgen geen reproduceerbare aantastingscondities, zoodat deze methode niet geschikt is om resultaten te verkrijgen, die onderling vergelijkbaar zijn.

6. Literatuurlijst.

1. *Schmidt, E. K. O.* (Berlin-Adlershof): Verfahren der Korrosionsprüfung. Zeitschrift für Metallkunde, Oktober *1930*, blz. *328-336*.
2. *Mylius, F.:* Die thermische Salzsäureprobe und die Reaktionsklassen für Aluminium. Zeitschrift für Metallkunde, 1922, blz. 233-244.
   Mylius, F.: Die oxydische Kochsalzprobe für Aluminium. Zeitschrift für Metallkunde, 1925, blz. 148-154 en Korrosion und Metallschutz 1, 1925, blz. 70-73.
3. *Normaalblad:* DIN 4853, März 1938, tevens afgedrukt in Zeitschrift für Metallkunde, Maart 1938, blz. 109-112.
4. *Czochralski, J. und Schmid, E.* (Frankfurt): Neue Wege der Korrosionsforschung. (Voordracht te Berlijn, gehouden in 1927).
   Zeitschrift für Metallkunde, Januari 1928, blz. 1-7.

Report M. 1015.

The hydrogenperoxide concentration in the D.V.L.-corrosion testing method (DIN 4853). Part I.

Summary.

The test ascertains how the hydrogenperoxyde concentration of the D.V.L. liquid reacts. It was found that the hydrogenperoxide concentration remains sufficiently constant in the absence of testing samples; that moving of the liquid has no influence on it.

In the presence of samples duralumin or analogous alloys, the hydrogenperoxide concentration rapidly weakens: when samples of alloy 60A and other non-cupriferous alloys are applied, hydrogenperoxyde concentrations deteriorates much more slowly.

The corrosion of the testingsample is dependent on the hydrogenperoxyde concentration. Seeing that this concentration is not constant, it is not admissible to compare the results, obtained with different types of alloys, with each other. The test is being continued.

Bericht M. 1015.

Die Wasserstoffperoxyd-Konzentration bei der D.V.L.-Korrosionprüfungsmethode (DIN 4853). Teil I.

Zusammenfassung.

Bei der Untersuchung wird nachgeprüft, wie die Wasserstoffperoxyde Konzentration der D.V.L.-Flüssigkeit sich verhält. Es wurde festgestellt, dasz die Wasserstoffperoxyd Konzentration bei Abwesenheit von Proben hinreichend konstant bleibt; dasz das Rühren keinen Einflusz darauf ausübt.

Bei Anwesenheit von Proben Bondur oder ähnlichen Legierungen läuft die Wasserstoffperoxyd Konzentration rasch zurück, bei Anwesenheit von Proben Mangal und anderen kupferfreien Legierungen läuft die Wasserstoffperoxyd Konzentration viel langsamer zurück.

Die Korrosion der Probe ist von der Wasserstoffperoxyd Konzentration abhängig. Weil diese Konzentration nicht konstant ist, ist es auch nicht gestattet, die bei den verschiedenen Legierungstypen erzielten Ergebnisse miteinander zu vergleichen. Die Untersuchung wird fortgesetzt.